AS
222
R632
SER.7
V.2
1941
PER

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA D'ITALIA

RENDICONTI

DELLA

CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

SERIE SETTIMA – VOLUME II
(in continuazione della Serie VI
della R. Accademia dei Lincei)

ROMA
REALE ACCADEMIA D'ITALIA
1941-XIX

Roma, 1941-XIX. — Dott. G. Bardi, Tipografo della Reale Accademia d'Italia.

Astronomia. — *Sopra alcune proprietà dinamiche dei sistemi stellari.* Nota (1) di LIVIO GRATTON, presentata dall'Accademico EMILIO BIANCHI.

1. In un'ampia Nota comparsa recentemente sull'« Astrophysical Journal » (2) CHANDRASEKHAR studia le proprietà dinamiche di un sistema stellare, in cui la distribuzione delle velocità obbedisce ad alcune restrizioni di natura analitica, corrispondenti ad ammettere che in ogni punto tale distribuzione segua la legge ellissoidale (*Teoria di Schwarzschild generalizzata*). La maggior parte dei risultati di CHANDRASEKHAR erano già stati ottenuti precedentemente, ma partendo da considerazioni meno generali. La possibilità di applicazioni al sistema galattico rende di notevole interesse lo studio di questi sistemi partendo da un punto di vista ancora più generale; questo studio forma appunto l'oggetto della presente Nota.

Conviene anzitutto ripetere le ipotesi fondamentali del problema, che sono quattro in tutto. Allo scopo, introduciamo un sistema di coordinate q_1, q_2, q_3, qualunque, tale che l'elemento lineare abbia la forma:

$$[1] \qquad ds^2 = \Sigma_{ik}\, g_{ik}\, q_i\, q_k\,,$$

con le g eventualmente funzioni del tempo t.

Noi considereremo dapprima un sistema di coordinate qualunque, anche non ortogonale; ciò non costituisce una generalizzazione rispetto al caso di CHANDRASEKHAR, in quanto evidentemente la particolare scelta del sistema di coordinate non può influire sulla natura del problema, ma è solo questione di comodità. La forma generale del ds^2 permette semplicemente di scrivere le equazioni sotto una forma molto simmetrica.

Ciò premesso, la prima ipotesi è:

I. – *In ogni punto* $(q_1\, q_2\, q_3)$ *si può definire in modo unico un sistema di riferimento, rispetto a cui le stelle sono in media in quiete, il quale è una funzione continua delle coordinate q e del tempo t.*

Questa ipotesi si può tradurre così in linguaggio fisicamente espressivo: fissato l'istante t, consideriamo un certo volume S ed il moto medio

(1) Pervenuta all'Accademia il 18 giugno 1940–XVIII.

(2) « Ap. J. », *90*, 1 (1939).

delle stelle in esso contenute, che sarà definito dal vettore *velocità media*, di componenti $\bar{\dot{q}}_1 , \bar{\dot{q}}_2 , \bar{\dot{q}}_3$:

$$\bar{\dot{q}}_1 = \frac{\Sigma \dot{q}_1}{n} \quad , \quad \bar{\dot{q}}_2 = \frac{\Sigma \dot{q}_2}{n} \quad , \quad \bar{\dot{q}}_3 = \frac{\Sigma \dot{q}_3}{n} ,$$

la somma essendo estesa alle n stelle contenute nel volume S (un punto indica qui e nel seguito derivazione rispetto al tempo t)). La ipotesi che si fa è che comunque tenda a zero il volume S, intorno ad un punto determinato, il vettore velocità media tenda sempre ad un unico vettore, le cui componenti:

$$\dot{q}_1^{(0)} \quad , \quad \dot{q}_2^{(0)} \quad , \quad \dot{q}_3^{(0)} ,$$

sono funzioni continue e derivabili delle coordinate del punto ed eventualmente del tempo t.

In luogo delle velocità è preferibile però introdurre i *momenti* p_1 , p_2 , p_3, definiti alla maniera consueta: assunta, come si fa sempre, una massa unitaria per tutte le stelle, la forza viva T di una stella risulta:

$$[2] \qquad T = \frac{1}{2} \Sigma_{ik} g_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k ,$$

e la componente p_i del momento è data da:

$$[3] \qquad p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \Sigma_k g_{ik} \dot{q}_k .$$

Indicando con g^{ik} il *tensore fondamentale contravariante* (le g^{ik} sono uguali ai complementi algebrici delle g_{ik} nel determinante che ha per elementi le g_{ik}, divisi per il valore del determinante stesso), si ha:

$$[4] \qquad \dot{q}_i = \Sigma_k g^{ik} p_k .$$

Dalle [3] si verifica immediatamente che:

$$\Sigma_i p_i \dot{q}_i = \Sigma_{ik} g_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k = 2 T ,$$

la quale esprime il teorema di Eulero, applicato alla funzione omogenea T di secondo grado delle $\dot{q}_1 , \dot{q}_2 , \dot{q}_3$ [1].

---

[1] Poichè in questo numero si fa uso di qualche locuzione di calcolo tensoriale, non è fuor di luogo rilevare che, per uniformarci all'uso corrente, abbiamo distinto con un indice in basso le coordinate e le velocità, benchè queste ultime si trasformino secondo la legge di contravarianza.

Sostituendo le [4] nelle [2] si ha subito:

$$T = \frac{1}{2} \Sigma_{ik} g_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k = \frac{1}{2} \Sigma_{ik} g_{ik} \Sigma_r g^{ir} p_r \Sigma_s g^{ks} p_s$$

$$= \frac{1}{2} \Sigma_{rs} p_r p_s \Sigma_{ik} g^{ir} g^{ks} g_{ik}$$

$$= \frac{1}{2} \Sigma_{rs} g^{rs} p_r p_s ,$$

o anche, cambiando gli indici muti di sommazione:

[5] $$T = \frac{1}{2} \Sigma_{ik} g^{ik} p_i p_k .$$

D'altra parte il *momento* medio $\bar{p}_i$ entro il volume S sarà ovviamente definito da:

$$p_i = \frac{\Sigma p_i}{n} ,$$

la somma essendo nuovamente estesa alle n stelle. Secondo l'ipotesi I, il momento medio $\bar{p}_i$ al tendere di S verso zero, dovrà tendere in modo univoco ad un vettore covariante $p_i^{(0)}$, in modo che sarà naturalmente:

[3'] $$p_i^{(0)} = \Sigma_k g_{ik} \dot{q}_k^{(0)} ,$$

o invertendo:

[4'] $$\dot{q}_i^{(0)} = \Sigma_k g^{ik} p_k^{(0)} .$$

In luogo della funzione generale di distribuzione delle velocità e delle coordinate, noi introduciamo la funzione di distribuzione delle coordinate e dei momenti:

$$\psi (q_1 , q_2 , q_3 ; p_1 , p_2 , p_3 ; t) ,$$

definita, al solito, in modo che, nell'istante t, il numero di stelle con le coordinate tra q_1 e $q_1 + dq_1$, q_2 e $q_2 + dq_2$, q_3 e $q_3 + dq_3$ e i momenti tra p_1 e $p_1 + dp_1$, p_2 e $p_2 + dp_2$, p_3 e $p_3 + dp_3$, è dato da:

$$\psi (q_1 , q_2 , q_3 ; p_1 , p_2 , p_3 ; t)\, dq_1\, dq_2\, dq_3\, dp_1\, dp_2\, dp_3 .$$

La seconda ipotesi è allora:

II. – (*Ipotesi di Schwarzschild generalizzata*): *la funzione generale di distribuzione ha la forma:*

[6] $$\psi (q ; p ; t) = \psi (E + \sigma) ,$$

dove:

[7] $$E = \Sigma_{ik} a^{ik} (p_i - p_i^{(0)}) (p_k - p_k^{(0)}) ,$$

e le componenti del tensore contravariante a^{ik} e lo scalare σ sono funzioni (continue e derivabili) solo delle coordinate q ed eventualmente del tempo t.

È facile verificare che l'ipotesi II corrisponde precisamente all'ipotesi ellissoidale generalizzata, come viene usata da CHANDRASEKHAR. A tale scopo sostituiamo le [3] e [3′] nella [7]; si ricava:

$$E = \Sigma_{ik}\, a^{ik}\, \Sigma_r\, g_{ir}\, (\dot{q}_r - \dot{q}_r^{(0)})\, \Sigma_s\, g_{ks}\, (\dot{q}_s - \dot{q}_s^{(0)})$$

$$= \Sigma_{rs}\, (\dot{q}_r - \dot{q}_r^{\,0})\, (\dot{q}_s - \dot{q}_s^{(0)})\, \Sigma_{ik}\, a^{ik}\, g_{ir}\, g_{ks}\,,$$

ossia:

[8] $$E = \Sigma_{ik}\, a_{ik}\, (\dot{q}_i - \dot{q}_i^{\,0})\, (\dot{q}_k - \dot{q}_k^{(0)})\,,$$

dove le a_{ik} sono le componenti del tensore covariante:

[9] $$a_{ik} = \Sigma_{rs}\, a^{rs}\, g_{ir}\, g_{ks}\,.$$

Ora, quando si faccia $E = 1$, la [8] rappresenta precisamente, benchè con una notazione diversa dal solito, l'equazione dell'ellissoide di velocità, e quindi, come volevamo dimostrare, la forma della funzione generale di distribuzione delle coordinate e dei momenti, rappresentata dalle [6] e [7] corrisponde proprio all'ipotesi di SCHWARZSCHILD generalizzata.

Naturalmente la ψ non potrà essere di forma qualunque, ma dovrà, come è ben noto, soddisfare all'equazione di continuità in 6 dimensioni:

[10] $$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \Sigma_i\, \dot{q}_i\, \frac{\partial \psi}{\partial q_i} + \Sigma_i\, \dot{p}_i\, \frac{\partial \psi}{\partial p_i} = 0$$

(*Teorema fondamentale della dinamica stellare*).

La terza e quarta ipotesi non hanno bisogno di speciali illustrazioni; esse sono:

III. – *La forza che determina il moto delle singole stelle è conservativa, ammette, cioè, un potenziale U funzione (continua e derivabile) delle coordinate q ed eventualmente del tempo t.*

IV. – *Il sistema considerato è stazionario, e pertanto le varie grandezze del problema, cioè i tensori g ed a, il vettore $p^{(0)}$ e gli scalari σ e U non dipendono esplicitamente dal tempo t, al pari della funzione di distribuzione ψ.*

Quest'ultima ipotesi permette di scrivere il teorema fondamentale sotto la forma:

[11] $$\Sigma_i \left(\dot{q}_i\, \frac{\partial \psi}{\partial q_i} + \dot{p}_i\, \frac{\partial \psi}{\partial p_i} \right) = 0\,.$$

Detta inoltre H la funzione hamiltoniana che presiede al moto di una stella singola:

[12] $$H = T - U\,,$$

le equazioni di questo moto prendono la forma canonica:

$$[13] \qquad \begin{cases} \dot{p}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i} \\ \dot{q}_i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}. \end{cases}$$

Si osserverà che sostituendo le [13] nella [11], questa prende la forma particolarmente espressiva:

$$\Sigma_i \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial \psi}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial \psi}{\partial p_i} \right) = 0 ,$$

ossia, indicando con ( ) la parentesi di POISSON:

$$[14] \qquad (H , \psi) = 0 .$$

Ritroviamo così il ben noto risultato che la funzione di distribuzione ψ deve essere una funzione degli integrali primi del moto di una singola particella.

2. Noi vogliamo ora scrivere esplicitamente l'equazione [14] nel caso in cui la ψ abbia la forma [6]. Avremo anzitutto:

$$H = \frac{1}{2} \Sigma_{ik} g^{ik} p_i p_k - U$$

da cui:

$$[15] \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial q_i} = \dfrac{1}{2} \Sigma_{kl} \dfrac{\partial g^{kl}}{\partial q_i} p_k p_l - \dfrac{\partial U}{\partial q_i} \\ \dfrac{\partial H}{\partial p_i} = \Sigma_k g^{ik} p_k . \end{cases}$$

Nella [7] conviene separare i termini di grado 0 , 1 , 2 nelle p:

$$[16] \qquad E = \Sigma_{ik} a^{ik} p_i p_k - 2 \Sigma_i \Delta^i p_i + E_0 ,$$

dove si è posto:

$$[17] \qquad \Delta^i = \Sigma_k a^{ik} p_k^{(0)}$$

$$[18] \qquad E_0 = \Sigma_{ik} a^{ik} p_i^{(0)} p_k^{(0)} .$$

D'altra parte si ha:

$$\frac{\partial \psi}{\partial q_i} = \frac{d\psi (E + \sigma)}{d (E + \sigma)} \frac{\partial (E + \sigma)}{\partial q_i} \quad , \quad \frac{\partial \psi}{\partial p_i} = \frac{d\psi (E + \sigma)}{d (E + \sigma)} \frac{\partial E}{\partial p_i}$$

(poichè σ non dipende da p_i). La [16] dà poi:

$$\frac{\partial (E+\sigma)}{\partial q_i} = \Sigma_{kl} \frac{\partial a^{kl}}{\partial q_i} p_k p_l - 2 \Sigma_k \frac{\partial \Delta^k}{\partial q_i} p_k + \frac{\partial (E_0+\sigma)}{\partial q_i}$$

$$\frac{\partial E}{\partial p_i} = 2 \Sigma_k a^{ik} p_k - 2 \Delta^i ,$$

e quindi in definitiva si ottiene:

$$[19] \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \psi}{\partial q_i} = \dfrac{d\psi (E+\sigma)}{d (E+\sigma)} \left\{ \Sigma_{kl} \dfrac{\partial a^{kl}}{\partial q_i} p_k p_l - 2 \Sigma_k \dfrac{\partial \Delta^k}{\partial q_i} p_k + \dfrac{\partial (E_0+\sigma)}{\partial q_i} \right\} \\ \dfrac{\partial \psi}{\partial p_i} = \dfrac{d\psi (E+\sigma)}{d (E+\sigma)} \{ 2 \Sigma_k a^{ik} p_k - 2 \Delta^i \} . \end{cases}$$

Sostituendo le [15] e [19] nella [14] e ordinando i termini di grado diverso nei momenti p_i, si ricava dopo qualche passaggio:

$$\Sigma_{imkl} \left\{ \left(g^{im} \frac{\partial a^{kl}}{\partial q_i} - a^{ik} \frac{\partial g^{lm}}{\partial q_i} \right) p_k p_l p_m - \left(2 g^{il} \frac{\partial \Delta^k}{\partial q_i} - \Delta^i \frac{\partial g^{kl}}{\partial q_i} \right) p_k p_l + \right.$$

$$\left. + \left(g^{ik} \frac{\partial (E_0+\sigma)}{\partial q_i} + 2 a^{ik} \frac{\partial U}{\partial q_i} \right) p_k - 2 \Delta^i \frac{\partial U}{\partial q_i} \right\} = 0 .$$

Ma questa equazione deve essere soddisfatta identicamente per tutti i valori possibili delle p_i; è necessario quindi che si annullino separatamente i coefficienti dei termini di diverso grado nelle p_i. Si otterranno così un certo numero di equazioni le quali collegano tra loro le diverse funzioni del problema. Si osserverà peraltro che prima di uguagliare materialmente a zero i predetti coefficienti è necessario rendere simmetrici i coefficienti dei prodotti generici $p_k p_l p_m$ e $p_k p_l$ rispetto agli indici k, l, m e k, l rispettivamente. Se si riflette che i due tensori g^{ik} ed a^{ik} sono ambedue simmetrici, si vede immediatamente che l'equazione fondamentale con gli indici simmetrizzati si può scrivere nel modo seguente:

$$[20] \quad \Sigma_{imkl} \left\{ \frac{1}{3} \left[g^{im} \frac{\partial a^{kl}}{\partial q_i} - a^{ik} \frac{\partial g^{lm}}{\partial q_i} + g^{ik} \frac{\partial a^{lm}}{\partial q_i} - a^{il} \frac{\partial g^{mk}}{\partial q_i} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + g^{il} \frac{\partial a^{mk}}{\partial q_i} - a^{im} \frac{\partial g^{kl}}{\partial q_i} \right] p_k p_l p_m - \left(g^{il} \frac{\partial \Delta^k}{\partial q_i} + g^{ik} \frac{\partial \Delta^l}{\partial q_i} - \Delta_i \frac{\partial g^{kl}}{\partial q_i} \right) p_k p_l + \right.$$

$$\left. + \left(g_{ik} \frac{\partial (E_0+\sigma)}{\partial q_i} + 2 a^{ik} \frac{\partial U}{\partial q_i} \right) p_k - 2 \Delta^i \frac{\partial U}{\partial q_i} \right\} = 0 .$$

Uguagliando a zero i coefficienti dei vari termini della [20] si ottengono le *equazioni fondamentali* del problema, che si dividono in 4 gruppi corrispondenti rispettivamente ai termini di grado 3, 2, 1 e 0 nelle p:

$$[21]\quad \Sigma_i \left[g^{im} \frac{\partial a^{kl}}{\partial q_i} - a^{im} \frac{\partial g^{kl}}{\partial q_i} + g^{ik} \frac{\partial a^{lm}}{\partial q_i} - a^{ik} \frac{\partial g^{lm}}{\partial q_i} + g^{il} \frac{\partial a^{mk}}{\partial q_i} - a^{il} \frac{\partial g^{mk}}{\partial q_i} \right] = 0 .$$

$$[22]\quad \Sigma_i \left[g^{ik} \frac{\partial \Delta^l}{\partial q_i} + g^{il} \frac{\partial \Delta^k}{\partial q_i} - \Delta^i \frac{\partial g^{kl}}{\partial q_i} \right] = 0 .$$

$$[23]\quad \Sigma_i \left[g^{ik} \frac{\partial (E_0 + \sigma)}{\partial q_i} + 2\, a^{ik} \frac{\partial U}{\partial q_i} \right] = 0 .$$

$$[24]\quad \Sigma_i \Delta^i \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0 .$$

Tenuto conto che gli indici k, l, m possono assumere ciascuno i valori 1, 2, 3 si vede subito che le [21], [22], [23] e [24] corrispondono rispettivamente a 10, 6, 3 e 1 equazioni. In totale perciò avremo 20 equazioni che corrispondono esattamente alle 20 equazioni fondamentali del citato lavoro di CHANDRASEKHAR (1).

Questi 4 gruppi di equazioni contengono evidentemente in sè tutte le proprietà dinamiche dei sistemi stellari obbedienti all'ipotesi di SCHWARZSCHILD generalizzata.

Come ha mostrato CHANDRASEKHAR, le prime 10, cioè le nostre [21] permettono di determinare in modo unico, a parte naturalmente costanti di integrazione, i coefficienti dell'ellissoide di velocità, le [22] governano il moto medio della materia, mentre le [24] introducono qualche restrizione formale relativa al potenziale. Le [23] che CHANDRASEKHAR, chiama *equazioni di compatibilità* hanno un ufficio particolare che apparirà più avanti.

---

(1) Nella notazione usata da CHANDRASEKHAR, posto $q_1 = \lambda$, $q_2 = \mu$, $q_3 = \nu$, si ha:

$$g_{11} = P^2 \quad , \quad g_{22} = Q^2 \quad , \quad g_{33} = R^2 \quad , \quad g_{ik} = 0 \qquad (i \neq k) ,$$

da cui viene:

$$g^{11} = \frac{1}{P^2} \quad , \quad g^{22} = \frac{1}{Q^2} \quad , \quad g^{33} = \frac{1}{R^2} \quad , \quad g^{ik} = 0 \qquad (i \neq k) .$$

Inoltre come si riconosce immediatamente si ha:

$$a^{11} = \frac{a}{P^2} \quad , \quad a^{22} = \frac{b}{Q^2} \quad , \quad a^{33} = \frac{c}{R^2} \quad , \quad a^{12} = \frac{h}{PQ} \quad , \quad a^{23} = \frac{f}{QR} \quad , \quad a^{13} = \frac{g}{PR} ,$$

$$p_1^{(0)} = P\Lambda_0 \quad , \quad p_2^{(0)} = Q\mathrm{M}_0 \quad , \quad p_3^{(0)} = R\mathrm{N}_0 ,$$

ecc... Con queste notazioni, si vede subito la perfetta identità tra le nostre equazioni e quelle di CHANDRASEKHAR.

Prima di proseguire conviene però mettere le [23] sotto una forma leggermente diversa; a tale scopo moltiplichiamo il primo membro di questa equazione per g_{km} e sommiamo rispetto a k.

Si ricava:

$$\Sigma_k g_{km} \Sigma_i \left[g^{ik} \frac{\partial (E_0 + \sigma)}{\partial q_i} + 2 a^{ik} \frac{\partial U}{\partial q_i} \right] = 0 ,$$

ossia:

$$\Sigma_i \left[\frac{\partial (E_0 + \sigma)}{\partial q_i} \Sigma_k g_{km} g^{ik} + 2 \frac{\partial U}{\partial q_i} \Sigma_k g_{km} a^{ik} \right] = 0 ,$$

o anche in definitiva:

$$[23'] \qquad \frac{\partial (E_0 + \sigma)}{\partial q_m} + 2 \Sigma_{ik} g_{km} a^{ik} \frac{\partial U}{\partial q_i} = 0 ,$$

che dà le equazioni risolte rispetto a $\frac{\partial (E_0 + \sigma)}{\partial q_m}$.

3. Noi vogliamo ora intrattenerci sopra le proprietà delle superficie equipotenziali. A tale scopo cominciamo con lo specificare, in parte, il sistema di coordinate, scegliendo le superficie $q_1 = \text{cost}$, in modo che coincidano con le superficie equipotenziali. Avremo allora:

$$\frac{\partial U}{\partial q_2} = \frac{\partial U}{\partial q_3} = 0 .$$

Sostituendo questi valori nella [24] ed escludendo, il caso banale che sia anche $\frac{\partial U}{\partial q_1} = 0$, si vede subito che deve essere:

$$\Delta^1 = 0 .$$

Consideriamo ora le equazioni di compatibilità sotto la forma [23]; ponendo per semplicità $E_0 + \sigma = -\chi$, viene:

$$\frac{\partial \chi}{\partial q_m} = 2 \Sigma_k g_{km} a^{1k} \frac{\partial U}{\partial q_1} , \qquad (m = 1 , 2 , 3).$$

A questo punto, per rendere più semplice la discussione, supponiamo inoltre che l'elemento lineare ds^2 sia ortogonale; alla quale forma potremo ridurci evidentemente in infiniti modi, senza alterare il significato delle formule. Sarà allora:

$$g_{km} \neq 0 \ (k = m) \quad , \quad g_{km} = 0 \ (k \neq m),$$

e le [23'] si riducono al sistema seguente:

$$[25] \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \chi}{\partial q_1} = 2 g_{11} a^{11} \dfrac{\partial U}{\partial q_1} \quad , \quad \dfrac{\partial \chi}{\partial q_2} = 2 g_{22} a^{12} \dfrac{\partial U}{\partial q_1} , \\ \dfrac{\partial \chi}{\partial q_3} = 2 g_{33} a^{13} \dfrac{\partial U}{\partial q_1} . \end{cases}$$

Osserviamo ora che le [25] devono evidentemente soddisfare alle condizioni di integrabilità:

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial q_1 \partial q_2} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial q_2 \partial q_1} \quad \text{ecc.} \cdots$$

che dànno nel nostro caso:

$$[26] \quad \begin{cases} \left[\frac{\partial}{\partial q_2}(g_{11}\, a^{11}) - \frac{\partial}{\partial q_1}(g_{22}\, a^{12})\right] \frac{\partial U}{\partial q_1} - g_{22}\, a^{12} \frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2} = 0 \\ \left[\frac{\partial}{\partial q_3}(g_{11}\, a^{11}) - \frac{\partial}{\partial q_1}(g_{33}\, a^{13})\right] \frac{\partial U}{\partial q_1} - g_{33}\, a^{13} \frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial q_3}(g_{22}\, a^{12}) - \frac{\partial}{\partial q_2}(g_{33}\, a^{13}) = 0\,. \end{cases}$$

Le prime due di queste relazioni, risolte rispetto al rapporto $\frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2} / \frac{\partial U}{\partial q_1}$ ci forniscono questo rapporto mediante due espressioni del tipo:

$$[27] \quad \frac{\partial_2 U}{\partial q_1^2} / \frac{\partial U}{\partial q_1} = \frac{A}{B}\,,$$

dove le A e B sono funzioni delle g, delle a e delle loro derivate. Ma le 10 equazioni [21] devono averci già permesso di determinare completamente (a meno beninteso di costanti di integrazione) le a. Le [27] esprimono quindi un'ulteriore restrizione nei riguardi del potenziale U, che si manifesta sotto forma di un'equazione differenziale; riservandoci perciò di considerare in qualche caso particolare (ma noi non considereremo questi casi, poichè ciò è stato fatto da CHANDRASEKHAR) queste ipotesi restrittive, per conservare la massima generalità si deve assumere che i secondi membri delle [27] abbiano la forma indeterminata 0/0. Questo ci conduce (ad esclusione dei menzionati casi particolari) alle seguenti condizioni:

$$[28] \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial q_3}(g_{11}\, a^{11}) = \frac{\partial}{\partial q_2}(g_{11}\, a^{11}) = 0 \\ a^{12} = 0 \\ a^{13} = 0\,. \end{cases}$$

Applicando questi risultati alla [25] e ricordando che deve essere $\Delta^1 = 0$, si ricavano alcune importanti conclusioni. Dalle [23] viene:

$$\frac{\partial \chi}{\partial q_2} = \frac{\partial \chi}{\partial q_3} = 0\,,$$

vale a dire: *le superficie equipotenziali sono caratterizzate dal fatto che sopra di esse è costante la grandezza scalare* $E_0 + \sigma$

La relazione $\Delta^1 = 0$ equivale a:

$$a^{11} p_1^{(0)} + a_{12} p_2^{(0)} + a^{13} p_3^{(0)} = 0,$$

e questa, escluso il caso $a^{11} = 0$ che implicherebbe una dispersione infinitamente grande delle velocità nella direzione di q_1, essendo $a^{12} = a^{13} = 0$, ha come conseguenza che:

$$p_1^{(0)} = 0 ;$$

cioè: *il moto medio delle stelle in ciascun punto si verifica lungo le superficie equipotenziali.*

Consideriamo ora la relazione tra l'ellissoide di velocità e le superficie equipotenziali. L'essere $a^{12} = a^{13} = 0$ mostra evidentemente che le direzioni di due degli assi principali dell'ellissoide di velocità si trovano sempre nel piano tangente alle superficie equipotenziali. Ossia:

Uno degli assi principali dell'ellissoide di velocità è sempre normale alle superficie equipotenziali.

Se noi consideriamo una sezione dell'ellissoide di velocità con un piano contenente la normale alla superficie equipotenziale, si vede che gli assi dell'« ellisse di velocità » così ottenuto sono uno normale e uno parallelo alla proiezione del moto medio su questo piano.

Ora è ben noto che la direzione del vertice nel piano galattico differisce di circa 20° da quella del centro galattico individuato sia dalla distribuzione delle densità stellari e sia dalla rotazione del sistema galattico. Questa *deviazione del vertice* è stata da molti interpretata come un indice del fatto che il sistema galattico *non si trova in condizioni di stazionarietà* [1]; se si riflette che per ovvie ragioni di simmetria il piano galattico deve contenere la normale alle superficie equipotenziali, il teorema dimostrato indica che questa è anche *l'unica spiegazione possibile*, eccezion fatta eventualmente dei casi speciali esclusi, in cui il potenziale ha una forma particolare. In particolare non sarà possibile render conto della deviazione osservata del vertice, assumendo una distribuzione stazionaria di masse senza simmetria assiale.

La grande generalità del teorema dimostrato rende particolarmente significativa questa conclusione.

4. Da ultimo noi vogliamo considerare brevemente un caso speciale che presenta qualche interesse, in quanto di diretta applicabilità a sistemi analoghi al sistema galattico. Noi supporremo precisamente che il sistema sia simmetrico rispetto ad una delle coordinate, per esempio la coordinata q_3;

---

[1] Cfr. per es. LINDBLAD, « Stockholm Ann. », *12*, n. 4 (1936).

ciò si verifica quando il sistema ha un piano di simmetria e si scelgono come linee coordinate q_3 l'intersezione delle superficie $q_1 = \text{cost}\,(U = \text{cost})$ con superficie simmetriche rispetto al piano di simmetria. È ovvio allora che la coordinata q_3 deve comparire nelle varie funzioni in modo tale che, detta S una funzione generica del problema, si abbia:

$$S(q_3) = S(-q_3) \quad , \quad \frac{dS(q_3)}{dq_3} = -\frac{dS(-q_3)}{dq_3} .$$

È facile vedere allora che le 10 equazioni [21] conducono in questo caso alle seguenti condizioni:

$$[29] \quad \begin{cases} a^{23}\frac{\partial g^{11}}{\partial q_3} = 0 \quad a^{23}\frac{\partial g^{22}}{\partial q_3} = 0 \quad 2g^{22}\frac{\partial a^{23}}{\partial q_2} - a^{23}\frac{\partial g^{22}}{\partial q_2} = 0 \\ a^{23}\frac{\partial g^{11}}{\partial q_2} = 0 \quad a^{23}\frac{\partial g^{33}}{\partial q_2} = 0 \quad 2g^{33}\frac{\partial a^{23}}{\partial q_3} - a^{23}\frac{\partial g^{33}}{\partial q_3} = 0 \end{cases}$$

ed è chiaro che queste condizioni possono essere soddisfatte solo se $a^{23} = 0$, oppure se le g^{11}, g^{22}, g^{23} sono funzioni della sola q_1. Lasciando da parte come particolarissimo e senza interesse questo caso, siamo indotti ad assumere anche:

$$a^{23} = 0,$$

in questo caso quindi gli assi prescelti corrispondono agli assi principali dell'ellissoide di velocità. Se il sistema ha un piano di simmetria, in ogni punto gli assi dell'ellissoide di velocità sono: uno parallelo a detto piano, uno normale alla superficie equipotenziale e il terzo normale ai primi due.

Con la condizione $a^{13} = a^{23} = a^{31} = 0$, le formule per la determinazione degli assi dell'ellissoide di velocità acquistano una forma molto elegante e simmetrica.

$$[30] \quad \begin{cases} g^{11}\frac{\partial a^{11}}{\partial q_1} - a^{11}\frac{\partial g^{11}}{\partial q_1} = 0 \;,\; g^{11}\frac{\partial a^{22}}{\partial q_1} - a^{11}\frac{\partial g^{22}}{\partial q_1} = 0 \;,\; g^{11}\frac{\partial a^{33}}{\partial q_1} - a^{11}\frac{\partial g^{33}}{\partial q_1} = 0 \\ g^{22}\frac{\partial a^{11}}{\partial q_2} - a^{22}\frac{\partial g^{11}}{\partial q_2} = 0 \;,\; g^{22}\frac{\partial a^{22}}{\partial q_2} - a^{22}\frac{\partial g^{22}}{\partial q_2} = 0 \;,\; g^{22}\frac{\partial a^{33}}{\partial q_2} - a^{22}\frac{\partial g^{33}}{\partial q_2} = 0 \\ g^{33}\frac{\partial a^{11}}{\partial q_3} - a^{33}\frac{\partial g^{11}}{\partial q_3} = 0 \;,\; g^{33}\frac{\partial a^{22}}{\partial q_3} - a^{33}\frac{\partial g^{22}}{\partial q_3} = 0 \;,\; g^{33}\frac{\partial a^{33}}{\partial q_3} - a^{33}\frac{\partial g^{33}}{\partial q_3} = 0 . \end{cases}$$

La discussione del moto medio non presenta un particolare interesse in casi così generali. Nel caso speciale che le superficie equipotenziali siano superficie di rotazione, non è difficile riconoscere che si deve avere anche:

$$\Delta^3 = 0$$

e quindi: $p_3^{(0)} = 0$. In quel caso speciale il moto medio consiste perciò in un moto di pura rotazione intorno all'asse.

Si osserverà che il caso di un sistema a simmetria sferica non può per ovvie ragioni rientrare nel caso qui considerato; in questo caso non si può infatti definire nè un piano unico di simmetria nè un asse unico di rotazione. La simmetria sferica si presenta perciò come un caso tipico di indeterminazione; essa è stata compiutamente trattata da CHANDRASEKHAR al pari di vari casi, in cui le superficie equipotenziali sono sferoidi concentrici, oppure confocali. Una trattazione di questi casi, come pure dei casi eccezionali, cui si è accennato al n. 3, ci appare perciò superflua.

Geofisica (Sismologia). *Sopra alcuni nuovi sistemi di onde sismiche a carattere superficiale oscillanti nel piano principale* (1). Nota (2) di Pietro Caloi, presentata dall'Accademico Antonino Lo Surdo.

1. Premetto alcune brevi considerazioni sulle attuali nostre conoscenze relative alle onde superficiali in genere. È giusto riconoscere subito che esse sono limitate e frammentarie. Esistono parecchie teorie sui diversi sistemi di onde superficiali, ma si mostrano tutte insufficienti a spiegare compiutamente ed esaurientemente i vari aspetti, a volte in apparenza discordanti, che l'osservazione rivela in questi tipi d'onde.

Fra le più note sono le teorie di Love e di Rayleigh. Si è voluto indicare come rispondenti a queste teorie le onde che iniziano e formano la parte più vistosa della così detta fase principale di un sismogramma. Ma se queste teorie, specie quella di Love, lumeggiano alcuni particolari delle onde superficiali a cui esse si vogliono riferire, altri, e fra i fondamentali, ne lasciano del tutto inspiegati, quando non contrastano nettamente con essi.

Se applichiamo per es. la teoria della dispersione alle onde di Love (1) troviamo che quanto più lontana dall'epicentro è la stazione d'osservazione, tanto più grande, rispetto a quella delle onde più lunghe e più veloci, dev'essere l'ampiezza dell'onda con la minima velocità di gruppo. Il periodo associato con la massima ampiezza andrebbe quindi diminuendo con la distanza, mentre la velocità di gruppo collegata al treno d'onde di massima ampiezza, dovrebbe tendere verso il minimo teoricamente possibile. Ma questo risultato è giusto l'opposto di quanto ci rivela l'osservazione: il periodo e la velocità di gruppo collegati con il massimo d'ampiezza delle così dette onde di Love, subiscono un graduale aumento, e non una diminuzione, con la distanza dall'epicentro.

I tentativi fatti per spiegare questa discordanza tra teoria e osservazione non convincono: riescono perciò alquanto dubbi i risultati ottenuti

---

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale di Geofisica del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(2) Pervenuta all'Accademia il 20 giugno 1940-XVIII.

sullo spessore delle stratificazioni della crosta terrestre, basati sulla dispersione delle onde di LOVE.

Le obiezioni sono anche più serie nel caso della teoria di RAYLEIGH. A parte la ben nota disparità fra valore teorico previsto per il rapporto dei movimenti in senso orizzontale e in senso verticale e quello dato dall'osservazione, insorgono altre difficoltà. Le onde di RAYLEIGH consistono di oscillazioni nel piano principale di propagazione della sollecitazione elastica; questa condizione non è affatto rispettata dai sistemi di onde sismiche superficiali, nei quali si è voluto vedere la realizzazione della teoria di RAYLEIGH; e non è sufficiente a spiegare questa discordanza il fatto che a quelle onde possano essere sovrapposte delle onde tangenziali. GUTENBERG ritiene che il disaccordo fra teoria ed osservazione sia dovuto all'eterogeneità dei materiali costituenti le stratificazioni superficiali terrestri. Ma, a parte il fatto che questa eterogeneità non sembra avere eccessiva influenza su altre onde a carattere ben definito, con essa non si potrebbe spiegare un'altra caratteristica propria delle onde costituenti la fase principale. In uno studio sulla fase massima di terremoti ad origine lontana A. DINCA–SAMURACAS (2) è infatti pervenuto, fra l'altro, a queste conclusioni: nella fase massima, le vibrazioni della particella raggiunta dalla sollecitazione elastica girano intorno all'asse di propagazione; nei casi di polarizzazione, questa si verifica in piani del tutto diversi, secondo gli azimut più disparati.

Specialmente il primo fatto non può essere spiegato con l'eterogeneità della materia costituente gli strati superficiali. Se ne deve concludere piuttosto che le onde della fase massima non possono essere identificate che con grandi riserve con quelle della teoria di RAYLEIGH.

Non è il caso che mi soffermi su altre ben note discordanze (3). Anche le teorie più generali di ULLER riescono insufficienti a spiegare con chiarezza il meccanismo di propagazione delle onde sismiche superficiali, e così le teorie più particolari di MEISSNER, COULOMB, ecc.

Aggiungerò solo che se è giusto riconoscere i meriti di queste teorie è altrettanto giusto non disconoscerne le deficienze, a scapito di ostacolare il duro cammino della ricerca, ritardando l'avvento della verità.

2. Specie dopo le teorie di RAYLEIGH e di LOVE, era ormai opinione diffusa che l'inizio delle onde superficiali in un sismogramma di terremoto lontano coincidesse con l'arrivo delle così dette onde di LOVE: le fasi che precedevano non potevano essere che onde spaziali dirette, rifratte o riflesse, longitudinali, trasversali o miste.

Questa convinzione era suffragata dalla teoria di RAYLEIGH, secondo la quale la velocità delle onde superficiali non poteva essere che una frazione di quella delle onde trasversali proprie dello strato superficiale terrestre (analogamente a quanto avviene nella teoria di LOVE) e non

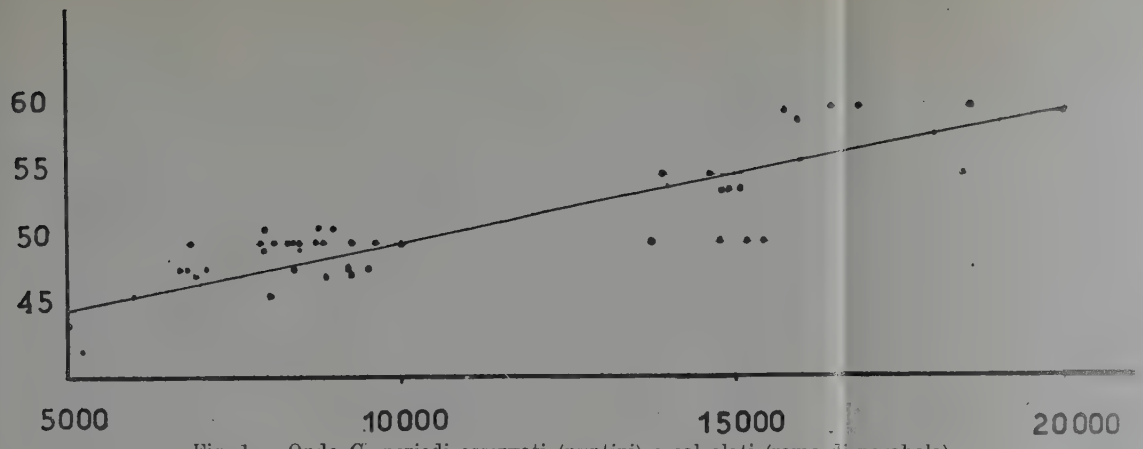


Fig. 1. – Onde C_1: periodi osservati (puntini) e calcolati (ramo di parabola).

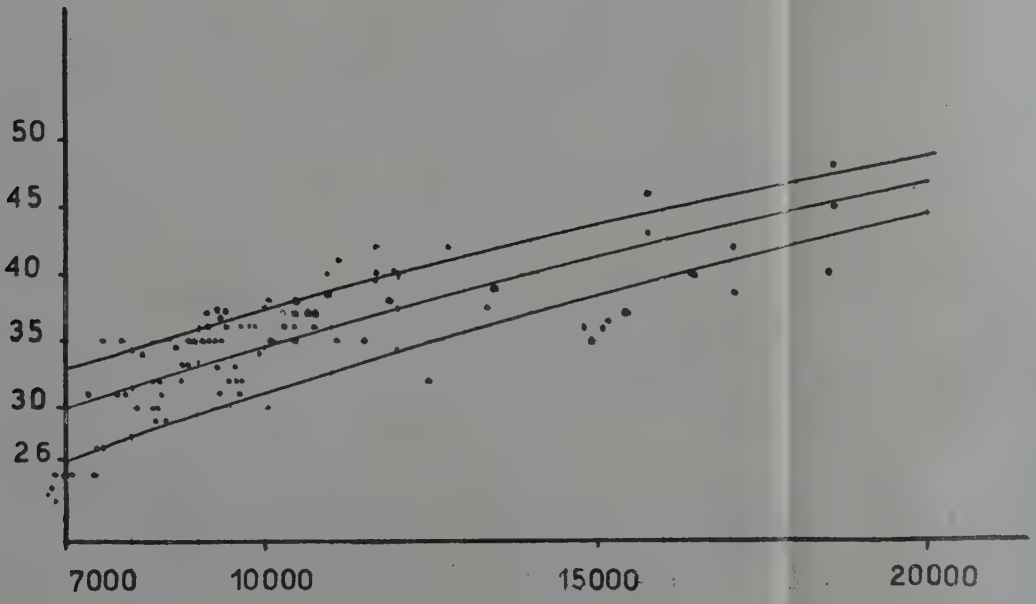
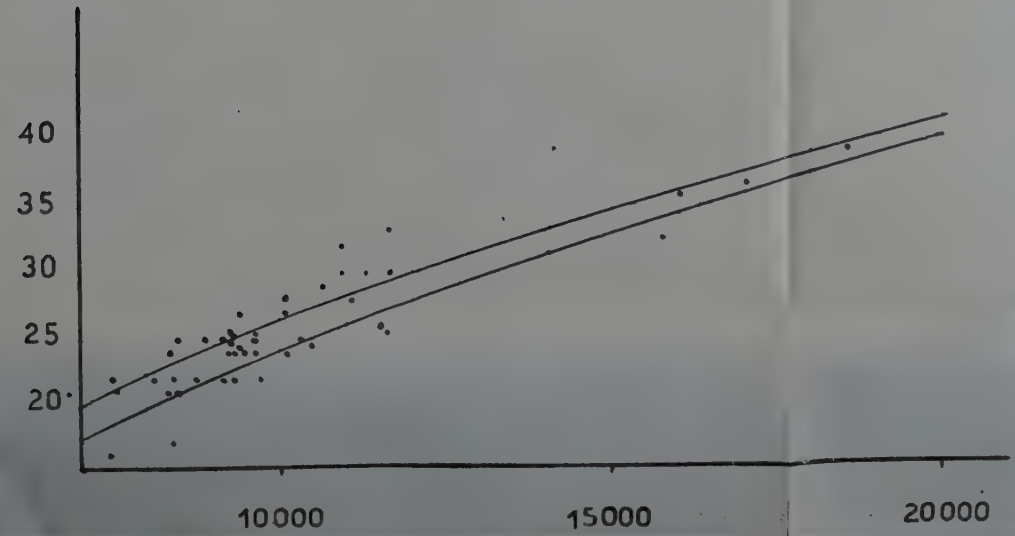


Fig. 2. – Onde SL_1: periodi osservati (puntini) e calcolati (rami di parabola).



avrebbe potuto quindi superare 4,5 km sec. ca. Però, partendo da una teoria di Somigliana, nella quale, per opportuni valori del coefficiente σ di Poisson, le soluzioni dell'equazione di Rayleigh presentano tutte significato fisico, lo scrivente è riuscito a provare l'esistenza di un'onda superficiale con velocità di 6,2 km/sec. ca. (4), esistenza confermata dalla osservazione (5). Quest'onda, che ho indicato con *C*, oscilla nel piano principale e viene registrata dopo le onde *S*, con un ritardo, rispetto a queste, crescente con la distanza. Ho provato che scegliendo per σ il valore di 0,17 trovato da Matuzawa, le radici maggiori dell'unità dell'equazione di Rayleigh

$$[1] \qquad \left(\frac{v^2}{v_s^2}-2\right)^4 - 16\left(\frac{v^2}{v_l^2}-1\right)\left(\frac{v^2}{v_s^2}-1\right) = 0,$$

(in cui v, v_l e v_s rappresentano rispettivamente le velocità delle onde superficiali, e delle onde longitudinali e trasversali proprie dello strato superficiale della Terra) soddisfano pienamente le caratteristiche dinamiche dell'onda *C* e dell'onda *G* di Gutenberg.

In ogni modo, mi propongo ora di provare, prescindendo da ogni teoria, con i soli dati dell'osservazione, che non soltanto la *C* è onda superficiale, ma lo sono anche i due gruppi d'onde *SL* ed *SM* da me in precedenza individuati, ed altri che seguono le *SM* (6).

3. Ho potuto constatare l'esistenza delle onde in questione in un gran numero di terremoti, quasi tutti a profondità normale. Ho limitato le mie indagini a terremoti avvenuti fra gli anni 1931–1933; qualche terremoto è pure di anni successivi; uno solo del 1925, studiato da Byerly, il cui lavoro ho potuto vedere soltanto di recente sul « Bollettino della Società sismologica americana ».

Gli epicentri sono quasi tutti tolti dall'« International Seismological Summary », salvo quelli relativi a terremoti oggetto di studi particolari.

Oltre le coordinate epicentrali e l'ora origine, per ogni terremoto riporto le distanze epicentrali delle singole stazioni, nonchè i tempi di tragitto e i periodi (*T*) di ognuna delle nuove fasi *C*, *SL*, *SM*.

Terremoto delle isole Salomone del 3 ottobre 1931 (coordinate epicentrali: $\varphi = 10^\circ\,38'$ S ; $\lambda = 161^\circ\,40'$ E Gr. ; ora origine $0 = 19^h\,13^m\,13^s$, secondo la determinazione di Gutenberg e Richter) (7).

Questo terremoto è stato particolarmente violento ed ha dato ampie registrazioni in quasi tutti gli osservatori sismici del mondo. Ha avuto anche parecchie repliche, una delle quali molto forte.

I dati che seguono si riferiscono alla scossa principale.

Stazioni	Δ	C	T	SL	T
Phu-lien	6940 km	19m 25m	45-50s	—	—
Victoria B. C.	9794	—	—	30m 00s	26s
Tananarive	12070	—	—	35 26	33
Ottawa	13359	—	—	40 47 ca.	35-40
La Plata	13455	—	—	41 12	40 ca.
La Paz	13761	37 47	45-50	—	—
Ksara	13941	39 10	50-60	—	—
Budapest	14618	39 34	55 ca.	44 30	31 ca.
Vienna	14731	40 20	55 ca.	—	—
Edinburgo	14800	40 14	50	44 31	36 ca.
Zagabria	14918	40 17	54	—	—
De Bilt	14930	40 23	50-54	45 51	35
Trieste	15063	40 47	55	—	—
Uccle	15081	40 50	50-54	45 59	34-36
Kew	15178	41 10	50 ca.	45 58	36 ca.
Rio De Janeiro	15413	41 38	48-50	45 55	37
Toledo	16459	43 31	60 ca.	49 12	40
San Fernando	16881	45 16	60 ca.	—	—

Come ebbi già a osservare nelle Note precedenti, queste onde (specie la *C*, che è quella a maggior periodo) vengono registrate in modo chiaro dagli strumenti aventi elevato periodo proprio. In questo terremoto però esse hanno dato vistosi esempi quasi dovunque. In ogni modo, come al solito, esse sono risultate particolarmente chiare a De Bilt, Uccle e Kew (tavole VIII e IX) dove funzionano dei Galitzin con periodo proprio di 25s. Trascurabili furono gli esempi di onde *SM* e poco numerosi quelli di *SL*.

A Victoria B. C. sia la *C* (traccie mascherate dalle *PS*) che la *SL* (tav. VI) sono giunte con periodo alquanto minore di quello comunemente osservato per questi tipi d'onde. Avrò modo di intrattenermi più avanti sulla probabile ragione di questo fatto.

Questo terremoto, oggetto di studio da parte di Gutenberg e Richter, ha anche dato luogo a nettissimi esempi di onde *G*. A questo riguardo va

osservato che, analogamente a quanto è avvenuto per la *G*, mentre la scossa principale ha dato origine a vistosi esempi di onde *C* ed *SL*, nelle repliche queste onde non figurano affatto o soltanto in modo inapprezzabile. La mancanza di onde *G* nelle repliche fu da Gutenberg attribuita ad un diverso meccanismo di produzione delle scosse, in quanto essa non sembra dovuta a diversità di profondità ipocentrale: in questa caratteristica comune alle onde *G*, *C*, *SL*, ecc. è una riprova della consimile origine di questi tipi d'onde (onde superficiali), i quali differiscono invece nettamente nel modo di propagarsi: le onde *G* infatti sono onde trasversali tangenziali, mentre le *C*, *SL*, *SM*, ecc. oscillano rigorosamente nel piano principale. Avviene quindi che se la *G* appare nettamente sviluppata secondo una componente, le altre presentano invece le loro massime ampiezze nella componente a 90°.

Terremoto dell'ovest Messico del 3 giugno 1932 (I. S. S.: $\varphi = 19°, 2$ N; $\lambda = 104°, 2$ W; 0 = 10.36.53).

Nel giugno del 1932 si verificarono parecchie scosse violente nel Pacifico, al largo delle coste occidentali del Messico. Particolarmente nette furono le registrazioni provocate in tutti gli osservatorî del mondo dalla scossa del 3 giugno.

Stazioni	Δ	*SL*	*T*	*SM*	*T*
De Bilt	9580 km	30m 17s	36s	—	—
Trieste	10480	33 03	37	—	—
Vienna	10480	33 06	37	(36m 36s)	22–24s
Zagabria	10610	33 16	37	36 48	30 ?
Budapest	10690	33 12	37	—	—
Belgrado	10955	34 06	38	37 25	30 ca.
Atene	11644	35 35	42	39 02	33 ca.
Riverview	12489	36 18	32	—	—
Ksara	12745	38 07	42	—	—
Helwan	12765	38 04	40–43	—	—
Amboina	14065	42 35	24	—	—
Bombay	15755	48 31	46 ca.	—	—
Tananarive	17035	50 48	42 ca.	55 05	36 ca.

Nell'unita tabella sono contenuti i risultati dello spoglio dei sismogrammi determinati da questo terremoto in diverse stazioni, relativamente ai gruppi d'onde che ci interessano.

Ho potuto avere le registrazioni originali di molti osservatorî. Però mi sono dovuto limitare allo spoglio di quelle ottenute nelle stazioni ad oltre 9500 km di distanza, poichè, data l'intensità della scossa, le registrazioni ottenute negli osservatorî più vicini riuscirono indecifrabili.

Deboli esempi di onda *C* si ebbero ad Atene (tempo di tragitto 31^m 35^s ca., $T = 60^s$ ca.) ad Amboina (38^m 00^s, $T = 30^s$ ca.) e a Batavia (43^m 13^s, $T = 40^s$). Perciò, a differenza del terremoto delle isole Salomone, in cui predominarono gli esempi dell'onda *C*, in questo terremoto si ebbero dovunque amplissime registrazioni di onde *SL*. Bellissimi esempi fornirono De Bilt, Vienna, Zagabria, Belgrado (tav. VII), Riverview, Bombay e Tananarive. Tutti gli esempi riportati confermano, come del resto anche quelli forniti da altri terremoti, la perfetta polarizzazione delle onde in esame nel piano normale a quello principale. Il periodo delle *SL* è risultato alquanto elevato rispetto alla media riscontrata in altri casi. Vedremo più innanzi come può essere spiegato il fatto della registrazione di periodi molto più brevi ad Amboina e Batavia ed anche a Riverview; e come, generalmente, il periodo vada crescendo con la distanza.

Il fatto che il terremoto delle isole Salomone ha provocato esempi netti di onde *C* e invece quello dell'W Messico nettissimi esempi di onde *SL* può essere attribuito al diverso meccanismo origine dei due terremoti, che portò a sollecitare elasticamente più uno strato che un altro della crosta terrestre.

Anche questo terremoto ha dato chiari esempi di onde *G*, però con periodo minore di quello osservato da Gutenberg e Richter per il terremoto delle isole Salomone, cosa questa constatata di frequente in altri terremoti.

Terremoto ad occidente del Messico del 18 giugno 1932 (I. S. S.: $\varphi = 19°, 2$ N ; $\lambda = 104°, 2$ W ; $0 = 10.12.15$). Secondo l'I. S. S. questo terremoto ebbe l'epicentro coincidente con quello del 3 giugno 1932; è probabile però che esso sia avvenuto un po' più discosto dalle coste del Messico di quanto non lo sia stato il precedente. Esso fu d'intensità minore dell'altro, sia pure non di molto.

Seguono i principali esempi dei tipi d'onda in esame, registrati in 11 osservatorî.

Come per il terremoto precedente, anche questo ha dato origine quasi esclusivamente ad onde *SL* (chiare registrazioni di onde *C* si ebbero a Kew – tempo di tragitto 25^m 09^s; $T = 50^s$ ca. – a Uccle – 26^m 24^s; $T = 50^s$ ca. – a Bombay – 42^m 14^s, $T = 60^s$ ca.); l'analogia con l'altro è quindi spiccata.

Stazioni	Δ	*SL*	*T*	*SM*	*T*
Kew	9255 km	29m 17s	33s	33m 05s	24s ca.
Toledo	9465	29 29	32	—	—
Uccle	9580	30 21	33	—	—
De Bilt	9580	30 25	33	—	—
Vienna	10480	32 37	38	35 55	24
Trieste	10480	32 45	36	—	—
Zagabria	10610	33 15	37	—	—
Budapest	10690	33 04	36	—	—
Belgrado	10955	33 20	40 ca.	36 37	33 ca.
Atene	11644	34 28	40 ca.	38 49	30 ca.
Bombay	15755	48 14	43 ca.	52 33	32 ca.
Tananarive	17035	53 05 ?	38	—	—

Esempi nettissimi di *SL* hanno fornito le prime quattro stazioni; anche a Zagabria, Belgrado e Bombay queste onde riuscirono molto chiare.

Terremoto ad occidente del Messico del 22 giugno 1932 (I. S. S.: $\varphi = 19°, 2$ N; $\lambda = 104°, 2$ W; $0 = 12.59.32$). Il terzo dei terremoti ad occidente del Messico registrati nel giugno 1932 fu quello del 22. Esso fu molto meno intenso dei precedenti, specie del primo. Ho già osservato che le onde in esame sono registrate in modo chiaro solo dai sismografi a lungo periodo proprio. Ciò vale specialmente per i terremoti non molto intensi. Ho chiesto quindi i sismogrammi relativi a questo terremoto a un numero assai limitato di osservatorî. Seguono i risultati dello spoglio.

Stazioni	Δ	*SL*	*T*	*SM*	*T*
Kew	9290 km	29m 08s	31s	33m 21s	22s
De Bilt	9610	30 13	31	34 07	25
Uccle	9620	30 12	32	34 08	25 ca.
Firenze	10445	32 31	35	—	—

Abbiamo visto che i due terremoti precedenti, molto più intensi, hanno dato pochissimi esempi di onde *C*; questo terremoto, della stessa provenienza, condivide la particolarità di una quasi totale assenza di onde *C*. Presenta invece, come i due che lo hanno preceduto, dei vistosi esempi di onde *SL* ed anche di onde *SM*.

Terremoto del Kansu del 25 dicembre 1932 (I. S. S.: $\varphi = 39°, 2$ N; $\lambda = 96°4$ E; 0 = 02.04.31). Questo violento terremoto ha dato origine ad amplissimi esempi di onde *C*. Mi sono limitato a farmi inviare i sismogrammi delle quattro stazioni europee in cui funzionano strumenti a lungo periodo: in tal modo, ero certo che in essi le *C* avrebbero nettamente soverchiato le *PS*.

Stazioni	Δ	*C*	*T*	*SL*	*T*
Strasburgo	6765 km	19m 15s	48s	22m 44s	23–24s
De Bilt.	6790	19 15	48	22 40	24
Uccle	6865	19 24	50	22 52	22–25
Kew	7110	19 59	48	—	—

Le registrazioni di questo terremoto, ottenute nelle prime tre stazioni (Uccle e Strasburgo in Tav. I) appaiono tali da far ritenere che la distanza epicentrale delle stazioni stesse sia la minima a partire dalla quale cominciano ad essere registrate le onde *SL* (che presentano anche i periodi minimi). A Kew sembra già notarsi l'intervallazione fra onde *SS* e *SL*. Non v'è traccia di onde *SM*, forse anche perchè mascherate dalle onde trasversali–tangenziali, tipo *G* o *L*.

Terremoto del 2 marzo 1933 (I. S. S.: $\varphi = 39°, 1$ N; $\lambda = 144°, 7$ E; 0 = 17.31.01). Questo terremoto fu particolarmente violento, tanto da provocare in moltissimi osservatori o l'interruzione delle registrazioni, oppure ampiezze tali nelle onde a periodo medio da mascherare completamente quelle a più lungo periodo. È avvenuto così che tutte le onde *C* dei sismogrammi avuti a disposizione, scomparivano nei confronti delle onde *PS* o delle altre onde miste amplissime, con analoghi tempi di tragitto. In molti casi però era evidente la loro presenza; ma, per la ragione detta, non fu possibile dare un approssimato tempo di tragitto. Vistosi furono invece, nelle registrazioni complete ottenute con sismografi a limitato ingrandimento gli esempi di onde *SL* ed *SM*.

Stazioni	Δ	*SL*	*T*	*SM*	*T*
Ksara	9090 km	28m 15s	37s	32m 14s	22
Zagabria	9265	28 55	37	32 30 32 53	25
Trieste	9390	29 10	37	32 35 32 54	24
Toledo	10665	32 31	38	35 30	28
Tananarive	11910	35 00	40 ca.	—	—

In un solo caso è stato possibile dedurre con qualche approssimazione l'inizio delle onde *C*. A La Paz infatti, nella registrazione di un sismografo a piccolo ingrandimento, esse apparvero abbastanza spoglie da altre onde (tempo di tragitto 42m 30s, $T = 60^s$ ca.) Nettissimi risultarono gli esempi di onde *SL* (ed anche *SM*) ottenuti a Ksara, Zagabria, Trieste e Toledo [esempi riportati nella Nota 2a, citata nel n. (6)].

Terremoto del Camtciatca del 17 marzo 1933 (I. S. S.: $\varphi = 54°$, 8 N ; $\lambda = 161{,}7$ E ; 0 = 15.5.30). Questo terremoto è avvenuto mentre, quasi dovunque, si stava registrando una notevole agitazione microsismica. A Trieste però, come di consueto, essa era molto ridotta in ampiezza così da permettere la registrazione di chiarissimi esempi di onde *SL* ed *SM*.

Mi sono limitato allo spoglio dei sismogrammi di De Bilt, Uccle e Kew, oltre a quelli di Trieste.

Stazioni	Δ	*C*	*T*	*SL*	*T*	*SM*	*T*
De Bilt.	7920 km	21m 24s ca.	54 ca.	—	—	—	—
Kew	8080	22 04 ca.	50 ca.	26m 04s	30	30m 24s	22
Uccle.	8080	22 10 ca.	45 ca.	25 58	30	—	—
Trieste	8435	—	—	27 31	32	30 44	22

A Trieste non si ebbe registrazione di onda *C*, causa il relativamente breve periodo proprio dei sismografi. Nelle altre stazioni essa è molto perturbata dall'agitazione microsismica.

Terremoto delle Filippine del 17 marzo 1933 (I. S. S. : $\varphi = 6°, 5$ N ; $\lambda = 127°, 0$ E ; 0 = 19.32.32). Questo terremoto è stato registrato in modo abbastanza chiaro solo dai sismografi più sensibili. Ho quindi limitato le mie indagini ai soli osservatorî di De Bilt, Uccle e Kew, come al solito in casi consimili.

Stazioni	Δ	*SL*	*T*	*SM*	*T*
De Bilt	11500 km	34m 28s ca.	35s ca.	38m 12s	26s
Uccle	11615	34 35	40	38 13	25
Kew	11845	34 48	38	—	—

Non ci furono apprezzabili esempi di onde *C*. Anche le altre onde furono perturbate.

Terremoto ad oriente del Giappone del 18 giugno 1933 (I. S. S. : $\varphi = -38°, 5$ N ; $\lambda = 142°, 8$ E ; 0 = 21.37.36). Questo terremoto, di mediocre intensità, fu registrato chiaramente soltanto nelle stazioni con sismografi particolarmente sensibili : a queste pertanto ho limitato, come già altre volte, il mio esame. Esse figurano qui sotto elencate, con i risultati dello spoglio dei relativi sismogrammi.

Stazioni	Δ	*SL*	*T*	*SM*	*T*
De Bilt	9120 km	28m 47s	35s	32m 00s	25s
Uccle	9280	29 12	35	32 22	24
Trieste	9355	29 22	37	32 30	24
Kew	9380	29 10	40-32	33 11	30-24
Firenze	9645	30 05	36	33 35	25

Fra le registrazioni di questo terremoto non vi furono apprezzabili esempi di onda *C* (a De Bilt, Uccle e Kew esse furono mascherate dalle *PS* ed altre onde miste, molto ampie); ha dato, per contro, delle onde *SL* ed *SM* notevolmente ampie ed inequivocaboli (Tav. III).

Terremoto delle Aleutine del 22 luglio 1933 (I. S. S. : $\varphi = 52°, 9$ N ; $\lambda = 169°, 3$ W ; 0 = 20.55.20). Esempi nettissimi di onde *SL* e chiari

di onde *C* (Tav. II) furono registrati in occasione di questo terremoto presso le stazioni che seguono, delle quali ho potuto avere i sismogrammi originali.

Stazioni	Δ	*C*	*T*	*SL*	*T*	*SM*	*T*
De Bilt	8320 km	22^m (41)^s	(50)^c	26^m 59^s	30^s	30^m 23^s	24^s
Kew	8355	22 32	50	26 55	30	—	—
Uccle	8455	22 48	50	27 12	31	30 45	25
Trieste	9045	—	—	27 58	35	—	—
Piacenza	9110	—	—	28 39	36	—	—

I terremoti provenienti dalle isole Aleutine presentano particolare interesse data la posizione geografica di quelle isole, praticamente a nord delle stazioni europee. In tal modo, si ha campo di mettere in chiaro risalto la polarizzazione perfetta delle onde in questione nel piano normale a quello principale: esse infatti, in ogni caso, figurano registrate esclusivamente sulla componente N–S, mentre le *S*, *SS*, *SSS* appariscono molto più nette sulla componente a 90°.

Terremoto della Cina Centrale del 25 agosto 1933 (I. S. S.: $\varphi = 31°,7$ N; $\lambda = 103°,4$ E; 0 = 07.50.33). Chiarissimi esempi di onde *SL* ha provocato il terremoto del 25 agosto 1933 nelle stazioni con strumenti a grande periodo proprio; vi furono anche due netti esempi di onde *C*.

Stazioni	Δ	*C*	*T*	*SL*	*T*
Zagabria	7355 km	—	—	24^m 11^s	31^s
Trieste	7520	—	—	24 57	35
De Bilt	7790	21^m 00^s	50	25 27	30–32
Piacenza	7835	—	—	25 40	35
Uccle	7910	21 32	52 ca.	25 37	30–32
Kew	8155	—	—	26 22	34

Non si ebbero esempi chiari di onde *SM*. Figurano invece netti esempi di onde tipo *G*, come è attestato dal loro carattere di onde trasversali

e dalla loro velocità di propagazione; il loro periodo però è alquanto minore di quello osservato da GUTENBERG per le *G* propriamente dette.

Terremoto del 14 febbraio 1934 (Jesuit Seismological Association – J. S. A. – : $\varphi = 18°,4$ N ; $\lambda = 119°,5$ E ; 0 = 03.59.45). Terremoto di media intensità ; ho limitato pertanto la richiesta di sismogrammi alle tre stazioni di Uccle, De Bilt e Kew.

Stazioni	Δ	*SL*	*T*	*SM*	*T*
Trieste	9709 km	29m 55s	36s	33m 13s	22s
De Bilt	9944	30 09	34	—	—
Uccle	10065	30 12	35	33 42	24
Kew	10300	31 15	36	34 29	25

Anche questo terremoto non ha dato esempi apprezzabili di onde *C*, sebbene esse appariscano nettamente a Uccle. Nette invece riuscirono le onde *SL* ed *SM*.

Terremoto del 23 gennaio 1935 (J. S. A. : $\varphi = 52°,4$ N ; $\lambda = 166°,0$ W ; 0 = 07.24.18). Come tutti i terremoti di provenienza dalle Aleutine, anche questo ha fornito chiarissimi esempi dei tipi d'onda allo studio. Esso risultò d'intensità tale da essere registrato chiaramente solo dalle stazioni dotate di strumenti sensibili, a lungo periodo. Anche i Galitzin di Pulkovo, pur avendo periodo strumentale e galvanometrico di soli 13s circa, ha dato nettissimi esempi di onde *SL* ed *SM* ; le onde *C* appaiono soverchiate dalle *PS* e da altre onde miste.

Stazioni	Δ	*C*	*T*	*SL*	*T*	*SM*	*T*
Pulkovo	7452 km	—	—	24m 24s	24-25	27m 40s	16s
De Bilt	8359	22m 22s	(50)s	26 43 26 54	29	30 17 30 27	21
Kew	8381	22 34	48	26 56	32	30 35	17
Uccle	8498	22 43	50	27 16 27 21	29	30 39	21
Strasburgo . . .	8765	23 08	50	27 46	32	31 17	19-23

Come per gli altri terremoti delle Aleutine, anche in questo la registrazione dei nuovi tipi d'onda si è verificata esclusivamente sulle componenti N–S, che coincidevano, con grande approssimazione, con la direzione di provenienza del terremoto.

Terremoto dell'America centrale del 14 dicembre 1935. (J. S. A.: $\varphi = 15°,0$; $\lambda = 92°,9$ W ; 0 = 22.05.20). Questo terremoto, di media inten-

Stazioni	Δ	*C*	*T*	*SL*	*T*	*SM*	*T*
Kew	8881 km	24m 02	48s	27m 49s	35s	30m 55s	25s
Uccle.	9211	24 54	48	28 49	35	32 06	25
De Bilt	9231	24 56	48	28 55	...	32 17	26
Strasburgo . . .	9517	25 47	48	—	—	—	—
Trieste	10050	27 10	50 ca.	30 27	38 ca.	34 02	27

sità, nelle quattro stazioni con strumenti Galitzin di 25s (periodo strumentale e galvanometrico) hanno dato luogo ai più nitidi, inequivocabili esempi di onde *C* che finora abbia avuto modo di osservare (Tav. V). A Trieste, dove i sismografi avevano solo 12s di periodo proprio, la registrazione delle *C* appare alquanto perturbata e piuttosto incerto ne risulta il periodo. Nettissime risultarono pure le altre onde *SL* ed *SM*. Come del resto in tutti i casi osservati, anche in questo appare chiara la diminuzione del periodo quando si passa dalle onde *C* alle *SL* e da queste alle *SM*.

Terremoto del 21 febbraio 1937 (J. S. A.: $\varphi = 45°,2$ N ; $\lambda = 148°,6$ E; 0 = 07.02.45). Di questo terremoto ho chiesto solo le registrazioni ottenute nelle quattro stazioni, più volte citate, in cui la sensibilità e il periodo degli strumenti è tale da consentire una chiara registrazione dei tipi d'onda in esame.

Stazioni	Δ	*C*	*T*	*SL*	*T*
De Bilt	8639 km	23m 42s	56 ca.	27m 39s	35s ca.
Uccle	8794	23 29 ca.	54 ca.	28 20	33
Kew	8855	24 03	50 ca.	28 09	33
Strasburgo	8907	23 42 ca.	54 ca.	28 20	35

L'inizio dell'onda *C*, emersa abbastanza ampia, appare mascherato dalle onde miste : riesce pertanto difficile determinarlo con buona approssimazione; lo stesso dicasi del relativo periodo. Nessun chiaro esempio di onda *SM*, mentre vistose sono emerse le *SL*.

Terremoto del Montana del 28 giugno 1925 ($\varphi = 46^\circ\ 24'$ N ; $\lambda = 111^\circ\ 14',5$ W ; 0 = 01.21.05). Questo terremoto è stato studiato da Perry Byerly (8). Nel suo lavoro sono riportate alcune riproduzioni di sismogrammi. Soltanto quelle dei sismogrammi di tre stazioni appartenevano ad apparecchi Galitzin, a lungo periodo strumentale e galvanometrico. In questi sismogrammi risultano chiari gli esempi di onde *SL*, *SM*. Solo sui sismogrammi di De Bilt apparisce abbastanza chiara l'onda *C* (su entrambe le componenti, la direzione di provenienza del sisma, per De Bilt, essendo prossima a SW), notata dallo stesso Byerly (pag. 247 del Bollettino citato), naturalmente come onda sconosciuta, con un periodo di 39^s.

Stazioni	Δ	*C*	*T*	*SL*	*T*	*SM*	*T*
Eskadalemuir . .	6855 km	—	—	23^m 21^s	23^s	(25^m 45^s)	21^s
De Bilt.	7500	21^m 15^s	39^s	25 10	27	28 03	22
Uccle.	7567	—	—	25 05	27	28 00	21

Mentre i sismogrammi delle due prime stazioni sono riprodotti nella Nota di Byerly, mancano quelli di Uccle, per i quali ho dovuto quindi limitarmi all'interpretazione di Byerly, che del resto, per quanto riguarda gli altri, coincide con la mia.

Come ho già detto, Byerly non trova una spiegazione all'onda *C* registrata a De Bilt ; le *SL* e *SM* registrate nelle stazioni citate, egli le confonde con *SS*, *SSS* (a quella distanza quei gruppi d'onde hanno tempi di tragitto che differiscono di poco) e per darsi ragione del loro insolito, lungo periodo (specie rispetto a quello delle *S*), ritiene che ciò sia da attribuirsi ad un più rapido smorzamento dei corti periodi nei tragitti *SS*, *SSS* in confronto al tragitto della *S*. A ciò si potrebbe obiettare che, in tal caso, il periodo delle *SSS* dovrebbe riuscire maggiore (o per lo meno uguale) di quello delle *SS*, ciò che non si verifica nè in questo nè in nessun altro caso, come abbiamo avuto occasione di vedere; anzi, avviene sempre nettamente il contrario.

Terremoto della Nuova Zelanda del 16 dicembre 1938 (Epic. secondo Wellington : $\varphi = 45^\circ$ S ; $\lambda = 167^\circ$ E ; 0 = 17.21.25). Verso la metà

di dicembre del 1938 si verificarono parecchie scosse nei pressi della Nuova Zelanda meridionale. Di esse, la più notevole fu quella del 16 ad ore 17.21,5 ca. L'epicentro dato da Wellington ha solo carattere provvisorio; esso è alquanto approssimativo.

Dalla registrazione ottenuta in Roma con gli apparecchi Galitzin, a quel tempo ancora in periodo di prova, mi ero accorto della presenza di onde del tipo di quelle qui studiate. Lo spoglio dei sismogrammi originali di De Bilt e di Uccle ha fornito i risultati qui sotto riportati.

Stazioni	Δ	C	T	C_2	T	SL	T
De Bilt	18450 km	$48^m\ 25^s$	55^s ca.	—	—	$53^m\ 30^s$	38^s ca.
Uccle.	18560	48 50	60 ca.	$54^m\ 45^s$	54^s ca.	53 46	40–50

Con C_2 si indica l'onda C pervenuta alla stazione d'osservazione lungo l'arco di cerchio massimo più lungo.

Come abbiamo osservato, le coordinate epicentrali di questo terremoto sono approssimative: i tempi di tragitto dei tre tipi d'onda non possono pertanto ritenersi a carattere definitivo.

* * *

L'esempio di onda C osservato alla più piccola distanza epicentrale è quello registrato a Tokyo, con apparecchio a lungo periodo proprio, in occasione del forte terremoto indiano del 15 gennaio 1934. Non ho potuto avere il sismogramma originale: le registrazioni sono state però chiaramente riprodotte nel «Seismological Report» di Tokyo (1934, parte I), nel quale figurano pure i tempi delle P e delle S. L'esempio è nettissimo (Tav. I) e segue di pochi secondi l'inizio delle S. È quindi di notevole interesse, in quanto la distanza epicentrale relativa si mostra prossima alla distanza–origine di questo tipo d'onda (4500–5000 km.).

Anche a Roma, nel primo anno e mezzo dall'inizio del funzionamento di questa nuova stazione di prim'ordine, sono stati registrati molti esempi di onde SL, SM_1 ($SM_1 = SM$) $\cdots$ Mi limito a riportare i seguenti, assieme ad alcuni dati di Trieste:

27 giugno 1939 (est di Mindanao; S. J. A.: $\varphi = 7°,8$ N; $\lambda = 126°$ E; 0 = 23.04.27).

Registrazione di Trieste: SS 23.35.42, T = 10^s; SL 23.37.27 $T = 45^s$; SSS 23.39.40, $T = 21^s$; iSM 23.41.58, $T = 28^s$; $\Delta =$ 11057 chilometri (dal Bollettino sismico di quella stazione).

Registrazione di Roma (Tav. VII): *SS* 23.37.22 , T = 22^s ; *SL* 23.38.16 , *T* = 35^s ; *SSS* 23.41.25 , *T* = 22^s ; *iSM* 23.42.31 , *T* = 30^s; Δ = 11303 km.

10 ottobre 1939 (J. S. A.: φ = 41°,2 N ; λ = 143°,4 E ; 0 = 18.32.12).

Registrazione di Trieste : *SS* 19.00.28 , *T* = 8^s ; *SL* 19.00.46 , *T* = 27^s ; (*SSS*) 19.03.52 , *T* = 9^s ; *SM* 19.04.46 , T = 20^s ; Δ = 9200 km. (dal Bollettino sismico della stazione di Trieste).

Registrazione di Roma : *iSS* 19.01.31 , *T* = 24^s ; *iSL* 19.02.39 *T* = 32^s ; *SSS* 19.04.29, *T* = 20^s ; *iSM* 19.05.29 , *T* = 24^s ; Δ = 9532 chilometri.

5 dicembre 1939 (J. S. A. : φ = 13°,5 N ; λ = 90°,9 W ; 0 = 09.30.10).

Registrazione di Roma (Tav. VII): *SS* 10.00.04 , *T* = 22^s ; *iSL* 10.00.46 , *T* = 30^s ; *SSS* 10.03.47 , *T* = 19^s ; *iSM*$_1$ 10.04.30 , *T* = 28^s; *iSM*$_2$ 10.07.19 , *T* = 27^s ; *iSM*$_2$ 10.07.51 , *T* = 22^s ; Δ = 10076 km.

Altri esempi furono registrati a Roma in occasione dei terremoti del 6 maggio 1939, del 5 aprile 1939, ecc. Da notare che le onde *C* dànno a Roma registrazioni molto poco accentuate, le *SL* hanno per distanze medie, periodi non superiori a 30–33^s e le *SM*$_1$ presentano invece periodi fino a 28^s; a Trieste si verifica generalmente il fenomeno contrario: grandi periodi per le *SL* e alquanto più piccoli per le *SM*$_1$, ecc.

3. Ho già osservato che a Victoria B. C. la *C* e la *SL* del terremoto del 3 ottobre 1931 sono state registrate con periodi alquanto inferiori a quelli osservati generalmente per altre stazioni, per la stessa distanza epicentrale. Lo stesso si è verificato per le *C* ed *SL* registrate ad Amboina e Batavia in occasione del terremoto del 3 giugno 1932, nonchè per la *SL* dello stesso terremoto registrata a Riverview.

Riguardo al terremoto del 3 ottobre 1931, l'intero tragitto delle onde superficiali dall'epicentro a Victoria è stato percorso in corrispondenza dell'Oceano Pacifico. La stessa cosa si è verificata per i casi citati del terremoto del 3 giugno 1932 per le stazioni di Amboina, Batavia e Riverview (Sydney). Il minor periodo osservato in queste stazioni non sembra quindi dovuto a pura coincidenza ma piuttosto ad un fenomeno che deve avere stretta relazione con la natura del tragitto percorso dai sistemi d'onda citati. È noto, per esempio, che lo spessore dello strato del granito in corrispondenza dell'Oceano Pacifico è pressochè nullo. Poichè le onde in esame hanno carattere di onde superficiali, il fatto che esse presentino periodi alquanto inferiori ai normali nelle stazioni a cui pervengono dopo un tragitto completamente compiuto sotto l'Oceano Pacifico, può essere messo in relazione appunto con il minor spessore degli strati superficiali da esse interessati.

Oltre a ciò le onde con tragitto transoceanico sembrano presentare, a parità di periodo, una velocità più o meno maggiore di quella osservata

per onde con percorso transcontinentale. Ciò che del resto si verifica in modo molto chiaro per le onde della fase principale.

Indipendentemente da ogni altra considerazione, questi fatti sono in appoggio di un tragitto superficiale per le C , SL , SM_1 . ecc.

4. Sempre relativamente al periodo, osservo che alle minime distanze a partire dalle quali comincia la registrazione dei sistemi d'onda in questione, si hanno esempi di onde SL con periodi alquanto inferiori alla media: così per il terremoto del Montana del 28 giugno 1925, per quello del Kansu del 25 dicembre 1932, ecc. A partire da queste distanze le onde in parola subiscono quindi dispersione da parte del mezzo. Lo stesso dicasi per le SM. Il fenomeno è meno accentuato per le C. Ne vedremo più oltre la ragione.

5. Ho calcolato le dromocrone in base ai tempi di tragitto delle varie onde per i diversi terremoti presi in esame. Ho escluso alcuni dati incerti.

La dromocrona delle onde C, ottenuta con i dati di 36 stazioni, risultò avere la seguente equazione (con le unità per i tempi e le distanze che figurano nel grafico : $10^m = 5$; 1000 km = 2.5):

$$y^2 - 0{,}347558 \cdot x^2 = 41{,}277 ,$$

che è l'equazione di una iperbole.

La dromocrona delle SL, determinata con i tempi di 73 stazioni, con i riferimenti prefissati, è risultata la seguente :

$$y^2 - 0{,}417315 \cdot x^2 = 75{,}024,$$

che è pure l'equazione di un'iperbole.

Ad un risultato analogo si perverrebbe anche per le SM e i gruppi successivi, ma ho ritenuto di evitare i calcoli, poichè i dati a disposizione sono alquanto discordanti, pur essendovi tra essi degli esempi bellissimi.

Le dromocrone delle onde esaminate possono quindi essere assimilate a rami di iperbole, con la concavità rivolta verso l'alto. La velocità delle C, SL , SM_1, ecc. tende quindi crescendo, asintoticamente, verso un valore costante. Questa particolarità, oltre a confermarci che si tratta realmente di onde superficiali, suggerisce l'idea attendibile che le onde C , SL , SM_1, ecc. siano generate, negli strati superficiali, dall'urto contro la superficie terrestre di onde spaziali di minore velocità. Da quanto si può arguire dall'osservazione, possiamo affermare che le onde che generano per urto contro le stratificazioni superficiali terrestri le C, SL, SM ecc. sono le S , SS , SSS, ecc. rispettivamente. Questo sembra mostrare anche la Tav. X.

La distanza epicentrale a cui sembrano iniziare i diversi tipi d'onda all'esame varia da tipo a tipo e cresce passando dalle C alle SL, da queste alle SM, ecc.

Naturalmente le dromocrone così dedotte non possono essere che approssimative e ne vedremo più oltre le ragioni. Per ora, basterà osservare che esse sono dedotte usufruendo dei dati relativi a più terremoti, di diversa origine e diversa profondità ipocentrale.

Nelle Tav. da I a IX sono riprodotti parecchi esempi delle onde oggetto di questo studio. Alcuni furono tratti dalla 2ª Nota citata in (1) (Tav. I – Uccle e Strasburgo – e Tav. V) dove figurano pure numerosi esempi caratteristici, dai quali apparisce netta la distinzione fra onde S e C, SS e SL, SSS e SM_1, ecc. che può essere riscontrata anche in molti di quelli riportati nella presente Nota.

Come risulta dalla Tav. X l'incrocio fra le dromocrone delle C e delle SS avviene fra 14000 e 15000 km; la Tav. IX dà un esempio significativo della coesistenza di questi due tipi d'onde a quelle distanze.

6. Vediamo se è possibile spiegare, dal punto di vista teorico, le onde in esame.

È noto che l'equazione più generale dei possibili movimenti in un corpo solido quando si prescinda dall'azione della gravità, è della forma (limitando il riferimento all'asse x)

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \mu \Delta_2 u,$$

essendo ϑ il coefficiente di dilatazione cubica.

Però, nella propagazione, parte dell'energia viene assorbita dal mezzo.

Nell'ipotesi semplice che la perdita d'energia per assorbimento si ritenga proporzionale all' accelerazione, indicando questa perdita con $k \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, l'equazione precedente diventa

$$(\rho + k) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \mu \Delta_2 u,$$

e quindi nelle espressioni delle velocità in luogo di ρ si deve considerare $\rho + k$. Si ha cioè, indicando con v_1, v_2 le velocità delle onde longitudinali e trasversali rispettivamente,

$$v_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho + k}}, \qquad v_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho + k}}.$$

In tal caso, le onde si propagano quindi più lentamente di quando non subiscono smorzamento da parte del mezzo.

Se invece riteniamo l'assorbimento da parte del mezzo proporzionale alla velocità di propagazione della sollecitazione elastica $\left(\text{e lo indichiamo p. es. con } h\frac{\partial u}{\partial t}\right)$, limitandoci alle onde piane e ponendo $2\varepsilon = h/\rho$, avremo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\varepsilon\frac{\partial u}{\partial t} = V_0^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot \qquad [2]$$

Questa è un'equazione differenziale, alle derivate parziali, lineare, di second'ordine, a coefficienti costanti; come tale, essa ammette un integrale del tipo $\Sigma e^{\alpha x+\beta t}$. Nel nostro caso si ha

$$u = e^{\left(-\varepsilon + i\frac{2\pi}{T}\right)t - i\frac{2\pi}{L}x}$$

dove T, L sono il periodo e la lunghezza d'onda, e quindi $L = VT$, essendo V la velocità costante di propagazione. Sostituendo in [2] ad u la sua espressione si arriva infine alla relazione

$$V^2 = V_0^2 - \left(\frac{\varepsilon L}{2\pi}\right)^2,$$

V_0 potendo rappresentare sia la velocità delle onde longitudinali, sia quella delle onde trasversali.

Se ne deduce che, in questo caso, la velocità di propagazione dipende dalla lunghezza d'onda: per onde molto brevi la velocità è praticamente uguale a quella relativa ad un mezzo non assorbente; con il crescere della lunghezza d'onda, diminuisce la velocità. In questa ipotesi si ha quindi *dispersione anomala.*

Se le onde di cui ci stiamo occupando fossero spaziali, esse potrebbero senz'altro ritenersi come dispersioni delle S, SS, SSS, ... rispettivamente: conformemente alla teoria infatti le onde a periodo maggiore risultano le più distanziate dalle relative onde di cui dovrebbero costituire la dispersione (gli intervalli fra le S e C, le SS e le SL, ecc. vanno gradatamente scemando).

Però, anche prescindendo dal fatto che le C, SL, SM_1, ... presentano carattere di onde superficiali, altre ragioni inducono a ritenere erronea questa ipotesi. Fra l'altro, mentre le S, SS, SSS, ... hanno periodi consimili (e, caso mai, si osservano ripetizioni con periodi maggiori di quelli delle S), le loro dispersioni verrebbero ad aver periodi successivamente decrescenti, e il divario, nel caso delle S, può essere di 10 e più volte tanto. Inoltre, mentre le S e le loro ripetizioni possono oscillare in qualsiasi piano (si hanno molti esempi significativi a questo riguardo) le onde derivate per dispersione verrebbero a propagarsi esclusivamente nel piano principale. Il che sembra inesplicabile.

Resta quindi attendibile l'ipotesi che le onde in parola siano dovute all'urto delle S e sue riflessioni contro la superficie della Terra.

Le dromocrone tracciate sono naturalmente approssimative. Sulla velocità di propagazione delle onde superficiali influisce molto la natura degli strati attraversati, lo spessore di questi ultimi, ecc. La tendenza delle C , SL , SM_1 , ecc. ad aumentare la velocità con la distanza può essere attribuita ad almeno due cause: al fatto che le C , SL , ... sono generate da onde aventi velocità minore di quella che poi esse acquistano e alla dispersione normale, che si manifesta in modo sensibile specie sui periodi intermedi.

Circa la variazione del periodo con la distanza si può trarre una semplice relazione dai risultati di un lungo studio compiuto da Sezawa [9] sulla propagazione delle onde in un mezzo visco–elastico. Per sviluppare la sua teoria Sezawa introduce due nuove costanti λ' , μ' rappresentanti lo stato della viscosità, come λ e μ caratterizzano l'elasticità del mezzo: e precisamente λ' per la viscosità di volume e μ' per la viscosità equivoluminale. In tal modo, le tensioni normali assumono la forma

$$N_1 = \lambda\vartheta - 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} - \lambda'\frac{\partial\vartheta}{\partial t} - 2\mu'\frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial x} ,$$

e due altre analoghe per N_2 , N_3 . A loro volta le tensioni tangenziali diventano

$$T_1 = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) - \mu'\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right),$$

e due analoghe per le T_2 , T_3.

Sostituendo queste espressioni delle tensioni normali e tangenziali nelle equazioni più generali del moto

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T_3}{\partial y} - \frac{\partial T_2}{\partial z} = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} ,$$

(e due analoghe per v e w), si perviene alle equazioni del moto in un corpo isotropo elasto–viscoso.

Sezawa discute alcuni casi particolari, suggeritigli dall'esperienza, che lo conducono ad espressioni caratteristiche degli spostamenti u , v , w. In uno di questi casi l'espressione di u risulta

$$u = \frac{B}{2\sqrt{\ldots}}\,e^{-\frac{(x - v_1 t)^2}{4\ldots}}$$

con un altro termine in $e^{-\frac{(x - v_1 t)^2}{4\ldots}}$, che però svanisce rapidamente con la distanza. Nell'espressione di u, v_1 è la velocità delle onde di con-

densazione (le conclusioni valgono anche per le onde di distorsione), $w_1 = \frac{\lambda' + 2\mu'}{2\rho}$ e B, b sono delle costanti.

Nei sistemi d'onde così ottenuti il massimo si propaga con la velocità v_1. Analogamente a quanto si fa per i treni d'onde sinusoidali, definiamo come lunghezza d'onda la distanza doppia fra due punti consecutivi, in cui si raggiunge mezzo massimo. La distanza x del luogo in cui, ad un determinato tempo t si raggiunge la metà del massimo si ha evidentemente risolvendo, rispetto ad x, la

$$e^{-\frac{(x-v_1 t)^2}{4 w_1 t + b^2}} = \frac{1}{2}.$$

Se ne deduce

$$x = v_1 t \pm \sqrt{2 \cdot 8\, w_1 t + 0 \cdot 7\, b^2}$$

(il massimo corrisponde evidentemente a $x = v_1 t$), e quindi, per la lunghezza d'onda prima definita,

$$L = \sqrt{2 \cdot 8\, b^2 + 11{,}2\, w_1 t}.$$

Per $t = 0$, $L = 2{,}8\, b = L_0$. Pertanto potremo scrivere,

[3] $$L = \sqrt{L_0^2 + \alpha t},$$

dalla quale risulta che, a partire da un valore L_0, in pratica irrealizzabile, la lunghezza d'onda tende ad aumentare con legge parabolica.

Un confronto quantitativo fra teoria e pratica riesce soltanto approssimativo, poichè la relazione scritta vale solo per onde piane. Può avere comunque il suo interesse.

Dalla [3], posto $L = VT$, $t = \frac{\Delta}{V}$, otterremo per il periodo T di un'onda piana ad una distanza Δ, con esclusione dei valori prossimi a $\Delta = 0$,

$$T = \sqrt{T_0^2 + \frac{\alpha \Delta}{V^3}}.$$

Consideriamo ad es. il caso delle onde superficiali-tangenziali Q. In uno studio sul terremoto del Cansiglio del 18 ottobre 1936 ho provato che la velocità di propagazione di queste onde è di 3,16 km/sec ca. Ho trovato inoltre che il periodo di dette onde, molto breve per le piccole distanze, intorno i 2000 km. si aggira fra 13 e 15 secondi.

Nell'ipotesi della validità della [3], abbiamo la possibilità di dedurre l'ordine di grandezza di α per $T_0 = 1^{\text{sec}}$ (valore molto vicino al vero). Avremo

$$\alpha = 3{,}5 \text{ km}^2 \text{ sec}^{-1}.$$

Ne segue

[4] $$T = \text{ca}\sqrt{T_0^2 + \frac{\Delta}{10}}$$ (distanza in km, periodi in sec).

Per fare un confronto con le onde all'esame, si prenda per T_0 il valore del periodo nel punto in cui si ritiene abbiano origine le onde C, SL, $\cdots$ per urto delle S, SS, $\cdots$; applicando la [4], le distanze si intendono contate a parte dai rispettivi punti origine delle varie onde.

La C comincia ad essere registrata intorno a 5000 km (è probabile però che la distanza origine sia anche inferiore). A questa distanza queste onde hanno, in media, un periodo di 45^s ca. Contando le distanze a partire da 5000 km ($\Delta = O$) e per $T_0 = 45^s$, dalla [4] avremo

Distanza	5000 km	6000	8000	10000	12000	14000	16000	18000	20000
T (sec). . .	45	46	48	50	52	54	56	58	59

Passiamo alle SL. Consideriamo come distanza origine di queste onde la distanza epicentrale di 6500 km; riteniamo 25^s, 29 e 32 come tre probabili valori del periodo–origine. Avremo allora:

Distanza	6500km	7000	8000	9000	10000	12000	14000	16000	18000	20000
T (sec). . .	25	26	28	30	31	34	37	40	42	44
T . . .	29	30	32	33	35	37	40	42	45	47
T . . .	32	33	35	36	37	40	42	45	47	49

Procediamo in modo analogo con le SM_1. La distanza epicentrale–origine può ritenersi di 7000 km. ca. Applicando la [4] con i probabili periodi–origine 17 e 20^s otterremo:

Distanza	7000km	8000	9000	10000	11000	12000	14000	16000	18000	20000
T (sec). . .	17	20	22	24	26	28	31	34	37	40
T . . .	20	22	24	26	28	30	33	36	39	41

Nelle figg. 1, 2, 3 sono riportati, a tratto continuo, i valori calcolati con la [4], partendo da diversi valori dei periodi alle diverse distanze–origini; i punti rappresentano invece i valori osservati. Si nota da esse il buon accordo fra teoria ed osservazione, accordo che riesce tanto più significativo quando si pensa che i valori osservati sono relativi alle più disparate provenienze e ai più diversi luoghi e strumenti d'osservazione, e si tiene presente l'eterogeneità della crosta terrestre, nonchè il diverso spessore degli strati che la compongono, da regione a regione.

L'aumento del periodo con la distanza, quando si consideri un mezzo visco–elastico, è quindi provato con buonissima approssimazione. Poichè la teoria vale sia per le onde longitudinali che per le trasversali (e quindi, eventualmente, anche per le miste), possiamo ritenere che il valore di α negli strati superficiali terrestri sia prossimo a quello calcolato in base all'osservazione delle onde Q.

Le considerazioni che precedono sono relative ad un mezzo non dispersivo. In esse si considera la velocità di fase V. Ma in un mezzo dispersivo, in un mezzo cioè in cui la velocità delle onde dipende dal loro periodo, i diversi treni costituenti un gruppo d'onde si propagano con velocità diversa: la velocità del gruppo è quindi diversa da quella media dei singoli treni.

La velocità C del massimo principale di un gruppo (velocità di gruppo) è legata alla velocità V di fase, con la quale il movimento si propaga, e alla lunghezza d'onda L dalla relazione

$$C = V - L\frac{\partial V}{\partial L}.$$

In mancanza di dispersione $\left(\frac{\partial V}{\partial L} = 0\right)$, tutti i massimi si propagano con velocità $C = V$ e l'intero treno d'onda conserva la sua forma; con dispersione, le ampiezze variano e il massimo del gruppo assume una velocità C diversa da V.

Per onde brevissime ($L \sim 0$), $C = V$. Se la velocità aumenta con la lunghezza d'onda $\left(\frac{\partial V}{\partial L} > 0\right)$, caso della dispersione normale, è $C < V$: la velocità del gruppo, costituito d'onde di periodi poco diversi l'uno dall'altro, è minore di quella di ogni singola onda componente. Un'onda determinata avanza attraverso il gruppo, scomparendo gradualmente a mano a mano che si avvicina al fronte, mentre il suo posto nel gruppo viene occupato da un'altra onda che avanza dalla coda. Nel caso di dispersione anomala $\left(\frac{\partial V}{\partial L} < 0\right)$ è $C > V$: il massimo avanza nella direzione di propagazione, le piccole onde del fronte d'onda crescono, diminuiscono invece le onde più tarde.

In sismologia non si perseguono le singole onde, ma soltanto l'inizio del movimento o il massimo; si osserva quindi C e non V. I tremiti preliminari hanno dispersione piccolissima, così che per essi praticamente C coincide con V.

Può esistere dispersione anche nel caso in cui C risulti indipendente dal periodo T. Ne viene infatti

$$C = V - L\frac{\partial V}{\partial L} = \text{cost}.$$

e la soluzione $V = V_0 + \frac{\partial V}{\partial L} L$ può benissimo corrispondere ad un'altra possibile ipotesi sul termine aggiuntivo nell'equazione generale del moto, corrispondente ad un diverso tipo di reazione da parte del mezzo.

Sappiamo dall'osservazione delle onde superficiali costituenti la così detta fase principale che effettivamente la velocità di propagazione dei treni d'onda negli strati superficiali terrestri cresce con il periodo: in essi quindi quella che si verifica è la dispersione normale. L'effetto della dispersione è massimo per i medi periodi; ed è invece trascurabile per periodi molto piccoli o molto grandi. Per periodi molto piccoli o molto grandi la curva di dispersione (C, T) si dispone quindi parallelamente all'asse dei periodi, e le velocità di gruppo tendono quindi alle rispettive velocità di fase.

Questo risulta già dalla teoria delle onde di Love; è stato provato con i dati d'osservazione relativi alle onde superficiali da Von zur Mühlen (10) e, per le onde di Love in tre strati sovrapposti da Heinz Menzel (11).

Poichè quanto è sopra discusso deve ritenersi valido per le onde superficiali in genere, resta così spiegato non solo l'aumento del periodo con la distanza, ma anche l'aumento con la distanza della velocità (di gruppo o di fase, indifferentemente) delle onde C, SL, SM_1, $\cdots$

Ho già osservato che le dromocrone calcolate per queste onde sono approssimative. Di fatto, esse sarebbero valide per onde a periodo costante. Ma l'aumento del periodo con la distanza e la dispersione fanno sì che, come per le onde lunghe e massimali, sia più giusto parlare di una serie di dromocrone parallele a quella calcolata, dalla parte dell'asse delle distanze, e inizianti a distanze via via crescenti.

L'effetto della dispersione si presenta massimo per le SM_1, notevole per le SL e meno apprezzabile per le C: ciò in accordo con la teoria e l'osservazione delle onde superficiali della fase principale, dalle quali risulta che la dispersione va gradatamente scemando con i grandi periodi per rendersi pressochè nulla per periodi di 60^s circa.

Resta quindi giustificata la demoltiplicazione della dromocrona relativa alle SL come da Tav. X.

7. In una Nota precedente sulle onde *SL* ed *SM* avevo ritenuto queste onde come longitudinali. Un'osservazione più attenta delle onde stesse su esempi più chiari, in tutte e tre le componenti, e la rettifica del senso di spostamento della componente SW–NE Wiechert di Zagabria [Tav. I della Nota 2ª, citata al n. (6)] mi hanno permesso di giungere alle seguenti conclusioni.

Le onde *SL* (almeno per gli esempi che hanno dato una chiara componente verticale) si comportano come *onde trasversali oscillanti nel piano principale*. Ciò è messo in chiara evidenza da parecchi esempi, fra i quali quelli qui sotto citati, che hanno dato una netta registrazione su tutte e tre le componenti:

1° Terremoto del 2 marzo 1933, registrazione di Zagabria. Direzione di provenienza della scossa: NE. Registrazione delle *SL* ed *SM* sulla sola componente NE–SW (onde *C* mascherate dalle *PS*): le componenti orizzontali delle *SL* ed *SM* dànno quindi la direzione di provenienza della scossa. Spetta alla componente verticale lo stabilire se si tratta di onde longitudinali o trasversali polarizzate normalmente al piano verticale di propagazione. La *SL* ha il primo impulso verso NE, in senso orizzontale, e verso l'alto (compressione) in senso verticale: non si tratta quindi di onda longitudinale. I massimi poi si succedono, sulle due componenti, con un certo sfasamento. La *SL* ha quindi, in questo caso, carattere di onda trasversale oscillante nel piano principale. Le *SM* sembrano procedere in modo analogo: ma l'esempio, perturbato da altre onde, è meno chiaro a questo proposito.

2° Terremoto del 18 giugno 1933. Registrazione di De Bilt. Anche qui le componenti orizzontali delle onde *SL* (ci sono pure chiare tracce di onde *C*) dànno la perfetta direzione di provenienza della scossa. Senonchè la componente verticale è di segno contrario a quello che dovrebbe essere (compressione anzichè dilatazione) se si trattasse di onda longitudinale. Anche in questo caso quindi la *SL* si presenta come onda trasversale polarizzata normalmente al piano principale. La *SM* non ha componente verticale sufficientemente chiara.

3ª Lo stesso terremoto. Registrazione di Kew. La debole componente verticale fa apparire, anche per Kew, la *SL* come onda trasversale oscillante nel piano verticale di propagazione.

Le onde SM_1 dovrebbero avere comportamento identico; ma gli esempi sono contradditorî. Così nella registrazione di Kew del terremoto 22 luglio 1933 l'onda *SM* appare perfettamente longitudinale (nel primo impulso), per concorde responso delle tre componenti. Noto però che la componente verticale inizia circa 3ˢ prima della componente N–S (che segna la direzione di provenienza del terremoto) e che i massimi si susseguono sfasati (come accade per le onde di Rayleigh propriamente dette), le *SM* presentando periodi diversi sulle due componenti. Per contro,

il netto esempio di onde *SM* ottenuto a Trieste in occasione del terremoto al largo di Mindanao del 27 giugno 1939, secondo quanto riporta il bollettino della stessa stazione, si presenta come gruppo di oscillazioni trasversali, polarizzate normalmente al piano principale.

Queste discordanze dipendono probabilmente dal fatto che le componenti verticali sensibili in uso hanno periodi che non superano 13^s. Ora, poichè le *SL*, *SM* sono costituite da gruppi d'onde, le componenti verticali in genere captano ed esaltano le componenti a più breve periodo. La questione potrà quindi essere chiaramente risolta solo in ricerche successive. Comunque, possiamo per ora ritenere le *SL* (e quindi anche gli altri sistemi d'onde studiati) come onde trasversali oscillanti nel piano verticale di propagazione del movimento.

Che l'oscillazione di questi sistemi d'onde avvenga realmente nel piano principale è ormai provato da centinaia di registrazioni. Le *C*, *SL*, SM_1, servono molto bene per la determinazione dell'azimut dell'epicentro. Osservo anzi che tutto il gruppo d'onde di cui ogni sistema è costituito oscilla nel piano principale; fra i tanti esempi al riguardo, mi limito a riportare quelli riprodotti nelle figg. 4 e 5. Le eventuali, lievi discordanze sono da attribuire alla sovrapposizione di onde di altra natura.

8. In una Nota precedente ho provato che la *C*, accoppiata con la *G*, soddisfa, con buonissima approssimazione, quando si faccia $\sigma = 0{,}17$, ad una teoria di Somigliana sulla propagazione delle onde sismiche, teoria che conduce ad una relazione fra le velocità identica a quella di Rayleigh:

$$[1'] \qquad 16\,(1 - h^2 v^2)\,(1 - k^2 v^2) = (2 - k^2 v^2)^4$$

dove $h^2 = \dfrac{\rho}{\lambda + 2\mu}$, $k^2 = \dfrac{\rho}{\mu}$, e dalla quale segue subito la [1].

Nella teoria di Lord Rayleigh (secondo l'esposizione di Galitzin) le radici dell'equazione [1'] devono soddisfare alla relazione

$$q^2 = m^2\,(1 - \chi)\,,$$

dove m e q_2 sono certe grandezze che entrano nella teoria stessa e $\chi = k^2 \cdot r^2$ è una delle tre radici della [1'].

Possono quindi soddisfare il problema soltanto radici reali minori dell'unità.

L'equazione di Rayleigh per valori di σ tratti dall'esperienza (fra 0,16 e 0,30) ha sempre tre radici reali; una sola di quelle è minore della unità.

Quindi, nella teoria originale di Lord Rayleigh può esistere un solo gruppo d'onde, e precisamente quel gruppo che corrisponde all'unica radice dell'equazione di Rayleigh minore dell'unità.

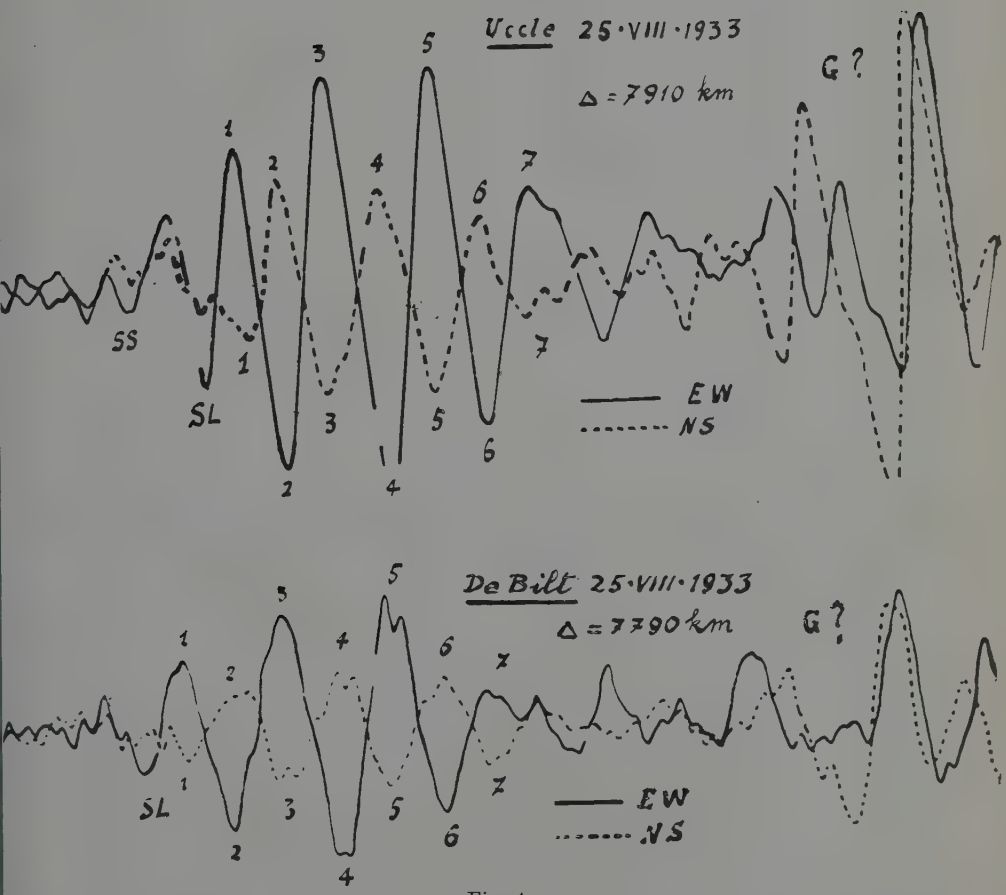
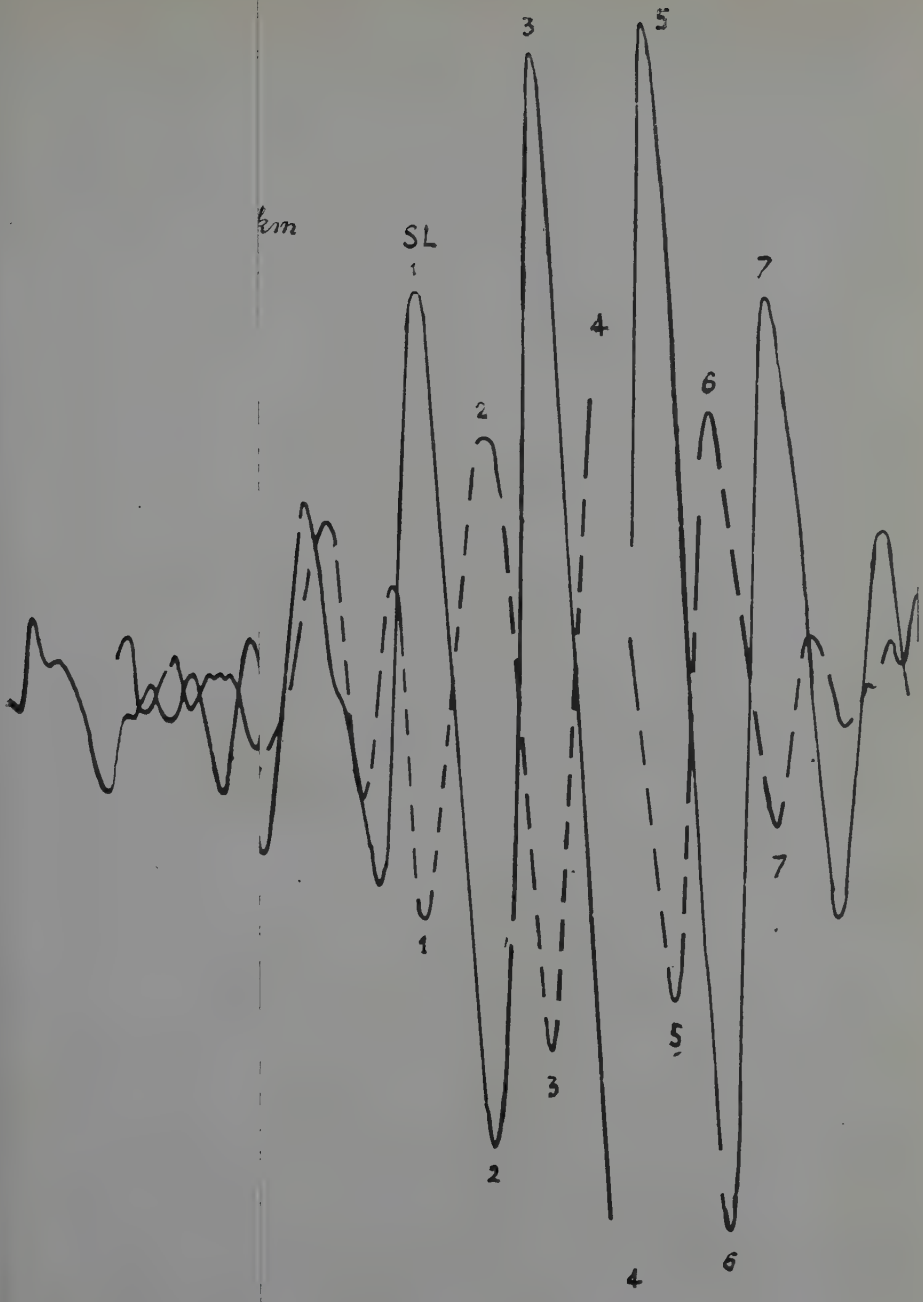

Uccle 25·VIII·1933
Δ = 7910 km
G?
SS
SL
EW
NS
De Bilt 25·VIII·1933
Δ = 7790 km
G?
SL
EW
NS

Fig. 4.


km
SL
1
2
3
4
5
6
7

Questa restrizione non sussiste nella teoria di Somigliana, nella quale si arriva all'equazione di Rayleigh ricercando la vibrazione risultante, giacente nel piano di propagazione, dalla sovrapposizione di due onde piane, l'una longitudinale e l'altra trasversale, propagantesi con velocità uguale sulla superficie del suolo. La teoria di Somigliana appare quindi molto più generale e, in essa, le onde di Rayleigh propriamente dette entrano come soluzione particolare. In essa, fra l'altro, non rientra la necessità dello sfasamento fra componente orizzontale e componente verticale, come avviene per le onde di Rayleigh propriamente dette. Inoltre, soddisfano alla teoria stessa anche onde puramente trasversali-tangenziali (senza componente verticale quindi), tipo G.

Abbiamo già visto che le onde SL, SM_1 hanno carattere di onde di Rayleigh generalizzate (nel senso di Somigliana). D'altronde la C che, salvo il periodo, ha caratteristiche identiche alle SL, SM, accoppiata alla G di Gutenberg soddisfa pienamente alla teoria di Somigliana per $\sigma = 0{,}17$, e ciò consente di determinare il rapporto delle velocità delle onde corrispondenti alle due radici dell'equazione di Rayleigh maggiori dell'unità, che risulta di 1,38 (4). Possiamo quindi pensare di accoppiare alle SL, $SM_1 \cdots$ rispettivamente un'onda in modo che la velocità delle SL, SM_1, e quella di ogni singola onda accoppiata abbiano un rapporto tale da soddisfare la teoria, e cioè appunto 1,38 circa. Inoltre all'accoppiamento C, G corrisponde, tenuto conto che dalla [1] risulta $\frac{v_1}{v_3} = 2{,}365$ e $\frac{v_2}{v_3} = 1.717$, un terzo gruppo d'onde (onde di Rayleigh propriamente dette, relative alla radice minore dell'unità) con una velocità (v_3) di 2,62 km/sec.

Conosciuta pertanto la velocità di propagazione delle onde SL, SM_1 avremo la possibilità di individuare una nuova coppia di onde superficiali per ogni SL, SM_1; e poichè, come ho già osservato, i nuovi tipi d'onda non si limitano alle C, SL, SM_1, ma ne esistono altri dopo le SM_1 (si veda ad es. la chiara registrazione di SM_2 riportata nella Tav. VII), si ha modo, per tale via, di spiegare l'esistenza del gran numero di gruppi d'onde superficiali costituenti la fase principale e la così detta « coda ».

La velocità delle onde C, SL, $SM_1 \cdots$ cresce con la distanza: quest'aumento, quasi trascurabile per le C (onde a massimo periodo) è già sensibile per le SL. Comunque per il calcolo, tenuto conto delle distanze-origini, possiamo assumere i seguenti valori medi: $v_C = 6{,}2$ km sec. $v_{SL} = 6{,}0$ km/sec, $v_{SM} = 5{,}8$ km sec. $\cdots$

Procediamo per le SL, SM_1, come si è proceduto per le C, ricordando che il rapporto $v_1 v_2 = 1{,}38$ (si sostituirà a v_1 successivamente i valori delle velocità delle SL_1, delle SM_1, ecc.) e che i rapporti v_1/v_3, $v_2 v_3$ hanno i valori sopra riportati. Alle SL corrisponde allora una coppia

d'onde di velocità 4,3 km/sec e 2,5 km/sec rispettivamente; alle SM_1 un'altra coppia d'onde aventi velocità di 4,2 km/sec e 2,45 km/sec, ecc.

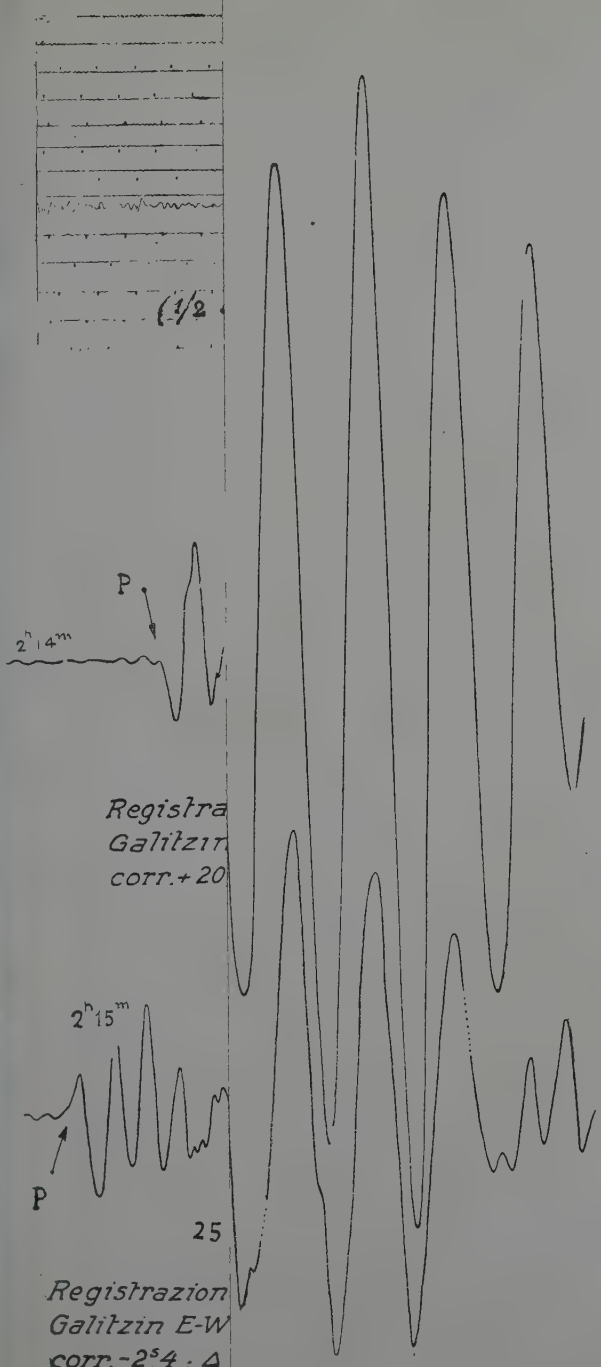
Le velocità di 4,3 km/sec, 4,2 km/sec ecc. corrispondono effettivamente ai gruppi costituenti le così dette onde L (12); mentre 2,6, 2,5, 2,45 km/sec sono velocità che competono a gruppi della fase massima.

L'individuazione di nuovi gruppi SM_n e delle relative velocità medie comporterebbe l'individuazione di nuovi gruppi d'onde superficiali con velocità successivamente decrescenti. Quindi, almeno dal punto di vista qualitativo, sarebbero chiaramente spiegati l'esistenza e il comportamento di tutto il complesso di onde superficiali originate da un terremoto: un primo gruppo – onde C, SL, ecc. – oscillanti nel piano principale, un secondo gruppo G, L ecc a carattere trasversale – tangenziale e un terzo onde M – oscillanti in piani che girano intorno l'asse di propagazione.

Da ultimo, devo però osservare che anche la teoria di Somigliana non riesce a spiegare in modo completo il comportamento delle onde superficiali in genere. Questa, come le altre citate teorie, prescinde dal periodo dell'onda sismica e dalla sua variazione con la distanza. Non tiene conto della dispersione, considera il mezzo esclusivamente solido.

L'esperienza prova che non solo la velocità delle onde superficiali varia con il periodo ma che onde superficiali di ugual periodo hanno velocità diverse a seconda della natura geologica (e quindi elastica) del mezzo attraversato. Così per es. mentre un'onda della fase massima di 31^s di periodo per tragitto continentale presenta una velocità di 3,5 km/sec, per tragitto subatlantico la velocità sale 4,1 km/sec. Il divario poi aumenta per tragitti subpacifici (13). Una cosa analoga deve verificarsi anche per le onde in esame (abbiamo notato infatti maggior velocità per tragitti oceanici). Queste diversità naturalmente non possono essere giustamente valutate in teoria. In ogni modo, dove le teorie sono manchevoli è nel limitarsi a considerare un suolo piano semplicemente elastico, non dispersivo. Molto più complete, da questo punto di vista, sono le teorie svolte dal sismologo matematico giapponese Sezawa, fra le quali, notevole a questo riguardo, quella sulla dispersione delle onde elastiche (14). È probabile che le onde in esame trovino più completa giustificazione in queste ultime teorie.

Tav. I


(1/2
P
2h 14m
Registra
Galitzin
corr.+20
2h 15m
P
25
Registrazion
Galitzin E-W
corr.-2s,4 ; Δ

BIBLIOGRAFIA

(1) H. Jeffreys, *On the Surface Waves of Earthquakes.* « Monthly Notices of the Royal Astronomical Society–Geophysical Supplement », vol. I, n. 6, 1925.

(2) A. Dinca–Samuracas, *Etudes sur la phase des tremblements de Terre dite 'Phase Maxima'* ». « Publications du Bureau Central Séismologique International », Série A, Travaux scientifiques, fasc. n. 12.

(3) J. B. Macelwane, *Long Waves.* « Publ. du Bureau Central Séismol. Int. », Série A, Travaux scient., fasc. 7, 1932.

(4) P. Caloi, *Due nuovi tipi di onde sismiche alla luce di una teoria del Somigliana.* « Rendiconti R. Acc. Naz. dei Lincei », classe scienze fis. mat. e nat. Volume XXIII, ser. 6ª, fasc. 7, 1936–XIV.

(5) P. Caloi, *Nuova onda a lungo periodo oscillante nel piano principale* « Bollettino del Com. naz. per la Geodesia e la Geofisica del C. N. R. », VI, 3, 1936–XIV.

P. Caloi, *Sur une onde longue oscillant dans le plan principal.* « Publ. du Bureau Centr. Séis. Int. », série A, Trav. scient., *15*, 1937.

(6) P. Caloi, *Due tipi d'onde caratteristici tra le fasi S ed L di un telesisma: le onde SL ed SM.* « La Ricerca scientifica », anno V, vol. I, 1934–XII.

P Caloi, *A proposito delle onde SL ed SM.* « Boll. Comit. Geod, e Geof. del C. N. R. », IV, 3–4, 1934–XII.

(7) B. Gutenberg e C. F. Richter. *On seismic Waves (First Paper).* « Gerlands Beiträge zur Geophysik », vol. 43, pag. 67.

(8) P. Byerly, *The Montana earthquake of June 28, 1925, G. M. C. T.* « The Bulletin of Seismological Society of America », vol. 16, n. 4, 1926.

(9) K. Sezawa, *On the Decay of Waves in Visco–Elastic Solid Bodies.* « Bulletin of the Earthquake Research Institute », Tokyo, vol. III, 1927.

(10) W. v. zur Mühlen, *Ueber seismische Oberflächenwellen und ihre Beziehung zum geologischen Aufbau des eurasiatischen Kontinents.* « Zeitschrift f. Geophysik », X. 1934.

(11) H. Menzel, *Dispersion von seismischen Oberflächenwellen, usw.* « Gerlands Beiträge z. Geophys. », 54, 1939.

(12) J. B. Macelwane, *Evidence on the Interior of the Earth Derived from Seismic Sources.* « Internal Constitution of the Earth », capitolo X, McGraw–Hill Book Company, 1939.

(13) P. Caloi, *Analisi periodale delle onde sismiche e problemi ad essa connessi.* « La Ricerca scientifica », anno X, n. 4, 1939–XVII.

(14) K. Sezawa, *Dispersion of Elastic Waves propagated on the Surface of Stratified Bodies and on Curved Surfaces.* « Bulletin Earthq. Rest. Inst », Tokyo, III, 1927.

Geofisica. — *Assorbimento elementare della luce nel passaggio attraverso alle nubi* (1). Nota (2) di GUGLIELMO ZANOTELLI, presentata dall'Accademico ANTONINO LO SURDO.

Nella teoria della propagazione della luce attraverso alle nubi, elaborata da MECKE (3), ALBRECHT (4), GORDOV (5) le proprietà del mezzo sono rappresentate da due coefficienti che esprimono l'attitudine dell'elemento della nube, ossia di una goccia d'acqua, a diffondere la luce e rispettivamente ad assorbirla.

Nel presente lavoro mi propongo di dimostrare come il secondo dei detti coefficienti può essere espresso in funzione delle caratteristiche fisiche della goccia, determinando teoricamente per la luce comunque diffusa e polarizzata che incida sulla goccia stessa, la quantità che viene assorbita e dissipata.

Seguirò i procedimenti dell'ottica geometrica prescindendo dalla considerazione di ogni fenomeno di diffrazione, la cui influenza d'altra parte è trascurabile quando si considerino gocce di diametro sufficientemente grande rispetto alla lunghezza d'onda della luce.

Cominciamo ad osservare che la luce diffusa perviene ad una certa goccia, nella quale intendiamo studiare l'assorbimento e che chiameremo per semplicità goccia illuminata, dalle gocce circostanti che si trovano a varie distanze da essa: ci proponiamo prima di tutto di indagare per quante di tali gocce la porzione della superficie d'onda della luce emessa da un punto qualunque di una di esse, tagliata dalla superficie della goccia illuminata, possa considerarsi piana.

Supponiamo dunque che $\mathfrak{N}$ sia il numero delle gocce contenute nell'unità di volume della nube e che queste siano tutte di uguale raggio R.

---

(1) Lavoro eseguito presso l'Istituto Nazionale di Geofisica del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(2) Pervenuta all'Accademia il 30 luglio 1940–XVIII.

(3) « Ann. d. Phys. », *65*, 257 (1921).

(4) « Meteor. ZS. », *50*, 478 (1933).

(5) « Beitr. z. Geoph. », *48*, 131 (1936).

Allora nell'intercapedine fra due sfere con centro nel centro O della goccia illuminata e di raggi l ed $l + dl$ sono evidentemente contenute $4\pi l^2 \mathfrak{N}\, dl$ gocce; ciascuna di esse viene vista da O sotto un angolo solido che è dato circa da $\pi R^2/l^2$ e cioè le gocce contenute in detta intercapedine intercettano complessivamente una porzione di angolo solido $4\pi^2 \mathfrak{N} R^2\, dl$, che, come si vede, è indipendente da l: supponendo per semplicità che una goccia diffonda la luce ugualmente in tutte le direzioni può dirsi che la quantità di luce che complessivamente perviene alla goccia illuminata dalle gocce poste in un certo strato ad una qualunque e determinata distanza è proporzionale a detto angolo solido e quindi è sempre uguale siano esse vicine o lontane da O. Si deve però osservare che esiste una certa distanza massima L oltre la quale le gocce che si trovano al di fuori della sfera di raggio L cessano di inviare la loro luce in O per essere già l'intero angolo solito 4π completamente intercettato; perciò deve essere

$$4\pi = \int_0^L 4\pi^2 \mathfrak{N} R^2\, dl, \quad \text{cioè} \quad L = \frac{1}{\pi \mathfrak{N} R^2}.$$

Osserviamo che in realtà il raggio della sfera che contiene tutte le gocce che esercitano una azione in O sarà alquanto maggiore di L per il fatto che non si è tenuto conto dell'azione di schermo che una goccia di un certo strato può esercitare su una goccia di uno strato più vicino ad O, alla quale azione corrisponde evidentemente una riduzione dell'angolo solido intercettato ed in conclusione un aumento di L. Tale correzione però, che potrebbe dedursi con considerazioni probabilistiche non ha interesse per il nostro scopo, che è quello di determinare la aliquota *massima* delle gocce contenute nella suddetta sfera, per le quali non può considerarsi piana la porzione di superficie dell'onda emessa da qualsiasi punto S di una di essa e tagliata dalla superficie della goccia illuminata.

Tale aliquota sarà costituita da tutte le gocce così vicine ad O da essere contenute in una sfera di raggio $L_0 < L$, dove L_0 è il valore minimo per cui può ammettersi che la grandezza $R\, L_0$ sia trascurabile di fronte ad 1, ponendo così la condizione che la porzione di onda sferica emessa da S e tagliata dalla superficie della goccia illuminata possa confondersi con un piano. Tale condizione potendo ritenersi verificata ai nostri fini quando $R/L_0 = 0{,}1$, intendiamo ora fissare L_0 in modo tale che esso sia una piccola frazione di L. Se si suppone $L_0 = 0{,}01\ L$, ciò equivale a dire che in base alle precedenti considerazioni un solo centesimo della radiazione diffusa che perviene complessivamente in O proviene dalle gocce contenute nell'interno della sfera di raggio L_0, ossia che di detta radiazione il 99 % può considerarsi come incidente sulla goccia illuminata con superficie d'onda piana.

Risulta quindi che deve essere $L = 100L_0 = 1000R = 1/\pi R^2 \mathfrak{N}$, e perciò $\pi R^3 \mathfrak{N} = 1/1000$. Indicando con Q la quantità d'acqua contenuta per centimetro cubo si ha $Q = 4\pi R^3 \mathfrak{N}/3 = 1{,}33.10^{-3}$ gr/cm³. Si può quindi concludere che se nella nube non è contenuto in cifra tonda più di un milligrammo di acqua per centimetro cubo può ritenersi con certezza che della luce che perviene ad una qualsiasi goccia per diffusione dalle gocce circostanti non più dell'1 % è costituito da luce proveniente da punti di gocce così vicine che la porzione della superficie d'onda tagliata dalla superficie della goccia illuminata non possa considerarsi piana.

Prenderemo perciò in esame il caso di una goccia illuminata dalla luce diffusa dalle gocce circostanti e sufficientemente lontane in modo che la porzione di superficie d'onda tagliata dalla goccia stessa possa considerarsi come piana e determineremo per ciascuna superficie d'onda la percentuale della luce incidente assorbita e dissipata nell'interno della goccia

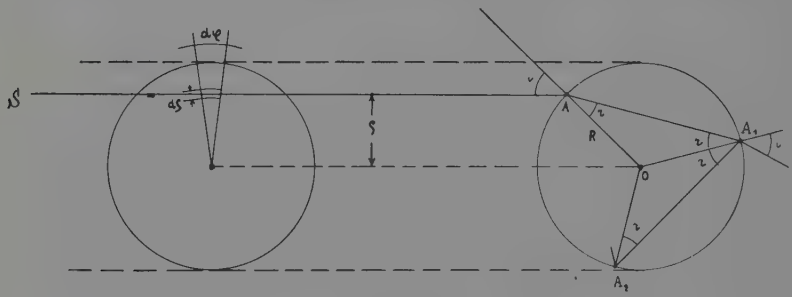


Fig. 1.

illuminata. Detta percentuale risulta indipendente dalla direzione di propagazione e dallo stato di polarizzazione della luce incidente, dipendendo solo dalle caratteristiche della goccia illuminata, e che è pertanto uguale per tutte le superficie d'onda: coincide quindi con il coefficiente di assorbimento cercato.

Si consideri una goccia di acqua sferica di raggio R ed un raggio luminoso SA (fig. 1) incidente sotto l'angolo i su un punto A della superficie di essa: si assuma il piano passante per il raggio e per il centro O della goccia, cioè il piano di incidenza, come piano della figura e siano P ed N le intensità delle componenti del campo elettrico luminoso rispettivamente nel piano e normalmente. Sia r l'angolo di rifrazione che è evidentemente uguale all'angolo di incidenza in A_1 del raggio rifratto nella prima rifrazione nell'interno della goccia, ed agli angoli successivi di incidenza e di riflessione. Nella rifrazione in A parte della luce incidente passa nel raggio riflesso mentre le intensità delle due componenti normale e parallela del

raggio rifratto possono ottenersi mediante le formule di FRESNEL (1) e sono rispettivamente

$$N_0 = N\left[\frac{2\,\mathrm{sen}\,r\cos i}{\mathrm{sen}\,(i+r)}\right]^2 \quad , \quad P_0 = P\left[\frac{2\,\mathrm{sen}\,r\cos i}{\mathrm{sen}\,(i+r)\cos(i-r)}\right]^2.$$

Nel percorso da A ad A_1 si ha una attenuazione del raggio rifratto secondo la legge dell'assorbimento, e chiamando α il coefficiente di assorbimento dell'acqua, essendo $AA_1 = 2R\cos r$ all'arrivo in A_1 le suddette intensità saranno divenute

$$N_0' = N_0\, e^{-2\alpha R\cos r} = N\left[\frac{2\,\mathrm{sen}\,r\cos i}{\mathrm{sen}\,(i+r)}\right]^2 e^{-2\alpha R\cos r},$$

$$P_0' = P_0\, e^{-2\alpha R\cos r} = P\left[\frac{2\,\mathrm{sen}\,r\cos i}{\mathrm{sen}\,(i+r)\cos(i-r)}\right]^2 e^{-2\alpha R\cos r}.$$

Nella prima riflessione in A_1 poichè parte della luce viene rifratta all'esterno si ha una ulteriore attenuazione calcolabile con le formule di FRESNEL e precisamente si hanno per il raggio riflesso le intensità

$$N_1 = N_0'\left[\frac{\mathrm{sen}\,(r-i)}{\mathrm{sen}\,(r+i)}\right]^2 = N\left[\frac{2\,\mathrm{sen}\,r\cos i}{\mathrm{sen}\,(i+r)}\right]^2\left[\frac{\mathrm{sen}\,(r-i)}{\mathrm{sen}\,(r+i)}\right]^2 e^{-2\alpha R\cos r},$$

$$P_1 = P_0'\left[\frac{\mathrm{tang}\,(r-i)}{\mathrm{tang}\,(r+i)}\right]^2 = P\left[\frac{2\,\mathrm{sen}\,r\cos i}{\mathrm{sen}\,(i+r)\cos(i-r)}\right]^2\left[\frac{\mathrm{tang}\,(r-i)}{\mathrm{tang}\,(r+i)}\right]^2 e^{-2\alpha R\cos r}.$$

Nel percorso A_1A_2 si ha un'altra attenuazione per assorbimento, ed in A_2 una attenuazione nella seconda riflessione in modo che dopo di questa le intensità saranno divenute

$$N_2 = N\left[\frac{2\,\mathrm{sen}\,r\cos i}{\mathrm{sen}\,(i+r)}\right]^2\left[\frac{\mathrm{sen}\,(r-i)}{\mathrm{sen}\,(r+i)}\right]^4 e^{-4\alpha R\cos r},$$

$$P_2 = P\left[\frac{2\,\mathrm{sen}\,r\cos i}{\mathrm{sen}\,(i+r)\cos(i-r)}\right]^2\left[\frac{\mathrm{tang}\,(r-i)}{\mathrm{tang}\,(r+i)}\right]^4 e^{-4\alpha R\cos r},$$

ed in generale dopo la k-esima riflessione

$$N_k = N\left[\frac{2\,\mathrm{sen}\,r\cos i}{\mathrm{sen}\,(i+r)}\right]^2\left[\frac{\mathrm{sen}\,(r-i)}{\mathrm{sen}\,(r+i)}\,e^{-\alpha R\cos r}\right]^{2k},$$

$$P_k = P\left[\frac{2\,\mathrm{sen}\,r\cos i}{\mathrm{sen}\,(i+r)\cos(i-r)}\right]^2\left[\frac{\mathrm{tang}\,(r-i)}{\mathrm{tang}\,(r+i)}\,e^{-\alpha R\cos r}\right]^{2k}.$$

(1) Cfr. WOOD, *Optique physique*, t. 2, pag. 21, Parigi, 1914.

La intensità luminosa assorbita nel percorso $A_k A_{k+1}$ è per le due componenti evidentemente data da

$$N_k (1 - e^{-2\alpha R \cos r}) \quad , \quad P_k (1 - e^{-2\alpha R \cos r})$$

e la intensità complessivamente assorbita nel percorso della luce nell'interno della goccia è rispettivamente

$$N_a = \sum_0^\infty{}_k N_k (1 - e^{-2\alpha R \cos r}) =$$

$$= N \left[\frac{2 \operatorname{sen} r \cos i}{\operatorname{sen} (i + r)} \right]^2 (1 - e^{-2\alpha R \cos r}) \sum_0^\infty{}_k \left[\frac{\operatorname{sen} (r - i)}{\operatorname{sen} (r + i)} e^{-\alpha R \cos r} \right]^{2k},$$

$$P_a = \sum_0^\infty{}_k P_k (1 - e^{-2\alpha R \cos r}) =$$

$$= P \left[\frac{2 \operatorname{sen} r \cos i}{\operatorname{sen} (i + r) \cos (i - r)} \right]^2 (1 - e^{-2\alpha R \cos r}) \sum_0^\infty{}_k \left[\frac{\operatorname{tang} (r - i)}{\operatorname{tang} (r + i)} e^{-\alpha R \cos r} \right]^{2k}.$$

Conviene ora considerare le due funzioni

$$u (i) = \frac{\operatorname{sen} (r - i)}{\operatorname{sen} (r + i)} \quad , \quad v (i) = \frac{\operatorname{tang} (r - i)}{\operatorname{tang} (r + i)}$$

le quali possono essere costruite quando si conosca l'indice di rifrazione n dell'acqua, essendo $\operatorname{sen} i = n \operatorname{sen} r$; assumendo il valore approssimato $n = 4/3$ si ha per le due funzioni il grafico di fig. 2, dove sono dati i valori delle funzioni stesse per i compreso fra 0° e 90°. Dal grafico risulta che in detto intervallo i valori assoluti di u e v sono sempre minori di 1, e divengono uguali all'unità per $i = 90°$. D'altra parte per $\alpha \neq 0$ si ha che la grandezza $x = 2 \alpha R \cos r$ è nello stesso intervallo sempre positiva e diversa da zero e perciò le grandezze $u^2 e^{-x}$, $v^2 e^{-x}$ sono o nulle o positive e minori di 1. Pertanto le due serie contenute nelle formule precedenti sotto i segni di sommatoria convergono e possono esprimersi come somme di progressioni geometriche. Si ha così

$$N_a = N \left[\frac{2 \operatorname{sen} r \cos i}{\operatorname{sen} (i + r)} \right]^2 \frac{1 - e^{-x}}{1 - u^2 e^{-x}},$$

$$P_a = P \left[\frac{2 \operatorname{sen} r \cos i}{\operatorname{sen} (i + r) \cos (i - r)} \right]^2 \frac{1 - e^{-x}}{1 - v^2 e^{-x}}.$$

Il coefficiente di assorbimento dell'acqua α ha per le radiazioni comprese fra 4500 Å e 8100 Å un valore molto piccolo che raggiunge, secondo i dati di ASCHKINASS [1] un massimo di 0,0241 cm^{-1} in corrispondenza alle

---

[1] « Ann. d. Phys. u. Chem. », *55*, 401 (1895).

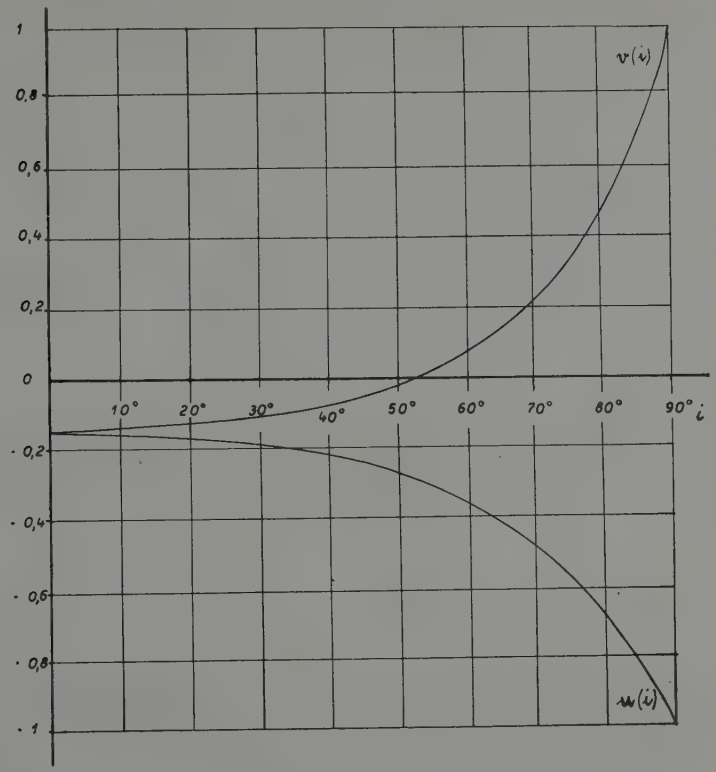


Fig. 2.

lunghezze d'onda di 7500 $\mathring{A}$ e 7750 $\mathring{A}$. Ritenendo R sempre minore di 0,25 cm. (1), poichè cos r raggiunge il valore 0,66 circa in corrispondenza ad $i = 90°$, si ha che x è sempre minore od al più uguale ad $8 \cdot 10^{-3}$. Si può pertanto assumere in tale approssimazione che sia $1 - e^{-x}$ uguale ad x, e sostituendo nelle formule precedenti si ha con alcune successive trasformazioni formali

$$N_a = N \left[\frac{2 \operatorname{sen} r \cos i}{\operatorname{sen} (i + r)} \right]^2 \frac{x}{1 - u^2 + u^2 x} = \frac{2 \alpha RN}{n} p(i) \cos i ,$$

$$P_a = P \left[\frac{2 \operatorname{sen} r \cos i}{\operatorname{sen} (i + r) \cos (i - r)} \right]^2 \frac{x}{1 - v^2 + v^2 x} = \frac{2 \alpha RP}{n} q(i) \cos i$$

dove si è posto

$$p(i) = \frac{1}{1 + \dfrac{u^2 x}{1 - u^2}} \quad , \quad q(i) = \frac{1}{1 + \dfrac{v^2 x}{1 - v^2}} .$$

(1) Cfr. LENARD, « Meteor. ZS. », *21*, 249 (1904).

Le due funzioni N_a e P_a hanno andamento assai simile fra loro e che coincide per un largo tratto dell'intervallo compreso fra 0° e 90° con l'andamento di cos i, poichè per la piccolezza di x, le funzioni $p\,(i)$ e $q\,(i)$ si mantengono sensibilmente uguali all'unità fino nelle vicinanze di $i = 90°$, ove tendono a zero. In fig. 3 è rappresentato l'andamento di $p\,(i)$ e $q\,(i)$ per il valore $x = 8.10^{-3}$ e con la scala adottata i diagrammi delle due funzioni risultano sensibilmente sovrapposti.

Le formule soprascritte ci forniscono l'intensità luminosa assorbita nell'interno della goccia in funzione dell'angolo di incidenza, e perciò volendo conoscere l'energia assorbita complessivamente quando la goccia

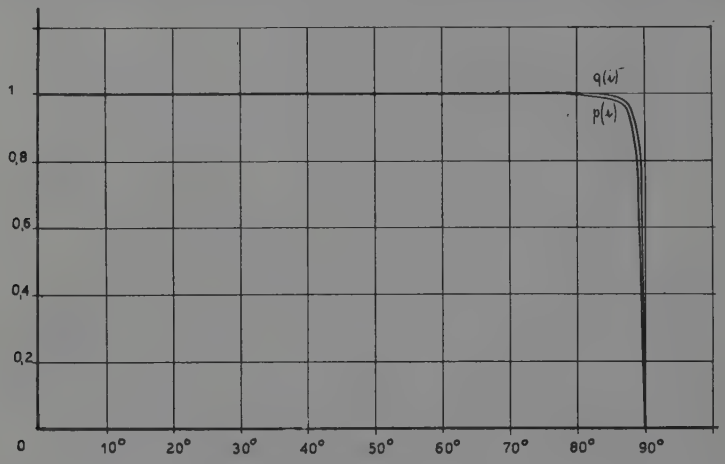


Fig. 3.

venga investita da un fascio di luce parallela occorrerà sommare i contributi all'assorbimento dei raggi incidenti sotto tutti gli angoli compresi fra 0° e 90°. Si consideri a tale scopo una sezione retta del fascio che investe la goccia ed in essa un elemento della superficie stessa costituito da una porzione di corona circolare di raggio ρ e spessore $d\rho$ (fig. 1) compresa fra due raggi facenti tra loro l'angolo elementare $d\varphi$: l'area di detto elemento è evidentemente data da $\rho\, d\varphi\, d\rho$ cioè, poichè $\rho = R$ sen i, da R^2 sen i cos $i\, di\, d\varphi$: la potenza luminosa che attraversa tale area è per ciascuna delle componenti N e P espressa da

$$dW_n = NR^2 \text{ sen } i \cos i\, di\, d\varphi\,,$$

$$dW_p = PR^2 \text{ sen } i \cos i\, di\, d\varphi\,;$$

di tale potenza la parte che viene assorbita nella goccia è invece, applicando le formule trovate

$$dW_{an} = N_a R^2 \operatorname{sen} i \cos i \, di \, d\varphi = \frac{2\alpha R^3 N}{n} p(i) \operatorname{sen} i \cos^2 i \, di \, d\varphi ,$$

$$dW_{ap} = P_a R^2 \operatorname{sen} i \cos i \, di \, d\varphi = \frac{2\alpha R^3 P}{n} q(i) \operatorname{sen} i \cos^2 i \, di \, d\varphi .$$

Per procedere alla integrazione osserviamo che le funzioni $p(i)$ e $q(i)$ si mantengono sensibilmente uguali all'unità fino nelle vicinanze di $i = 90^\circ$ ove d'altra parte il contributo all'integrale della funzione integranda è assai piccolo a causa della presenza del fattore $\cos^2 i$ che è ivi quasi nullo. Trascureremo perciò nell'integrazione senz'altro i due fattori $p(i)$ e $q(i)$, salvo poi a tener conto dell'errore così introdotto nel risultato.

Con tale approssimazione l'energia complessivamente assorbita è, chiamando J l'intensità della luce incidente,

$$dW_a = \frac{2\alpha R^3 (N+P)}{n} \operatorname{sen} i \cos^2 i \, di \, d\varphi = \frac{2\alpha R^3 J}{n} \operatorname{sen} i \cos^2 i \, di \, d\varphi$$

e non dipende dallo stato di polarizzazione di quest'ultima.

Estendendo l'integrazione a tutta la sezione del fascio si ha perciò

$$W_a = \frac{2\alpha R^3 J}{n} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} i \cos^2 i \, di = \frac{4\pi\alpha R^3 J}{3n} .$$

Tenendo conto della presenza delle funzioni $p(i)$ e $q(i)$ il valore esatto ottenuto W'_a sarebbe stato un po' minore in conseguenza del fatto che in prossimità di $i = 90^\circ$ sia $p(i)$ che $q(i)$ tendono a zero, e quindi anche la funzione integranda andrebbe ivi a zero alquanto più rapidamente. Per discutere il risultato osserviamo perciò che per il massimo valore assunto $x = 8.10^{-3}$, e per $i = 78^\circ$ le suddette due funzioni assumono ancora valori che differiscono dall'unità solo di circa il 0,5 % e rispettivamente 0,2 % in meno, e perciò può fondatamente prescindersi, nell'approssimazione dell'1 %, dalla loro presenza nella funzione integranda per tutto l'intervallo tra 0° e 78°. Nell'intervallo da 78° a 90° la funzione integranda dà un contributo alla grandezza W'_a, che, per il fatto che sia $p(i)$ che $q(i)$ tendono a zero in prossimità di 90°, è alquanto minore di

$$\Delta W_a = \frac{4\pi\alpha R^3 J}{n} \int_{78^\circ}^{90^\circ} \operatorname{sen} i \cos^2 i \, di = 8{,}99 \cdot 10^{-3} \frac{4\pi\alpha R^3 J}{3n} .$$

Il valore esatto W'_a della energia assorbita sarà dunque tale che $W_a > W'_a > W_a - \Delta W_a$, e pertanto il valore W_a da noi determinato è un valore approssimato in eccesso a meno dell'1 % essendo appunto

$$\frac{\Delta W_a}{W_a} = 8{,}99 \cdot 10^{-3} < \frac{1}{100} .$$

Poichè la potenza che passa attraverso alla sezione del fascio ed incide sulla goccia è $W = \pi R^2 J$ la percentuale di questa che viene assorbita è data da

$$\varkappa = \frac{W_a}{W} = \frac{4\alpha R}{3n} .$$

Poichè si è dimostrato che la luce che perviene alla goccia dalle gocce circostanti si può considerare, sotto la premessa che nella nube non sia contenuto più di un milligrammo di acqua per centimetro cubo, per il 99 % come incidente sulla goccia con superficie d'onda piana, e poichè per il restante 1 % della luce che cade sulla goccia con superficie d'onda non piana è da prevedersi, rimanendo il cammino della luce nell'interno della goccia dello stesso ordine di grandezza, solo una lieve correzione per la percentuale assorbita, può concludersi che

il valore $\varkappa = 4\alpha R/3n$ *dà con approssimazione dell'1 % il coefficiente di assorbimento, cioè il rapporto tra luce incidente e luce assorbita, in una goccia sferica di raggio* R *contenuta in una nube ed illuminata da luce comunque diffusa e di lunghezza d'onda compresa nella banda fra 4500 Å e 8100 Å.*

Essendo il valore di n circa 1/3, sostituendo nella formula trovata si ha $\varkappa = \alpha R$, che confrontato con il valore $4\alpha R/3$ posto da Albrecht nel lavoro citato mette in luce che quest'ultimo valore è esattamente per un terzo più grande di quello reale, e ciò è dovuto al fatto che essendo stato ivi preso l'indice di rifrazione uguale all'unità non si è da lui tenuto conto della luce che non penetra effettivamente nella goccia per la riflessione all'ingresso, e pertanto non è soggetta ad assorbimento.

Consideriamo infine l'assorbimento in un elemento di volume unitario della nube nel quale siano contenute $\mathfrak{N}$ gocce tutte di raggio R, e che venga investito da una onda piana di intensità J. Essendo l'energia assorbita da ciascuna goccia $4\pi R^3 \alpha J\, 3n$, l'energia assorbita nell'unità di volume è data da

$$W_{1a} = \frac{4\pi R^3 \alpha J \mathfrak{N}}{3n} = \frac{Q \alpha J}{n}$$

ove si è indicata con Q la quantità d'acqua contenuta nella nube per unità di volume. Risulta perciò in questo caso che

l'energia assorbita è, a parità di volume della nube, indipendente dal raggio e dal numero delle gocce, e non dipende che dalla quantità d'acqua complessivamente contenuta, cioè che l'aumento o la diminuzione dell'assorbimento non può corrispondere che ad una condensazione o rispettivamente ad una evaporazione.

Fisica. — *Sul potere emissivo parziale di alcuni cloruri.* Nota (1) di Antonio Carrelli, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

Continuando le misure già iniziate (2) sull'emissione di sostanze solide nella prima zona ultrarossa, per temperature che si aggirano intorno ai 1000° K abbiamo voluto studiare il comportamento di alcuni cloruri di metalli alcalini, e precisamente i composti NaCl, KCl e RbCl. Queste sostanze, com'è noto, sono state accuratamente indagate nella zona estrema dello spettro, dove esse presentano massimi d'assorbimento cospicui. Questi massimi rappresentano la frequenza dell'oscillazione di un reticolo jonico rispetto all'altro, frequenza che dipende dalla massa degli joni in presenza, e dalle forze agenti fra gli joni. Questa zona di assorbimento, caratteristica in ogni reticolo, è accompagnata da un'altra zona di assorbimento contigua alla primitiva, e che si estende verso le piccole lunghezze d'onda. Questa seconda zona presenta un massimo non molto grande, almeno rispetto al principale, però ben individuato e che è dipendente dall'anarmonicità delle oscillazioni reticolari. La spiegazione teorica del comportamento di questi reticoli, che si presenta sotto molti riguardi come complessa, può dirsi nelle linee generali molto soddisfacente, perchè si è in grado attualmente d'interpretare, con l'ammissione della anarmonicità e della presenza di frequenza di combinazione, l'andamento generale del coefficiente d'assorbimento di queste sostanze per tutta un'estesa zona di frequenze, ed inoltre la comparsa di bande caratteristiche in effetto Raman, bande appunto dipendenti da queste frequenze d'assorbimento causate dall'anarmonicità del legame (3).

Poichè, come abbiamo accennato nei precedenti lavori, l'indice di rifrazione ed il coefficiente d'assorbimento di questi cloruri alcalini presentano variazioni notevoli soltanto nella zona dell'estremo ultrarosso è

(1) Pervenuta all'Accademia il 18 giugno 1940-XVIII.

(2) Cfr. « Rend. Acc. Lincei », *Sul potere emissivo parziale e totale di alcune sostanze*, vol. XXIX, fasc. 6, 8, 9 e 12 (1939).

(3) Cfr. Barnes e Czerny, « Z. Phys. » (1931); Barnes, « Z. Phys. », 75-723 (1932); Born e Blackmann, « Z. Phys. », 82-551 (1933); Fermi e Rasetti, « Z. Phys. », 689 (1931).

prevedibile nella zona da 0,9μ a 7μ un andamento regolare del potere riflettente, e in ultima analisi anche del potere emissivo. Noi abbiamo già compiuto una verifica su questo punto per ciò che riguarda il potere emissivo totale [1] giungendo alla conclusione che dall'andamento dei dati sperimentali ottenuti per questa grandezza si poteva concludere che al variare della temperatura il potere assorbente, e quindi l'indice di rifrazione ed il coefficiente d'assorbimento, doveva presentare variazioni dal

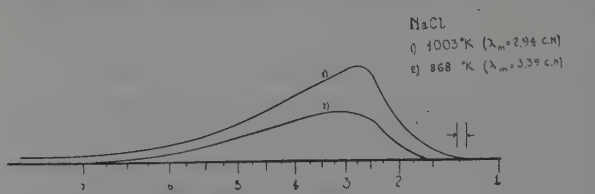


Fig. 1.

valore a temperatura ambiente, perchè l'andamento del potere emissivo sperimentale al variare di T non corrisponde a quello che può prevedersi fondandosi sul comportamento ottico di questi cloruri a temperatura ordinaria.

Con gli stessi dispositivi sperimentali descritti nelle Note precedenti abbiamo studiato l'andamento del potere emissivo parziale dei composti sopradetti a due temperature diverse: i poteri emissivi del cloruro di Na

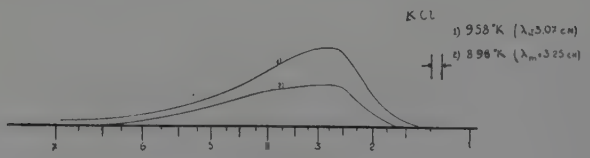


Fig. 2.

e di K alle due temperature studiate (fig. 1 e fig. 2) non presentano massimi caratteristici ben individuati ma confrontando questi poteri emissivi parziali con quelli del corpo nero alle stesse temperature (fig. 3 *a*, *b* e *c*) si può affermare che l'andamento non è lo stesso; ciò significa che il potere riflettente ad alta temperatura non corrisponde a quello che si osserva a temperatura ordinaria alla quale in questa zona è praticamente costante. Questo risultato conferma quanto è stato prima posto in evidenza in base al potere emissivo totale, e cioè che da circa 0,9μ a 7μ deve comparire una zona d'assorbimento per effetto dell'aumento di temperatura. Questa zona si trova

[1] Loc. cit., pag. 274.

nei due cloruri più o meno nella stessa posizione, e cioè verso circa i 3μ, dov'è maggiore il distacco dell'andamento del corpo nero per il quale nella fig. 3 si riportano tre curve caratteristiche [1]. Data la piccola emissione si è dovuto lavorare a fenditura larga e quindi non è stato possibile individuare bene la posizione.

Il RbCl (vedi fig. 4) presenta invece un'anomalia molto più marcata, e precisamente può assicurarsi la presenza di un massimo a circa 4,8μ ed è probabile la presenza di altri due massimi a circa 3,6μ e 2,6μ. La frequenza caratteristica per questa sostanza è 84,4μ; il massimo secondario si trova un po' spostato e cioè a circa 70,4μ, quindi come vedesi molto lontano

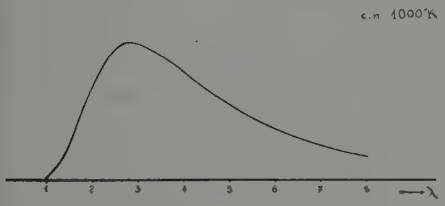


Fig. 3 *a*.

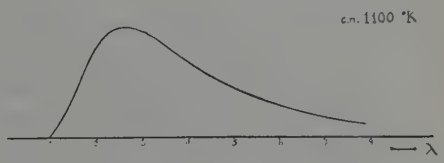


Fig. 3 *b*.

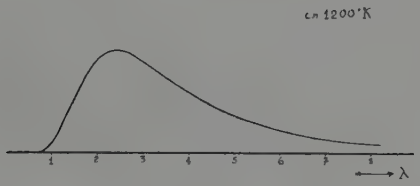


Fig. 3 *c*.

dalla zona che è stata da noi studiata. Anche per gli altri due cloruri i massimi delle frequenze caratteristiche si trovano, com'è ben noto, in una zona molto lontana.

Di qui deriva che molto probabilmente queste anomalie che si riscontrano ad alta temperatura non sono connesse con i massimi sopra ricordati ma dipendono da altri processi: in effetti ad alte temperature a causa dei maggiori spostamenti degli joni dalle loro posizioni d'equilibrio, e quindi per effetto del maggiore avvicinamento si hanno processi di polarizzazione jonica molto vistosi; ora qualunque variazione dalla simmetria sferica dell'jone, e cioè dell'atmosfera elettronica esterna porta come conseguenza ad una comparsa di nuovi gradi di libertà, e quindi di nuove frequenze caratteristiche.

---

[1] È da tener presente che nelle curve della fig. 3 lo spettro è normale.

Questo processo che è stato già messo in evidenza in alcuni casi è stato da noi trovato anche per i tre cloruri alcalini considerati.

Abbiamo infine studiato l'emissione di ossidi che nella zona visibile sono neri e precisamente ossidi superiori del Ni e del Co a complemento

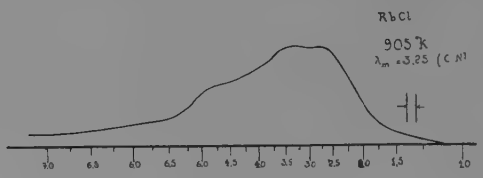


Fig. 4.

dello studio sull'ossido nero di Cu [1]. Per l'ossido nero di Co si è già detto che in un campo termico non molto esteso si comporta in modo che sia soddisfatta la legge di Wien generalizzata. La determinazione del potere emissivo parziale porta alla conclusione che questa grandezza non presenta massimi accentuati e cioè questa sostanza si comporta anche nel primo ultrarosso come corpo dotato di un potere assorbente quasi costante, così come si osserva nel visibile.

Condizioni analoghe abbiamo ritrovato per gli ossidi superiori del Ni e cioè composti del tipo Ni_2O_3, Ni_3O_4 ecc. che sono anch'essi neri; riducendo questi ossidi si arriva all'ossido verde NiO che, com'è noto, ha una struttura cubica. Il potere emissivo parziale dell'ossido verde è nettamente diverso, in

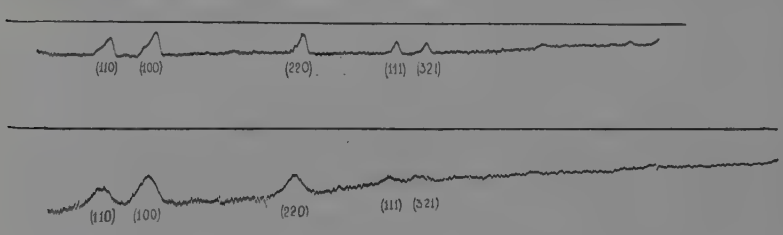


Fig. 5.

tutta la zona spettrale analizzata, dall'andamento dell'emissione dell'ossido nero pur non presentando massimi ben definiti, almeno alla temperatura delle nostre esperienze, a differenza di altri ossidi che alle stesse temperature dànno modo d'individuare dei massimi; l'ossigeno presente in questi ossidi neri, che come si è visto produce questa variazione notevole del potere assorbente in estesa zona, non è legato in modo definito perchè,

[1] A. Carrelli, « Rend. Acc. Lincei », vol. XXIX, ser. 6ª, fasc. 12, pag. 441.

com'è noto, produce solo una leggera modifica nel reticolo pur producendo grandi variazioni nell'indice di rifrazione e nel coefficiente d'assorbimento.

Noi abbiamo voluto sincerarci di ciò mediante una microfotometria di un'analisi rontgenografica ottenuta per i due ossidi col metodo delle polveri. Queste microfotometrie si riportano nella fig. 5; la superiore è relativa all'ossido verde, l'inferiore all'ossido nero. Esse mostrano che la presenza dell'ossigeno non perfettamente legato produce una modifica nel reticolo e precisamente le caratteristiche linee dipendenti dalla riflessione sui piani reticolari segnati non sono molto marcate nell' ossido nero (vagabundierendes Sanerstoff). Questa modifica è ancora un poco visibile nell'ossido verde adoperato il quale quindi deve considerarsi come non completamente ridotto.

Geofisica. — *Sugli effetti di transizione della radiazione cosmica intorno al livello del mare* (1). Nota (2) di BERNARDO NESTORE CACCIAPUOTI e GISELLA PALMIERI presentata dall'Accademico ANTONINO LO SURDO.

1°. Recentemente è stato dimostrato (3) che buona parte della radiazione cosmica elettronica presente al livello del mare è un residuo della componente elettronica primaria. Uno degli argomenti portati a sostegno di questa asserzione è dato dal fatto che la curva degli sciami, così come fu determinata a Cervinia (m. 2050 sul l. m.) sotto uno strato di cemento e mattoni di 175 g/cm^2, ha un andamento simile a quello dell'analoga curva ottenibile al livello del mare, ossia sotto uno strato d'aria grosso modo equivalente (in cammini di Bhabha e Heitler) allo strato di cemento.

Tuttavia relativamente a questo argomento c'era da confermare che quella parte della componente elettronica dovuta alla disintegrazione del mesotrone (e quindi in equilibrio nell'aria con la componente mesotronica) è realmente assorbita da strati di materiale aventi uno spessore dell'ordine di 100 g/cm^2. Si trattava perciò di verificare che effettivamente, al livello del mare, sotto 175 g/cm^2 di cemento, in condizioni analoghe cioè (a parte la diversa altitudine) a quelle sfruttate a Cervinia, si ottiene una curva degli sciami diversa da quella ottenuta a Cervinia e cioè non indicante alcun residuo apprezzabile della componente elettronica.

Delle misure in questo senso esistono da qualche tempo (4), misure mostranti come la curva di Rossi cambi sostanzialmente di forma quando la radiazione penetrante, giungente al livello del mare, sia filtrata da considerevoli strati di materiale. Si tratta però sempre di strati equivalenti a diversi metri d'acqua e quindi troppo spessi per il nostro scopo. In queste

---

(1) Lavoro eseguito presso l'Istituto Nazionale di Geofisica del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(2) Pervenuta all'Accademia il 2 luglio 1940-XVIII.

(3) G. BERNARDINI, B. N. CACCIAPUOTI, B. FERRETTI, O. PICCIONI e G. C. WICK, « Atti della Reale Accademia d'Italia », Memorie della Classe di Scienze Fis. Mat. e Nat., vol. XI, pag. 471, 1940.

(4) A. DRIGO, « La Ric. Scient. », anno VI, pag. 529, 1935; P. AUGER e T. GRIVET, « Rev. of. Mod. Phys. », vol. II, pag. 232, 1939.

condizioni infatti non è possibile mettere in evidenza il graduale passaggio fra la curva di Rossi, mostrante il tipico effetto di transizione dovuto alla moltiplicazione elettronica, e la curva degli sciami già appiattita per il raggiungimento delle condizioni di equilibrio fra la componente mesotronica e quella secondaria elettronica.

Quel che invece interessava ai nostri scopi era appunto questo graduale passaggio onde accertarsi che 175 g/cm^2 di cemento sono effettivamente sufficienti per eliminare quella parte della componente elettronica che può essere attribuita alla disintegrazione dei mesotroni nell'atmosfera.

È poi da aggiungere che la determinazione di questa graduale transizione fra i due tipi delle curve di Rossi aveva un certo interesse in sè, sia per la notevole discordanza di dati in proposito [1] sia per l'incompletezza dei medesimi. Si è allora creduto opportuno istituire una serie di misure che consentissero di raccogliere elementi sufficienti per discutere quanto sopra.

2. L'esperienza è stata effettuata a Roma (m. 50 sul l. m.). Come strati di materiale assorbente sono state utilizzate le solette in cemento dei vari piani dell'Istituto Fisico della R. Università. Queste solette erano di circa 35 g/cm^2 l'una; le misure furono effettuate all'ultimo piano (strato di materiale sovrastante circa 35 g/cm^2), al primo piano (stato sovrastante circa 100 gr/cm^2) e in cantina (strato sovrastante circa 160 $\div$ $\div$ 170 g/cm^2). Il dispositivo sperimentale, per ragioni di confronto, era identico a quello già impiegato a Cervinia e consisteva di una terna di contatori, disposti come nella fig. 1 (in alto) collegata con una registrazione per coincidenze triple. I contatori erano chiusi in vetro, riempiti di argon (9/10) e alcool (1/10) alla pressione di cm. 10 di mercurio, lunghi cm. 30 e aventi un diametro di cm. 3. Lo spessore globale delle pareti dei contatori era equivalente a circa mm. 4 di Al.

La registrazione aveva un potere risolutivo di 10^{-4} sec.

I risultati ottenuti sono raccolti nella tabella I e sono rappresentati graficamente nella fig. 1. In essa la curva I è quella ottenuta all'ultimo piano dell'Istituto, la II e la III sono quelle rispettivamente determinate al primo piano e in cantina.

A completamento di queste misure altre ne furono fatte con i contatori disposti come nella fig. 2 (in alto) onde potersi riferire anche a sciami aventi un'apertura angolare media superiore. I risultati di queste ulteriori misure sono raccolti nella tabella II e sono rappresentati nella fig. 2, dove le indicazioni I, II e III delle curve hanno lo stesso significato che nella fig. 1.

---

[1] Vedi nota bibliografica (2) e L. Janossy, « Proc. Roy. Soc. », vol. 167, pag. 499, 1938, T. Grivet-Meyer, « Compt. Rend. », vol. 208, pag. 1216, 1939 ecc.

TABELLA I.

mm. Pb	Sotto uno strato di 35 g/cm²			Sotto uno strato di 105 g/cm²			Sotto uno strato di 175 g/cm²		
	tempo in minuti	num. totale coincidenze	coincidenze all'ora	tempo in minuti	num. totale coincidenze	coincidenze all'ora	tempo in minuti	num. totale coincidenze	coincidenze all'ora
0	3681	1573	25,6 ± 0,6	2795	644	13,8 ± 0,5	4456	972	13 ± 0,4
4	2598	1833	42,3 ± 0,9	2716	980	21,6 ± 0,6	4297	1292	18 ± 0,5
8	1962	1625	49,6 ± 1,2	2605	1033	23,8 ± 0,7	4179	1278	18,3 ± 0,5
12	2068	1676	48,6 ± 1,1	2760	1154	22,9 ± 0,6	5072	1657	19,6 ± 0,4
16	2723	2125	46,8 ± 1	2622	987	22,5 ± 0,7	4103	1289	18,8 ± 0,5
20	2023	1508	44,9 ± 1,1	2839	1029	21,7 ± 0,6	4407	1363	18,5 ± 0,5
24	1985	1287	38,8 ± 1	2634	940	21,6 ± 0,7	4750	1481	18,6 ± 0,4
50	2005	921	27,5 ± 0,9	2775	929	20,1 ± 0,6	4329	1263	17,5 ± 0,4
100	2662	1099	24,7 ± 0,7	2850	927	19,5 ± 0,6	4571	1215	15,9 ± 0,4

TABELLA II.

mm. Pb	Sotto uno strato di 35 g/cm²			Sotto uno strato di 105 g/cm²			Sotto uno strato di 175 g/cm²		
	tempo in minuti	num. totale coincidenze	coincidenze all'ora	tempo in minuti	num. totale coincidenze	coincidenze all'ora	tempo in minuti	num. totale coincidenze	coincidenze all'ora
0	1782	336	11,2 ± 0,6	2967	290	5,9 ± 0,3	1552	163	6,3 ± 0,4
4	1486	514	20,6 ± 0,9	3258	445	8,2 ± 0,3	1510	209	8,3 ± 0,5
8	1460	592	24,3 ± 1	3790	698	10,9 ± 0,4	1497	281	11,3 ± 0,6
12	1522	635	25 ± 0,9	4202	727	10,3 ± 0,3	1290	220	10,2 ± 0,6
16	1585	638	24,1 ± 0,9	3313	558	10,1 ± 0,4	1317	223	10,2 ± 0,6
20	1548	602	23,4 ± 0,9	2753	473	10,2 ± 0,4	1457	267	11 ± 0,6
24	2508	850	20,3 ± 0,7	2777	426	9,2 ± 0,4	1475	218	8,9 ± 0,6
50	1687	409	14,4 ± 0,7	3140	433	8,2 ± 0,4	1495	181	7,3 ± 0,5
100	1322	294	13,4 ± 0,7	3214	440	8 ± 0,4	2589	364	8,5 ± 0,4

3. Dai risultati delle misure precedenti appare in modo abbastanza evidente come al livello del mare siano praticamente sufficenti 100 g/cm² di materiale avente una densità paragonabile a quella dell'acqua, per eliminare la massima parte della componente elettronica. Il massimo

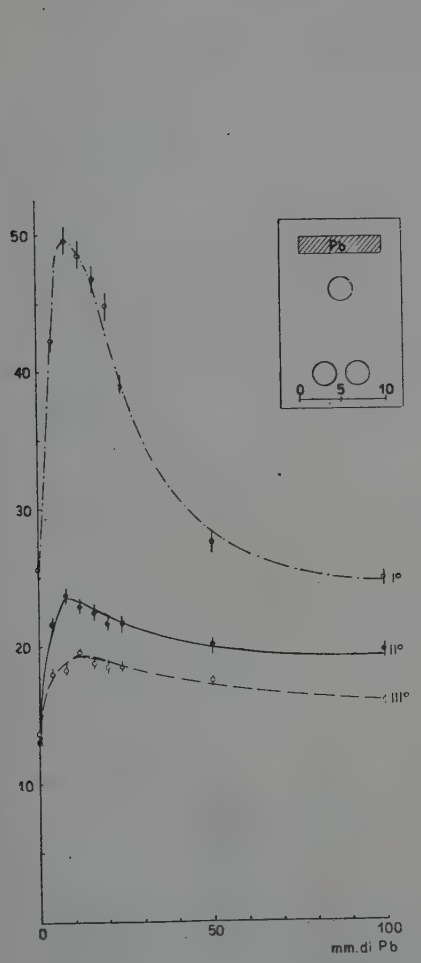


Fig. 1.

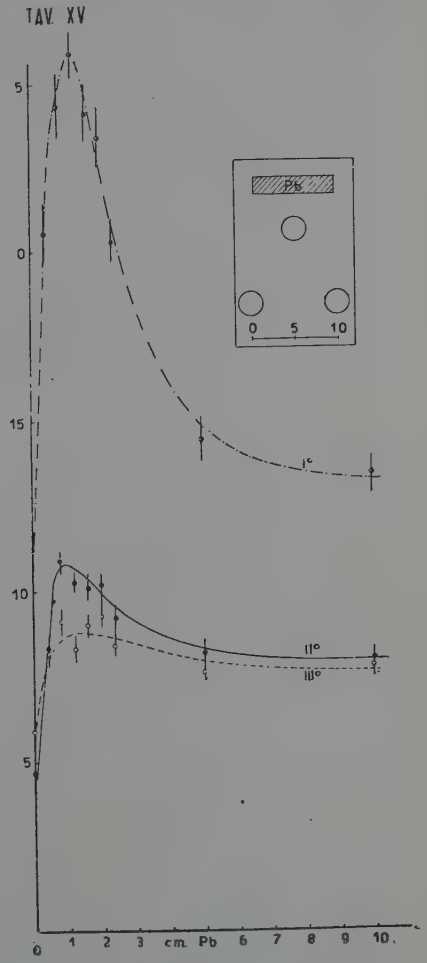


Fig. 2.

appena accennato presente nelle curve III delle fig. 1 e 2, è infatti attribuibile all'effetto di transizione fra cemento e piombo, effetto di transizione che si spiega ricordando come nel piombo il taglio di Bhabha, sulle energie, è circa sui 10 Mev, mentre nel cemento è valutabile intorno ai 20–30 Mev.

La curva da confrontare direttamente con quella ottenuta a Cervinia è, per l'identità delle condizioni (a parte la differente altezza) quella III della fig. 1. Il confronto è fatto nella fig. 3 dove appunto sono riportate nella stessa scala la curva ora detta (curva *c*) e quella ottenuta a Cervinia (curva *a*). La curva tratteggiata (curva *b*) è la curva *a* ridotta in modo da far coincidere il punto a 10 cm. di Pb con quello della curva *c*.

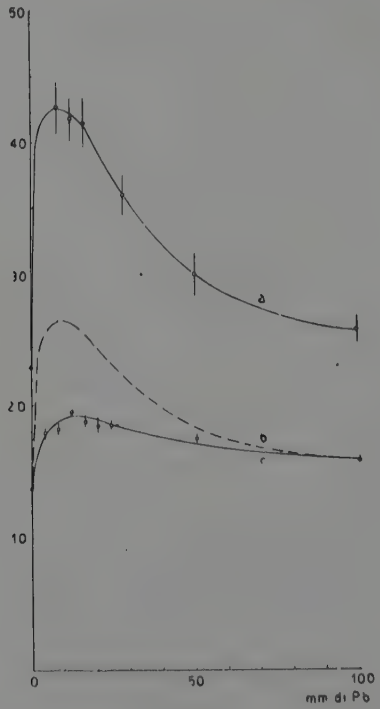


Fig. 3.

Non appare dubbio che le due curve abbiano un andamento nettamente diverso e che precisamente la curva *b* mostri un sensibile residuo di un processo moltiplicativo che non appare in quella *c*. Ora se effettivamente intorno al livello del mare la componente elettronica fosse integralmente o quasi dovuta al processo di disintegrazione del mesotrone le due curve *b* e *c* dovrebbero invece essere, nei limiti degli errori, identiche.

Al contrario se la componente elettronica presente intorno al livello del mare è nella massima parte un residuo della componente elettronica primaria è giusto che le due curve *b* e *c* siano diverse come realmente appa-

iono e che invece siano molto simili la curva I della fig. 1 e quella *a* della fig. 3. Riferendosi infatti al livello di m. 2050 sul livello del mare (Cervinia) entrambe queste curve sono state ottenute, rispetto a questo livello, sotto uno strato equivalente, in cammini di Bhabha e Heitler, di materia. Precisamente una volta a Cervinia, sotto circa 9 di questi cammini in cemento e l'altra a Roma, ancora sotto circa 9 cammini di Bhabha e Heitler, di cui $6 \div 7$ in aria e gli altri in cemento.

Si può infine osservare che le curve della figura 2 confermano pienamente quelle della fig. 1 e che si ritrovano accennate in esse, rispetto a quelle della fig. 1 alcune delle caratteristiche peculiari del processo moltiplicativo. Fra queste il massimo della curva I che appare un po' spostato rispetto a quello della corrispondente curva della fig. 1 e un massimo residuo, nella curva II più pronunziato di quello che non si noti nel caso degli sciami ad apertura angolare minore. L'una e l'altra cosa si spiegano tenendo presente che la disposizione dei contatori indicata nella fig. 2, favorisce, rispetto a quella indicata nella fig. 1, una maggiore moltiplicazione [1]. Ciò serve tra l'altro, a dimostrare l'attendibilità delle nostre misure.

4°. Queste esperienze sono state eseguite con i larghi mezzi forniti, col tramite dell'Istituto Nazionale di Geofisica, dal Consiglio Nazionale delle Ricerche.

---

[1] Vedi a questo proposito K. Z. Morgan e W. M. Nielsen, « Phys. Rev. », vol. *52*, pag. 564, 1937.

Chimica (Chimica biologica). — *Sulla sintesi biologica dell'acido ippurico* (1). Nota (2) di FRANCESCO CEDRANGOLO e VINCENZO BACCARI, presentata da GAETANO QUAGLIARELLO, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

La sintesi dell'ac. ippurico da ac. benzoico e glicocolla è stata tra tutte le sintesi che hanno luogo nell'organismo degli animali la prima ad essere riconosciuta (WÖHLER, 1824 (3)). Nell'uomo è noto che l'ac. benzoico somministrato si trasforma quasi quantitativamente in ac. ippurico (4), (5). Nel cane, invece, la più gran parte dell'ac. benzoico, artificialmente introdotto, compare tal quale nell'urina (6). L'azione tossica dell'ac. benzoico, per tale meccanismo, è abbassata considerevolmente. Così nell'antico esperimento di WIENER (7) g. 1,7, *pro kilo* di ac. benzoico, somministrato per via orale sotto forma di sale sodico, si mostrarono letali per il coniglio, mentre g. 2,4 dell'ac. rimanevano senza effetto se contemporaneamente si iniettava glicocolla.

Molte ricerche (BUNGE e SCHMIEDEBERG (8), BASHFORD e CRAMER (9), SNAPPER, GRÜNBAUM e NEUBERG (10), QUICK (11)) indicano almeno per il cane, il rene come l'organo principale in cui ha luogo la sintesi. Negli

---

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica biologica della R. Università di Napoli.

(2) Pervenuta all'Accademia il 28 giugno 1940-XVIII.

(3) Cit. in E. ADBERHALDEN, « Bioch. Handlex. », 1911, *4*, 430.

(4) J. LEWINSKI, « Arch. f. exp. Pathol.. u. Pharmakol. », 1908, *58*, 397; « Chem. Centralbl. », 1908, *1*, 2192.

(5) H. D. DAKIN, « J. of Biol. Chem. », 1910, *7*, 108; « Chem. Centralbl. », 1910, *1*, 1276.

(6) I. BUGSCH e R. HIRSCH, « Zeit. f. exper. Pathol. », 1906, *3*, 663.

(7) H. WIENER, « Arch. f. exper. Pathol. u. Pharmakol. », 1898, *40*, 313; « Chem. Centralbl. », 1898, *1*, 626.

(8) G. v. BUNGE e O. SCHMIEDEBERG, « Arch. f. exper. Pathol. u. Pharmakol. », 1877, *6*, 233.

(9) E. BASHFORD e W. CRAMER, « Zeit. f. phsyiol. Chem. », 1902, *35*, 224.

(10) I. SNAPPER, A. GRÜNBAUM e J. NEUBERG, « Bioch. Zeit. », 1924, *145*, 40.

(11) A. I. QUICK, « J. of Biol. Chem. », 1932, *96*, 73.

erbivori invece, la formazione dell'ac. ippurico sembra avvenga anche senza l'intervento del rene, probabilmente nel fegato [1] e loc. cit. [11] a pag. 1 e nell'intestino [2].

Non vi è dubbio che nell'organismo la copulazione dell'ac. benzoico con la glicocolla è di natura enzimatica [3], [4]. A proposito dell'enzima che catalizza tale reazione, è da osservare, però, che l'idea di Quick (loc. cit.), tratta da esperimenti *in vivo* su cani nefrectomizzati, che l'enzima sintetizzante, cui l'A. dà il nome di *ippuricesi*, sia diverso da quello scindente (*istozima* secondo la terminologia di Schmiedeberg [5]; *ippuricasi* secondo Clementi [6]; *aminoacilasi* secondo Smorodinzew [7]), in contrasto con la legge della reversibilità delle azioni enzimatiche, cui per il gruppo delle esterasi organiche Artom [8] e recentemente uno di noi (Cedrangolo) [9] hanno apportato un notevole appoggio sperimentale, evidentemente è già *a priori* insostenibile. Anche l'ipotesi dello stesso A. che l'enzima sintetizzante l'ac. fenaceturico, *fenaceturicesi*, sia diverso da quello che sintetizza l'ac., ippurico, è in contrasto coi più recenti risultati di idrolisi di Mazza [10], il quale ammette invece un unico enzima responsabile della scissione degli acilderivati dei 1-aminoacidi, e dimostra che il grado di idrolisi dipende solo dalla negatività dell'acile, diminuendo con l'aumentare di questa.

A parte però ogni considerazione o previsione teorica, bisogna riconoscere che tutti gli AA. che si sono occupati della sintesi enzimatica dell'ac. ippurico, hanno sempre trovata notevole difficoltà nell'ottenerla e solamente con condizioni particolari di esperimento e di tecnica è stato possibile a qualcuno di essi darne una sicura dimostrazione. Così, mentre la perfusione del rene isolato di cane con sangue defibrinato, cui si è aggiunto ac. benzoico e glicocolla, rende evidente la sintesi, la poltiglia dello stesso organo è priva di azione (Bunge e Schmiedeberg, loc. cit.). Se-

---

([1]) Salomon, « Zeit. f. physiol. Chem. », 1879, *3*, 365; E. Friedmann e H. Tachau, « Bioch. Zeit », 1911, *35*, 88.

([2]) Jaarsveld u. Stookyis, « Jahresber. über d. Fortschritte d. Tierch. », 1879, 356.

([3]) W. Kochs, « Arch. f. d. ges. Physiol. », 1879, *20*, 64; M. B. Berminzone, « Boll. Acc. Med. di Genova », 1901, *16*, 1; ved. anche Bashford e Cramer, loc. cit.

([4]) J. E. Abelous e H. Ribout, « Compt. R. de la Soc. de Biol. », 1900, *52*, 543.

([5]) O. Schmiedeberg, « Arch. f. exp. Path. u. Pharmakol. », 1881, *24*, 288.

([6]) A. Clementi, « Atti Acc. Lincei », 1923, *32*, 11, 172.

([7]) J. A. Smorodinzew, « Zeit. f. physiol. Chem. », 1922, *124*, 123.

([8]) C. Artom e S. Di Frisco, « Arch. Fisiol. », 1926, *24*, 24, 70.

([9]) F. Cedrangolo, « Boll. Soc. It. Biol. Sper. », 1938, *13*, 217; ibidem, 1938, *13*, 791; « Enzymologia », 1938, *5*, 1.

([10]) F. P. Mazza, « Atti Acc. Lincei », 1934, *19*, 97.

condo Hoffmann (1) se la perfusione è eseguita invece con sangue nel quale l'O_2 è stato sostituito dal CO, la formazione di ac. ippurico non ha luogo. Secondo Bashford e Cramer (loc. cit.) è possibile dimostrare con la poltiglia renale la sintesi solo a patto che la reazione avvenga in ambiente di O_2 a pressione di 10–15 atmosfere. Abelous e Ribout (loc. cit.), che hanno sperimentato con rene di maiale, ritengono che la sintesi dell'ac. ippurico non avviene partendo da ac. benzoico e glicocolla, ma avviene partendo da alcol benzilico e glicocolla, mostrandosi obbligatoria l'ossidazione dell'alcol per la reazione di sintesi. Nel più recente lavoro di Blagowestschenski e Nikolaeff (2) sulla reversibilità dell'azione dell'istozima, viene mostrato che la sintesi dell'ac. ippurico da alcol benzilico e glicocolla in presenza della takadiastasi, è considerevolmente aumentata dalla presenza di mezzi ossidanti o di sistemi fornenti energia, quali il sistema perossidasi–H_2O_2–guaiacolo. Recentissimamente Borsook e Dubnoff (3) hanno riferito che nel loro laboratorio usando fettine di fegato sopravviventi, è stato trovato che circa il 40 % dell'ac. benzoico era convertito nell'ac. ippurico, quando la concentrazione iniziale dell'ac. benzoico era 0,0025 M e quella della glicina 0,01 M (4).

Dalle ricerche brevemente riassunte risulta perciò che la sintesi dell'ac. ippurico, quale semplice conseguenza dell'aumento della concentrazione dell'ac. benzoico e della glicocolla, cioè della legge di massa, e dell'enzima idrolizzante, non è mai riuscito ad alcuno dei precedenti AA., ma che sempre è stato necessario, per ottenerla, accoppiare qualche altra reazione, capace di liberare sufficiente energia.

Tali risultati sperimentali ci sembrano spiegabili, anzi teoricamente prevedibili, se si considerano i dati termici, relativi ai prodotti iniziali e finali della reazione:

$$\text{ac. benzoico} + \text{glicocolla} \longrightarrow \text{ac. ippurico} + H_2O.$$

Da diversi dati della letteratura (5) è possibile ricavare per ognuno dei corpi sopra scritti, i valori della energia libera di formazione, a 25°.

---

(1) A. Hoffmann, « Arch. f. exper. Pathol. u. Pharmakol, 1877, *7*, 233.

(2) A. W. Blagowestschenski e K. A. Nikolaeff, « Bioch. Zeit. », 1935, *276*, 368.

(3) H. Borsook e J. W. Dubnoff, « J. of Biol. Chem. », 1939, *128*, CXIV.

(4) Il dato molto interessante è stato riferito da Borsook e Dubnoff alla riunione, tenutasi a Toronto nell'aprile 1939, della Società americana dei Chimici biologici. Di tale comunicazione è apparso un breve sunto nel « J. of Biol. Chem. » del 1939. Non è a nostra conoscenza che gli AA. abbiano riferito altrove più estesamente i loro risultati per cui ignoriamo la tecnica dell'esperimento.

(5) E. J. Cohn, « Erg. Physiol. », 1931, *33*, 781; G. H. Jeffrey e A. I. Vogel, « Philos. Mag. », 1934, *18*, 901; A. B. Josephson, « Bioch. Zeit. », 1933, *267*, 74; H. M. Huffmann, E. L. Ellis e S. W. Fox, « J. Am. Chem. Soc. », 1936, *58*, 1728.

Da tali valori è poi possibile calcolare $\Delta F_{298,1}$ cioè la variazione di energia libera, relativa alla formazione dell'ac. ippurico da ac. benzoico e glicocolla.

La reazione è:

$$\text{benzoato}^- \text{ (acq.)} + \text{glicina}^{\pm} \text{ (acq.)} \longrightarrow \text{ippurato}^- \text{ (acq.)} + H_2O \text{ (liq.)}.$$

Le energie libere di formazione, in Calorie per g.mol a 25° per i 4 corpi nella forma sopra scritta della equazione sono:

	ippurato$^-$ (acq.)	H_2O (liq.)	benzoato$^-$ (acq.)	glicina$^{\pm}$ (acq.)
Cal.	— 82,940	— 56,720	— 52,650	— 89,570

Da cui $\Delta F_{298,1}$, è:

$$(-82{,}940) + (-56{,}720) - (-52{,}650) - (-89{,}570) = 2560 \text{ calorie.}$$

La sintesi dell'ac. ippurico da ac. benzoico e glicocolla comporta quindi un guadagno di energia libera (ΔF positivo) e quindi non può procedere spontaneamente, ma ad essa deve legarsi un'altra reazione, in cui è fornita energia libera sufficiente, che supplisce quella legata nell'ac. ippurico e inoltre un eccesso tale, che alla fine per la somma delle due reazioni ΔF risulti negativo.

La facilità della sintesi *in vivo* o con la tecnica delle sezioni sopravviventi deve evidentemente ascriversi al fatto che in tali condizioni hanno luogo contemporaneamente reazioni diverse con variazione negativa di energia libera.

Dal punto di vista teorico, quindi, dovrebbe escludersi la possibilità che l'ac. ippurico possa essere sintetizzato da ac. benzoico e glicocolla in presenza del solo enzima e in assenza di reazioni accoppiate. È perciò che i risultati sperimentali di Mutch [1] e quelli molto più recenti di Waelsch e Busztin [2], i quali mostrano una sintesi spesso considerevole dell'ac. ippurico con estratti enzimatici di rene di cavallo, ci apparivano difficilmente spiegabili, data la contraddizione che è tra essi e l'andamento termodinamico della reazione in questione. Ai risultati di Mutch ci sembra però non possa darsi gran peso, data la disposizione degli esperimenti di quella ricerca e soprattutto la stessa conclusione dell'A. di non aver indiscutibilmente identificato come acido ippurico il prodotto risultante della reazione, dato che « the resulting product was neither suitable for absolute identification by means of combustion nor by a melting point determination ». Waelsch e Busztin (loc. cit.), invece, hanno impiegato una

(1) N. Mutch, « J. of Physiol. », 1912, *44*, 176.

(2) H. Waelsch e A. Busztin, « Zeit. f. physiol. Chem. », 1937, *249*, 135.

metodica certamente più precisa, consistente nell'estrarre successivamente dalle miscele di reazione l'ac. benzoico libero, l'ac. ippurico, e la benzammide e determinare poi, o titrimetricamente secondo la procedura di Folin e Flanders [1] un poco modificata dagli AA., o colorimetricamente sulla base della reazione qualitativa di Mohler [2], trasformata a metodo quantitativo dallo stesso Waelsch e da Klepeter [3], l'ac. benzoico delle tre frazioni. In due casi l'ac. ippurico formato è stato anche dimostrato estraendo le miscele di reazione, acide per H_2SO_4, con etere e poi, distillato l'etere, sottoponendo il residuo all'indagine del punto di fusione che risultava a 187° e non mostrava depressione per aggiunta di ac. ippurico cristallizzato. La sintesi in qualche caso raggiungeva il valore del 60 % e non era però mai inferiore al 17 %. Nella *Tecnica e Risultati* si riporta una tabella degli AA.

Data la tonalità della reazione di sintesi, i risultati avuti da Waelsch e Busztin possono avere l'unica spiegazione nell'ipotesi che nei preparati acellulari da essi impiegati si determinino reazioni spontanee che forniscano energia libera in tale quantità che ΔF per la completa reazione, cioè la reazione che libera energia + la reazione che assorbe energia sia negativo.

Come si vede dalla esposizione sopra fatta, se l'applicazione della seconda legge della termodinamica alla sintesi biologica dell'ac. ippurico da ac. benzoico e glicocolla, ci permette di prevedere che tale reazione, anche in presenza dell'enzima adatto, non possa procedere spontaneamente, tuttavia dal punto di vista sperimentale le nostre conoscenze sulle condizioni della sintesi *in vivo* e in *vitro* sono scarsissime. In particolare non è chiaro se estratti enzimatici sono capaci di tale sintesi.

Nelle ricerche qui riferite si è perciò voluto stabilire se con l'aiuto di estratti di rene, nei quali certamente è presente l'istozima, la sintesi dell'ac. ippurico da ac. benzoico e glicocolla risulti positiva, in assenza di sistemi artificialmente aggiunti, capaci di fornire sufficiente energia libera. A tal proposito sia accennato che la deaminazione ossidativa della glicocolla per azione della d–aminoacidossidasi, certamente presente negli estratti di rene, per i risultati di Krebs [4], e come del resto si vede anche dai dati delle nostre tabelle, è scarsissima o addirittura assente, per cui è da escludere, nel caso che si lavori con tali estratti, che essa possa rappresentare una di quelle reazioni, che per necessità termodinamiche debbono accoppiarsi alla reazione di sintesi dell'ac. ippurico.

---

(1) O. Folin e F. F. Flanders, « J. of. Biol. Chem. », 1912, *11*, 257.
(2) Mohler, « Bull. Soc. Chim. », 1890, *3*, 414.
(3) H. Waelsch e G. Klepeter, « Zeit. f. physiol. Chem. », 1935, *236*, 92.
(4) H. A. Krebs, « Zeit. f. physiol. Chem. », 1933, *217*, 217.

Mentre tutti i precedenti AA. hanno proceduto alla ricerca dell'ac. ippurico, servendosi della solubilità dell'acidelrivato in vari solventi organici e cristallizzandolo da questi o idrolizzandolo ad ac. benzoico, no abbiamo preferito dosare col metodo manometrico di v. Slyke l'N_2 aminico della glicocolla e seguire le variazioni di questo in seguito ad aggiunta di ac. benzoico. Il metodo da noi usato è certamente più sensibile dei metodi di estrazione, che del resto riescono sempre incompletamente. Inoltre, con tale metodo si determina direttamente l'NH_2 – gruppo entrato in reazione con l'ac. benzoico e si evita così la possibilità di dosare per ac. ippurico prodotti diversi ma con caratteri fisici molto simili (esteri dell'ac. benzoico; benzammide; ved. Waelsch e Busztin loc. cit.).

Contemporaneamente alle prove di sintesi, abbiamo dosato, anche con la stessa tecnica manometrica di v. Slyke, il potere idrolitico di ogni estratto sull'ac. ippurico.

Si sono usati estratti glicerici di rene di cavallo, cane, coniglio e maiale, preparati secondo le indicazioni di Waelsch e Busztin (loc. cit.), o secondo H. Kimura [1]. In un caso si è eseguita anche una ricerca con polvere di rene di maiale, ottenuta con la tecnica di Mutch (loc. cit.).

I risultati da noi avuti dimostrano che l'istozima è presente in tutti gli estratti da noi adoperati.

La polvere preparata secondo le indicazioni di Mutch, ha determinato, invece una idrolisi dell'ac. ippurico di appena il 4.08 % dopo 192 ore di incubazione, per cui tale tecnica è stata successivamente abbandonata.

Di potere idrolizzante scarso, ma costante, sono risultati, invece, gli estratti di rene di cavallo (scissione del 10,6 % dopo 120 ore). A tal proposito è da accennare che secondo osservazioni di Willstätter, Waldschmidt–Leitz, Waldschmidt–Graser e Dorfmüller [2], l'ippuricasi si troverebbe nel rene di cavallo tutta allo stato di desmoenzima, non eluibile, nè con mezzi acquosi, nè con glicerina. I nostri risultati mostrano, invece, che con la tecnica di estrazione qui impiegata, che è poi quella di Kimura o di Waelsch e Busztin, una parte, se anche non considerevole, dell'istozima del rene di cavallo certamente passa in soluzione. Se a questa frazione debba poi assegnarsi il nome di lio–, desmo– o lio–desmo–istozima, non può evidentemente stabilirsi sino a che non si addiverrà a una netta separazione, universalmente accettata, dei carat-

---

[1] H. Kimura, « J. of Bioch. », 1928–1929, *10*, 207, 225.

[2] R. Willstätter, E. Waldschmidt–Leitz e J. Waldschmidt–Graser cit. in W. Grassmann, Oppenheimer, « Handb. d. Bioch. Erg. Werk. », 1933, *1*, 465.

teri fisici dei lio– e desmo–enzimi (ved. Willstätter e Rohdewald [1], Bamann e Salzer [2]).

La sintesi può dirsi in tutti i casi negativa. Infatti la sintesi positiva (5 volte su 9), per quanto lungo sia stato il tempo di reazione a 37°, non ha mai sorpassato il valore del 2 %. Tale valore corrisponde nell'aliquota sottoposta alla analisi, a una differenza in N_2–aminico pari a circa mg. 0,02. Tale differenza, data la sensibilità del metodo manometrico di v. Slyke, che al massimo permette di dosare con sicurezza quantità pari a mg 0,001 di azoto aminico e dato ancora che essa è ricavata dal confronto di due prove, in cui i volumi eguali di estratto di rene, per quanto omogenei, non possono tuttavia considerarsi identici al 100 % rispetto alle variazioni nel loro contenuto in N_2–aminico durante il lungo tempo di incubazione, non è da noi considerata come probativa per una effettiva sintesi di ac. ippurico da ac. benzoico e glicocolla.

Le conclusioni di Mutch e quelle di Waelsch e Busztin, alla cui disposizione degli esperimenti e preparazione degli estratti enzimatici ci siamo in molti casi strettamente attenuti, non vengono perciò da noi confermate.

Dato che Waelsch e Busztin non hanno nei loro esperimenti mai fornito la diretta prova della graduale scomparsa dell' NH_2–gruppo della glicocolla in presenza dell'ac. benzoico, potrebbe apparire molto probabile che gli AA. abbiano estratto dalle loro miscele, prodotti diversi di appaiamento dell'ac. benzoico. Restano senza spiegazione, però, i due protocolli riportati a pag. 152 del citato lavoro dei due AA., dai quali risulta che l'ac. ippurico formatosi è stato isolato, purificato per cristallizzazione, e identificato al punto di fusione. La sintesi dopo 6 ore risultava del 60 % in un caso e del 20 % nell'altro. A proposito di questi risultati sia notato che un esperimento dello stesso tipo, riferito nella tabella II, ci ha dato una sintesi di appena l'1,28 %, valore al quale, per quanto si è detto precedentemente, non può ascriversi significato di risultato positivo.

La mancata sintesi dell'ac. ippurico con estratti di rene, in cui è dimostrabile l'istozima, trova la sua naturale spiegazione nei dati termodinamici sopra discussi. Gli estratti acquosi–glicerici di rene sono evidentemente dei sistemi, in cui sono assenti reazioni che forniscono sufficiente energia libera.

La presenza dell'istozima non è sufficiente da sola perchè abbia luogo la sintesi, in quanto che per tutti gli enzimi considerati come catalizzatori

---

(1) R. Willstätter e M. Rohdewald, « Zeit. f. phsyiol. Chem. », 1931, *203*, 189.

(2) E. Bamann e W. Salzer, « Erg. d. Enzymforsch. », 1938, *7*, 28.

perfetti, lo stato iniziale e quello finale debbono risultare identici (ved. sull'argomento una rivista di H. Borsook [1]).

La sintesi dell'ac. ippurico con estratti di organo, sarà perciò probabilmente dimostrabile solo quando a questi si accoppino artificialmente sistemi, capaci di supplire sufficiente energia libera.

Modelli acellulari in cui le reazioni accoppiate sono quelle di fondamentale interesse biologico, sono in prova attualmente in questo Laboratorio.

Tecnica e risultati.

I. Preparazione degli estratti. – *a*) Secondo H. Waelsch e A. Busztin. Reni di cavallo [2] e di maiale, prelevati subito dopo l'uccisione degli animali, erano portati in laboratorio sotto ghiaccio e quindi subito lavorati. Gli organi erano liberati dalla capsula e dal connettivo, passati alla macchina e tritati al Latapie. La poltiglia era estratta a 37° per 24 h con glicerina all'87 % nella proporzione di 5 parti di glicerina per 1 di poltiglia. Si centrifugava per ¼ d'ora a 3.000 giri al minuto e il liquido, soprastante, chiaro, rosso, filtrato per lana di vetro, era impiegato per gli espementi. *b*) Secondo H. Kimura. – Reni di cavallo, maiale, coniglio e cane, prelevati come sopra, erano pestati, dopo sminuzzamento, in mortaio in presenza di sabbia di quarzo, ed estratti con glicerina 87 % nella proporzione di 3 parti per 1 di organo. Si lasciava in ghiacciaia per 24 h e il liquido, soprastante, centrifugato e filtrato era impiegato. *c*) Secondo N. Mutch. – Reni di maiale, prelevati come sopra, erano sminuzzati e tenuti 72 h sotto alcol a 95. Il tessuto, seccato in essicatore su H_2SO_4 per 24 h, era pestato, passato per staccio e ridotto così in polvere finissima. Ogni traccia di grasso e pigmento era eliminata mediante estrazione in Soxlet con etere per 12 h. Si seccava e si aveva così una polvere chiara di colorito bruno–pallido che dava con acqua, una sospensione lattea. La polvere, pesata, era direttamente portata nelle miscele di reazione.

II. *Disposizione e tecnica degli esperimenti.* – La composizione delle singole miscele, per ogni esperimento, risulta dalle tabelle allegate. cc. 5 di ogni miscela erano deproteinizzati con il metodo di Folin e Wu e portati a 50 cc nelle prove di sintesi, a 25 cc in quelle di scissione. Una aliquota del filtrato, pari a 5 cc, era portata all'analisi.

Le analisi erano eseguite coll'apparecchio manometrico di v. Slyke e i risultati (spesso media di 2 analisi) riportati al volume totale delle miscele di reazione.

---

(1) H. Borsook, « Erg. d. Enzymforsch. », 1935, *4*, 1.

(2) Questi ci erano gentilmente forniti dall'Istituto Sieroterapico Nazionale che anche qui ringraziamo.

Conclusioni.

Con estratti acquoso-glicerici da reni di cavallo, cane, maiale e coniglio, sicuramente contenenti l'istozima, la sintesi dell'ac. ippurico da ac. benzoico e glicocolla è risultata costantemente negativa.

Le conclusioni di Mutch, come quelle di Waelsch e Busztin, non sono perciò confermate.

Tabella I.

Scissione con rene di cavallo. Estratto preparato secondo H. Waelsch e A. Busztin.

(Miscela I: estratto glicerico cc 3,6; puffer fosfati m/15 (pH 7,4) cc 17; ippurato di sodio cc 3,6 (mg 112; N = mg 7,8); acqua a 25 cc. Miscela II: estratto glicerico cc 3,6; puffer cc 17; acqua a 25 cc. Miscela III: puffer cc 17; ippurato cc 3,6; acqua a 25 cc.).

Estratto N°	Ore	mg di N aminico in 25 cc della miscela			A—(B+C)	Scissione %
		I	II	III		
I	0	0,60	0,36	0,10		
	72	1,1	0,55	0,11		
	diff.	+ 0,5 (A)	+ 0,19 (B)	+ 0,01 (C)	+ 0,30	2,7
II	0	0,50	0,37	0,10		
	72	1,2	0,52	0,11		
	diff.	+ 0,70 (A)	+ 0,15 (B)	+ 0,01 (C)	+ 0,54	6,9

I risultati sono discussi ed interpretati sulla base dei dati numerici delle energie libere, di formazione, i quali mostrano che la sintesi dell'ac. ippurico da ac. benzoico e glicocolla, corrisponde a un guadagno di energia libera. La libera energia guadagnata nella sintesi dell'ac. ippurico, deve essere perciò supplita da un'altra reazione, che fornisce energia libera in tale quantità che ΔF per la completa reazione, cioè la reazione che libera energia + la reazione che assorbe energia, risulti negativo.

Tabella II.

Sintesi con rene di cavallo. Estratto preparato secondo H. Waelsch e A. Busztin.

(Miscela I: estratto glicerico cc 3,6; puffer fosfati m/15 (pH 7,4) cc 18; glicocolla mg 30; benzoato di sodio mg 60; acqua a 25 cc. Miscela II: estratto glicerico cc 3,6; puffer cc 18; glicocolla mg 30; acqua a 25 cc. Miscela III: puffer cc 18; glicocolla mg 30; benzoato di sodio mg 60).

Estratto N°	Ore	mg di N aminico in 25 cc della miscela			A—(B+C)	Sintesi %
		I	II	III		
I	0	5,88	5,85	5,51		
	72	5,46	5,74	5,32		
	diff.	— 0,42 (A)	— 0,11 (B)	— 0,19 (C)	— 0,12	+ 2,04
III	0	5,605	5,717	5,480		
	72	5,45	5,53	5,43		
	diff.	— 0,155 (A)	— 0,187 (B)	— 0,05 (C)	+ 0,082	— 1,4
IV	0	6,21	6,13	5,51		
	6	6,21	6,21	5,51		
	diff.	0 (A)	+ 0,08 (B)	0,0 (C)	— 0,08	+ 1,28

Aggiunta. – Al momento di mandare in stampa la presente Nota, siamo venuti a conoscenza del lavoro *in extenso* di H. Borsook e J. W. Dubnoff, apparso nel fascicolo di gennaio (pag. 307) del volume 132 (1940) del *Journal of biol. Chem.* In tale lavoro gli AA. sono d'accordo con noi nel ritenere, sulla base dei dati termodinamici, impossibile la sintesi dell'ac. ippurico da ac. benzoico e glicocolla in presenza della sola ippuricasi. Dal punto di vista sperimentale è descritta la tecnica e riportati in dettaglio i risultati dei loro esperimenti, i quali, come già si è accennato nel testo di questa Nota, hanno mostrata positiva la sintesi dell'acilderivato con sistemi enzimaticamente complessi, quali le fettine di organo sopravviventi.

Ma soprattutto interessante per quel che ci riguarda, è la asserzione degli AA. a pagg. 320-321 del citato lavoro, in completo accordo coi

nostri risultati, di non aver potuto confermare, pur usando identiche condizioni di esperimento, le osservazioni di H. Waelsch e A. Z. Busztin, relative alla sintesi dell'ac. ippurico con l'aiuto di estratti acquoso-glicerici da reni di cavallo. Mancano però i protocolli sperimentali nè è riferito alcun dato numerico.

Tabella III.

Scissione con rene di cavallo. Estratto preparato secondo Kimura.

(Miscela I: estratto glicerico cc 2; puffer fosfati m/15 (pH 7,4) cc 5; ippurato di sodio cc 5 (mg 139; N = mg 10,9); toluolo gocce 3; acqua a 25 cc. Miscela II: estratto cc 2; puffer cc 5; toluolo gocce 3; acqua a 25 cc. Miscela III: puffer cc 5; ippurato cc 5; toluolo gocce 3; acqua a 25 cc).

Estratto N°	Ore	mg di N aminico in 25 cc della miscela			A—(B+C)	Scissione %
		I	II	III		
V	0	0,41	0,2625	0,160		
	24	0,7875	0,3750	0,197		
	diff.	+ 0,3775 (A)	+ 0,1125 (B)	+ 0,037 (C)	+ 0,2280	2
	120	1,75	0,4125	0,197		
	diff.	+ 1,34 (A)	+ 0,15 (B)	+ 0,037 (C)	+ 0,153	10,6

Tabella IV.

Scissione con rene di cane. Estratto preparato secondo Kimura.

(Miscele I, II, III: ved. tabella III).

Estratto N°	Ore	mg di N aminico in 25 cc della miscela			A—(B+C)	Scissione %
		I	II	III		
VI	0	0,37	0,337	0		
	120	5,43	1,83	0,033		
	diff.	+ 5,06 (A)	+ 1,493 (B)	+ 0,033 (C)	+ 3,54	32,4

Tabella V.

Sintesi con rene di cane. Estratto preparato secondo Kimura.

(Miscele I, II e III: ved. tabella II).

Estratto N°	Ore	mg di N aminico in 25 cc della miscela			A—(B + C)	Sintesi %
		I	II	III		
VI	0	6,01	6,11	5,48		
	120	7,73	7,85	5,40		
	diff.	+ 1,72 (A)	+ 1,74 (B)	— 0,08 (C)	+ 0,06	— 1

Tabella VI.

Scissione con rene di coniglio. Estratto preparato secondo Kimura.

(Miscele I, II e III: ved. tabella III).

Estratto N°	Ore	mg di N aminico in 25 cc della miscela			A—(B + C)	Scissione %
		I	II	III		
VII	0	0,30	0,32	0		
	24	0,70	0,47	0		
	diff.	+ 0,40 (A)	+ 0,15 (B)	0 (C)	+ 0,25	2,29
	72	1,60	0,775	0,225		
	diff.	+ 1,30 (A)	+ 0,45 (B)	+ 0,225 (C)	+ 0,63	5,7
	140	2,20	0,93	0,30		
	diff.	+ 1,90 (A)	+ 0,61 (B)	+ 0,30 (C)	+ 0,99	9,08

Tabella VII.

Sintesi con rene di coniglio. Estratto preparato secondo Kimura.

(Miscele I, II e III: ved. tabella II).

Estratto N°	Ore	mg di N aminico in 25 cc della miscela			A—(B+C)	Sintesi %
		I	II	III		
VII	0	5,7	5,85	5,39		
	72	6,6	7,00	5,19		
	diff.	+ 0,9 (A)	+ 1,15 (B)	— 0,20 (C)	— 0,05	+ 0,9

Tabella VIII.

Scissione con rene di maiale. Polvere preparata secondo Mutch.

(Miscela I: polvere gr. 0,50; ippurato cc 10; acqua cc 10; toluolo cc 5. Miscela II: polvere gr. 0,5; acqua cc 20; toluolo cc 5. Miscela III: ippurato cc 10; acqua cc 10; toluolo cc 5).

Polvere N°	Ore	mg di N aminico in 25 cc della miscela			A—(B+C)	Scissione %
		I	II	III		
VIII	0	1,76	1,35	0,43		
	72	6,90	5,70	0,45		
	diff.	+ 5,14 (A)	+ 4,35 (B)	+ 0,02 (C)	+ 0,77	3,5
	192	7,95	6,60	0,48		
	diff.	+ 6,19 (A)	+ 5,25 (B)	+ 0,05 (C)	+ 0,89	4,08

Tabella IX.

Sintesi con rene di maiale. Polvere preparata secondo Mutch.

(Miscela I: polvere gr. 0,50; glicocolla mg 30; benzoato di sodio mg 60; acqua a 25 cc. Miscela II: polvere gr. 0,50; glicocolla mg 30; acqua a 25 cc. Miscela III: glicocolla mg 30; benzoato mg 60; acqua a 25 cc).

Polvere N°	Ore	mg di N aminico in 25 cc della miscela			A—(B+C)	Sintesi %
		I	II	III		
VIII	0	7,01	6,98	5,56		
	72	12,37	12,30	5,44		
	diff.	+ 5,36 (A)	+ 5,32 (B)	— 0.12 (C)	+ 0,16	— 2

Tabella X.

Scissione con rene di maiale. Estratto preparato secondo Waelsch e Busztin.

(Miscela I: estratto glicerico cc 2; puffer cc 2; ippurato cc 5; acqua a 25; toluolo gocce 3. Miscela II: estratto glicerico cc 2; puffer cc 5; acqua a 25; toluolo gocce 3. Miscela III: glicerina cc 2; puffer cc 5; ippurato cc 5; acqua a 25; toluolo gocce 3).

Estratto N°	Ore	mg di N aminico in 25 cc della miscela			A—(B+C)	Scissione %
		I	II	III		
IX	0	0,30	0,23	0,11		
	30	4,198	0,62	0,07		
	diff.	+ 3,898 (A)	+ 0,39 (B)	— 0,04 (C)	+ 3,54	32,4
	72	7,50	0,62	0,23		
	diff.	+ 7,20 (A)	+ 0,39 (B)	+ 0,12 (C)	+ 6,69	61,3
	96	9,71	0,52	0,15		
	diff.	+ 9,41 (A)	+ 0,29 (B)	+ 0,04 (C)	+ 9,08	83,3

TABELLA XI.

Sintesi con rene di maiale secondo WAELSCH.

(Miscela I, II e III: ved. tabella II).

Estratto N°	Ore	mg di N animico in 25 cc della miscela			A—(B+C)	Sintesi %
		I	II	III		
IX	0	6,06	6,15	5,48		
	72	6,85	6,70	5,49		
	diff.	+ 0,79 (A)	+ 0,55 (B)	+ 0,01 (C)	+ 0,25	— 4,1
	140	6,62	6,78	5,48		
	diff.	+ 0,56 (A)	+ 0,63 (B)	0 (C)	— 0,07	+ 1,1

TABELLA XII.

Scissione con rene di maiale. Estratto preparato secondo H. KIMURA.

(Miscele I, II e III: ved. tabella III).

Estratto N°	Ore	mg di N aminico in 25 cc della miscela			A—(B+C)	Scissione %
			II	III		
X	0	0,325	0,312	0,3		
	24	6,47	0,45	0,3		
	diff.	+ 6,145 (A)	+ 0,137 (B)	0 (C)	+ 6	55
XI	0	0,45	0,25	0,18		
	24	3,15	0,75	0,33		
	diff.	+ 2,70 (A)	+ 0,50 (B)	+ 0,15 (C)	+ 1,80	16,5

Tabella XIII.

Sintesi con rene di maiale. Estratto preparato secondo Kimura. (Miscela I, II e III: ved. tabella II).

Estratto N°	Ore	mg di N aminico in 25 cc della miscela			A—(B+C)	Sintesi %
		I	II	III		
XI	0	5,88	5,98	5,46		
	72	6,05	6,35	5,30		
	diff.	+ 0,170 (A)	+ 0,330 (B)	— 0,15 (C)	— 0,01	+ 0,16

Tabella XIV.

(da H. Waelsch e A. Busztin – Zeit. f. physiol. Chem., 1937, *249*, 150).

Esperienza	Molarità nel miscuglio della glicocolla	Prelievo del campione dopo ore	ac. benzoico libero mg	ac. benzoico dell'acido ippurico mg	ac. benzoico libero + ac. benz. dell'acido ippurico	formazione di benzammide %	Rene
1	0	0			16,2	0	II
2	0	2	7,0	4,8	11,8	21	II
3	0	6	4,3	3,7	8,0	47	II
4	0	24	2,4	2,9	5,3	65	II
5	0,0022	2	8,3	5,5	13,8	8	II
6	0,0022	6	2,5	8,4	10,9	27	II
7	0,0022	24	2,9	6,0	8,9	41	II
8	0	0			16,2	0	III
9	0	2	7,1	5,0	12,1	20	III
10	0	6	4,6	4,0	8,6	43	III
11	0	24	3,0	2,6	5,6	63	III
12	0,0022	2	8,5	6,2	14,7	2	III
13	0,0022	6	3,0	8,5	11,5	23	III
14	0,0022	24	2,8	5,2	8,0	47	III

Chimica (Chimica biologica). — *Effetto della porfiresside sull'azione reversibile della esterasi pancreatica* [1]. Nota [2] di Francesco Cedrangolo, presentata da Gaetano Quagliariello, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

Dai semi di ricino R. Itoh [3] riferisce di aver isolato una sostanza che controlla l'azione reversibile della lipasi. La forma ridotta di detta sostanza, che sembra quella predominante nei semi, agirebbe come un attivatore per l'idrolisi del grasso per azione della lipasi del ricino e come un inibitore per la sintesi dell'acido oleico con la glicerina. La forma ossidata, ottenuta per autossidazione all'aria della forma ridotta o per azione su questa di H_2O_2 diluita, agirebbe invece come un attivatore per la sintesi e come un inibitore per l'idrolisi. La forma intermedia non avrebbe azione nè sul processo di scissione nè su quello di sintesi. Inoltre secondo Itoh sia con la lipasi del ricino (loc. cit.) sia con quella del pancreas di maiale [4], la reazione idrolitica sarebbe accelerata dall'aggiunta di sostanze riducenti (cisteina, glutatione ridotto, acido ascorbico) e ritardata da quella di ossidanti (H_2O_2), mentre la sintesi all'opposto sarebbe accelerata dall'ossidazione e ritardata dalla riduzione. In un successivo lavoro l'allievo di R. Itoh, S. Kayashima [5] ha ottenuto con l'esterasi epatica gli stessi risultati avuti da R. Itoh con le due lipasi del pancreas e del ricino ed esprime poi l'ipotesi che il *feron* di tale esterasi rappresenti una forma altamente ossidata di esterasi epatica, forma che è favorevole alla sintesi e sfavorevole alla idrolisi, mentre l'*agon* sia una sostanza riducente, del tipo del glutatione e della cisteina, che attiverebbe la reazione di idrolisi reagendo col *feron*, il quale allo stato ridotto si dimostrerebbe invece adatto alla idrolisi. Ancora più recentemente secondo un altro lavoro di R. Itoh [6], anche la scissione della tributirrina, catalizzata dalle esterasi del latte e del siero, sarebbe accelerata dall'azione sull'enzima di sostanze riducenti, ritardata invece da quella di ossidanti.

---

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica biologica della R. Università di Napoli.

[2] Pervenuta all'Accademia il 28 giugno 1940-XVIII.

[3] R. Itoh, « J. Of. Bioch. », 1936, *23*, 299; Ibidem, 1937, *25*, 167.

[4] Ibidem, 1937, *26*, 187.

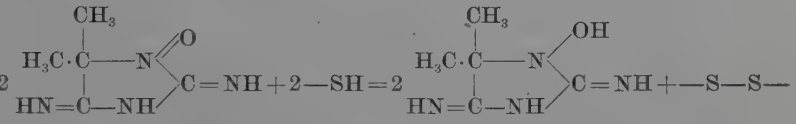
[5] S. Kayashima, Ibidem, 1938, *28*, 175.

[6] R. Itoh, Ibidem, 1939, *30*, 283.

Indipendentemente dai citati lavori della scuola di K. Kodama, alcune mie ricerche (1) sulla attività scindente e sintetizzante dell'esterasi pancreatica di maiale, fornivano invece i seguenti risultati: *a*) che la cisteina, che inibisce la reazione idrolitica, inibisce anche quella di sintesi; *b*) che la cistina, che attiva, se anche lievemente, la reazione idrolitica, attiva pure lievemente quella di sintesi; *c*) che comportamento analogo alla cisteina presentano i Fe^{+++} e alla cistina i Fe^{++}; *d*) che infine l'azione dei sistemi cisteina–Fe^{++} e cistina–Fe^{+++} viene praticamente ad essere la somma algebrica delle azioni dei singoli componenti, per cui essi risultano entrambi di scarsa azione sia sulla reazione di idrolisi sia su quella di sintesi.

In aggiunta perciò alle mie ricerche precedenti, tenuto conto anche delle differenti conclusioni di R. Itoh e S. Kayashima, nella presente Nota riferisco sui risultati avuti con la porfiresside.

L'uso della porfiresside, radicale azotato di colore rosso descritto nel 1903 da O. Piloty e W. Vogel (2), mi è sembrato particolarmente appropriato perchè il radicale, secondo R. Kuhn e W. Franke (3) possiede tra tutte le sostanze organiche colorate il più alto potenziale di ossido–riduzione ($E_0 = +0{,}73$ Volta a pH 7) ed è ridotto rapidamente già a freddo da composti tiolici come da gruppi –SH liberi presenti nelle proteine (4) secondo la equazione:



Ammesso quindi conforme alle supposizioni di R. Itoh e S. Kayashima, che lo stato di ossidazione dell'esterasi (*feron e agon*) o anche del solo attivatore, sia quello in cui l'enzima o il sistema enzima + attivatore catalizzi a preferenza la reazione di sintesi, la deidrogenazione con la porfiresside di tutti gli aggruppamenti atomici facilmente ossidabili, noti (in primo luogo gli SH–gruppi) ed ignoti del supporto enzimatico, come di quelli eventuali del gruppo attivo o dell'attivatore, dovrebbe fornire sistemi modificati per quel che riguarda la loro azione reversibile.

Ricordo infine che l'uso della porfiresside nello studio dei problemi enzimatici è recentissimo (1939) ed è stato introdotto da me e da Erich Adler (5) per la distinzione di varie apodeidrasi relate alla Co I (triosofosfato–, α–glicerofosfato–, alcol–, lattico–, malico–apodeidrasi).

---

(1) F. Cedrangolo, « Boll. Soc. It. Biol. Sper. », 1938, *9*, 791.

(2) O. Piloty e W. Vogel, « Ber. deutsch. chem. Gesell. », 1903, *36*, 1283.

(3) R. Kuhn e W. Franke, Ibidem, 1935, *68*, 1528.

(4) R. Kuhn e P. Desnuelle, « Zeit f. physiol. Chem. », 1938, *251*, 14.

(5) F. Cedrangolo u. E. Adler, *Enzymologia*, 1939, *7*, 297.

Preparato enzimatico. Polvere acetonica-eterea ottenuta da pancreas di maiale, secondo WILLSTAETTER e E. WALDSCHMIDT-LEITZ [1]. La polvere è stata digerita con 16 parti di glicerina 87 % per 4 ore a 37°. Si è poi centrifugato per 1 h a 3.500 giri al minuto e l'estratto torbido, in cui la lipasi è perfettamente conservabile, separato e mantenuto a 0°. Immediatamente prima di ogni ricerca, la quantità necessaria di estratto è stata trattata con H_2O a parti eguali e si è centrifugato per breve tempo a 2.000 giri al minuto per separare il precipitato formatosi. Il liquido chiaro soprastante si è impiegato negli esperimenti.

Porfiresside. Il preparato impiegato di porfiresside [2] era un preparato puro di sostanza (100 % sulla base della titolazione eseguita secondo R. Kuhn e P. Desmuelle (loc. cit.) contro pura cisteina). La soluzione impiegata nelle ricerche contenenva 7 mg della sostanza in 10 cc. di H_2O.

Incubazione. L'incubazione dell'enzima colla sostanza colorata è durata 120' a 37°. Negli esperimenti di controllo al posto della porfiresside fu aggiunta la stessa quantità di H_2O e la miscela incubata per lo stesso tempo. Il pH delle miscele fu elettrometricamente controllato e in casi di lievissime differenze, queste furono accuratamente corrette. Il rapporto tra soluzione enzimatica e soluzione di porfiresside, rispettivamente H_2O, era di 5 volumi della 1ª per 4 della 2ª.

Determinazione dell'attività enzimatica. L'attività delle soluzioni enzimatiche incubate con la porfiresside fu comparata con l'attività dell'enzima incubato con H_2O.

Per ogni esperimento di scissione furono allestite 5 miscele di reazione. Miscela I: *a*) cc. 5 di soluzione enzimatica + cc. 4 di soluzione di porfiresside già incubati a 37° per 2 h; *b*) cc. 2 di puffer $NH_4Cl—NH_3$ (pH 8,5); *c*) cc. 2,5 di trioleina; *d*) cc. 0,5 di $CaCl_2$ 2 %; *e*) cc. 0,5 di albumina di sangue 3 %. Tempo di reazione = 2 h ; t = 37°. Miscela II : id. come I, ma con H_2O al posto della soluzione di porfiresside. Miscela III: id. come I ma con H_2O al posto della soluzione enzimatica. Miscela IV id. come II ma con H_2O al posto della soluzione enzimatica. Miscela V: cc. 5 di enzima con H_2O a 14,5 cc.

Per ogni esperimento di sintesi furono allestite 4 miscele di reazione. Miscela I : *a*) cc. 10 di soluzione enzimatica + cc. 8 di soluzione di porfiresside già incubati a 37° per 2 h; *b*) cc. 22 di glicerina 87 %; *c*) cc. 3 di ac. oleico. Tempo di reazione = 48 h; t = 37°. Miscela II: id. come I, ma con H_2O al posto della porfiresside. Miscela III: id. come I, ma con enzima

---

[1] R. WILLSTAETTER ed E. WALDSCHMIDT-LEITZ, «Zeit. f. physiol. Chem.», 1922, *125*, 132.

[2] Anche qui mi è grato esprimere il mio vivo ringraziamento al prof. Richard KUHN (Heidelberg) per il generoso invio di 1 g di porfiresside.

inattivato a bagno maria per 4 h. Miscela IV: id. come II, ma con enzima inattivato a bagno maria per 4 h.

Ad ogni miscela di scissione, dopo il tempo di reazione a 37°, si sono aggiunti 20 cc. di alcol e 20 di etere e si è titolato in presenza di timolftaleina con soluzione alcolica di KOH N/10. I risultati sono riferiti nella tab. I e sono espressi in millmol di ac. oleico liberate nel volume totale delle miscele I e II di reazione. Tali millimol sono calcolate dai cc. di KOH consumati in I, rispettivamente in II, sottratta nel 1° caso la somma dei cc. di KOH consumati in III e in V e nel 2° caso la somma dei cc. consumati in IV e V.

Per le miscele di sintesi, al momento dell'allestimento delle prove e dopo 24 e 48 ore, si prelevavano 4 cc., che si mescolavano in boccia da titolazione con 20 cc. di alcol etilico e si titolava con NaOH N/10 in presenza di timolftaleina. I risultati sono riferiti nella stessa tab. I e sono pure espressi in millimol di ac. oleico sintetizzate nel volume totale delle miscele di reazione I e II. Tali millimol anche qui sono state diminuite dei valori di sintesi non enzimatica ottenuti in III, rispettivamente in IV.

I risultati riferiti nella tab. I, mostrano che la porfiresside non modifica sensibilmente l'azione reversibile della esterasi. La lieve inibizione può considerarsi, infatti, praticamente dello stesso valore sia per la reazione di idrolisi sia per quella di sintesi (in media 4 % per l'idrolisi e 5,44 % per la sintesi).

Si può quindi affermare che in una miscela di estere, H_2O, acido e alcol, il punto di equilibrio è lo stesso sia con l'esterasi non trattata che con quella, su cui si è fatta agire la porfiresside. La supposizione perciò di R. Itoh e S. Kayashima, secondo la quale lo stato di ossidazione della esterasi sarebbe quello favorevole alla sintesi e sfavorevole all'idrolisi, non trova appoggio negli attuali risultati.

Reazioni ossidative spontanee o artificialmente provocate negli estratti enzimatici possono in genere essere una condizione favorevole al determinarsi di una sintesi biologica. Ma in tal caso la spiegazione si trova nella seconda legge della termodinamica, in quanto che le reazioni di sintesi, essendo nel maggior numero dei casi reazioni nelle quali è assorbita energia libera (ved. H. Borsook e H. M. Huffmann [1]), debbono accoppiarsi ad altre reazioni che tale energia libera forniscono: non è necessario perciò ammettere che un'ipotetica ossidazione del catalizzatore lo renda atto a sintetizzare piuttosto che a scindere.

Se i risultati qui ottenuti si considerano insieme a quelli già in precedenza resi noti (loc. cit. in [1] a pag. 2) [2], mi pare si possa concludere, per

[1] H. Borsook e H. M. Huffmann in Schmidt, C. L. A. *Chemistry of the Aminoacids and Proteins*. Ed. C. Thomas, 1938, pag. 822.

[2] F. Cedrangolo, « Enzymol. », 1938, *5*, 1.

quel che riguarda l'esterasi pancreatica, che sin'ora non si conosce alcuna sostanza, dotata o no di potere riducente o ossidante, che sia capace di modificare l'enzima nel senso che questo diventi più adatto all'idrolisi, anzichè alla sintesi o viceversa. Una eccezione potrebbero sembrare i sali biliari, i quali a pH lievemente acido, attivano la sintesi dell'ac. oleico col glicerolo e non la scissione della trioleina (CEDRANGOLO loc. cit. in (2) a pag. 4). Ma l'azione di questi composti è sul substrato e non sull'esterasi, e si spiega col fatto che, mentre gli ac. biliari rappresentano dei sistemi idrotropi per gli ac. grassi superiori, per cui la concentrazione di questi aumenta nella fase acquosa nella quale si verifica appumto la reazione di sintesi (E. A. SYM (1)), tali acidi risultano da soli incapaci di solubilizzare i gliceridi, per i quali occorrono invece sistemi più complessi quali ad es. il sistema naturalmente presente nella bile: sali biliari + + lecitina + colesterina + mucina (G. QUAGLIARIELLO e F. CEDRANGOLO (2)).

Sia infine accennato che se l'ipotesi di H. KRAUT e W. PANTSCHENKO-JUREWICZ (3), appoggiata anche dalle ricerche *in vivo* di J. MOSTERS (4), secondo la quale l'ac. ascorbico probabilmente rappresenta l'*agon* delle esterasi organiche, si dimostrasse valida, per i risultati da me ottenuti con la porfiresside (5), dovrebbe concludersi che tale gruppo potrebbe, ai fini della attività esterasica, essere indifferentemente l'ac. ascorbico o l'ac. deidroascorbico. Tale conclusione è contro l'asserzione dello stesso KRAUT e di PANTSCHENKO-JUREWICZ (loc. cit.), secondo la quale un *symplex* enzimaticamente inattivo si formerebbe dall'unione dell'ac. deidroascorbico col rispettivo *feron*.

Conclusioni. — L'esterasi pancreatica di maiale, per incubazione colla porfiresside, non subisce alcuna modifica della sua attività idrolitica e sintetizzante. La supposizione perciò di R. Itoh e S. Kayashima, che lo stato di ossidazione della esterasi sia quello in cui l'enzima catalizzi a preferenza la reazione di sintesi, non trova appoggio in queste ricerche.

---

(1) E. A. SYM, « Bioch. J. », 1936, *30*, 609; « Enzymol. », 1936, *1*, 156; Ibidem, 1937, *2*, 79; 107.

(2) G. QUAGLIARIELLO e F. CEDRANGOLO, « Rend. R. Acc. Naz. Lincei », 1938, *27*, 503.

(3) W. v. PANTSCHENKO-JUREWICZ e H. KRAUT, « Bioch. Zeit. », 1936, *285*, 407.

(4) J. MOSTERS, « Klin. Woch. », 1936, *15*, 1557.

(5) 1 cc. di soluzione 0,02 mol di porfiresside già a freddo e in ambiente d'aria è istantaneamente decolorato dalla quantità teorica di ac. ascorbico (cc. 1 di una soluzione 0,01 mol dell'ac. in puffer di fosfati m/2 di pH 7,4). cc. 1,2 restano invece, per l'aggiunta di 1 cc. della soluzione di ac. ascorbico, ancora sensibilmente colorati in giallo-rosa.

Tabella I.

Soluzione enzimatica da polvere di pancreas N.	Esperienza N.	Incubazione dell'esterasi	Millimol di ac. oleico liberate dopo 2h a 37°		Millimol di ac. oleico sintetizzate a 37° nell'intervallo			
					Ore 0–24		Ore 24–48	
1	I	per 2 h con H_2O	0,671		2,0		1,98	
1	II	»	0,66		2,1		2,1	
2	III	»	0,94		2,52		2,48	
3	IV	»	0,965		2,72		2,81	
			0,809		2,33		2,34	
				Inibizione %		Inibizione %		Inibizione %
1	I	per 2 h con porfiresside	0,643	4,17	1,9	5	1,86	6,06
1	II	»	0,63	4,5	1,95	7,1	2,0	4,76
2	III	»	0,905	3,72	2,41	4,3	2,37	4,4
3	IV	»	0,93	3,62	2,55	6,3	2,65	5,69
			0,775	4,0	2,202	5,67	2,22	5,22

Chimica. — *Sulla trasformazione dell'acido destro–tartarico nel meso–tartarico per azione del pancreas*[1]. Risposta a Carlo Neuberg ed Elisabetta Peiser. Nota[1] di Mario Betti, Aggregato alla R. Accademia d'Italia[3] e di Elio Lucchi.

Soltanto con molto ritardo siamo venuti a conoscenza di una Nota di Carlo Neuberg ed Elisabetta Peiser riguardante i nostri sperimenti sulla trasformazione dell'acido d–tartarico nel meso–tartarico per azione del pancreas. Questa Nota fu da essi trasmessa il 2 agosto 1939 al periodico « Enzymologia » (4), che qui a Bologna non giunge, e i due AA. non ci inviarono, come è nelle consuetudini, un estratto della loro pubblicazione, la quale è stata recensita soltanto in uno degli ultimi numeri del « Chemisches Central Blatt » (n. 18, vol. 1, pag. 2811).

I due autori nella loro contestazione si riferiscono ad una breve comunicazione da noi inviata ai *Berichte der deutschen chemischen Gesellschaft* e giunta a quella Redazione il 14 aprile 1939 (5), nella quale davamo notizia del resultato da noi ottenuto, annunziando in pari tempo che i nostri sperimenti erano più ampiamente riportati nei « Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei » (6).

I due autori, essendosi affrettati a ripetere la ricerca da noi fatta, e non essendo riusciti ad ottenere la trasformazione da noi conseguita, vengono alla conclusione che la poltiglia del pancreas non modifica affatto l'acido destro–tartarico (« Pankreas–gewebe d–Weinsäure nicht verändert »), e sostengono che l'annullamento da noi osservato della rotazione ottica destrogira della soluzione tartarica si deve attribuire ad una compensazione dovuta al potere rotatorio sinistrogiro dei prodotti che si for-

---

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Bologna.

(2) Pervenuta all'Accademia l'11 luglio 1940–XVIII.

(3) Già Socio Nazionale dei Lincei.

(4) *Enzymologia* (den Haag), vol. 7, pagg. 228–230 (1939).

(5) « Berichte », 72, 1100 (1939).

(6) Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei, vol. XXIX, serie 6ª, pag. 277. Seduta del 1° aprile 1939.

mano dal pancreas stesso (polipeptidi, aminoacidi, ecc.) per idrolisi effettuata dal prolungato contatto coll'acido tartarico.

Se i due autori, prima di impugnare i nostri risultati, avessero presa cognizione anche della pubblicazione dei Lincei, preliminare pure essa, ma contenente un maggior numero di particolari del breve cenno inserito nei « Berichte », avrebbero veduto su quale insieme di fatti noi abbiamo basata la nostra conclusione e si sarebbero resi conto che non ci siamo limitati a stabilirla sul solo dato del potere rotatorio.

Consapevoli anche noi di quello che Neuberg stesso afferma, che cioè *al fatto da noi constatato sarebbero da attribuirsi le più interessanti conseguenze* (« dem man die grössten Consequenzen hätte zubilligen mussen ») avevamo tanto più l'obbligo di metterci al riparo da possibili cause di equivoco. Ed avendo noi pure sperimentato che il pancreas, già per azione dell'acido acetico, dà luogo a sostanze di potere rotatorio sinistrogiro, ci eravamo ben guardati dal basare le nostre conclusioni soltanto sulla scomparsa della d–rotazione della soluzione tartarica, ma avevamo identificato l'acido meso–tartarico anche *durch ihre Reaktionen und typischen Salze*, come appunto è detto nella stessa breve Nota dei « Berichte ».

Nella pubblicazione dei Lincei si trova infatti più ampiamente riferito che noi abbiamo concluso per la formazione dell'acido mesotartarico:

a) perchè il liquido non dava con acetato potassico la nota precipitazione di tartrato acido di potassio (o, come fu osservato in qualche successivo sperimento, la dava soltanto in misura molto limitata [1]);

b) perchè con solfato (o con cloruro) di calcio non si aveva precipitato di racemato di calcio, ma il precipitato si formava soltanto dopo avere neutralizzato con ammoniaca, *cio che è la caratteristica analitica del meso–tartrato di calcio*;

c) perchè il meso–tartrato di calcio così formatosi, da noi raccolto e purificato sciogliendolo nell'acido cloridrico e neutralizzando poi con ammoniaca, si presentava in bei cristalli lucenti, di aspetto molto caratteristico, a forma di lancia, dei quali fu fatto anche l'esame delle proprietà ottiche in confronto sia col meso–tartrato di calcio preparato da autentico acido meso–tartarico esistente nel laboratorio sia col d– e col r–tartrato di calcio, confronto che attestò la perfetta identità del nostro prodotto col meso–tartrato di calcio;

d) perchè il meso–tartrato di calcio, purificato nel modo ora detto, sciolto nell'acido cloridrico (2 gr. di sale in 25 cc. di HCl 2N) dava un

---

[1] In questi casi il prodotto fu trattato con soluzione concentrata di acetato potassico in presenza di acido acetico e di alcool, per eliminare le eventuali quantità di ac. d–tartarico rimaste inalterate e poi si procedette alla precipitazione del sale di calcio (mesotartrato).

liquido che esaminato in un tubo lungo 1 dm. non manifestava potere rotatorio apprezzabile;

e) perchè del meso–tartrato di calcio, *purificato* come sopra è stato detto, fu determinata l'acqua di cristallizzazione la quale corrispose a 3 mol. (H_2O % Trov. 22,99 — % Calc. per $C_4H_4O_6Ca + 3H_2O$, 22,31) mentre il d–, il l–, ed il r–tartrato di calcio cristallizzano tutti con $4H_2O$ (H_2O % Calc. 27,69) (1).

La trasformazione dell'acido d–tartarico in acido meso–tartarico per azione del pancreas risulta dunque pienamente e rigorosamente dimostrata.

Ci possiamo ora domandare perchè Neuberg e Peiser non siano riusciti ad ottenere il risultato da noi raggiunto.

Dall'aprile dell'anno scorso fino ad oggi noi abbiamo avuto occasione di ripetere numerose volte i nostri sperimenti, per approfondirne la conoscenza da diversi punti di vista, e nella quasi totalità dei casi abbiamo potuto *constatare* in modo più o meno completo la trasformazione descritta (2), *sempre mediante l'isolamento del meso–tartrato di calcio.* Soltanto in alcuni pochi casi la trasformazione dell'acido d–tartarico in meso–tartarico non è stata realizzata, o per lo meno è stata raggiunta soltanto in misura limitata. Una volta che il pancreas si presentava di color grigio e di aspetto ben diverso dell'abituale colore di tale organo normale e sano ed altre poche volte nelle quali abbiamo impiegato il pancreas di vacche di età assai avanzata. Sembra infatti che il pancreas dei vitelli giovani sia per queste ricerche il più efficacemente attivo. Non è impossibile che i due AA., nella ripetizione del nostro lavoro siano stati poco fortunati nella qualità del materiale da essi impiegato.

---

(1) Il dato analitico riguardante l'acqua di cristallizzazione, che è dunque caratteristico del meso–tartrato di calcio, fu riportato anche nella breve Nota dei « Berichte », ma Neuberg e Peiser lo mettono da parte con molta disinvoltura e suppongono, senza alcun giustificato motivo, che il sale di calcio da noi analizzato contenesse « piccole impurezze » (Kleine Verunreinigungen) . . ., le quali però non avrebbero dovuto essere tanto *piccole*, per far abbassare la percentuale dell'H_2O di cristallizzazione da 27,69 a 22,31, cioè del 5,38 %.

(2) In alcuni di questi casi il liquido presentava rotazione nettamente sinistrogira dovuta evidentemente ai prodotti di idrolisi del pancreas.

Mineralogia (Geochimica). — *Terre rare nel granito di Alzo: osservazioni spettrografiche*[1]. Nota[2] di Paolo Gallitelli, presentata da S. E. Federico Millosevich.

Durante il corso delle ricerche già da tempo iniziate sulla formazione granitica compresa fra il lago d'Orta e la bassa Valsesia, mi aveva colpito l'assenza di minerali contenenti elementi rari, osservati invece nei vicini graniti di Baveno e del Montorfano [3]. L'eventuale ritrovamento di elementi rari avrebbe potuto portare, secondo le vedute odierne [4], nuove conferme ai legami genetici fra i graniti della Valsesia e quelli dei Laghi, e illuminarci almeno in parte sullo sviluppo dei processi geochimici che accompagnarono la genesi delle formazioni in parola.

Per questo approfittai della generosa ospitalità offertami dal Laboratorio Astrofisico della Specola Vaticana di Castelgandolfo, allo scopo di eseguire una serie di ricerche spettrografiche sopra componenti del granito di Alzo. Al Direttore, padre prof. A. Gatterer, desidero esprimere il mio più vivo e cordiale ringraziamento per la signorile larghezza con la quale venne incontro ai miei desideri, facilitando in ogni modo il compito che mi ero proposto.

Si trattava dunque di scegliere i minerali meglio atti allo scopo. Era necessario anzitutto disporre di minerali separabili completamente dagli altri in quantità sufficienti all'analisi. In secondo luogo era mio desiderio eseguire possibilmente la ricerca su minerali separatisi in momenti successivi dal magma, per vedere in qual modo gli elementi cercati fossero distribuiti nei componenti del granito.

---

(1) Dall'Istituto di Mineralogia della R. Università di Modena e dal Laboratorio Astrofisico della Specola Vaticana di Castelgandolfo.

(2) Pervenuta all'Accademia il 18 luglio 1940–XVIII.

(3) Gallitelli P., *Ricerche petrografiche sul granito di Baveno*, « Mem. Soc. Tosc. Sc. Nat. », vol. XLVI, pagg. 150–227. Pisa, 1937; Gallitelli P., *Ricerche petrografiche sul Montorfano*, « Mem. R. Acc. Scienze Lettere ed Arti di Modena », serie V, vol. III, pagg. 1–97. Modena, 1938. Confronta inoltre: *Itinerari mineralogici*, « Natura ». Milano, 1940.

(4) Dovute e sviluppate principalmente da V. M. Goldschmidt, A. Fersmann, W. Wernadski.

Per questo presi anzitutto in considerazione la mica biotite presente in lamine idiomorfe in una facies biotitica del granito di Alzo, che include cristalletti minuti di zircone. Successivamente esaminai la tormalina delle facies pegmatitiche e l'arsenopirite di un arnione che ebbi già a descrivere in altro lavoro [1].

Per le ricerche spettrografiche ho usato la polvere naturale dei minerali allo scopo di evitare che sottoponendola a trattamenti chimici venissero introdotti elementi presenti in tracce anche minime nei reagenti. In questo modo gli spettrogrammi sono risultati necessariamente ricchissimi di righe, comprendendo anche quelle assai numerose del Fe Si Al Mg As ecc., elementi costitutivi essenziali dei minerali analizzati. Questo inconveniente non ha però nè intralciato nè diminuito la sensibilità della ricerca, giacchè ho potuto disporre di spettrografi dotati di fortissima dispersione, particolamente adatti appunto per le indagini sui minerali a composizione complessa.

La porzione dello spettro compresa fra 2700 e 3800 Å è stata fotografata infatti col grande spettrografo GH Steinheil, fornito di un prisma di Cornu di cm. 6,5; quella che va da 3800 a 6600 Å col nuovo spettrografo Zeiss 650/1300.

Le lunghezze d'onda delle righe ultime dei singoli elementi sono state determinate per confronto con le righe dello spettro del ferro, sia usando un comparatore Zeiss, sia con letture al microscopio munito di micrometro oculare. Per gli elementi più comuni le righe prese in considerazione sono quelle elencate nell'atlante del GATTERER [2]; per le terre rare ho scelto le righe ultime contenute nelle tavole dello stesso Autore; le quali, benchè in corso di completamento e ancora inedite, furono messe a mia completa disposizione.

La presenza delle righe ultime di questi elementi rari è stata poi confermata da padre Gatterer, il quale ha voluto gentilmente esaminare le mie negative con il « Projektionskomparator » [3] da lui ideato e in queste ultime settimane costruito, e che consente un rapido e sicuro controllo delle determinazioni di lunghezza d'onda fatte con i soliti metodi.

---

[1] P. GALLITELLI, *Sopra alcuni solfuri e solfosali del granito di Alzo.* « Periodico di Mineralogia », vol. IX, pag. 223. Roma, 1938.

[2] A. GATTERER, J. JUNKES, *Atlas der Restlinien von 30 chemischen Elemente. 28 photographische Tafeln.* Roma, 1937. Ho consultato inoltre: KAYSER-RITSCHL, *Linienspektra*, 2 ed. Berlin, 1938; HARRISON G. R., *Wavelenght Tables*, New York, 1939.

[3] A. GATTERER, *Ein Projektionskomparator für spektrochemische Analyse.* « Spectrochimica Acta », vol. I, pagg. 352-373. Berlin, 1940.

MICA BIOTITE. – La polvere finissima del minerale era introdotta in un foro di mm. 2 di diametro e 3–4 di profondità praticato nel carbone negativo dell'arco (1). L'esame degli spettrogrammi ha permesso di identificare, oltre alle linee degli elementi che di solito entrano a costituire la biotite in quantità diverse – Si Al Fe Mg Mn K Na Ti Zr –, anche le linee ultime di Ca Ba Sr Cr Li V Sc La Yb Y, mentre sono state ricercate con esito negativo quelle di Cs Rb In Mo Nb W Th U Ce Nd Pr Sm Dy Ho Er Tb Gd Eu.

La presenza nella nostra mica di tracce di Ca Ba Sr Li Cr non ha carattere eccezionale, giacchè è noto che questi elementi sono stati osservati anche in miche biotiti provenienti da altre masse granitiche (2).

Molto maggiore interesse ha invece la presenza del V dello Sc e delle terre rare La Yb Y, che non sarebbero state finora osservate in minerali micacei.

Per quanto riguardá la probabile provenienza di questi elementi può supporsi che essi siano contenuti sia nei minuti cristallini di zircone inclusi nella mica, sia nella mica stessa.

La prima supposizione, assai verosimile essendo ben noto che lo zircone può contenere elementi delle terre rare, non mi sembra accettabile nel nostro caso senza formulare le più ampie riserve; giacchè le ricerche di EBERHARD (3) GOLDSCHMIDT e PETERS (4) hanno dimostrato che lo scandio e le terre rare La Yb Cp entrano solo eccezionalmente nello zircone e nei minerali di zirconio. D'altra parte GOLDSCHMIDT ha messo in evidenza che lo scandio – cui si associano di preferenza quelle terre rare che hanno un raggio ionico relativamente piccolo (5) – si rinviene in tracce, ma con grande frequenza, nei silicati di Mg e Fe, come ad esempio nelle olivine.

---

(1) Per la zona dell'ultravioletto compresa fra 2700 e 3800 Å, fotografata con lo spettrografo G H Steinheil, si aveva: corrente continua 130 v/5–10 A. Fenditura = 0,005 mm. Lastre Perutz Spezialfliegerplatte Orthocromatisch. Per la zona compresa fra 3800 e 6600 Å, fotografata con lo Zeiss 650/1300, si aveva: corrente continua 200 v/3–4 A. Fenditura = 0,008 mm. Lastre Perutz Reproduktionsplatte normal, e Perutz Spektraltotalhard pankromatisch.

(2) C. DOELTER, *Handbuch der Mineralchemie*, vol. II, parte II, pag. 680, 1917.

(3) G. EBERHARD, *Ueber die weite Verbreitung des Scandiums auf der Erde.* « Sitzungsber. Preuss. Akad. der Wiss. » 1908, pag. 851 e 1910, pag. 404.

(4) V. M. GOLDSCHMIDT, CL. PETERS, *Zur Geochemie des Scandiums.* « Nachricht. Gesell. Wiss. Göttingen aus dem Jahre 1931. Mathem.-Wiss. Klasse », pag. 257. Berlin, 1931.

(5) V. M. GOLDSCHMIDT, *Elemente und Minerale pegmatitischer Gesteine.* « Nachricht. Gesell. Wiss. Göttingen aus dem Jahre 1931, Mathem. -Wiss. Klasse », pag. 370. Berlin, 1931.

Non mi sembra perciò azzardato supporre che nel nostro caso Sc La Yb Y siano contenuti nella mica ferromagnesiaca anzichè nello zircone, anche perchè in quest'ultimo caso, dato il piccolo numero dei cristalli di zircone inclusi nella biotite, bisognerebbe ammettere in essi un contenuto altissimo di terre rare, che, per quanto so, sarebbe del tutto eccezionale..

Tormalina. –Analogamente a quanto si è fatto per la mica, anche la tormalina in polvere finissima era introdotta in un foro praticato nel carbone negativo dell'arco (1).

Sugli spettrogrammi ho potuto identificare, oltre agli elementi già segnalati dall'analisi chimica (2), numerose e intense righe del Ti e del Li, ed altre più deboli, ma sempre ben visibili e nette, del Cr. Il quale risulta presente in quantità molto scarse.

La presenza del Ti e del Li nella tormalina di Alzo conferma, se ve ne fosse bisogno, la diffusione di questi due elementi nei minerali di questa località. Le tracce di Cr costituiscono una particolarità del nostro minerale giacchè, pur essendo noto che le tormaline dei giacimenti cromiferi di Montgomery, di Hutte Syssert e Little Caclaze contengono rispettivamente 4,32 e 10,86 % di Cr_2O_3 (3), non mi risulta che il cromo sia stato osservato, sia pure in tracce, nelle tormaline provenienti da altre masse granitiche.

Inoltre la presenza di questo elemento è notevole perchè finora non è noto alcun minerale cromifero nella massa granitica di Alzo, nè in quelle vicine di Baveno e del Montorfano.

Arsenopirite. – Gli spettrogrammi di questo minerale sono stati ottenuti fotografando: 1° lo spettro d'arco ottenuto fra due carboni, il negativo dei quali portava, come per la mica, la polvere di arsenopirite (4); 2° lo spettro d'arco ad alta tensione generato fra due elettrodi di arsenopirite (5); 3° lo spettro di scintilla fra elettrodi di arsenopirite.

---

(1) Le condizioni di funzionamento corrispondono a quelle indicate per la mica.

(2) P. Gallitelli, *Analisi chimica del granito di Montorfano e del granito e della tormalina di Alzo.* « Rend. R. Acc. Naz. Lincei », vol. XXVI, pag. 103. Roma, 1937.

(3) C. Doelter, *Handbuch der Mineralchemie*, vol. II, parte II, pag. 764, 1917; A. Cossa, A. Arzruni, *Sulla tormalina cromica e sui depositi di ferro cromato degli Urali.* « Mem. R. Acc. Naz. Lincei », vol. XII, Roma, 1882.

(4) L'arco funzionava a corrente continua 130 v/5–10 A.

(5) L'arco era alimentato a corrente continua 2000 v/0,7 A ed anche 1000 v/0,7 A.

L'esame delle diverse lastre ha permesso di identificare la presenza di As Fe Al Si Na Sb Bi Cu Ag, mentre sono risultati assenti, nonostante le accurate ricerche, Pb Zn Cd Au Co Ni.

Ora, mentre la presenza di Si Al Na è priva di importanza, dato che questi elementi provengono con ogni probabilità da frammentini di feldispato e di quarzo ancora inclusi nell'arsenopirite, quella di Sb Bi Cu Ag prova che questi elementi sono da annoverarsi fra i costituenti minori del granito di Alzo.

* * *

Dai dati raccolti in questa breve Nota è possibile dedurre che la mancanza nel granito di Alzo dei minerali contenenti elementi rari è solo apparente e imputabile al fatto che le cave aperte nella massa granitica furono visitate di rado da collezionisti e ricercatori. Inoltre, rimane dimostrato che il granito di Alzo per il suo contenuto in elementi rari non differisce sensibilmente dai graniti di Baveno e del Montorfano, essendo anche ad Alzo presente la maggior parte degli elementi osservati nelle altre due masse granitiche.

A questo proposito non è privo di interesse notare che a Baveno, al Montorfano e ad Alzo è presente e predomina, fra gli altri elementi, lo scandio, il quale, ritenuto fino a non molto tempo fa estremamente raro [1], in base alle ricerche di questi ultimi anni risulta abbastanza frequente nelle rocce eruttive in generale, ove compare in quantità oscillanti fra 0,0003 e 0,0006 % [2].

Per quanto concerne poi la distribuzione dei costituenti minori del granito di Alzo – Sb Bi Cu Ag Li Cr Ba Sr V Sc La Yb Y – risulta da queste ricerche che gli elementi Sb Bi Cu Ag ed una parte del Li e del Cr dovevano essersi concentrati nelle porzioni magmatiche che hanno consolidato per ultime, dato che questi elementi entrano in due minerali, la tormalina e l'arsenopirite, originatisi sicuramente nei periodi pegmatitico e pneumatolitico–idrotermale.

Ba Sr V Sc La Yb Y e la rimanente parte del Li e del Cr sembra invece si siano separati abbastanza presto dal magma, entrando a costituire le lamine idiomorfe di mica nella facies biotitica del granito di Alzo.

Questo risultato, per quello che riguarda gli elementi Sc La Yb Y, sembra contraddire i risultati ottenuti da Goldschmidt nelle sue fonda-

---

[1] E. Artini, *I minerali*, pag. 477. Milano, 1925.

[2] V. M. Goldschmidt, *Grundlagen der quantitativen Geochemie*. « Fortschritte f. Mineralogie », vol. XVII, pag. 127. Leipzig, 1933; V. M. Goldschmidt, Cl. Peters, op. cit.

mentali ricerche sulla ripartizione geochimica degli elementi [1], avendo egli dimostrato che le terre rare si concentrano di preferenza in quelle porzioni del magma che cristallizzano tardivamente.

A questo proposito è però opportuno osservare che GOLDSCHMIDT stesso, pur avendo dimostrato che le terre rare hanno tendenza a concentrarsi, in linea di massima, nei minerali delle pegmatiti che hanno preso origine dai residui magmatici ricchi di agenti mineralizzatori, in un successivo esame approfondito del problema ha dato la prova che alcuni di questi elementi non godono sempre di questa proprietà.

Le ricerche sul chimismo delle pegmatiti [2], mettendo in evidenza che lo scandio può entrare in molti silicati di Mg e Fe, hanno anche dimostrato: 1° che questo elemento non deve essere considerato, come le altre terre rare, tipico per i minerali delle pegmatiti; 2° che, se lo scandio è presente ed anche abbondante nelle pegmatiti, esso per la massima parte proviene da quei silicati di magnesio e ferro separatisi durante la cristallizzazione della roccia eruttiva con la quale le pegmatiti sono connesse.

Questi due fatti trovano anche ad Alzo una completa conferma essendo indubbio che la biotite presa in esame, la quale proviene da una facies biotitica della roccia, per il contorno nettamente esagonale delle lamine si deve essere separata assai presto dal magma, forse anche prima di quella che si incontra nel granito normale.

Che poi in un minerale di formazione relativamente antica quale la biotite, si associno allo scandio anche le terre rare La Yb Y, è spiegato dai risultati delle citate ricerche di EBERHARD, GOLDSCHMIDT e PETERS, le quali hanno dimostrato che se un minerale contiene scandio, a questo si associano di preferenza quelle terre rare con diametro ionico relativamente piccolo quali La Yb.

In conclusione possiamo perciò dire che il ritrovamento dello Sc La Yb Y nella mica di Alzo non contrasta con i risultati delle ricerche del GOLDSCHMIDT, ma piuttosto prova che anche nel nostro caso sono valide le fondamentali conclusioni di questo Autore.

In una successiva Nota mi riservo di comunicare i risultati delle ricerche in corso, che mirano a determinare l'eventuale presenza di altre terre rare, oltre a quelle già segnalate, nella mica della facies biotitica del granito di Alzo.

---

[1] V. M. GOLDSCHMIDT, *Geochemische Verteilungsgesetze der Elemente.* « Videnskap. Skrift Akad. Oslo. Matem.-Naturvid. Klasse ». Teil. I-IX. Oslo, 1923-1938.

[2] V. M. GOLDSCHMIDT, *Elemente und Minerale* ecc.

RELAZIONI

Le vaccinazioni nell'Esercito.

Relazione (1) dell'Accademico DANTE DE BLASI.

Le vaccinazioni nell'Esercito e nelle altre Forze armate della Nazione, per il principio da cui derivano, per le basi scientifiche su cui si fondano, per i mezzi e modi coi quali si praticano, non differiscono sostanzialmente dalle vaccinazioni che si fanno o si potrebbero fare nella popolazione civile. Ciò nondimeno esse meritano una particolare attenzione; non solo a causa della maggior premura onde viene circondata la giovinezza che combatte, o sempre si tiene pronta a combattere per la difesa e la maggior potenza della Patria; ma anche perchè, essendo l'Esercito e le altre forze armate dello Stato imponenti compagini demografiche assai meno eterogenee di qualunque altra, ed essendo anche per loro intrinseca natura le più ordinate, disciplinate e controllate di quante altre ne esistono, s'intende facilmente come i dati ed i resultati riguardanti le vaccinazioni nell'Esercito siano spesso i più attendibili ai fini di una obbiettiva valutazione della efficacia delle vaccinazioni in generale e della ricerca e conquista di ulteriori perfezionamenti tecnici.

Mi restringerò a considerare alcune delle vaccinazioni antinfettive che di fatto si vengono praticando da molti anni, poi le relativamente nuove vaccinazioni antitossiche, e da ultimo quelle associate, cioè antinfettive e antitossiche insieme, già sperimentate di recente con notevole successo. Dirò precisando: le vaccinazioni contro il tifo addominale ed i vari paratifi che possono colpire l'uomo, con frequenza più o meno grande, specialmente durante le guerre; le vaccinazioni contro la difterite ed il tetano, per mezzo delle rispettive anatossine; le vaccinazioni associate, nelle quali si introduce tutt'insieme nel nostro organismo il materiale vaccinante contro le infezioni tifoidi e quello contro la difterite ed il tetano.

Prima d'entrare nel vivo dell'argomento, farò qualche breve accenno a fatti ormai vecchi e notissimi, ma pur necessari per fissare un punto di

(1) Letta nell'Adunanza del 21 marzo 1940–XVIII.

partenza allo svolgimento delle cose che c'interessano, per richiamare a noi stessi i motivi della fiducia che si ripone da per tutto nei fondamenti scientifici della immunità e della immunizzazione in generale, nonostante alcuni vivaci contrasti di idee e divergenze interpretative dei resultati concernenti i vari metodi di vaccinazione. Aggiungo subito che, per orientarsi in tale intrico, più apparente invero che reale, giova porre mente alla differenza di significato tra vaccinazione ed immunizzazione. La prima è una operazione pratica che si compie nell'intento di ottenere la seconda, mentre questa rappresenta verso quella una risposta attiva dell'organismo, un complesso di reazioni utili, che possono anche non dar luogo a sintomi clinici, ma che coi loro intimi effetti permanenti determinano uno stato d'immunità, analogo a quello che consegue alla malattia naturalmente contratta e felicemente superata. Il quale stato immunitario poi può essere solido o fragile, durevole o fugace, secondo il concorso di fattori positivi e negativi assai diversi, e non tutti identificabili. Pertanto un individuo vaccinato non può dirsi *eo ipso* immunizzato, cioè non sempre è vero che sia diventato refrattario o quasi a contrarre la malattia corrispondente al tipo della vaccinazione subìta. Un vaccinato può essere, nei casi estremi, o solidamente o niente affatto immunizzato, e nei casi intermedi può esserlo soltanto in parte e durante un tempo più o meno lungo, per molteplici ragioni e circostanze, delle quali ricorderemo le più importanti.

Dopo la scoperta del bacillo del tifo addominale, parecchi illustri biologi condussero, sullo scorcio del secolo passato, numerosissime esperienze, variate in infiniti modi, in adatti animali di specie diversa, allo scopo di chiarire ed approfondire i problemi della patogenesi della febbre tifoide e le condizioni ed i fattori che concorrono a stabilire nell'organismo quello stato d'immunità che notoriamente succede alla guarigione.

Dopo un decennio di fervido e fecondo lavoro sperimentale, fra i cui frutti era quello della possibilità di immunizzare solidamente gli animali d'esperimento contro un'infezione sicuramente mortale, mediante l'iniezione di colture pure di bacilli tifici attenuati nella loro virulenza o anche uccisi, si procedette con ogni cautela alle prime prove nell'uomo. Un incoraggiamento decisivo a tali tentativi proveniva dal fatto che Haffkine aveva già compiuto nelle Indie la sua ardita apostolica impresa di vaccinare contro il colera circa 80.000 individui, fra militari e civili, mediante l'inoculazione di colture di vibrioni colerigeni uccisi, ed in parte anche vivi ed attenuati; e già si conosceva per lo meno il successo ottenuto durante la grave epidemia di Calcutta nel 1894, successo che conciliò a Haffkine la fiducia della popolazione.

Le prime vaccinazioni antitifiche in massa furono eseguite dal Wright nelle Indie, durante il 1896, e poco dopo anche nelle truppe inglesi di Cipro, dell'Egitto e dell'Africa del Sud nel corso della guerra anglo-boera.

L'uso delle vaccinazioni antitifiche era dunque largamente affermato già nel principio di questo secolo. Mi astengo dal nominare qui le non poche operazioni coloniali e belliche, comprese le nostre per la conquista della Libia, il cui sviluppo fu notevolmente favorito, come dalle vaccinazioni antivaiolose ed anticoleriche, anche e forse più dalle vaccinazioni contro la febbre tifoide. Queste infatti riducevano in misura apprezzabilissima non soltanto le enormi perdite di vite umane che la malattia infliggeva prima agli Eserciti, ma anche il numero almeno cinque volte maggiore di assenze dal campo, cioè di combattenti malati, recuperabili è vero dopo la guarigione e la convalescenza, ma in ogni modo messi fuori d'ogni azione militare per un lungo periodo di cinque o sei settimane in media. Quanto ho detto or ora riassume, prescindendo dai particolari, le conclusioni concordi dei rapporti statisticamente documentati delle Autorità sanitarie degli eserciti di varie Nazioni. La sostanziale concordanza nella valutazione dei resultati delle vaccinazioni antitifiche incoraggiava tanto maggiormente ad estenderle anche in seno alla popolazione civile, in quanto che non essendo dovunque adoperato lo stesso tipo di vaccino, nè venendo somministrato con procedimenti uniformi, sembrava lecito pensare che fosse trascurabile l'influenza di alcune modificazioni di carattere puramente tecnico. Ma vedremo che non è così.

Quando scoppiò la grande guerra, la necessità della vaccinazione antitifica era sentita, come quella delle vaccinazioni anticolerica ed antivaiolosa, non solo dai Corpi di Sanità militare, ma anche dagli Stati Maggiori degli Eserciti e dai Governi delle rispettive Nazioni. Le pratiche vaccinali furono iniziate nei richiamati alle armi subito, o poco dopo l'entrata in campagna; ma la vaccinazione totale degli effettivi operanti in zona di guerra e nelle retrovie non poteva dirsi compiuta che al principio del 1915. Il nostro Esercito ebbe tutto il tempo di essere vaccinato fin dall'inizio delle sue operazioni belliche, cioè nel secondo semestre del 1915. Il tipo di vaccino usato nella maggior parte degli Eserciti fu quello di Pfeiffer e Kolle; gli Eserciti francese e belga adoprarono quello di Vincent. Si tratta però sempre di bacilli tifici ottenuti da colture a piatto su agar, sospesi in soluzione di cloruro sodico al 0,8 per cento, in concentrazione di circa 3 miliardi per cmc., ed uccisi nel primo caso mediante l'azione del calore a 60° per la durata di un'ora, e nel secondo caso per effetto dello sbattimento con etere protratto durante un'ora. Sarebbe fuor di luogo entrare nei dettagli della pratica vaccinatoria: basti dire *grosso modo* che il vaccino veniva inoculato sotto cute, per lo più in tre volte, ad intervalli settimanali o quasi, cominciando con un cmc. e terminando con due. Le esigenze della guerra imponevano ai Corpi Sanitari militari la minor perdita possibile di tempo nella esecuzione delle vaccinazioni antivaiolosa ed antitifica, eventualmente abbinata con l'anticolerica. Queste vaccinazioni richiedevano un lasso di

tempo di quasi tre settimane, anche se la prima iniezione di vaccino antitifico si faceva nello stesso giorno in cui s'innestava quello contro il vaiuolo. Per tre settimane dunque i nuovi contingenti, destinati a rinforzare le truppe operanti in zona di guerra, rimanevano inattivi dal punto di vista bellico. Pur troppo non si potevano abbreviare i tempi, anche a causa delle moleste reazioni vaccinali locali, accompagnate talvolta da reazioni generali febbrili, sebbene queste fossero piuttosto rare e di breve durata. Intanto già nel primo anno di guerra fu osservato presso tutti gli Eserciti belligeranti che, nonostante le vaccinazioni antitifiche, le febbri tifoidi così genericamente definite sotto l'aspetto clinico, non accennavano a diminuire. Accurate indagini batteriologiche misero in luce che la maggior parte di tali febbri tifoidi non era più imputabile al bacillo del tifo propriamente detto, ossia al bacillo di Eberth, ma ad altre specie batteriche, che si trovano accomunate col bacillo di Eberth nel gruppo così detto delle Salmonelle e che portano il nome di bacilli paratifici, suddistinti con le prime lettere dell'alfabeto, A, B, C, o con altra denominazione. Sul nostro fronte questo fatto importante fu constatato dal compianto Galeotti. Per dare di ciò un'idea concreta riferisco che nell'Esercito tedesco al principio della guerra, su 100 casi di febbre tifoide 98 erano causati dal b. di Eberth, e 2 da bacilli paratifici. Dopo la vaccinazione antitifica invece soltanto 6 erano dati dal b. di Eberth, e 94 dai paratifici: una vera inversione di rapporto. Nel nostro Esercito il Bruno, con accertamenti batteriologici, riconobbe che i casi dovuti al b. di Eberth furono nel primo anno poco più della metà del totale; negli altri casi furono isolati bacilli paratifici, con prevalenza della varietà B in circa il 37 per cento dei casi. Variazioni così radicali nei rapporti di frequenza fra i diversi agenti morbigeni delle febbri tifoidi si verificarono, come ho detto, presso gli altri Eserciti belligeranti. Conveniva dunque vaccinare anche contro i paratifi, per lo meno contro il paratifo B: il che poteva risolversi in un prolungamento delle già lunghe more vaccinatorie, con evidente intralcio delle operazioni belliche. Per fortuna si conosceva già un metodo, escogitato ed usato per primo dal nostro Castellani a Ceylon fin dal 1905: il metodo dei vaccini misti. Bastava aggiungere nello stesso mestruo contenente i bacilli tifici un'adeguata carica di bacilli paratifici B, e niente altro mutare nella tecnica di preparazione e nel procedimento vaccinale. L'uso dei vaccini misti incontrò in principio qualche avversione, per il preconcetto che l'organismo, sforzato a reagire simultaneamente contro due microrganismi diversi, non potesse acquistare per tutti e due quel solido grado di immunità che conseguirebbe alle singole vaccinazioni successivamente praticate. Nulla di tutto ciò: fu provato con esperimenti negli animali, e poi confermato nelle applicazioni all'uomo, che fino ad un certo limite l'organismo reagisce egualmente bene all'azione simultanea di vaccini contenenti non solo specie

diverse, ma anche generi differentissimi. Ritorneremo su questo argomento. Intanto cerchiamo di seguire gli avvenimenti vaccinatorî nel nostro Esercito. Dopo gli accertamenti etiologici dianzi detti, fu preparato un vaccino misto contro il tifo ed il paratifo B, e si procedette alla vaccinazione. L'anno appresso fu constatato che le infezioni tifoidi erano bensì diminuite, ma dimostrarono come fosse avvenuto un nuovo spostamento dei rapporti numerici fra gli agenti morbigeni in causa. Su 100 casi di malattia 15 erano imputabili al b. di Eberth, 20 al b. paratifico B, ben 64 al b. paratifico A. Senza farla troppo lunga, e senza discorrere delle possibili cause di un fenomeno così singolare, ma che si ripeteva quasi parallelamente presso gli altri Eserciti, è facile intendere che le Autorità militari competenti provvidero subito alla preparazione di un nuovo vaccino misto contenente anche il b. paratifico A. Si venne al così detto vaccino triplo: e siccome già fin dal principio della guerra, temendosi eventuali episodi di colera, a causa della presenza negli Eserciti franco-inglesi di truppe coloniali indigene provenienti dall'Africa e dall'Asia, si vaccinava anche contro il colera, così il vaccino definitivamente usato fu realmente un vaccino quadruplo. Tuttavia noi qui consideriamo soltanto ciò che si riferisce ai tre bacilli delle febbri tifoidi, il che non reca verun pregiudizio alla sostanza dei fatti; e veniamo ai resultati definitivi delle vaccinazioni antitifico-paratifiche durante la guerra, quali si conoscono dai rilevamenti statistici. Vi è una congerie di statistiche, ufficiali e non ufficiali, in tutte le Nazioni: nè fa maraviglia pensando che soltanto in Italia furono mobilitati nei quattro anni di guerra cinque milioni e seicentomila uomini, che alcune diecine di milioni furono mobilitati complessivamente in tutti i Paesi belligeranti, e che quasi tutti furono assoggettati alle vaccinazioni. Ma bisogna confessare che, ai fini di una dimostrazione ineccepibile, rigorosamente scientifica, della loro efficacia, sono pochissime quelle utilizzabili, sia perchè fatte con criteri suscettibili di riserve, sia perchè mancanti o deficienti di alcuni dati numerici necessari per giustamente valutare quelli riportati. Nondimeno la maggior parte delle statistiche compilate in tutti i Paesi che furono belligeranti fanno vedere che la morbosità e la mortalità per febbri tifoidi negli Eserciti furono durante gli anni di guerra parecchio inferiori a quelle degli anni precedenti.

Per non tediare troppo con le cifre, riferirò soltanto le statistiche del nostro Esercito e della nostra Marina. Per il primo la morbosità annuale che nel 1915, prima delle vaccinazioni, era del 18 per mille, scese a 1,2 durante il triennio 1917-19. Per la Marina la morbosità, che durante il sessennio 1904-1910 era stata del 2,3 per mille, nel quinquennio 1915-1919 fu soltanto del 0,12 per mille. Aggiungerò una statistica singolare, che si riferisce a 628 prigionieri tenuti dai tedeschi nei 4 anni di guerra, presso i quali la morbosità discese da 6,8 per mille a 0,32 per mille: il che

prova come anche nelle condizioni disagiate della prigionia permanesse l'influenza benefica delle vaccinazioni. Le statistiche globali degli altri Eserciti non differiscono gran che dalle nostre.

La diminuzione dei casi di malattia è maggiore o minore, con oscillazioni più o meno ampie; ma attenendosi alle cifre più discrete, dirò anzi meno favorevoli, si può dire: 1° che la morbosità postvaccinale è ridotta a circa la decima parte, ed anche molto meno, di quella prevaccinale; 2° la letalità fra quelli che, nonostante la vaccinazione vengono colpiti, oscilla fra la metà e la terza parte di quella che si verifica fra i malati non vaccinati.

Vi è ancora qualche scettico, che non nega i fatti sommariamente accennati, ma attribuisce i benefizi ottenuti non alle vaccinazioni ma al complesso degli altri mezzi d'igiene e profilassi, perfezionati col progresso scientifico ed applicati presso tutti gli Eserciti: isolamento pronto ed efficace dei malati e dei convalescenti; ben vigilati e controllati approvvigionamenti di acqua e di alimenti: lotta contro le mosche, disinfezioni, eccetera.

A sostegno di tale interpretazione si adduce il fatto che la morbosità e la mortalità per tifo erano già diminuite prima della grande guerra anche nella popolazione civile. La diminuzione, è vero, risulta molto più forte nell'esercito dopo la vaccinazione, ma ciò si spiegherebbe notando che per l'appunto nell'Esercito vengono applicate e rispettate con ogni rigore tutte le misure preventive che attualmente si conoscono. Non è facile contraddire siffatte interpretazioni. Vi è una sola riflessione documentata che può fugarle, ed è questa, che fu già messa in evidenza da Pfeiffer. Oltre alla febbre tifoide, un'altra malattia suole decimare gli Eserciti, la disenteria bacillare. Orbene questa malattia si propaga con gli stessi mezzi della febbre tifoide, i rispettivi bacilli si eliminano dall'organismo e vi penetrano per le stesse vie: i mezzi d'igiene e profilassi contro la disenteria bacillare sono identici a quelli prescritti contro il tifo. Solo che per la disenteria non fu usato durante la guerra alcun vaccino. Ora nell'Esercito tedesco avvenne che, mentre dal 1° al 4° anno di guerra il numero dei malati di febbre tifoide scendeva da circa 80.000 a 20.000 ed a 6.500, per risalire fino a 10.000 (cifra in ogni modo otto volte inferiore alla iniziale), quello dei malati per disenteria saliva rispettivamente da 5.389 a 14.480 fino a 20.751, per poi ridursi a 4.672, cifra di poco differente dalla iniziale. Se la riduzione della morbosità per febbri tifoidi dipendesse solo dalle misure d'igiene, non si comprende come queste possano essere rimaste senza effetto sull'andamento della disenteria. Bisogna dunque convenire che i benefizi nel dominio delle febbri tifoidi sono da ascriversi in buona parte alle vaccinazioni.

Voglio ora riferire i resultati di alcune statistiche alle quali non si possono muovere critiche così imbarazzanti come quelle a cui abbiamo

accennato; perchè considerano gli effetti delle vaccinazioni in due gruppi di individui, quello dei vaccinati e quello dei non vaccinati, gruppi omogenei, cioè composti di militari coetanei, soggetti alle stesse regole, in uno stesso centro di vita, e tenuti insieme per una eguale durata di osservazione.

Comincio col ricordare il Galeotti che fece conoscere i primi resultati delle vaccinazioni nel 1916, limitatamente alle indagini da lui fatte in Carnia: la morbosità fu di 1,4 per mille fra i vaccinati contro il 4,1 fra i non vaccinati. Fra le nostre truppe operanti a Salonicco il Bastai ebbe ad osservare una epidemia di tifo: su 1.000 vaccinati ne ammalarono 60, su 8 non vaccinati 6; ossia 6 su 100 dei primi e 6 su 8 dei secondi.

Ma siccome durante la guerra si vaccinavano tutti gli effettivi, si comprende facilmente che non vi siano grandi statistiche nelle quali siano messi a confronto i resultati ottenuti in gruppi vaccinati e gruppi non vaccinati. Uscendo dal campo delle statistiche di guerra, posso ricordare che nell'Esercito americano la vaccinazione antitifica fu introdotta nel 1909. I dati relativi al 1910 sono questi: vaccinati 14.000 con 6 casi di febbre tifoide; non vaccinati 69.000 con 417 casi: superfluo il calcolare le percentuali perchè già dalle cifre assolute si intuisce quanto forte è la differenza fra i quozienti di morbosità. Basta considerare che se i vaccinati fossero stati in numero poco differente da quello dei non vaccinati, per esempio 70.000, cioè cinque volte 14.000, i casi di febbre tifoide fra essi sarebbero stati verosimilmente una trentina di contro ai 417 occorsi fra i non vaccinati.

Una delle statistiche più attendibili, a causa della piccola differenza numerica fra il gruppo dei vaccinati e quello dei non vaccinati, è quella che si trova in un rapporto fatto nel 1913 da una Commissione inglese contro la tifoide, e che mette a confronto i casi di malattia occorsi nelle truppe vaccinate e non vaccinate stanziate in territori coloniali. I vaccinati furono 10.378 e fra questi 56 ammalarono di tifo, cioè il 5,4 per mille. I non vaccinati furono 8.936, e fra questi 272 ammalarono, cioè il 30,2 per mille.

Ho addotto questi pochissimi esempi per confortare l'affermazione già fatta circa la reale e spesso rilevante efficacia delle vaccinazioni antitifiche sulla frequenza delle febbri tifoidi.

Un'altra questione desidero toccare, quella della durata dello stato immunitario prodotto dalle vaccinazioni antitifiche. L'esperienza di guerra c'informa che non bisogna considerarla superiore a sei–nove mesi, al massimo un anno: onde è prescritto che la vaccinazione deve essere ripetuta, sia pure con una sola iniezione, detta iniezione di richiamo, dopo trascorsi da 6 a 9 mesi. Ciò è utile, dirò anche necessario, perchè si tratta di una pratica che dà la maggior sicurezza possibile di avere degli effettivi in tempo di guerra sempre ben protetti.

Ma la questione della durata della immunità postvaccinale è ancora aperta. È stato osservato durante gli anni dopo la guerra nelle Nazioni belligeranti che le statistiche civili della morbosità per febbre tifoide presentavano una notevole differenza fra i due sessi, specialmente da una certa età in poi; il che faceva supporre che l'influenza delle vaccinazioni potesse persistere ancora negli ex-combattenti, nonostante che da parecchi anni non fossero rivaccinati. Ricordo due sole statistiche, una francese ed una nostra.

Quella francese si riferisce a due espansioni epidemiche avvenute nel 1928 a Lione e nel 1933 a Parigi. A Lione ammalarono in tutto 806 uomini e 1242 donne, a Parigi rispettivamente 112 e 185. Aggruppando il numero dei malati a Parigi per classi di età, risulta che fra i malati dall'età di 16 a 20 anni, vi furono 20 donne e 21 uomini; fra quelli di 21–25 anni 30 donne e 9 uomini; fra quelli di 26–30 anni 36 donne e 9 uomini. Ancora più profonde sono le differenze notate per l'epidemia di Lione. Fra i malati al disotto dei 15 anni nessuna differenza da un sesso all'altro. Fra quelli di età superiore fino ai 30 anni vi furono 447 donne e 210 uomini; fra quelli di 31–40 anni 153 e 20; fra quelli di 41–50 anni 113 e 44, e fra quelli di 51–60 anni 79 e 35.

A Parigi il rapporto massimo fra donne e uomini, che fu di 4 a 1, corrisponde alle età comprese fra i 26 ed i 30 anni; a Lione si raggiunge un rapporto quasi doppio, di 7,65 á 1, il quale corrisponde alle età comprese fra i 31 ed i 40 anni.

In Italia, e precisamente a Milano, dal 1915 al 1924 incluso, per ogni 100 uomini malati di febbre tifoide, se ne ebbero 158, 143, 160, 150, 122, 118, 123, 140 di donne. Considerando soltanto gli individui di età compresa fra i 20 ed i 40 anni, si ha nel biennio 1919–20, 1010 donne e 376 uomini; nel 1921, 301 e 163; nel biennio 1922–23, 577 e 342; nel 1924, 247 e 118.

Fu obbiettato che differenze fra i due sessi potevano esserci state anche anteriormente all'uso delle vaccinazioni, senza porre mente alla grandezza delle differenze o dei rapporti. Ebbene, il Bajla ha fatto per Milano lo spoglio dei dati relativi al quinquennio 1912–16, ed ha visto che vi furono per ogni 100 uomini malati di febbre tifoide 94, 88, 95, 81, 81 donne. Le differenze ci sono fra i due sessi, ma non sono forti. Siccome dunque nel periodo prebellico le differenze fra i due sessi sono lievi, mentre le differenze postbelliche sono veramente impressionanti, e di segno opposto a quelle prebelliche; e per giunta sono fortissime nelle età comprese fra i 20 ed i 40 anni, cioè in età in cui gli uomini, in quanto militari, hanno già subìto la vaccinazione antitifoparatifica, ed eventualmente una rivaccinazione prima del congedo, è ovvio il pensare che lo stato immunitario possa durare parecchi anni. Del resto si è in questi ultimi anni dimostrato, anche sperimentalmente, che lo stato immunitario può durare due anni, e se-

condo la Commissione inglese anche 3–4 anni, ed ancora più a lungo secondo Chauffard, Achard, Vincent, Sergent ed altri. Richiamando alla memoria quanto dianzi ho detto circa la necessità delle vaccinazioni annuali nei militari, è chiaro che i 9–12 mesi che costituiscono l'intervallo fra la prima vaccinazione e la rivaccinazione, sono fissati in base al criterio che lo stato immunitario in nessun caso duri meno di 9 mesi. L'analogia di quanto è stato osservato per la vaccinazione antivaiolosa conforta questa deduzione.

* * *

Da tutto ciò che abbiamo esposto appare evidente che le vaccinazioni antitifoparatifiche sono praticamente efficaci, benchè in grado variabile secondo circostanze diverse, non tutte e non sempre accertabili. Efficaci, ripeto, ma non quanto sarebbe desiderabile, specialmente nei casi in cui i vaccinati vengono a trovarsi esposti a frequenti contaminazioni in ambiente epidemico.

Ecco perchè nel periodo postbellico, da noi ed in tutti i Paesi civili, pur continuandosi a vaccinare sistematicamente gli effettivi militari, sono state nello stesso tempo studiate e saggiate nell'uomo alcune modificazioni ai metodi di preparazione dei vaccini e della loro somministrazione, in base ai resultati di numerosi esperimenti negli animali di laboratorio e di ricerche serologiche in questi e nell'uomo vaccinato.

Accenniamo sommariamente (1) a quelle modificazioni che hanno avuto o potranno avere una influenza non trascurabile sugli effetti vaccinali.

Prima di tutto consideriamo una questione che può dirsi preliminare, ma di carattere fondamentale. Finora abbiamo sempre parlato di bacilli uccisi, come materiale costitutivo dei vaccini. Ma pur restando nel campo dei bacilli del tifo e dei paratifi, bisogna dire che nel primo decennio di questo secolo il Castellani, applicando all'uomo un tipo di vaccinazioni che già si praticavano negli animali, con bacilli vivi ed attenuati, e tenendo presente che anche nell'uomo si usavano già da molto tempo vaccini costituiti non proprio di bacilli, ma di virus viventi modificati (tali sono il vaccino antivaioloso e l'antirabico), adoperò a Ceylon un vaccino consi-

(1) Per dare a questa seconda parte della relazione un'ampiezza proporzionata alla prima, nella quale ho comprovato il fatto più importante della questione, cioè *la reale efficacia delle vaccinazioni*, avrei dovuto disporre di un tempo più che doppio di quanto mi è occorso per trattare l'argomento dirò così basale che ho già svolto. Se mai, la discussione delle varie modificazioni recentemente proposte per la preparazione e l'uso dei vaccini, e quella degli studi che promettono ulteriori perfezionamenti, potrà essere oggetto di un'altra relazione a suo tempo.

stente in una sospensione di bacilli vivi ed attenuati con l'azione del calore a 50° C protratta per un'ora.

Tale metodo fu però abbandonato perchè i germi vivi in organismi maggiormente predisposti, ossia particolarmente recettivi, potevano produrre vere e proprie infezioni, talvolta anche letali; e perchè, venendo eliminati e sparsi nell'ambiente dai vaccinati, e potendo esaltare la propria virulenza, finivano col rappresentare un pericolo non controllato di diffusione delle malattie.

Besredka pensò allora di adoperare speciali vaccini chiamati « vaccini sensibilizzati » che si preparano sottoponendo le sospensioni batteriche all'azione di corrispondenti immunsieri specifici. In questo modo si raggiungeva lo scopo di inoculare degli anticorpi litici che potevano lentamente distruggere i corpi batterici ed eliminare così nel contempo il pericolo di creare portatori. Ma neppure questi vaccini hanno trovato larga applicazione nella pratica, per le difficoltà inerenti alla loro confezione specialmente nei riguardi della preparazione degli immunsieri.

Si rese così necessario ritornare all'uso di vaccini allestiti con germi uccisi, avendo però cura di denaturare il meno possibile i protidi e gli altri costituenti la cellula batterica ai quali è connesso il potere immunogeno. Ecco dunque sorgere il problema di trovare un mezzo di uccisione dei germi che alteri il meno possibile la loro costituzione antigena.

Il primo ad essere adoperato fu il calore. Wright e Leishman cercarono di stabilire la temperatura minima capace di uccidere i germi del tifo e trovarono che bastava riscaldare le brodocolture a 53° per un'ora. Kolle e Pfeiffer invece, che lavoravano con patine di agarcolture emulsionate in soluzione fisiologica, ritennero che la temperatura di uccisione dovesse essere un po' più alta, ed oscillare fra i 56° e i 60°.

Considerando che a queste temperature alcuni germi più resistenti presenti nelle colture possono sopravvivere, i suddetti autori credettero opportuno aggiungere all'azione del calore quella di determinate sostanze chimiche, e precisamente dei preparati fenolici, capaci di assicurare la completa sterilità dei vaccini.

Tuttavia, siccome dalle ricerche di molti studiosi risultò che le temperature necessarie per uccidere i germi sono poco adatte a mantenerne intatte le proprietà antigene, si cercarono altri mezzi capaci di ucciderli e nello stesso tempo tali da non lederne i costituenti protoplasmatici che hanno funzione immunogena.

Fra i numerosi mezzi chimici consigliati e adoperati a tale scopo, etere, fluoruro di sodio, soluzione iodo–iodurata, formolo, fenolo ed altri, è stata data la preferenza al formolo che possiede in alto grado le proprietà di uccidere rapidamente i germi, di rispettarne la struttura antigena e di abbassarne col tempo la tossicità.

Oltre ai mezzi di uccisione dei germi, altri coefficenti non meno importanti ai fini dell'efficacia sono da considerarsi nella preparazione e nell'uso dei vaccini: le proprietà biologiche dei germi, il loro numero, il modo e la via di somministrazione dei vaccini e la possibilità di associare vaccini diversi per immunizzare contemporaneamente contro più malattie.

Le recenti acquisizioni sulla variabilità dei germi e sulla loro costituzione, l'identificazione di antigeni flagellari detti antigeni H, di antigeni somatici distinti in O (antigene somatico) e Vi (antigene di virulenza), l'estrazione di glucido–lipidi immunogeni da parte del Boivin, e la loro separazione mediante l'acetato di uranile in due porzioni corrispondenti all'antigene O ed al Vi, hanno messo in evidenza come non tutti gli stipiti siano idonei per la preparazione dei vaccini e come per ottenere i maggiori effetti immunizzanti sia preferibile adoperare ceppi batterici sicuramente virulenti, provvisti cioè dell'antigene Vi.

Per quanto riguarda il numero dei corpi bacillari da iniettare coi vaccini, esperienze di laboratorio, indagini statistiche ed altri accertamenti epidemiologici hanno dimostrato che per ottenere una solida e duratura immunità contro le infezioni non occorre di necessità adoperare dosi molto elevate, perchè da un certo punto in poi le reazioni sierologiche, coll'aumentare della quantità di materiale vaccinante, non crescono più.

Come resultato d'insieme delle cose fin qui dette per quanto riguarda i mezzi di uccisione, la scelta dei ceppi batterici ed il numero dei corpi batterici, rammento che da noi per la vaccinazione delle Forze armate si adopera un vaccino formolato preparato con stipiti isolati da meno di un anno e provvisti delle opportune caratteristiche biologiche: tali stipiti vengono forniti dalla stessa Sanità militare agli Istituti vaccinogeni. La coltivazione si fa su agar semplice, e le patine vengono raccolte in soluzione fisiologica, con l'aggiunta del 5 per mille di formalina, fino ad aversi la densità richiesta, misurata con un opacimetro; la sospensione così allestita contenente in ogni cmc. un miliardo di bacilli tifici, 750 milioni di paratifici A e 750 milioni di paratifici B, si tiene per 20 giorni a 38° C al fine di raggiungere una fortissima riduzione se non la soppressione perfetta della tossicità dei corpi batterici.

Per ottenere una valida immunità hanno importanza anche il numero delle iniezioni e gli intervalli di tempo fra l'una e l'altra. Ordinariamente si praticano tre iniezioni a distanza di una settimana; qualche competente ne vorrebbe quattro con intervalli poco maggiori di una settimana.

Per abbreviare un così lungo periodo vaccinatorio, che imporrebbe una stasi nei movimenti delle truppe per effetto delle reazioni vaccinali, non sono mancati i tentativi di usare vaccini che fossero efficaci anche in dose unica. A tal fine furono saggiati i così detti lipovaccini, che contengono i germi sospesi non in soluzione fisiologica, bensì emulsionati in mestrui oleosi, che hanno la proprietà di favorire un lento ma continuo assorbi-

mento del materiale vaccinante da parte dell'organismo inoculato. Ma i risultati ottenuti con questo tipo di vaccino, sia che si adoperasse come eccipiente l'olio di vasellina o un olio vegetale, apparvero inferiori a quelli ottenuti con gli idrovaccini; perciò furono abbandonati, e con ragione, come risulta da una lunga e seria esperienza fatta dalla nostra Sanità militare. Da tale esperienza risulta che la morbosità media nel biennio 1919-20 durante il quale si usavano gli idrovaccini fu 0,3 per mille; nel sessennio 1921-26 in cui fu adoperato il lipovaccino con olio di vasellina fu 3,8 per mille; e nel quinquennio 1927-31 nel quale fu usato un lipovaccino preparato con olio vegetale fu 1,9 per mille, cifra inferiore alla precedente ma pur sempre di parecchio superiore a quella del biennio 1919-20.

Ricorderò ora che, oltre la via parenterale comunemente adoperata, sono stati sperimentati altri modi e vie di somministrazione dei vaccini.

Per via orale i risultati ottenuti finora sono stati inferiori a quelli che si ottengono con le iniezioni dei vaccini, ma esperienze recenti eseguite su vasta scala con opportuni accorgimenti e modificazioni dalla nostra Direzione generale della Sanità pubblica provano che l'efficacia del trattamento è da stimarsi superiore a quanto è stato ammesso prima.

Anche la via nasale è stata tentata nel campo delle vaccinazioni da Sanarelli, Ramon e Zoeller, Sabelli ed altri. Ma le esperienze di questi autori restavano confinate nel laboratorio o limitate a scarse applicazioni, prima che il Petragnani, nella sua alta funzione di Direttore generale della Sanità pubblica, e nella sua specifica competenza d'igienista, ideasse e facesse largamente sperimentare un suo proprio sistema di vaccinazione inalatoria collettiva negli alunni delle scuole e, d'accordo con l'Autorità militare, anche in alcuni reparti militari. Se, come è da augurarsi, questo sistema di vaccinazione per via inalatoria si dimosterà pari o quasi a quello delle iniezioni, sarà una vera conquista profilattica.

Resta infine da accennare alle vaccinazioni associate, ideate ed applicate in seguito alla riconosciuta necessità di vaccinare nello stesso tempo contro diverse infezioni, senza immobilizzare le truppe per un periodo superiore a quello richiesto dalla vaccinazione contro una sola infezione. Il fatto che l'inoculazione simultanea di bacilli tifici, paratifici e colerici non solo permette l'instaurarsi di una immunità contro questi germi, ma favorisce altresì l'azione immunizzante delle anatossine antidifterica ed antitetanica ha aperto nuove utili vie per la profilassi vaccinale delle malattie infettive.

Si è reso così possibile con una sola serie di iniezioni, di immunizzare contemporaneamente contro il tifo, i paratifi, il colera, il tetano ed eventualmente anche contro la difterite.

Anche nel nostro esercito non sono mancate ricerche al riguardo, con un particolare vaccino chiamato TABTe e costituito da bacilli tifici e paratifici sospesi in anatossina tetanica.

Non mi diffondo sui particolari delle esperienze fatte, perchè queste o non hanno ancora apportato notevoli vantaggi che risultino con sicurezza da appropriati rilevamenti statistici, o ancora si trovano allo stato di promettenti applicazioni.

Dico ciò anche allo scopo di assicurare che la composizione qualitativa e quantitativa del vaccino misto che si adopera nell'Esercito e nelle altre Forze armate rappresenta quanto di meglio oggi si può desiderare.

Il vaccino che si adopera è quello del Castellani, il quale è preparato nell'Istituto di Sanità pubblica, oltre che negli Istituti vaccino-terapici nazionali; il Castellani stesso già lo aveva adoperato con successo durante la guerra etiopica.

Conchiudo dicendo a cuor sicuro che il nostro Esercito e tutte le nostre Forze armate sono anche nel campo igienico e profilattico in posizione di avanguardia, e mi sia consentito di rendere in questo Consesso un omaggio al Corpo sanitario militare, il quale, per mezzo di parecchi suoi ufficiali che sono anche valenti ricercatori nel campo scientifico, ha contribuito e contribuisce tenacemente al potenziamento sanitario di quel glorioso Esercito, del quale è parte integrale e delle cui virtù è fieramente partecipe.

Matematica (Geometria). — *Coordinate normali ed « estensioni » nella geometria degli spazi a connessione lineare* (1). Nota (2) di ENEA BORTOLOTTI, presentata da ENRICO BOMPIANI Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

1. *Richiami, premesse.*

Il primo esempio di quelle che ora si dicono semplicemente *coordinate normali* in uno spazio dotato di una connessione lineare (metrica, affine, proiettiva...) è stato offerto dalle *coordinate riemanniane normali* in una V_n: così chiamate perchè introdotte dal RIEMANN, nel 1854 (3). Rammento che, per un punto P convenientemente prossimo nella varietà al punto P_0 preso come « polo », tali coordinate sono i prodotti $y^r = a^r s$, ove le a^r sono in P_0 i parametri direttori (componenti di un vettore unitario tangente) della geodetica congiungente P_0 a P (4) ed s è la lunghezza d'arco di questa fra P_0 e P. Ad es. su una superficie ($n = 2$) y^1 ed y^2 sono $r \cos\varphi$ ed $r \operatorname{sen}\varphi$, r e φ essendo coordinate *geodetiche polari* rispetto al polo P_0; in prossimità di P_0 si ha pel ds^2 lo sviluppo: $ds^2 = (dy^1)^2 + (dy^2)^2 - \frac{1}{3} K_0 (y^1 dy^2 - y^2 dy^1)^2 + \cdots$, ove K_0 è la curvatura totale (o riemanniana) della superficie in P_0 (5).

Nel 1922 da O. VEBLEN (6) la nozione è stata estesa agli spazi *a connessione affine* (simmetrica): le coordinate normali affini del VEBLEN y^r in un tale spazio A_n sono caratterizzate nel seguente modo (non sostanzial-

---

(1) Il contenuto di questa Nota è stato esposto nella seduta del 5 aprile 1940-XVIII del II Congresso Nazionale dell'Unione Matematica Italiana.

(2) Pervenuta all'Accademia il 10 agosto 1940-XVIII.

(3) Ved. **1** (il numero si riferisce all'elenco bibliografico); ediz. 1923, pagg. 16 e 28; notizie storiche e indicazioni in VEBLEN, **14**, spec. pag. 101.

(4) Vi è nella definizione del RIEMANN *un'ulteriore condizione* manifestamente inessenziale: che nel polo P_0 i vettori fondamentali del riferimento siano unitari e due a due ortogonali; cosicchè le a^r hanno il significato di *coseni direttori* della generica geodetica in P_0.

(5) Ved. ad. es. BLASCHKE, **21**, pagg. 152-153.

(6) Ved. **2**; ampie esposizioni e sviluppi in **4**, pag. 562; **14**, pag. 85; **15**, pag. 58; **27**, pag. 84 e sg. Ved. anche **28**, I, pag. 100.

mente distinto dalla costruzione più geometrica del Riemann): in relazione ad esse le soluzioni del sistema differenziale

$$[1.1] \qquad \frac{d^2 u^r}{ds^2} + \Gamma^r_{pq} \frac{du^p}{ds} \frac{du^q}{ds} = 0$$

soddisfacenti alle condizioni iniziali: $u^r = \underset{0}{u^r}$ od $y^r = 0$ per $s = 0$ – cioè: le equazioni delle geodetiche della connessione, uscenti dal punto P_0 preso come polo; riferite *a parametri affini* – acquistano la rappresentazione lineare

$$[1.2] \qquad y^r = a^r s .$$

Il Veblen e altri studiosi della Scuola di Princeton hanno dato di queste coordinate normali svariate interessanti applicazioni: particolarmente introducendo i « tensori normali », e le « estensioni » di un tensore: di cui dirò fra non molto (7); e mostrando, attraverso a un « teorema di sostituzione » di notevole semplicità (8) come tutti gli invarianti di una connessione affine simmetrica si esprimano pei tensori normali; o anche, pel tensore di curvatura e le successive « estensioni » di questo.

Passando dalla « geometria affine dei cammini » a quella « proiettiva » (secondo la loro terminologia: cioè dallo studio della connessione affine a quello delle proprietà di questa che sono legate *alle sue geodetiche*, o alla connessione proiettiva normale che queste linee determinano) gli americani hanno poi trasportato la teoria così costruita, indubbiamente elegante anche se prettamente formale, nel campo proiettivo: incontrando dapprima non lievi difficoltà, perchè l'algoritmo affine non era bene adeguato allo scopo (9). Più recentemente il Cartan ha dato (1937 (10)) per uno spazio *a connessione proiettiva* qualunque una costruzione di coordinate normali più semplice e diretta; e ha utilizzato tali coordinate normali per dare un « teorema di riduzione » concernente gli invarianti di una con-

(7) Ved. **4**, pagg. 566, 572; **5**; **14**, pagg. 87, 89; **15**, pagg. 68, 72; **27**, pagg. 48, 96, 103; **28**, I, pag. 104.

(8) Ved. **14**, pag. 90; **27**, pag. 109. La denominazione « replacement theorem » è introdotta da T. Y. Thomas; ved. **11**. Estese applicazioni sono svolte in **12**, **13**, **17**, **18**, **27**.

(9) L'analisi del comportamento delle coordinate normali ordinarie (o « affini ») nei cambiamenti « proiettivi » della connessione affine (tali cioè che ne conservano le geodetiche) ha mostrato come esse non siano atte (almeno in generale) allo studio delle *proprietà proiettive* della connessione (ved. **6**, pag. 131; 8; **15**, pag. 94). Sono poi state introdotte coordinate *proiettive* normali, non omogenee (**7**; **15**, pag. 111; **19**) ed omogenee (**10**, **11**); o più esattamente, dotate di legge di trasformazione *lineare fratta*, o *lineare intera*. La costruzione, a differenza di quella del Cartan, è sempre algoritmica.

(10) Ved. **32**, pag. 221 e sg.

nessione proiettiva ([11]) e anche per mostrare come si possa realizzare, appunto pel tramite delle coordinate normali, un'applicazione del 3° ordine dell'intorno di un punto di uno spazio a connessione proiettiva simmetrica su uno spazio proiettivo ([12]). D'altra parte in un mio lavoro del 1930 ([13]) io avevo mostrato come la teoria della scuola americana sia suscettibile di una semplice estensione alle varietà a connessione affine *asimmetrica*, cioè a torsione: e affrontato la questione della interpretazione geometrica dei tensori normali, caratterizzando le varietà per le quali si annulla il secondo tensore normale (il primo è, nel caso generale da me trattato, il tensore di torsione ([14])).

2. *Coordinate normali olonome; riferimenti normali anolonomi.*

Le [1.2] mostrano che se interpretiamo le y^r come *coordinate cartesiane* dei punti nello spazio affine (E_n) tangente in P_0 alla A_n – intesa ora questa, in generale, a connessione *asimmetrica* –, in relazione a quel riferimento cartesiano locale che vi determina il riferimento curvilineo u^r supposto in A_n, e consideriamo il punto y^r di E_n quale *immagine* del punto u^r di A_n, le geodetiche della A_n uscenti da P_0 vengono rappresentate *dalle rette* di E_n che escono dal medesimo punto (con le stesse direzioni). Più precisamente: se mediante la legge di trasporto dei punti (degli spazi tangenti) determinata dalla connessione affine, secondo il CARTAN ([15]): rappresentata analiticamente dal sistema

$$[2.1] \qquad dx^r + du^r + \Gamma^r_{st}\, x^s\, du^t = 0\,,$$

([11]) **32**, pag. 222.

([12]) **32**, pag. 226; cfr. pag. 190. Da SHIING-SHEN CHERN (**33**) sono state studiate le relazioni fra le coordinate normali del CARTAN e quelle introdotte da VEBLEN e J. M. THOMAS (**7**); e determinate le condizioni geometriche per la coincidenza dei due tipi di coordinate.

([13]) Ved. **22**, pag. 67 e sg.; spec. pagg. 71–73; e anche pag. 87 e sg. ove nello stesso ordine d'idee si perviene a risultati concernenti gli invarianti legati *al trasporto delle direzioni* in uno spazio a connessione affine.

([14]) **22**, pag. 69; e n. 3 di questa Nota. Sulla nozione di coordinate normali (in un punto) ved. anche (in ordine d'idee molto diverso) **25**, **29**. Una sorta di coordinate normali *lungo una linea* assegnata – particolarizzazione di coordinate geodetiche di FERMI, come le usuali coordinate normali rientrano nella classe dei sistemi geodetici *in un punto* – è stata introdotta in V_n riemanniana da T. LEVI-CIVITA (**9**); ed estesa da G. D. MATTIOLI (**20**) a quella connessione affine (integrabile) che è associata, secondo WEITZENBÖCK e VITALI, a una n-upla di campi vettoriali. Ved. anche **26**.

([15]) Ved. **3**, I parte (t. *40*), pag. 363; cfr. **23**, ove mi attengo (come nel presente lavoro) a quella formulazione più semplice della legge di trasporto dei punti, adottata dal CARTAN ad esempio, nelle sue *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann* (Paris, Gauthier-Villars, 1928), pag. 40, 51.

lungo le geodetiche congiungenti portiamo i punti della A_n – o meglio: di una « regione convessa » della A_n contenente P_0; tale che ogni suo punto è raggiunto da una e una sola geodetica uscente da P_0 ([16]) – nello spazio tangente in P_0, ogni punto P si porta in una posizione Q *che ne è proprio l'immagine*, di cui poco fa dicevamo. Questo è pressochè ovvio nel caso riemanniano (la costruzione del RIEMANN per le y^r lo mostra); e lo si verifica senza difficoltà anche in A_n qualunque ([17]). Così abbiamo intanto il significato geometrico delle coordinate normali: il passaggio dalle coordinate curvilinee u^r alle coordinate normali y^r (di polo P_0) ad esse corrispondenti,

$$[2.2] \qquad u^r = \underset{0}{u^r} + y^r - \frac{1}{2}(\Gamma^r_{st})_0\, y^s y^t - \frac{1}{3!}(\nabla_p \Gamma^{(r)}_{st})_0\, y^s y^t y^p - \cdots \quad ([18])$$

si può interpretare *come la rappresentazione dei punti di una regione convessa della* A_n, *contenente* P_0, *sullo spazio affine tangente in* P_0, *secondo la legge di trasporto della connessione supposta, lungo le geodetiche che portano a* P_0.

Questa rappresentazione a ciascun tensore di A_n, dato in un punto P, fa corrispondere un determinato tensore dell'E_n: avente quali componenti cartesiane le componenti del tensore supposto in coordinate normali y^r; il quale tensore potrà pensarsi applicato nel punto Q corrispondente a P. Ma non vi è, che io sappia, un significato geometrico semplice. Questo invece si consegue in modo naturale se si sostituisce o meglio si associa, per la formazione delle componenti dei tensori, al sistema coordinato normale (ordinario cioè *olonomo*) un conveniente *riferimento anolonomo*

([16]) Più esattamente: *regione convessa* in A_n s'intenderà una regione tale che due suoi punti qualunque sono congiunti da un (solo) arco di geodetica appartenente per intero alla regione considerata. Ved. **29**, pag. 310 e il lavoro di J. H. C. WHITEHEAD ivi cit.

([17]) Per la verifica analitica conviene introdurre coordinate omogenee x^α $(\alpha, \beta, \gamma, \cdots = 0, 1 \cdots n)$, ponendo $x^0 = 1$, e interpretare la connessione affine, quale trasporto dei punti, *come una connessione proiettiva* di parametri Γ^r_{st}, $\Gamma^r_{0t} = \delta^r_t$, $\Gamma^0_{st} = \Gamma^0_{0t} = 0$; inteso che le derivate si calcolino, con parametri Γ^r_{st} o $\Gamma^\alpha_{\beta t}$, *senza tener conto degli indici posti singolarmente entro parentesi*, si rappresenta il trasporto [2.1] dei punti *lungo le geodetiche* in forma finita con sviluppi

$$[2.a] \qquad x^\alpha = \underset{0}{x^\alpha} - (\Gamma^\alpha_{\beta r})_0\, \underset{0}{x^\beta}\, y^r - \frac{1}{2}(\nabla_s \Gamma^{(\alpha)}_{\beta r})_0\, \underset{0}{x^\beta}\, y^r y^s - \frac{1}{3!}(\nabla_t \nabla_s \Gamma^{(\alpha)}_{\beta r})\, \underset{0}{x^\beta}\, y^r y^s y^t - \cdots.$$

Ciò posto, basta notare che queste sono identicamente verificate ponendovi $x = \delta^\alpha_0$, $\underset{0}{x^\alpha} = y^\alpha$ $(y^0 = 1)$: ciò agevolmente si vede ad esempio *in coordinate normali*.

([18]) Cfr. ([17]); per la costruzione di questi sviluppi ved. **22**, pag. 68 e cfr. **30**, pag. 43. Nei riguardi della convergenza degli sviluppi ved. ad esempio **27**, pag. 89.

per la A_n, cioè una distribuzione conveniente di riferimenti cartesiani locali, in generale diversi da quelli che determina il sistema coordinato y^r. Porremo questa condizione: *che i vettori fondamentali dei riferimenti locali nei singoli punti della* A_n (cioè, della regione che ne consideriamo) *siano ottenuti da un riferimento iniziale dato in* P_0, cioè nel relativo spazio affine tangente, *secondo la legge di equipollenza della connessione, lungo le geodetiche congiungenti* $P_0 P$. Le componenti di un tensore della A_n dato in un punto P, in relazione a un tale riferimento anolonomo, che diremo ancora «normale» [19], sono senz'altro eguali a quelle del tensore che se ne ottiene mediante il trasporto per equipollenza in A_n, lungo la geodetica congiungente, da P a P_0: il quale al solito potrà pensarsi nel punto Q. Dunque: il passaggio dalle componenti relative a coordinate curvilinee u^r alle componenti in relazione a un riferimento normale anolomo di polo P_0, per un tensore di A_n, ad es. per un *vettore* v^r o w_r,

$$[2.3] \qquad v^r = \overset{r}{X}_i \widehat{v^i} \quad \text{o} \quad w_r = \overset{i}{X}_r \widehat{w_i}$$

ove le ennuple di vettori controvarianti $\overset{r}{X}_i$, o covarianti $\overset{i}{X}_r$ (tali che $\overset{r}{X}_i \overset{j}{X}_r = \delta_i^j$) sono ottenute da un'ennupla $\overset{r}{k}_i$ o $\overset{i}{k}_r$ iniziale per equipollenza in A_n lungo le geodetiche uscenti da P_0:

$$[2.4] \qquad \begin{cases} \overset{r}{X}_i = \overset{r}{k}_i - (\Gamma^r_{st})_0 \overset{s}{k}_i y^t - \dfrac{1}{2} (\nabla_p \Gamma^{(r)}_{st})_0 \overset{s}{k}_i y^t y^p - \cdots . \\ \overset{i}{X}_r = \overset{i}{k}_r + (\Gamma^s_{rt})_0 \overset{i}{k}_s y^t + \dfrac{1}{2} (\nabla_p \Gamma^s_{(r)t})_0 \overset{i}{k}_s y^t y^p + \cdots \end{cases} \quad (20)$$

si può interpretare come *la rappresentazione sullo spazio affine tangente in* P_0, *fatta per mezzo del trasporto per equipollenza lungo le geodetiche che portano a* P_0. Così è precisato il significato geometrico delle componenti in relazione a un riferimento normale anolonomo, e soprattutto si vede *che cosa in realtà significhi far intervenire un tale riferimento.*

Converrà associare *univocamente* al punto P_0 e al presupposto riferimento curvilineo anche il riferimento anolonomo normale di polo P_0, me-

---

[19] Ho occasionalmente introdotto questi riferimenti, e (in un modo un po' diverso da quello qui indicato al n. 3) le relative nozioni di tensori normali e di «estensioni», durante un mio corso universitario (Firenze, 1937-38 XVI). Sostanzialmente, un ragguaglio fra i riferimenti locali olonomi ed anolonomi – cioè, fra le rappresentazioni *al finito* cui essi dànno luogo – avevo già esposto in **30.** pag. 142.

[20] La legge di formazione del termine generico è (come anche nelle [2.1] e [2.*a*]) evidente; le $\overset{r}{k}_i$, $\overset{i}{k}_r$ debbono intendersi tali che $\overset{r}{k}_i \overset{j}{k}_r = \delta_i^j$, $|\overset{r}{k}_i| \neq 0$.

diante la condizione *della coincidenza iniziale del riferimento cartesiano locale:* cioè $\underset{i}{k^r} = \delta_i^r$, $\underset{i}{k_r} = \delta_i^r$; in questa ipotesi, cui senz'altro ci atterremo nel seguito, a un qualunque mutamento delle coordinate curvilinee in A_n è legata *la stessa* trasformazione lineare a coefficienti costanti sulle y^r e sui vettori fondamentali del riferimento anolonomo:

$$[2.5] \qquad y^r = \left(\frac{\partial u^r}{\partial u^{r'}}\right)_0 y^{r'} \; ; \quad \underset{i}{X^r} = \left(\frac{\partial u^r}{\partial u^{r'}}\right)_0 \underset{i}{X^{r'}} .$$

3. *Le « estensioni » di un tensore, e i tensori normali.*

Secondo Veblen e T. Y. Thomas si forma la r–esima estensione di un tensore, ad es. di un *vettore* v^p (intendiamo: di un *campo di vettori* dato in A_n) nel modo seguente: per ciascuna posizione P_0 nella A_n (o nella regione che se ne considera) si calcolano le componenti $^*v^t = \dfrac{\partial y^t}{\partial u^p} v^p$ di v^p nel sistema normale (olonomo) di polo P_0 associato al sistema curvilineo u^p; si formano le derivate r–esime (ordinarie) $\dfrac{\partial^r {}^*v^p}{\partial y^{q_1} \dots \partial y^{q_r}}$; infine si prendono i valori di queste derivate nel punto P_0. Al variare di P_0 nella A_n tali valori costituiscono effettivamente *le componenti di un campo di tensori della* A_n: che per $r = 1$ è *la derivata prima covariante* (purchè la connessione sia *simmetrica:* unico caso che gli AA. considerano): ma per $r > 1$ differisce invece (almeno in generale) da una derivata covariante in modo sostanziale.

La costruzione si può fare, con ovvie modificazioni, anche in relazione a un riferimento normale anolonomo ([21]). Da Veblen e T. Y. Thomas è stato osservato (pel caso da loro considerato: ma anche questo si estende senza difficoltà a connessioni asimmetriche e a riferimenti normali anolonomi) che anche al sistema delle componenti o parametri della connessione, per quanto *non sia un tensore*, può applicarsi il processo della *estensione*, dei vari ordini; dando così luogo a *tensori*, che sono precisamente i *tensori normali*.

Pel caso di una connessione affine asimmetrica ([22]) la serie dei tensori normali (costituenti, come ho già accennato, un sistema completo di invarianti differenziali per la connessione) si completa con un primo tensore (che è poi il tensore *di torsione*): ottenuto, potremmo dire, con un'esten-

([21]) L'unica differenza è questa: le componenti $\hat{v}^i = \underset{r}{\overset{j}{X}} v^r$ cui va applicata la derivazione (semplice o multipla) ordinaria rispetto alle coordinate normali (olonome) y^r saranno quelle *relative al riferimento normale anolonomo* di polo P_0, associato al riferimento curvilineo u^r supposto.

([22]) Ved. **22**, pag. 69 e sg.

sione *di ordine zero* a partire dal sistema dei parametri della connessione: valutando questi in coordinate normali di polo P_0 generico e calcolando nel punto P_0 medesimo.

Se si parte da un riferimento normale *anolonomo* v'è luogo a considerare *due nuove serie di tensori normali;* estensioni degli ordini $1, 2, 3, \cdots$ della connessione (cioè, del sistema Γ^i_{jh}); estensioni degli ordini $0, 1, 2, \cdots$ di quell'ente geometrico Ω^i_{jh} che viene detto *ente* o *indicatore di anolonomia* (Anholonomitätsobjekt [23]); il quale dà, in qualche modo, un indice del comportarsi dello spazio (a connessione) di fronte ai sistemi di riferimento *anolonomi* che vi siano stabiliti. (Ad es. mediante questo ente, le cui componenti per una connessione generica si annullano in relazione a un riferimento olonomo e allora soltanto, si formano quei termini che costituiscono, nelle espressioni dei tensori di curvatura e torsione e in genere di tutti gli invarianti differenziali, la parte *essenzialmente legata all'anolonomia* del riferimento. Un'interpretazione geometrica, se pure indiretta, ne ho dato occasionalmente in un lavoro del 1936: la richiamerò fra breve [24]).

Le due nuove serie di tensori normali non dànno, rispetto alla prima serie che viene costruita mediante coordinate normali olonome, qualche cosa di sostanzialmente diverso: i nuovi tensori normali possono esprimersi per quelli della prima serie e viceversa. (Ad es. l'estensione di ordine zero dell'indicatore di anolonomia è ancora il tensore di torsione).

Ma riesce possibile per estensioni e per tensori normali *anolonomi* (se per brevità li vogliamo così designare) *approfondire l'essenza geometrica*: che indubbiamente nelle costruzioni algoritmiche dei geometri americani non è dato affatto scorgere, e neppure è presa, del resto, in considerazione.

Riprendiamo il caso di un campo di vettori v^p della A_n: inizialmente riferiti a un sistema curvilineo (olonomo) arbitrario. Siano $\widehat{v^i} = \overset{i}{X}_p v^p$ le componenti, nel punto generico P di A_n, del vettore v^p del campo, nel riferimento normale anolonomo di polo P_0 associato al supposto riferimento curvilineo: ciò vorrà dire che $\widehat{v^i}$ è l'immagine di v^p ottenuta nello spazio E_n tangente in P_0 mediante il trasporto per equipollenza in A_n lungo la geodetica congiungente. Veniamo così a costituire *un campo di vettori* $\widehat{v^i}$ *dello spazio affine* ora detto: le cui componenti sono funzioni delle due serie di variabili u^r ed $\underset{0}{u^r}$, dipendono cioè da entrambi i punti

---

[23] Ved. **28**, I, pag. 68; e a pag. 79, 110 le formule pei tensori di torsione e di curvatura in relazione a riferimenti anolonomi. Non è fuori luogo rammentare che consiste proprio in un uso sistematico di particolari riferimenti anolonomi il metodo *delle ennuple di congruenze ortogonali* del Ricci.

[24] Ved. **31**, pagg. 571-572.

P e P_0. Dei vettori ora detti, in E_n, le $\hat{v}^i$ sono componenti cartesiane, nel sistema determinato in P_0 dal riferimento curvilineo: *quello stesso cui si riferiscono le coordinate* y^r, che in A_n sono le coordinate normali (olonome). Potremo dunque in E_n ricavare dal campo $\hat{v}^i$ un campo di tensori $\dfrac{\partial^r \hat{v}^i}{\partial y^{q_1} \cdots \partial y^{q_r}}$ *per ordinaria derivazione.* Infine il tensore così costruito (le cui componenti dipendono ancora dalle u^r ed $\underset{0}{u^r}$, cioè sono funzioni di P e di P_0) dal punto Q ove è applicato (immagine di P sull'E_n tangente in P_0) si potrà *riportare, per equipollenza in* A_n, *lungo la geodetica congiungente* $P_0 P$, *nel punto* P. Il tensore così ottenuto

$$[3.1] \qquad \underset{i}{X^p} \overset{q_1}{\underset{}{X_{t_1}}} \cdots \overset{q_r}{\underset{}{X_{t_r}}} \frac{\partial^r \hat{v}^i}{\partial y^{q_1} \cdots \partial y^{q_r}} \ (25)$$

è dunque costruito con un ben determinato procedimento geometrico: ebbene, ponendo $P_0 \equiv P$, cioè $\underset{0}{u^r} = u^r$, identificando insomma i due punti di A_n onde il tensore [3.1] dipende, ne facciamo *proprio l'estensione* (*anolonoma*) $E_{q_1 \cdots q_r} v^p$ di v^p; che per $r = 1$ è la derivata covariante in A_n (26).

Possiamo renderci conto ora ben facilmente del perchè il processo di estensione sia applicabile *anche alla connessione e al suo indicatore di anolonomia.* Nella rappresentazione della A_n (o meglio, al solito, di una sua regione convessa contenente P_0) sull'E_n tangente in P_0 la connessione dà luogo a una legge di trasporto che lungo le rette uscenti da P_0 (ma in generale *non* lungo le altre linee) è il parallelismo ordinario in E_n; insomma dà luogo a una connessione per l'E_n, che non è quella integrabile (e simmetrica) che esso ha quale spazio affine; i cui parametri sono le $\hat{\Gamma}^i_{jl}$ (27), parametri normali (anolonomi) relativi a P_0 della connessione di A_n. Ma in quanto in E_n, in relazione al sistema cartesiano y^r, *la connessione integrabile* di E_n *ha i parametri tutti nulli*, in realtà $\hat{\Gamma}^i_{jk}$ è in E_n *un tensore*: quello che esprime il divario fra le due connessioni, fra quella che è sull'E_n immagine della connessione di A_n e la connessione integrabile dell'E_n medesimo. Al tensore ora detto è ben naturale che si possa applicare la

---

(25) Si noti che gli indici $i, q_1, \cdots, q_r$ appartengono *a una stessa* serie (indici delle coordinate cartesiane nell'E_n; o delle coordinate curvilinee in A_n *nel punto* P_0).

(26) L'estensione seconda di v^p è semplicemente $E_{st} v^p = \frac{1}{2}(\nabla_t \nabla_s v^p + \nabla_s \nabla_t v^p) = \nabla_t \nabla_s v^p + R^{\cdots p}_{lsq} v^q$.

(27) Si ha $\hat{\Gamma}^i_{jl} = \underset{i}{X_r}(\underset{i}{X^s}\,\underset{l}{X^t}\,\Gamma^r_{st} + \partial_l \underset{j}{X^r})$, ove $\partial_j = \underset{j}{X^r} \dfrac{\partial}{\partial u^r}$.

estensione semplice e multipla. Soltanto: *nella* A_n, il tensore le cui successive estensioni dànno luogo ai tensori normali (della serie anolonoma derivata da $\hat{\Gamma}^i_{jk}$) risulta *quello che esprime il divario fra la* connessione Γ^i_{st} della A_n e la connessione

$$[3.2] \qquad \Lambda^r_{st} = \frac{\partial \overset{j}{X}_s}{\partial u^t} \cdot \underset{j}{X^r}$$

determinata, secondo WEITZENBÖCK e VITALI [28], dai vettori fondamentali di un riferimento normale anolonomo qualunque di polo P_0 (tale cioè che per essa questi sono campi di vettori equipollenti): un tensore dunque che *è già esso stesso funzione della coppia ordinata di punti* P e P_0 (delle u^r e delle coordinate u^r_0 del polo del riferimento normale anolonomo).

Considerazioni analoghe valgono nei riguardi della serie di tensori normali anolonomi derivata *dall'indicatore di anolonomia.* Le componenti di questo in relazione a un qualunque riferimento anolonomo, ad esempio normale di polo P_0, sono anche le componenti in relazione a questo riferimento, mutate di segno [29], della *connessione simmetrica associata* alla connessione di WEIZENBÖCK e VITALI ora detta, legata al sistema dei vettori fondamentali $\underset{i}{X^r}$ [30]. Tenuto conto di questo e di quanto abbiamo osservato poco sopra ne viene che il tensore di A_n, le cui successive estensioni dànno i tensori normali della serie anolonoma derivata dall'indicatore di anolonomia, è semplicemente *il tensore di torsione* della connessione di WEITZENBÖCK–VITALI determinata dai vettori fondamentali $\underset{i}{X^r}$ del riferimento normale anolonomo di polo P_0; anche questo è dunque un tensore funzione sia di P_0 che di P.

Le considerazioni ora accennate si potrebbero in gran parte, con opportuni accorgimenti, estendere *anche a varietà anolonome* dotate di connessione lineare, ad es. affine: si possono introdurre a questo scopo riferi-

---

[28] Nei riguardi di questa connessione rimando, anche per la bibliografia, ai miei lavori citati coi nn. 55, 56 in **22**, pag. 101.

[29] Cfr. **31**, pagg. 571–572: la discordanza di segno dipende dal segno attribuito all'indicatore d'anolonomia: che intendo qui dato da $\Omega^i_{jk} = \partial_{[s} \overset{i}{X}_{r]} \underset{j}{X^r} \underset{k}{X^s} = \partial_{[j} \underset{k]}{X^r} \cdot \overset{i}{X}_r = S^{\cdot\cdot i}_{jk} - \hat{\Gamma}^i_{[jk]}$, ove $S^{\cdot\cdot i}_{jk}$ è il tensore di torsione.

[30] La connessione «simmetrica associata» a una connessione asimmetrica Γ^r_{st} ha i parametri $\frac{1}{2}(\Gamma^r_{st} + \Gamma^r_{\cdot t})$: ved. **22**, pag. 62 ove se ne dà una costruzione geometrica.

menti (normali) anolonomi e anche olonomi su varietà geodetiche nei punti che si considerano [31]; e anche definire « estensioni » e tensori normali, con procedimenti geometrici analoghi (per quanto la natura delle cose lo consente; ed è da vedersi se con eguale utilità) a quelli del caso olonomo. Ma su questo non potrei per ora soffermarmi: ad altra occasione rimando gli effettivi sviluppi di queste nozioni.

BIBLIOGRAFIA [32]

1. B. Riemann, *Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen.* Habilitationsschrift (1854). « Abhandl. Ges. Wiss. zu Göttingen », 13, 1868, 1–20; « Ges. Math. Werke », Leipzig, Teubner, 1892 (2ª ediz.) 272–287; neu herausgegeb. von H. Weyl, Berlin, Springer, 1923 (3ª ediz.).
2. O. Veblen, *Normal coördinates for the geometry of paths.* « Proceed. Nation. Nation. Acad. of the U. S. A. », 8, 1922, 192–197.
3. E. Cartan, *Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée.* « Annales de l'Ec. Norm. Supér. », Paris (3) *40*, 1923, 325–412; *41*, 1924, 1–25; *42*, 1925, 17–88.
4. O. Veblen, T. Y. Thomas, *The geometry of paths.* « Transactions Amer. Math. Soc. », *25*, 1923, 551–608.
5. O. Veblen, T. Y. Thomas, *Extensions of relative tensors.* Ibid., *26*, 1924, 373–377.
6. O. Veblen, *Remarks on the foundations of the geometry.* « Bull. Amer. Math. Soc. », *31*, 1925, 121–141.
7. O. Veblen, J. M. Thomas, *Projective normal coördinates for the geometry of paths.* « Proced. Nation. Acad. », *11*, 1925, 204–207.
8. J. M. Thomas; *On normal coördinates in the geometry of paths.* Ibid. *12*, 1926, 58–63.
9. T. Levi-Civita, *Sur l'écart géodésique.* « Mathem. Annalen », *97*, 1926, 291–320.
10. T. Y. Thomas, *A projective theory of affinely connected manifolds.* « Mathem. Zeitschrift », *25*, 1926, 723–733.
11. T. Y. Thomas, *The replacement theorem and related questions in the projective geometry of paths.* « Annals of Mathem. » (2), *28*, 1927, 549–561.
12. T. Y. Thomas, A. D. Michal, *Differential invariants of affinely connected manifolds.* Ibid., 196–236.
13. T. Y. Thomas, A. D. Michal, *Differential invariants of relative quadratic differential forms.* Ibid., 631–688.

---

[31] Le geodetiche di una A_n^m uscenti da un punto formano una varietà *olonoma* m–dimensionale.

[32] Non dò un elenco completo: per altre indicazioni si veda **14**, pag. 101; **28**, I, pag. 100.

14. O. Veblen, *Invariants of quadratic differential forms*. Cambridge, at the University Press, 1927 (Cambridge Tracts, n. 24).

15. L. P. Eisenhart, *Non–Riemannian Geometry*. New York, 1927 (« Amer. Math. Society Colloquium Publications », vol. VIII).

16. J. Douglas, *The general geometry of paths*. « Annals of Mathem. » (2), *29*, 1928, 143–168.

17. T. Y. Thomas, *Determination of affine and metric spaces by their differential invariants*. « Mathem. Annalem », *101*, 1929, 713–728.

18. T. Y. Thomas, *The existence theorems in the problem of the determination of affine and metric spaces by their differential invariants*. « Amer. Journ. of Mathem. », *52*, 1930, 225–250.

19. L. P. Eisenhart, *Projective normal coördinates*. « Proced. Nation. Acad. », *16*, 1930, 731–740.

20. G. D. Mattioli, *Sopra certi sistemi coordinati associati ad un'ennupla di congruenze (e applicazioni)*. « Rendiconti Semin. Matem. Padova », I, 1930, 110–132.

21. W. Blaschke, *Vorlesungen über Differentialgeometrie* I, 3ª ediz., Berlin, Springer, 1930.

22. E. Bortolotti, *Sulla geometria delle varietà a connessione affine. Teoria invariantiva delle trasformazioni che conservano il parallelismo*. « Annali di Matem. », *8*, 1930, 53–101.

23. E. Bortolotti, *Directions concourantes et connexions dans les espaces courbes*. « Bulletin Soc. Mathém. de France », *59*, 1931, 70–74.

24. J. Douglas, *System of K–dimensional manifolds in an N–dimensional space*. « Mathem. Annalen », *105*, 1931, 707–733.

25. O. Veblen, J. H. C. Whitehead, *A set of axioms for differential geometry*. « Proced. Nation. Acad. », *17*, 1931, 551–561.

26. E. Bortolotti, *Riferimenti geodetici lungo più linee, nelle varietà a connessione affine*. « Rendic. Accad. Lincei » (6) *19*, 1934, 556–560.

27. T. Y. Thomas, *The differential invariants of generalized spaces*. Cambridge, at the University Press, 1934.

28. J. A. Schouten, D. J. Struik, *Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie*. (2ª ediz.) P. Noordhoff, Groningen–Batavia, B. I (Algebra und Uebertragungslehre), 1935; B. II (*Geometrie*), 1938.

29. T. Y. Thomas, *On normal coördinates*. « Proceed. Nation. Acad. » *22*, 1936, 309–312.

30. E. Bortolotti, V. Hlavaty, *Contributi alla teoria delle connessioni. I. Connessioni proiettive; costruzione al finito, classificazione secondo Klein*. « Annali di Matem. » (4), *15*, 1936, 1–45, 129–154.

31. E. Bortolotti, *Superficie anolonome complementari*, Scritti matematici offerti a L. Berzolari. Pavia, Tip. Rossetti 1936; 553–576.

32. É. Cartan, *Leçons sur la théorie des espaces à connexion projective*. Paris, Gauthier–Villars, 1937.

33. Shiing–Shen Chern, *On projective normal coördinates*. « Annals of Mathem. », *39*, 1938, 165–171.

Matematica. — *Sulle equazioni integrali il cui nucleo è funzione lineare del parametro* (1). Nota (2) di Carlo Miranda, presentata da Mauro Picone, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

Siano: T un dominio limitato e misurabile dello spazio a r dimensioni x e y due suoi punti generici rispettivamente di coordinate $(x_1, x_2, \cdots, x_r)$ e $(y_1, y_2, \cdots, y_r)$; $T^{(2)}$ il dominio dello spazio a $2r$ dimensioni descritto dal punto di coordinate $(x_1, x_2, \cdots, x_r, y_1, y_2, \cdots, y_r)$ al variare di x e y in T; $H(x, y)$ e $H_1(x, y)$ due nuclei reali simmetrici, il primo a quadrato sommabile in $T^{(2)}$ e il secondo ivi continuo. Posto

$$G(x, y, \lambda) = H(x, y) + \lambda H_1(x, y),$$

ci proponiamo di studiare l'equazione integrale

$$[1] \qquad \varphi(y) = \lambda \int_T G(x, y, \lambda)\, \varphi(x)\, dy .$$

Cominciamo con l'osservare che, se $K(x, y)$ è un qualsivoglia nucleo, l'equazione integrale

$$\varphi(x) = \lambda \int_T K(x, y)\, \varphi(y)\, dy$$

ha lo stesso spettro della [1], ove si ponga:

$$[2] \qquad H(x, y) = K(x, y) + K(y, x)\ ,\ H_1(x, y) = -\int_T K(s, x)\, K(s, y)\, ds .$$

Pertanto, se non si fa nessuna ulteriore ipotesi sui nuclei $H(x, y)$ e $H_1(x, y)$, l'equazione [1] può benissimo risultare priva di autovalori oppure avere autovalori tanto reali quanto complessi.

---

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(2) Pervenuta all'Accademia il 25 agosto 1940-XVIII.

Le cose vanno invece molto diversamente se si suppone che il nucleo $H_1(x, y)$ sia semidefinito positivo ovvero definito positivo, il che non è, evidentemente, compatibile con le posizioni [2]. Sussistono, invero, in tale ipotesi i seguenti teoremi, il primo dei quali rientra, peraltro, in un risultato più generale di R. Iglisch (1).

I. *Se almeno uno dei nuclei* $H(x, y)$ *e* $H_1(x, y)$ *non è di tipo elementare* (2), *la* [1] *possiede infiniti autovalori, tutti reali, i quali formano un insieme discreto.*

II. *Detta* $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n, \cdots$ *la successione di tali autovalori disposti in ordine di modulo non decrescente e ciascuno ripetuto un numero di volte pari al suo rango, si può far corrispondere ad ogni autovalore* λ_n *un'autosoluzione* $\varphi_n(x)$ *in modo che sussistano le relazioni:*

$$[2] \quad \int_T \varphi_n(x)\,\varphi_m(x)\,dx + \lambda_n\lambda_m \int_T\int_T H_1(x, y)\,\varphi_n(x)\,\varphi_m(y)\,dx\,dy \begin{cases} = 0 \text{ se } n \neq m \\ = 1 \text{ se } n = m. \end{cases}$$

III. *Se* $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x), \cdots$ *sono le autosoluzioni della* [1], *di cui al teorema precedente, e* $u_0(x)$ *è una funzione reale di quadrato sommabile in* T, *si ha quasi ovunque in* T:

$$[4] \quad \int_T H(x, y)\,u_0(y)\,dy = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)}{\lambda_n} \int_T \varphi_n(y)\,u_0(y)\,dy,$$

$$[5] \quad H_1(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) \int_T H_1(y, s)\,\varphi_n(s)\,ds,$$

$$[6] \quad \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \int_T H_1(x, s)\,\varphi_n(s)\,ds \int_T H_1(y, t)\,\varphi_n(t)\,dt = 0.$$

Il metodo di cui mi sono valso per stabilire tali risultati è del tutto analogo a quello che ho adoperato in un mio lavoro (3), attualmente in corso di stampa, per lo studio della equazione [1] con

$$G(x, y, \lambda) = K(x, y) - \sum \frac{\lambda}{\lambda - a_i} H_i(x, y).$$

---

(1) R. Iglisch, *Lineare Integralgleichungen mit vom Parameter abhängigem Kern.* « Math. Ann. », 1939.

(2) Per le locuzioni che si riferiscono alla teoria classica delle equazioni integrali lineari, cfr. M. Picone, *Appunti d'Analisi Superiore* [Rondinella, Napoli (1940)], cap. VII.

(3) C. Miranda, *Nuovi contributi alla teoria delle equazioni integrali lineari con nucleo dipendente dal parametro.* « Memorie della R. Acc. delle Sc. di Torino », 1940.

Pertanto mi limiterò qui a richiamarne i punti essenziali rimandando per le questioni di dettaglio, come pure per la spiegazione di taluni simboli e locuzioni, alla predetta memoria, che indicherò d'ora innanzi con (T). È necessario, peraltro, avvertire che la quantità ivi designata con a_1 deve qui supporsi eguale all'unità.

Cominciamo con l'osservare che, se $\varphi(x)$ e $\varphi'(x)$ sono due autosoluzioni della [1] corrispondenti a due distinti autovalori λ e λ', sussiste la relazione:

$$[7] \qquad \int_T \varphi(x)\,\varphi'(x)\,dx + \lambda\lambda' \int_T \int_T H_1(x,y)\,\varphi(x)\,\varphi'(y)\,dx\,dy = 0\,.$$

Dalla [7] segue intanto che la [1] è priva di autovalori complessi, giacchè, se λ fosse un autovalore complesso dalla [1] e $\varphi(x)$ la relativa autosoluzione, si potrebbe porre nella [7] $\lambda' = \overline{\lambda}$, $\varphi'(x) = \overline{\varphi}(x)$, con che si avrebbe:

$$\int_T |\varphi(x)|^2\,dx + |\lambda|^2 \int_T \int_T H_1(x,y)\,\varphi(x)\,\overline{\varphi}(y)\,dx\,dy = 0\,,$$

e quindi, essendo $H_1(x,y)$ semidefinito positivo, $\varphi(x) \equiv 0$.

Assodata così la realtà degli autovalori della [1], segue ancora dalla [6] che, se $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ sono k autovalori distinti, si possono sempre normalizzare le corrispondenti autosoluzioni $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_k(x)$ in modo che siano soddisfatte le [3]. È poi evidente che, se λ è un autovalore di rango k, si possono sempre determinare k autosoluzioni linearmente indipendenti $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_k(x)$, relative al detto autovalore, tali che, posto $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = \lambda$, riescano ancora soddisfatte le [3].

Ciò premesso, se $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ sono k autovalori della [1], distinti o no, e $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_k(x)$ le relative autosoluzioni verificanti le [2], con un procedimento analogo a quello adoperato per stabilire le formule [38] e [41] di (T), si ha:

$$[8] \qquad \sum_{n=1}^{k} \frac{\varphi_n^2(x)}{\lambda_n^2} \leq \int_T H^2(x,y)\,dy + H_1(x,x) = A^2(x)\,,$$

$$[9] \qquad \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{\lambda_n^2} \leq \int_T A^2(x)\,dx + \int_T \int_T H_1(x,y)\,A(x)\,A(y)\,dx\,dy\,.$$

Dalla [9] discende che gli autovalori della [1] costituiscono al più un insieme discreto, il quale può dunque essere numerato nel modo indicato dal teorema II. Tale teorema, ammessa per il momento l'esistenza

degli autovalori e tenuto conto di quanto abbiamo premesso circa la possibilità di soddisfare le [3], resta così pienamente dimostrato.

Si osservi anche che dalla [8] segue:

$$[10] \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n^2(x)}{\lambda_n^2} \leq \int_T H^2(x,y)\,dy + H_1(x,x),$$

laddove, valendosi del teorema VI di (T) si perviene anche alla diseguaglianza:

$$[11] \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \left(\int_T H_1(x,y)\,\varphi_n(y)\,dy \right)^2 \leq H_1(x,x).$$

Per dimostrare ora che la [1] possiede effettivamente almeno un autovalore, consideriamo il funzionale

$$\Psi = \int_T \int_T H(x,y)\,u_0(x)\,u_0(y)\,dx\,dy + 2 \int_T \int_T H_1(x,y)\,u_0(x)\,u_1(y)\,dx\,dy,$$

nel quale $u_0(x)$ è una funzione di quadrato sommabile in T e $u_1(x)$ una pseudofunzione associata al nucleo $H_1(x,y)$. Tale funzionale, per le considerazioni svolte nel n. 6 di (T), è continuo, e quindi dotato di massimo e minimo nell'insieme compatto e chiuso Σ_M delle coppie (u_0, u_1) verificanti la diseguaglianza:

$$\int_T u_0^2(x)\,dx + \int_T \int_T H_1(x,y)\,u_1(x)\,u_1(x)\,dx\,dy \leq M.$$

Dopo ciò, detti μM il più grande in valore assoluto degli estremi di Ψ e (φ, ψ) la relativa coppia estremante, basta ripetere il ragionamento del n. 7 di (T) per dimostrare che sussistono le equazioni:

$$\int_T H(x,y)\,\varphi(y)\,dy + \int_T H_1(x,y)\,\varphi(y)\,dy - \mu\varphi(x) = 0,$$

$$\int_T H_1(x,y)\,\varphi(y)\,dy - \mu \int_T H_1(x,y)\,\psi(y)\,dy = 0,$$

$$\int_T \varphi^2(x)\,dx + \int_T \int_T H_1(x,y)\,\psi(x)\,\psi(y)\,dx\,dy = M,$$

dalle quali è facile ricavare che la quantità $\lambda = \frac{1}{\mu}$ è un autovalore per la [1] e che la funzione $\varphi(x)$ è la corrispondente autosoluzione.

Per completare la dimostrazione del teorema I occorrerebbe ancora far vedere che, se i nuclei $H(x,y)$ e $H_1(x,y)$ non sono entrambi di tipo elementare, gli autovalori della [1] sono in numero infinito. Si può, peraltro,

osservare che ciò è implicitamente contenuto nel teorema III, giacchè, qualora gli autovalori della [1] fossero in numero finito, si dedurrebbe subito dal teorema III che $H(x,y)$ e $H_1(x,y)$ sono di tipo elementare.

Per dimostrare ora il teorema III, cominciamo con l'osservare che la convergenza delle serie a secondo membro delle [4], [5] e [6] resta senz'altro assicurata dalle [10] e [11] e dalla diseguaglianza

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_T \varphi_n(y)\, u_0(y)\, dy \right)^2 \leq \int_T u_0^2(y)\, dy,$$

che segue immediatamente dalla [20] di (T).

D'altra parte, dalla formula:

$$\Psi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \left(\int_T \varphi_n(x)\, u_0(x)\, dx + \lambda_n \int_T \int_T H_1(y,y)\, \varphi_n(x)\, u_1(y)\, dx\, dy \right)^2,$$

che si stabilisce con lo stesso procedimento adoperato per la dimostrazione del teorema XXII di (T), si ricava, ponendo alternativamente eguali a zero $u_0(x)$ e $u_1(x)$:

$$[12] \qquad \int_T \int_T H(x,y)\, u_0(x)\, u_0(y)\, dx\, dy = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \left(\int_T \varphi_n(x)\, u_0(x)\, dx \right)^2,$$

$$[13] \qquad \int_T \int_T H_1(x,y)\, u_0(x)\, u_1(y)\, dx\, dy =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_T \varphi_n(x)\, u_0(x)\, dx \cdot \int_T \int_T H_1(x,y)\, u_1(x)\, \varphi_n(y)\, dx\, dy,$$

$$[14] \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left(\int_T \int_T H_1(x,y)\, u_1(x)\, \varphi_n(y)\, dx\, dy \right)^2 = 0,$$

e da tali formule, valendosi di un artificio analogo a quello adoperato per la dimostrazione del teorema XXIII di (T), si perviene senz'altro alle [4], [5] e [6].

Restano così dimostrati tutti i teoremi enunciati al principio della presente nota: a questi vogliamo però aggiungere alcuni complementi.

Si osservi che, detta $u_1(x)$ una funzione di quadrato sommabile, si ha dalle [5] e [6].

$$[15] \qquad \int_T H_1(x,y)\, u_1(y)\, dy = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) \int_T \int_T H_1(y,s)\, u_1(y)\, \varphi_n(s)\, dy\, ds,$$

$$[16] \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \int_T H_1(x,s)\, \varphi_n(s)\, ds \cdot \int_T \int_T H_1(y,t)\, u_1(y)\, \varphi_n(t)\, dy\, dt = 0,$$

$$[17] \qquad \int_T H_1(x,y)\, u_0(y)\, dy = \sum_{n=1}^{\infty} \int_T \varphi_n(y)\, u_0(y)\, dy \cdot \int_T H_1(x,s)\, \varphi_n(s)\, ds.$$

Mentre l'ultima di queste formule sussiste solo quando $u_0(x)$ è una funzione di quadrato sommabile in T, le [15] e [16] sono valide anche quando $u_1(x)$ è una pseudofunzione associata al nucleo $H_1(x, y)$. Ciò si può, invero, agevolmente dedurre delle [13] e [14].

Ciò premesso, si ha dalle [4], [15], [16] e [17]:

$$\int_T H(x, y)\, u_0(y)\, dy + \int_T H_1(x, y)\, u_1(y)\, dy =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)}{\lambda_n} \left[\int_T \varphi_n(y)\, u_0(y)\, dy + \lambda_n \int_T \int_T H_1(y, s)\, u_1(y)\, \varphi_n(s)\, dy\, ds \right]$$

$$\int_T H_1(x, y)\, u_0(y)\, dy =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_T H_1(x, s)\, \varphi_n(s)\, ds \left[\int_T \varphi_n(y)\, u_0(y)\, dy + \lambda_n \int_T \int_T H_1(y, s)\, u_1(y)\, \varphi_n(s)\, dy\, ds \right],$$

e da tali formule si trae che dal verificarsi delle relazioni

$$[18] \quad \int_T \varphi_n(y)\, u_0(y)\, dy + \lambda_n \int_T \int_T H_1(y, s)\, u_1(y)\, \varphi_n(s)\, dy\, ds = 0 \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

segue:

$$[19] \quad \begin{cases} \displaystyle\int_T H(x, y)\, u_0(y)\, dy + \int_T H_1(x, y)\, u_1(y)\, dy = 0 \\ \displaystyle\int_T H_1(x, y)\, u_0(y)\, dy = 0\,. \end{cases}$$

È poi, viceversa, facile verificare che dalle [19], seguono le [18].

Basandosi sulla precedente osservazione e valendosi di un procedimento analogo a quello tenuto in (T) per la dimostrazione del teorema XXVII, si può agevolmente far vedere che:

IV. *Se $f_0(x)$ è una funzione di quadrato sommabile in T e $f_1(x)$ una pseudofunzione associata al nucleo $H_1(x, y)$, condizione necessaria e sufficiente affinchè si abbia:*

$$[20] \quad \begin{cases} f_0(x) \doteq \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) \left[\int_T \varphi_n(y) f_0(y)\, dy + \lambda_n \int_T \int_T H_1(y, s) f_1(y) \varphi_n(s)\, dy\, ds \right] \\ f_1(x) \doteq \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \varphi_n(x) \left[\int_T \varphi_n(y) f_0(y)\, dy - \lambda_n \int_T \int_T H_1(y, s) f_1(y) \varphi_n(s)\, dy\, ds \right] \end{cases}$$

è che, per ogni coppia (u_0, u_1) *verificante le* [19], *riesca*:

$$\int_T f_0(x)\, u_0(x)\, dx + \int_T \int_T H_1(x, y)\, f_1(x)\, u_1(y)\, dx\, dy = 0 .$$

Si noti infine che, se $H_1(x, y)$ è definito positivo, le [19] sono soddisfatte soltanto da $u_0 = u_1 = 0$ e quindi le [20] sono valide quali che siano f_0 e f_1.

Matematica. — *La formula di bisezione della* $\wp u$ *di* WEIERSTRASS, *e un teorema sui punti razionali delle cubiche ellittiche a coefficienti razionali.* Nota(1) di GIOVANNI SANSONE, presentata dall'Accademico FRANCESCO SEVERI.

In una ricerca di analisi indeterminata mi è occorsa la formula di bisezione della $\wp u$ di WEIERSTRASS che non ho trovato esplicitamente riportata in alcuna delle più conosciute opere concernenti la teoria delle funzioni ellittiche (2). È però ben noto che le formule che dànno $\wp\left(\frac{u}{2} + r\omega + s\omega'\right)$; $r, s = 0,1$; [2ω , $2\omega'$ periodi di $\wp u$] debbono ottenersi operando su $\wp u$ con estrazioni di radici quadrate (3), ed è chiaro che esse possono costruirsi immediatamente esprimendo la $\wp u$ con le funzioni ellittiche di JACOBI e applicando le formule di bisezione di quest'ultime (4); così operando si perviene ad una formula semplicissima [[1] del n. 1] la quale merita di essere esplicitamente rilevata. La formula presenta anche qualche interesse, perchè a proposito della ricerca dei punti razionali [punti di coordinate razionali] di una curva di genere uno, a coefficienti razionali, permette di dare un teorema [n. 2, *a*)] che non ho trovato enunciato in ricerche dedicate all'argomento (5).

---

(1) Pervenuta all'Accademia il 26 settembre 1940–XVIII.

(2) Cfr. ad es. L. BIANCHI, *Lezioni sulla teoria delle funzioni di variabile complessa e delle funzioni ellittiche* [Pisa, 1901], pagg. 300–307; F. TRICOMI, *Funzioni ellittiche* [Bologna, 1937], pag. 36; G. H. HALPHEN, *Traité des fonctions elliptiques*, I [Paris, 1886], pagg. 49–54; R. FRICKE, *Elliptische Funktionen*, Artic. II, B. 3 in « Encyklop. d. Math. Wiss. », Bd. II^2, [Leipzig, 1913], (pagg. 177–348), pag. 198, pag. 306; H. WEBER, *Lehrbuch der Algebra*, [« Zweite aufl., Braunschweig », 1908], pag. 200.

(3) Cfr. ad es. L. BIANCHI, op. cit. in (2), pagg. 300–307.

(4) Cfr. ad es. F. TRICOMI, op. cit. in (2), pag. 120.

(5) *a*) B. LEVI, *Saggio per una teoria aritmetica delle forme cubiche ternarie.* « Atti R. Acc. Sc. Torino », 41 (1906), pagg. 739–764; 43 (1907), pagg. 99–120, 413–434, 672–681; *b*) E. HAENTZSCHEL, *Bedingungen für die Lösung des Fermatschen Problems* $y^2 = a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4$. « Journ. v. Crelle » 144 (1914), pagg. 275–283; *c*) T. NAGELL, *i*) *Sur les propriétés arithmétiques des cubiques planes du premier genre.* « Acta Mathematica », 52 (1928), pagg. 93–126, *ii*) *L'analyse indéterminée de degré supérieur.* « Mém. des Sc. Math. » (Paris, 1929).

1. *a*) Proviamo che *se* $\wp u$ *è la funzione ellittica di* JACOBI *con i periodi* 2ω , $2\omega'$, *si ha*

$$[1] \qquad \wp\left(\frac{u}{2}+r\omega+s\omega'\right)=\wp u+\sqrt{\wp u-e_1}\sqrt{\wp u-e_2}+$$

$$+\sqrt{\wp u-e_2}\sqrt{\wp u-e_3}+\sqrt{\wp u-e_3}\sqrt{\wp u-e_1}$$

$$r\,,s=0\,,1\,,$$

$$e_1=\wp u \quad , \quad e_2=\wp(\omega+\omega') \quad , \quad e_3=\wp\omega' \quad , \quad (e_1+e_2+e_3=0)\,,$$

dove i quattro valori di $\wp\left(\frac{u}{2}+r\omega+s\omega'\right)$ [corrispondenti alle coppie $(r\,,s)=(0\,,0)$, $(1\,,0)$, $(0\,,1)$, $(1\,,1)$] *si ottengono fissando di ciascun radicale una delle sue due determinazioni.*

Posto

$$[2] \qquad \wp u=x \quad , \quad \wp\left(\frac{u}{2}+r\omega+s\omega'\right)=X\,,$$

e per comodità

$$\sqrt{x-e_2}\sqrt{x-e_3}=A_1 \quad , \quad \sqrt{x-e_3}\sqrt{x-e_1}=A_2 \quad , \quad \sqrt{x-e_1}\sqrt{x-e_2}=A_3\,,$$

dobbiamo verificare che se

$$X=x+A_1+A_2+A_3\,,$$

X soddisfa l'equazione di quarto grado (in X)

$$[3] \qquad x=\frac{\frac{1}{4}\left[X^2+\frac{1}{4}g_2\right]^2+\frac{1}{2}g_3\,X}{(X-e_1)\,(X-e_2)\,(X-e_3)}$$

$$g_2=-4\,(e_1e_2+e_2e_3+e_3e_1) \quad , \quad g_3=4\,e_1e_2e_3\,,$$

ottenuta dalla ben nota formula di duplicazione delle funzioni ellittiche, quando si tenga conto delle posizioni [2].

Abbiamo infatti

$$X^2+\frac{1}{4}g_2=2\,[2\,x^2+(2\,x-e_1)\,A_1+(2\,x-e_2)\,A_2+(2\,x-e_3)\,A_3]\,,$$

quindi

$$[4] \qquad \frac{1}{4}\left[X^2+\frac{1}{4}g_2\right]^2+\frac{1}{2}g_3\,X=4\,x^4+2\,e_1e_2e_3\,x+$$

$$+(2\,x-e_1)^2\,(x-e_2)\,(x-e_3)+(2\,x-e_2)^2\,(x-e_3)\,(x-e_1)+$$

$$+(2\,x-e_3)^2\,(x-e_1)\,(x-e_2)+4\,x^2\,[(2\,x-e_1)\,A_1+(2\,x-e_2)\,A_2+(2\,x-e_3)\,A_3]+$$

$$+2\,[(2\,x-e_2)\,(2\,x-e_3)\,(x-e_1)\,A_1+(2\,x-e_3)\,(2\,x-e_1)\,(x-e_2)\,A_2+$$

$$+(2\,x-e_1)\,(2\,x-e_2)\,(x-e_3)\,A_3]+2\,e_1e_2e_3\,(A_1+A_2+A_3)\,.$$

Si ha poi

$$X - e_1 = \left(\sqrt{x - e_1} + \sqrt{x - e_2}\right)\left(\sqrt{x - e_1} + \sqrt{x - e_3}\right)$$

perciò

$$[5] \qquad (X - e_1)(X - e_2)(X - e_3) =$$

$$= \left[\sqrt{x - e_2} + \sqrt{x - e_3}\right]^2 \left[\sqrt{x - e_3} + \sqrt{x - e_1}\right]^2 \left[\sqrt{x - e_1} + \sqrt{x - e_2}\right]^2,$$

quindi

$$[6] \qquad x(X - e_1)(X - e_2)(X - e_3) =$$

$$= x(2x + e_1)(2x + e_2)(2x + e_3) + 8x(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3) +$$

$$+ 2x[(2x + e_2)(2x + e_3)A_1 + (2x + e_3)(2x + e_1)A_2 + (2x + e_1)(2x + e_2)A_3] +$$

$$+ 4x[(2x + e_1)(x - e_1)A_1 + (2x + e_2)(x - e_2)A_2 + (2x + e_3)(x - e_3)A_3];$$

e per provare la [3] basterà provare l'identità dei secondi membri delle [4] e [6], ciò che si consegue immediatamente mostrando l'identità dei termini indipendenti da A_1, A_2, A_3, e l'identità dei coefficienti di A_1, A_2, A_3.

b) È noto che esprimendo le funzioni $\sqrt{\wp u - e_1}$, $\sqrt{\wp u - e_2}$, $\sqrt{\wp u - e_3}$ mediante le σ, σ_1, σ_2, σ_3 di WEIERSTRASS [1].

$$\sqrt{\wp u - e_1} = \frac{\sigma_1 u}{\sigma u} \quad , \quad \sqrt{\wp u - e_2} = \frac{\sigma_2 u}{\sigma u} \quad , \quad \sqrt{\wp u - e_3} = \frac{\sigma_3 u}{\sigma u},$$

si hanno tre funzioni doppiamente periodiche del secondo ordine, rispettivamente con i periodi fondamentali $(2\omega, 4\omega')$, $(2\omega + 2\omega', 4\omega)$, $(4\omega, 2\omega')$. Per ottenere allora la determinazione dei segni dei radicali che forniscono l'espressione di $\wp\left(\frac{u}{2}\right)$, basterà fare $u = \omega, \omega', \omega + \omega'$, tener conto che [2]

$$\wp\left(\frac{\omega}{2}\right) = e_1 + \sqrt{e_1 - e_2}\sqrt{e_1 - e_3} \quad , \quad \wp\left(\frac{\omega'}{2}\right) = e_3 - \sqrt{e_1 - e_3}\sqrt{e_2 - e_3}$$

$$\wp\left(\frac{\omega + \omega'}{2}\right) = e_2 - i\sqrt{e_2 - e_3}\sqrt{e_1 - e_2},$$

e si otterrà senza ambiguità di segni

$$[1'] \qquad \boxed{\wp\left(\frac{u}{2}\right) = \wp u + \sqrt{\wp u - e_1}\sqrt{\wp u - e_2} + \sqrt{\wp u - e_2}\sqrt{\wp u - e_3} + \sqrt{\wp u - e_3}\sqrt{\wp u - e_1}}.$$

---

[1] Cfr. L. BIANCHI, op. cit., pagg. 345-346.

[2] Cfr. G. H. HALPHEN, op. cit., pag. 54.

2. *a*) Si consideri ora la cubica

$$C^3 : y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3 = 4(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)$$

con e_1, e_2, e_3 *razionali*,

$$e_1 > e_2 > e_3 \quad , \quad (e_1 + e_2 + e_3 = 0).$$

Vogliamo dimostrare che *in queste ipotesi, condizione necessaria e sufficiente perchè un punto* (x, y) *di* C^3, *a distanza finita, razionale,* [x *e* y *razionali*] *con* $x > e_1$, *sia il tangenziale di un altro punto* (X, Y) *razionale di* C^3 [*la tangente a* C^3 *in* (X, Y) incontra C^3 in (x, y)] *è che i tre numeri* $x - e_1, x - e_2, x - e_3$ *siano quadrati di numeri razionali.*

L'equazione della C^3 in forma parametrica può scriversi

$$x = \wp u \quad , \quad y = \wp' u,$$

e dalle nostre ipotesi, e con le notazioni del n. 1, si ha

$$X = \wp\left(\frac{u}{2} + r\omega + s\omega'\right) = x + A_1 + A_2 + A_3,$$

quindi $X - x - A_1 = A_2 + A_3$, $(X - x)^2 + A_1^2 - A_2^2 - A_3^2 = 2(X - e_1)A_1$; ma $X - e_1 \neq 0$ [x finito] perciò A_1 è razionale, e il prodotto $(x - e_2)(x - e_3) = A_1^2$ è il quadrato di un numero razionale non nullo. Si ha allora $x - e_1 = y^2/4A_1^2$, perciò $x - e_1 = \alpha^2$ con α razionale, e analogamente $x - e_2 = \beta^2$, $x - e_3 = \gamma^2$ con β e γ razionali.

Inversamente se $x - e_1 = \alpha^2$, $x - e_2 = \beta^2$, $x - e_3 = \gamma^2$ con α, β, γ razionali positivi, i quattro numeri

$$X = x + \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma, x + \alpha\beta - \alpha\gamma - \beta\gamma, x - \alpha\beta + \alpha\gamma - \beta\gamma, x - \alpha\beta - \alpha\gamma + \beta\gamma$$

rappresentano le ascisse razionali di quattro punti di C^3, e siccome per le corrispondenti ordinate Y si ha $Y^2 = 4(X - e_1)(X - e_2)(X - e_3)$, dalla [5] segue che (X, Y) è un punto razionale di C^3.

Il teorema è così dimostrato.

Si consideri ad es. la

$$C^3 : y^2 = 4\left(x - \frac{v^4 + 1}{6}\right)\left(x + \frac{v^4 - 6v^2 + 1}{12}\right)\left(x + \frac{v^4 + 6v^2 + 1}{12}\right)$$

con v razionale assoluto, $v \neq 0, \pm 1$. Il punto (x, y)

$$x = \wp\left(\frac{\omega}{2}\right) = e_1 + \sqrt{e_1 - e_2}\sqrt{e_1 - e_3} = \frac{5v^4 - 1}{12} \text{ (1)}$$

$$y = \wp'\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{v^2(v^4 - 1)}{2},$$

(1) Si faccia nella [1], $\wp u = e_1 = (v^4 + 1)/6$. Cfr. G. H. HALPHEN, op. cit., pag. 54.

è un punto razionale di C^3, ma si ha $x - e_1 = (v^4 - 1)\,4$, e siccome $v^4 - 1$ per un teorema di EULERO non può essere il quadrato di un numero razionale (1), ne viene che i punti di C^3 di ascissa $\wp\left(\frac{\omega}{4} + r\omega + s\omega'\right)$ non sono razionali.

b) Dal teorema segue che *se* e_1, e_2, e_3 *sono razionali* $e_1 > e_2 > e_3$, $e_1 + e_2 + e_3 = 0$, *condizione necessaria e sufficiente perchè* x, α, β, γ *formi una quaterna di numeri razionali, soluzione del sistema indeterminato*

$$[7] \quad x - e_1 = \alpha^2 \quad , \quad x - e_2 = \beta^2 \quad , \quad x - e_3 = \gamma^2 \, , \quad \alpha \neq 0 \, , \, \beta \neq 0 \, , \, \gamma \neq 0 \, , \, (2)$$

è che il numero razionale x *rappresenti l'ascissa del tangenziale di un punto* (X, Y) *razionale, appartenente alla*

$$C^3 : Y^2 = 4X^3 - g_2 X - g_3 \, , \quad g_2 = -4(e_1 e_2 + e_2 e_3 + e_3 e_1) \, , \quad g_3 = 4 e_1 e_2 e_3 \, ,$$

con $X \neq \wp\left(\frac{\omega}{2} + r\omega + s\omega'\right); r, s = 0, 1$.

---

(1) Cfr. A. M. LEGENDRE, *Théorie des nombres* (2e éd., Paris, 1808), pag. 343.

(2) Il sistema [7] del testo è stato considerato da L. EULERO [*Opera Omnia*], (1), I, *Vollständige Anleitung, zur Algebra* (Leipzig, 1911), pagg. 454–456.

Meccanica. — *Campi tensoriali potenziali.* Nota (1) di Umberto Cisotti, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

Sono noti i campi vettoriali potenziali: il vettore del campo risulta definito mediante uno scalare, la funzione potenziale, precisamente il vettore in ogni posto coincide col gradiente dello scalare. Ci proponiamo di stabilire, più in generale ancora, una corrispondenza tra uno scalare, funzione dei punti di un campo, e dei tensori m–pli, funzioni dei punti del campo stesso. Se $m \geq 2$ si possono far corrispondere ad ogni scalare, definito nel campo, due tensori m–pli, che chiamerò *potenziali*: uno di *prima specie* [n. 3] e un altro di *seconda specie* [n. 4]. La suindicata corrispondenza è univoca per $m = 1$, cioè per i vettori, poichè, come si vedrà, le due specie accennate vanno entrambe a coincidere col gradiente dello scalare.

Questi concetti trovano applicazione nella meccanica dei sistemi continui, specialmente nei riguardi dei tensori doppi, come avrò occasione di mostrare in seguito. Per esempio il tensore d'inerzia [n. 6] è un tensore doppio potenziale di prima specie; sono tensori doppi potenziali di prima specie le quadriche centrate [n. 6]; sono pure potenziali di prima specie i tensori unitari [n. 6] di ordine pari. Sono tensori potenziali di seconda specie i prodotti di quantisivogliono vettori eguali al vettore $P - O$, essendo O un punto prefissato e P il generico punto del campo [n. 7]; così pure la classica distribuzione degli sforzi maxwelliani rientra nella categoria dei tensori doppi potenziali di seconda specie. Della distribuzione di sforzi potenziali di prima e di seconda specie che interessano la meccanica dei sistemi continui conservativi intendo esporre in seguito alcuni risultati; per ora ci limiteremo a introdurre i concetti generali e a mettere in rilievo qualche proprietà relativa alle divergenze [n. 5] e agli invarianti lineari [n. 8] dei tensori potenziali; esse hanno interesse anche al di fuori delle immediate applicazioni meccaniche.

1. Campi vettoriali potenziali. — Ci riferiremo allo spazio ordinario e alle coordinate cartesiane dei suoi punti, essendo immediate le estensioni a spazi riemanniani coll'impiego di coordinate generali.

---

(1) Pervenuta all'Accademia il 25 ottobre 1940-XVIII.

Se y_i ($i = 1, 2, 3$) sono le coordinate cartesiane di un punto generico e a_i tre funzioni delle coordinate stesse, definite in un campo, l'espressione differenziale lineare

$$[1] \qquad \sum_1^3{}_i \, a_i \, dy_i$$

è un differenziale esatto (totale primo) se esiste una funzione f dei punti del campo per cui risulta essere

$$[2] \qquad \boxed{a_i = \frac{\partial f}{\partial y_i}} \, .$$

Con linguaggio vettoriale, se a_i si interpretano componenti cartesiane di un vettore $\boldsymbol{a}$, le relazioni [2] esprimono che tale vettore è il *gradiente* dello scalare f e si scrive:

$$[3] \qquad \boxed{\boldsymbol{a} = \operatorname{grad} f} \, .$$

L'espressione differenziale [1] esprime il lavoro elementare del vettore $\boldsymbol{a}$ per lo spostamento infinitesimo dP del suo punto d'applicazione, che ha dy_i per componenti cartesiane; cioè si può scrivere

$$\sum_1^3{}_i \, a_i \, dy_i = \boldsymbol{a} \times dP \, ,$$

e le [2], e l'equivalente relazione vettoriale [3], esprimono che questo lavoro elementare eguaglia df:

$$\boldsymbol{a} \times dP = df \, ,$$

designando f l'integrale completo del su citato lavoro elementare. È noto che lo scalare f si chiama *potenziale* del campo vettoriale $\boldsymbol{a}$ e il campo stesso dicesi *potenziale, conservativo* o *irrotazionale.*

2. Divergenza. — È noto che chiamasi *divergenza* di un campo vettoriale $\boldsymbol{a}$ lo scalare

$$\sum_1^3{}_i \frac{\partial a_i}{\partial y_i}$$

che si indica colla notazione div $\boldsymbol{a}$, per cui

$$[4] \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{a} = \sum_1^3{}_i \frac{\partial a_i}{\partial y_i} \, .$$

Se il campo vettoriale è potenziale sussistono [2] e [3], per cui risulta

$$[5] \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{a} = \operatorname{div} \operatorname{grad} f = \sum_1^3{}_i \frac{\partial^2 f}{\partial y_i^2} = \Delta_2 f .$$

Si ha la ben nota proprietà: *la divergenza del vettore di un campo potenziale è il laplaciano della funzione potenziale.*

3. Campi tensoriali potenziali di prima specie. — Siano $a_{ik} = a_{ki}$ $(i , k = 1 , 2 , 3)$ sei funzioni dei punti $P(y_i)$ di un campo e consideriamo l'espressione differenziale quadratica

$$[6] \qquad \sum_1^3{}_{ik} a_{ik} \, dy_i \, dy_k .$$

Le funzioni $a_{ik} = a_{ki}$ si possono interpretare come componenti cartesiane di un tensore doppio simmetrico $\boldsymbol{a}$ [1]. Se, essendo f uno scalare funzione dei punti del campo, risulta essere:

$$[7] \qquad a_{ik} = a_{ki} = \frac{\partial^2 f}{\partial y_i \, \partial y_k} ,$$

la forma differenziale quadratica [6] risulta il $d^2 f$, cioè il differenziale totale secondo dello scalare f; esprimeremo questa circostanza scrivendo

$$[8] \qquad \boxed{\boldsymbol{a} = \operatorname{grad}_2 f}$$

e dicendo che il campo ove è definito il tensore doppio $\boldsymbol{a}$ è *potenziale di prima specie* ed f ne è la *funzione potenziale*. Si viene così ad estendere ai tensori doppi, e nel modo più naturale, il concetto richiamato brevemente al n. 1 relativo ai campi vettoriali potenziali.

È ora evidente l'estensione ulteriore al caso di un campo tensoriale m–plo. Se le componenti cartesiane $a_{i_1 \dots i_m}$ di un tensore m–plo $\boldsymbol{a}$ [2] sono le derivate m–me di una medesima funzione scalare f dei punti del campo:

$$[9] \qquad a_{i_1 \dots i_m} = \frac{\partial^m f}{\partial y_{i_1} \cdots \partial y_{i_m}} ,$$

per cui la forma differenziale m–ma corrispondente

$$[10] \qquad \sum_1^3{}_{i_1 \dots i_m} a_{i_1 \dots i_m} \, dy_{i_1} \cdots dy_{i_m}$$

---

[1] Cisotti, *Meccanica razionale*. Terza ediz., Libreria Editrice Politecnica, Milano (1939–XVII), pag. 334.

[2] Loco cit., pag. 339 e 356.

è il $d^m f$, cioè il differenziale totale m–mo di f, si dirà che il campo tensoriale è *potenziale di prima specie* ed f ne è la *funzione potenziale*, e si scrive:

$$[11] \qquad \boxed{\boldsymbol{a} = \mathrm{grad}_m f} \,.$$

È manifesta la simmetria del tensore $\boldsymbol{a}$ (1). Le [9] e [11] vanno a coincidere: per $m = 2$ con [2] e [8] e per $m = 1$ con [2] e [3].

4. Campi tensoriali potenziali di seconda specie. — La forma differenziale m–ma [10], quando i coefficienti sono definiti da [9], non è altro che il $d^m f$, il quale è notoriamente la potenza m–ma simbolica del df, cioè della [1] coi coefficienti [2]. Essendo g una funzione scalare dei punti del campo, se invece della potenza simbolica m–ma di

$$dg = \sum_1^3{}_i \frac{\partial g}{\partial y_i} dy_i \,,$$

si considera la potenza m–ma *effettiva*, si ottiene:

$$[12] \qquad (dg)^m = \sum_1^3{}_{i_1 \ldots i_m} \frac{\partial g}{\partial y_{i_1}} \cdots \frac{\partial g}{\partial y_{i_m}} dy_{i_1} \cdots dy_{i_m} \,,$$

i cui coefficienti

$$[13] \qquad b_{i_1 \ldots i_m} = \frac{\partial g}{\partial y_{i_1}} \cdots \frac{\partial g}{\partial y_{i_m}}$$

si possono interpretare come componenti cartesiane di un tensore m–plo $\boldsymbol{b}$ (2). In tal caso il campo tensoriale si dirà *potenziale di seconda specie* e g la corrispondente *funzione potenziale*, e si scriverà:

$$[14] \qquad \boxed{\boldsymbol{b} = \mathrm{Grad}_m g} \,,$$

(1) Loco cit., pag. 339. Per il carattere tensoriale di [9] vedasi loco citato, pagg. 354 e 355.

(2) Si può rilevare per via diretta il carattere tensoriale di [13], basta notare che, essendo $\bar{y}_j$ le coordinate dei punti rispetto ad assi differentemente orientati, risulta:

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{y}_{j_1}} = \sum_1^3{}_{i_1} \frac{\partial g}{\partial y_{i_1}} \alpha_{i_1 j_1} \,, \ldots, \frac{\partial g}{\partial \bar{y}_{j_m}} = \sum_1^3{}_{i_m} \frac{\partial g}{\partial y_{i_m}} \alpha_{i_m j_m} \,;$$

moltiplicando membro a membro si ottiene:

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{y}_{j_1}} \cdots \frac{\partial g}{\partial \bar{y}_{j_m}} = \sum_1^3{}_{i_1 \ldots i_m} \frac{\partial g}{\partial y_{i_1}} \cdots \frac{\partial g}{\partial y_{i_m}} \alpha_{i_1 j_1} \cdots \alpha_{i_m j_m} \,,$$

relazione che dimostra appunto il carattere tensoriale di [13].

volendo distinguere colla iniziale maiuscola « Grad » il gradiente di seconda specie da quello di prima specie « grad » [n. 3].

Per $m = 1$, cioè per un campo vettoriale, le due specie di potenziali vengono a coincidere in una sola.

In particolare per $m = 2$, si ha un campo tensoriale doppio:

$$\boldsymbol{b} = \mathrm{Grad}_2\, g\,,$$

e le componenti cartesiane risultano così definite:

$$[15] \qquad b_{ik} = b_{ki} = \frac{\partial g}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial g}{\partial y_k}\,.$$

5. DIVERGENZE. — Riferiamoci dapprima al campo tensoriale m–plo potenziale di prima specie definito da [11]. Dalle sue componenti cartesiane [9] risulta trattarsi di un tensore simmetrico, per cui le m divergenze coincidono tra di loro [1]; si può dunque parlare della *divergenza* (unica) di un tensore potenziale di prima specie: esso è il tensore $(m-1)$–plo le cui componenti cartesiane risultano così definite

$$[16] \qquad \sum_1^3{}_{i_m} \frac{\partial^{m+1} f}{\partial y_{i_1} \cdots \partial y_{i_{m-1}} \partial y_{i_m}^2} = \frac{\partial^{m-1}}{\partial y_{i_1} \cdots \partial y_{i_{m-1}}} \sum_1^3{}_{i_m} \frac{\partial^2 f}{\partial y_{i_m}^2} = \frac{\partial^{m-1}}{\partial y_{i_1} \cdots \partial y_{i_{m-1}}} \Delta_2 f\,.$$

Indicheremo con $\mathrm{div}\ \boldsymbol{a} = \mathrm{grad}_m f$ questo tensore; allora [16] si può esprimere in forma tensoriale nel modo seguente:

$$[17] \qquad \boxed{\mathrm{div}\ \mathrm{grad}_m f = \mathrm{grad}_{m-1} \Delta_2 f}\,.$$

Si legge in questa relazione tensoriale il seguente teorema: *la divergenza di un tensore m–plo potenziale di prima specie è un tensore $(m-1)$plo, potenziale di prima specie, la cui funzione potenziale è il laplaciano della funzione potenziale del tensore m–plo.*

In particolare, per $m = 2$ la [17] diviene:

$$[18] \qquad \mathrm{div}\ \mathrm{grad}_2 f = \mathrm{grad}\ \Delta_2 f\,,$$

cioè, *la divergenza di un tensore doppio potenziale di prima specie è un vettore che è il gradiente del laplaciano della funzione potenziale del tensore doppio.*

Riferiamoci ora al campo tensoriale m–plo potenziale di seconda specie, definito dalla [14]. Anche qui, trattandosi di un tensore simme-

[1] CISOTTI, *Lezioni di Calcolo tensoriale.* Libreria Editrice Politecnica, Milano (1928–VI). pag. 23.

trico, si ha una sola *divergenza* e sarà il tensore $(m-1)$-plo le cui componenti cartesiane risultano, quando si tenga conto di [13], così definite:

$$[19] \quad \sum_{1}^{3}{}_{i_m} \frac{\partial b_{i_1 \cdots i_{m-1} i_m}}{\partial y_{i_m}} = \sum_{1}^{3}{}_{i_m} \frac{\partial}{\partial y_{i_m}} \left[\frac{\partial g}{\partial y_{i_1}} \cdots \frac{\partial g}{\partial y_{i_{m-1}}} \cdot \frac{\partial g}{\partial y_{i_m}} \right] =$$

$$= \frac{\partial g}{\partial y_{i_1}} \cdots \frac{\partial g}{\partial y_{i_{m-1}}} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{1}^{m-1}{}_{\nu} \frac{\dfrac{\partial\, {}_{1}(\Delta g)^2}{\partial y_{i_\nu}}}{\dfrac{\partial g}{\partial g_{i_\nu}}} + {}_{2}\Delta g \right\}.$$

Ha particolare interesse, specie per le applicazioni meccaniche, il caso dei tensori doppi. In tal caso è $m = 2$ e la divergenza del tensore doppio risulta il vettore le cui componenti cartesiane si deducono da [19] e sono

$$[20] \quad \frac{\partial g}{\partial y_i} \left\{ \frac{1}{2} \frac{1}{\dfrac{\partial g}{\partial y_i}} \frac{\partial\, {}_{1}(\Delta g)^2}{\partial y_i} + {}_{2}\Delta g \right\} = \frac{1}{2} \frac{\partial\, {}_{1}(\Delta g)^2}{\partial y_i} + \frac{\partial g}{\partial y_i} {}_{2}\Delta g ;$$

esse dànno luogo alla seguente relazione vettoriale:

$$[21] \quad \boxed{\operatorname{div} \operatorname{Grad}_2 g = \frac{1}{2} \operatorname{grad} (\Delta_1 g)^2 + \Delta_2 g \cdot \operatorname{grad} g}.$$

La [19] mette in rilievo che in generale la divergenza di un tensore m-plo potenziale di seconda specie non è potenziale, a differenza di ciò che avviene per un tensore potenziale di prima specie. In particolare dalla [21] si vede pure che la divergenza di un tensore doppio potenziale di seconda specie non è, in generale, un vettore potenziale; lo è nel caso particolare in cui g sia funzione armonica; in tal caso, essendo $\Delta_2 g = 0$, risulta da [21] che la predetta divergenza è un vettore potenziale e la funzione potenziale è $\frac{1}{2} (\Delta_1 g)^2$.

6. Alcuni campi tensoriali di prima specie.

1° *Tensore doppio unitario.* – Il tensore doppio *fondamentale* o *unitario* [1] le cui componenti cartesiane sono:

$$[22] \quad \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases} \qquad (i, k = 1, 2, 3)$$

[1] Loco cit., *Meccanica razionale*, pag. 337.

è *potenziale di prima specie* in tutto lo spazio e la funzione potenziale è

[23] $$f = \frac{1}{2}(P - O)^2,$$

essendo O un punto, comunque prefissato, e P il punto generico, per cui risulta

[24] $$\boxed{\delta = \frac{1}{2}\,\mathrm{grad}_2\,(P - O)^2}\,.$$

Basta rilevare che, esprimendo [23] in coordinate cartesiane, si ha:

$$f = \frac{1}{2}\sum_1^3{}_\mu\, y_\mu^2,$$

per cui, derivando successivamente due volte, si ricava;

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} = \sum_1^3{}_\mu\, y_\mu \frac{\partial y_\mu}{\partial y_i} = \sum_1^3{}_\mu\, y_\mu\, \delta_{\mu i} = y_i\,;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y_i\, \partial y_k} = \frac{\partial y_i}{\partial y_k} = \delta_{ik}\,, \qquad \text{c. v. d.}$$

2° *Tensore quadruplo isotropo unitario.* – Le componenti cartesiane del più generale tensore quadruplo isotropo sono [1]

$$c_{ik\,jh} = A\delta_{ik}\,\delta_{jh} + B\delta_{ij}\,\delta_{kh} + C\delta_{ih}\,\delta_{kj}\,,$$

dove A, B, C sono degli scalari qualsiansi. Diremo *unitario* il tensore quadruplo isotropo Δ per cui è $A = B = C = 1$, con che le corrispondenti componenti cartesiane sono:

[25] $$\Delta_{ik\,jh} = \delta_{ik}\,\delta_{jh} + \delta_{ij}\,\delta_{kh} + \delta_{ih}\,\delta_{kj}\,.$$

Si constata facilmente la sua simmetria e la sua natura potenziale di prima specie, cioè essere

[26] $$\Delta = \mathrm{grad}_4\, f\,,$$

ove ora è

$$f = \frac{1}{8}(P - O)^4 = \frac{1}{8}\sum_1^3{}_{\mu\nu}\, y_\mu^2\, y_\nu^2\,.$$

---

[1] Loco cit., *Meccanica razionale*, pag. 364.

Si ottiene infatti senza nessuna difficoltà

$$\frac{\partial^4 f}{\partial y_i \partial y_k \partial y_j \partial y_h} = \Delta_{ik\,jh}, \qquad \text{c. v. d.}$$

3° *Tensore 2m–plo isotropo unitario.* – Poniamo

$$[27] \qquad S_m = \sum_1^3 {}_{\lambda_1 \cdots \lambda_m} y^2_{\lambda_1} \cdots y^2_{\lambda_m}.$$

Derivando successivamente si ottiene:

$$\frac{\partial S_m}{\partial y_{i_1}} = 2\, m y_{i_1} S_{m-1},$$

$$\frac{\partial^2 S_m}{\partial y_{i_1} \partial y_{i_2}} = 2\, m \delta_{i_1 i_2} S_{m-1} + 2^2\, m\,(m-1)\, y_{i_1} y_{i_2} S_{m-2},$$

$$\frac{\partial^3 S_m}{\partial y_{i_1} \partial y_{i_2} \partial y_{i_3}} = 2\, m\,(m-1)\,\{y_{i_1} \delta_{i_2 i_3} + y_{i_2} \delta_{i_1 i_3} + y_{i_3} \delta_{i_1 i_2}\} S_{m-2} +$$

$$+ 2^3\, m\,(m-1)\,(m-2)\, y_{i_1} y_{i_2} y_{i_3} S_{m-3},$$

$$\frac{\partial^4 S_m}{\partial y_{i_1} \partial y_{i_2} \partial y_{i_3} \partial y_{i_4}} = 2^2\, m\,(m-1)\, \Delta_{i_1 i_2 i_3 i_4} S_{m-2} + 2^3 m\,(m-1)\,(m-2)\,\{y_{i_1} y_{j_4} \delta_{i_2 i_3} +$$

$$+ y_{i_2} y_{i_4} \delta_{i_1 i_3} + y_{i_3} y_{i_4} \delta_{i_1 i_2} + y_{i_2} y_{i_3} \delta_{i_1 i_4} + y_{i_1} y_{i_3} \delta_{i_2 i_4} + y_{i_1} y_{i_2} \delta_{i_3 i_4}\} S_{m-3} +$$

$$+ 2^4\, m\,(m-1)\,(m-2)\,(m-3)\, y_{i_1} y_{i_2} y_{i_3} y_{i_4} S_{m-4},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial^{2m} S_m}{\partial y_{i_1} \cdots \partial y_{i_{2m}}} = 2^m\, m!\, \Delta_{i_1 \cdots i_{2m}},$$

rappresentando $\Delta_{i_1 \cdots i_{2m}}$ le componenti cartesiane del tensore $2m$–plo isotropo *unitario* (1). Pertanto, ponendo

$$[28] \qquad f = \frac{1}{2^m\, m!} S_m = \frac{1}{2^m\, m!} (P - O)^{2m},$$

si ottiene

$$\frac{\partial^{2m} f}{\partial y_{i_1} \cdots \partial y_{i_{2m}}} = \Delta_{i_1 \cdots i_{2m}},$$

---

(1) Pastori, *Espressione generale dei tensori isotropi.* « Rend. della R. Acc. Naz. dei Lincei », vol. XII (2° sem. 1930-VIII), pag. 500. Cfr. ancora Cisotti, *Tensore isotropo o emisotropo di minimo scarto da un tensore assegnato.* « Rendiconti del Reale Istituto Lombardo di Sc. e Lett. », vol. LXXIII, pag. 86 formula (5) nella quale si assume $A_r = 1$.

cioè:

$$[29] \qquad \boxed{\Delta = \operatorname{grad}_{2m} f = \frac{1}{2^m\, m!} \operatorname{grad}_{2m} (P-O)^{2m}} \,.$$

Per $m = 1$ e $m = 2$ questa relazione va a coincidere rispettivamente con [24] e [26].

4° *Quadriche centrate.* – Sia

$$[30] \qquad \sum_1^3{}_{\lambda\mu} E_{\lambda\mu}\, y_\lambda\, y_\mu = 1$$

l'equazione di una quadrica centrata, col centro nell'origine. I coefficienti $E_{\lambda\mu} = E_{\mu\lambda}$ costituiscono notoriamente (1) le componenti cartesiane di un tensore doppio simmetrico $\boldsymbol{E}$; tale tensore è potenziale di prima specie e la corrispondente funzione potenziale è

$$[31] \qquad f = \frac{1}{2} \sum_1^3{}_{\lambda\mu} E_{\lambda\mu}\, y_\lambda\, y_\mu \,,$$

per cui risulta

$$[32] \qquad \boldsymbol{E} = \operatorname{grad}_2 f \,.$$

Infatti si ha, con due successive derivazioni, dalla [31]

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} = \frac{1}{2} \sum_1^3{}_{\lambda\mu} E_{\lambda\mu} (\delta_{\lambda i}\, y_\mu + y_\lambda\, \delta_{\mu i} = \sum_1^3{}_{\mu} E_{i\mu}\, y_\mu \,,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y_i\, \partial y_k} = \sum_1^3{}_{\mu} E_{i\mu}\, \delta_{\mu k} = E_{ik} \,, \qquad \text{c. v. d.}$$

Si rilevi che *le superficie equipotenziali f = costante sono le quadriche concentriche e coassiali alla quadrica considerata* [30].

5° *Tensore d'inerzia.* – Data una qualsiasi distribuzione di masse, si assuma il sistema cartesiano di riferimento coll'origine nel baricentro e gli assi orientati secondo le direzioni principali d'inerzia. *Il tensore di inerzia $\boldsymbol{I}$* (2) *è potenziale di prima specie e la funzione potenziale è*

$$[33] \qquad \boxed{f = \frac{1}{2} \sum_1^3{}_{\lambda} I^{(0)}_{\lambda\lambda}\, y_\lambda^2 + \frac{M}{2} \sum_1^3{}_{\lambda}\, y_{\lambda+1}^2\, y_{\lambda+2}^2} \,,$$

(1) Loco cit., *Meccanica razionale*, pag. 329.

(2) Loco cit., *Meccanica razionale*, pag. 353. Si rilevi che nelle formule (1) della citata pag. 353 e precisamente in quelle che definiscono $I_{k+1\,k+2}$ vanno cambiati i segni: *il segno — va cambiato in +*.

essendo $I^{(0)}_{\lambda\lambda}$ i tre momenti principali d'inerzia baricentrali e M la massa totale. Nella seconda sommatoria vanno considerati equivalenti gli indici che differiscono di 3 o di multipli di 3. Pertanto si può scrivere:

[34] $$\boxed{I = \mathrm{grad}_2 f},$$

essendo la funzione f definita dalla relazione [33].

Si ha infatti dalla [33], derivando due volte:

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} = I^{(0)}_{ii}\, y_i + M y_i (y^2_{i+1} + y^2_{i+2}),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial y_k} = I^{(0)}_{ii}\, \delta_{ik} + M \delta_{ik} (y^2_{i+1} + y^2_{i+2}) + 2 M y_i (y_{i+1}\, \delta_{i+1\,k} + y_{i+2}\, \delta_{i+2\,k}).$$

Facendo $i = k$ si ottiene

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2_k} = I^{(0)}_{kk} + M (y^2_{k+1} + y^2_{k+2}) = \mathrm{I}_{kk},$$

e scrivendo $k + 1$ al posto di i e $k + 2$ al posto di k,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y_{k+1} \partial y_{k+2}} = 2 M y_{k+1}\, y_{k+2} = I_{k+1\,k+2}, \qquad \text{c. v. d.}$$

7. Esempio di campi tensoriali di seconda specie. — Consideriamo il campo tensoriale doppio di seconda specie che ha per funzione potenziale la [23].

Avendosi

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} = y_i,$$

le componenti cartesiane del cercato tensore doppio $\mathrm{Grad}_2 f$ sono

$$y_i\, y_k$$

cioè $\mathrm{Grad}_2 f$ è il prodotto del vettore $P - O$ per sè stesso (1).

In generale il tensore m-plo potenziale di seconda specie di funzione potenziale

$$f = \frac{1}{2} (P - O)^2.$$

cioè

$$\frac{1}{2} \mathrm{Grad}_m (P - O)^2,$$

(1) Loco cit., *Meccanica razionale*, pag. 331.

ha per componenti cartesiane

$$y_{i_1} y_{i_2} \cdots y_{i_m};$$

è quindi il prodotto di m vettori eguali a $P - O$ (1).

8. Invarianti ed eminvarianti lineari dei tensori potenziali. — Un vettore o tensore semplice non ha notoriamente invarianti lineari. Se un tensore doppio è potenziale di prima specie

$$\boldsymbol{T} = \operatorname{grad}_2 f$$

il suo invariante lineare è (2)

$$\sum_1^3{}_i T_{ii} = \sum_1^3{}_i \frac{\partial^2 f}{\partial y_i^2} = \Delta_2 f;$$

l'invariante lineare di un tensore doppio potenziale di prima specie è il laplaciano della funzione potenziale.

Se un tensore doppio $\boldsymbol{U}$ è potenziale di seconda specie

$$\boldsymbol{U} = \operatorname{Grad}_2 g,$$

il suo invariante lineare è

$$\sum_1^3{}_i U_{ii} = \sum_1^3{}_i \left(\frac{\partial g}{\partial y_i}\right)^2 = (\Delta_1 g)^2 = (\operatorname{grad} g)^2;$$

l'invariante lineare di un tensore doppio potenziale di seconda specie è il quadrato del gradiente della funzione potenziale.

Tensori tripli e in generale dispari. — *Gli eminvarianti lineari* (3) *dei tensori dispari potenziali, sia di prima che di seconda specie, sono nulli.* È questo un corollario della proposizione più generale che *se un tensore dispari è simmetrico sono nulli i suoi eminvarianti lineari.*

Basta rilevare che se $T_{ihli_1 \cdots i_{m-1} h_1 \cdots h_{m-1}}$ sono le componenti cartesiane di un tensore $(2m+1)$-plo i suoi eminvarianti lineari sono somme estese a tutti gli indici di termini del tipo

$$T_{ihli_1 \cdots i_{m-1} h_1 \cdots h_{m-1}} \varepsilon_{ihl} \delta_{i_1 h_1} \cdots \delta_{i_{m-1} h_{m-1}},$$

(1) Loco cit., *Meccanica razionale*, pag. 338.

(2) Loco cit., *Meccanica razionale*, pag. 334.

(3) Cisotti, *Invarianti ed eminvarianti lineari dei tensori.* « Rend. della Reale Acc. d'Italia », Serie VII, vol. I (1940–XVIII), pag. 339.

noti essendo i simboli (1). Ora lo scambio di uno qualunque dei tre indici i, h, l porta al cambiamento di segno di ε_{ihl}, mentre (per la simmetria del tensore) $T_{ihl\, i_1 \cdots i_{m-1}\, h_1 \cdots h_{m-1}}$ rimane immutato; come pure restano immutati gli altri fattori $\delta_{i_1 h_1}, \cdots, \delta_{i_{m-1} h_{m-1}}$, ne segue che i termini due a due si eliminano. D'altra parte un tensore potenziale è sempre simmetrico; da ciò la proposizione annunciata.

Tensori quadrupli e in generale pari. — Se il tensore potenziale di prima specie è quadruplo

$$\boldsymbol{T} = \mathrm{grad}_4 f,$$

i suoi tre invarianti lineari (2)

$$\sum_1^3{}_{ik} T_{ii\,kk} \quad , \quad \sum_1^3{}_{ik} T_{ik\,ik} \quad , \quad \sum_1^3{}_{ik} T_{ik\,ki}$$

vanno tutti a coincidere coll'espressione

$$\sum_1^3{}_{ik} \frac{\partial^4 f}{\partial y_i^2 \partial y_k^2} = \sum_1^3{}_{i} \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} \Delta_2 f = \mathrm{div\ grad\ (div\ grad}\ f) = \Delta_4 f .$$

Dunque: *gli invarianti lineari di un tensore quadruplo potenziale di prima specie coincidono collo scalare che si ottiene applicando l'operatore* Δ_4 *alla funzione potenziale.*

Se un tensore quadruplo $\boldsymbol{U}$ è potenziale di seconda specie

$$\boldsymbol{U} = \mathrm{Grad}_4 g,$$

i tre invarianti lineari

$$\sum_1^3{}_{ik} U_{ii\,kk} \quad , \quad \sum_1^3{}_{ik} U_{ik\,ik} \quad , \quad \sum_1^3{}_{ik} U_{ik\,ki}$$

coincidono con

$$\sum_1^3{}_{ik} \left(\frac{\partial g}{\partial y_i}\right)^2 \left(\frac{\partial g}{\partial y_k}\right)^2 = \left[\sum_1^3{}_{i} \left(\frac{\partial g}{\partial y_i}\right)^2\right]^2 = (\mathrm{grad}\ g)^4 = [(\Delta_1 g)^2]^2 .$$

Gli invarianti lineari di un tensore quadruplo potenziale di seconda specie coincidono colla quarta potenza del gradiente della funzione potenziale.

In generale, se il tensore potenziale di prima specie è $2m$-plo

$$\boldsymbol{T} = \mathrm{grad}_{2m} f,$$

---

(1) Loco ultimo cit.

(2) Loco ultimo cit.

gli

$$N = \sum_{0}^{m}{}_{k} \left[\binom{2m}{2k} - \frac{1}{2} \binom{2m}{2k-1} \right] \binom{2k}{k}$$

invarianti lineari (1) coincidono con

$$\sum_{1}^{3}{}_{i_1 \cdots i_m} \frac{\partial^{2m} f}{\partial y_{i_1}^2 \cdots \partial y_{i_m}^2} = \Delta_{2m} f .$$

Un tensore 2m–plo potenziale di prima specie ammette un unico invariante lineare: lo scalare che si ottiene applicando l'operatore Δ_{2m} alla funzione potenziale.

Se U è un tensore $2m$–plo potenziale di seconda specie, esso pure ammette coincidenti gli invarianti lineari e la loro comune espressione è

$$\sum_{1}^{3}{}_{i_1 \cdots i_m} \left(\frac{\partial g}{\partial y_{i_1}} \right)^2 \cdots \left(\frac{\partial g}{\partial y_{i_n}} \right)^2 = \left[\sum_{1}^{3}{}_{i} \left(\frac{\partial g}{\partial y_i} \right)^2 \right]^m = (\operatorname{grad} g)^{2m} .$$

L'invariante lineare di un tensore 2m–plo potenziale di seconda specie è la potenza 2m–ma del gradiente della funzione potenziale.

---

(1) Loco ultimo cit., pag. 338

Meccanica. — *Sul significato del principio di Hamilton.* Nota (1) di GIAN DOMENICO MATTIOLI e di ANTONIO CARRELLI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

1. Il problema del significato intrinseco del principio variazionale di HAMILTON o di principî equivalenti, e cioè delle equazioni dinamiche di LAGRANGE, è stato variamente trattato da diversi autori, e da diversi punti di vista. Riferendoci particolarmente al loro contenuto fisico, o in senso superiore, al loro contenuto filosofico bisogna principalmente tener presente che le equazioni di LAGRANGE sono le euleriane di un principio variazionale, e questa loro caratteristica investe non soltanto le soluzioni statiche ma anche le dinamiche propriamente dette, e poichè la loro genesi da un principio variazionale determina la « forma » di queste equazioni, una loro caratterizzazione su una base di principio deve discendere da questa circostanza, per quanto considerata da un punto analitico essa sia essenzialmente formale.

La stazionarietà dell'integrale di HAMILTON è sufficiente per dedurre le equazioni di LAGRANGE; inoltre da questa stazionarietà nel caso più generale deriva ancora il minimo dell'integrale lungo le soluzioni dinamiche per archi convenientemente limitati.

Per archi di traiettorie infinitesimi, e cioè riferendosi *ad un intorno* del punto considerato su di una traiettoria dinamica, si può procedere in modo del tutto diverso; si possono cioè formulare le equazioni dinamiche alla maniera di HERTZ, e cioè non facendo alcun riferimento ad espressioni integrali, ed enunciando una proprietà geometrica locale della traiettoria dinamica effettiva (2).

Però che la sola condizione di stazionarietà dell'integrale di HAMILTON, o di integrali equivalenti, sia sufficiente per ottenere le equazioni di LAGRANGE è un risultato di un'indagine relativamente recente, risultato che si oppone alle primitive affermazioni della necessaria esistenza di un minimo, problema che ha dato origine nel secolo XVIII ad una famosa polemica (3).

---

(1) Pervenuta all'Accademia il 22 agosto 1940–XVIII.

(2) Cfr. il trattato di LEVI CIVITA ed AMALDI, nel quale sono compiutamente esposti questi vari principî generali.

(3) PIERRE BRUNET, *Étude historique sur le principe de la moindre action.* Hermann Editeurs.

Su questo importante punto il Born [1] in una sua esposizione di carattere eminentemente divulgativo ha tenuto a dimostrare che per *intervalli di tempo finito* possono esistere moti che partendo da una determinata posizione iniziale si sviluppano fino ad una determinata condizione finale, e questi moti rendono *certamente non minimo* l'integrale di Hamilton corrispondente. Questo risultato è invocato dal Born appunto per eliminare dalle nostre concezioni un *principio di minimo* che inevitabilmente produce nella nostra mente l'idea dell'esistenza di una legge « economica » che presieda a tutte le manifestazioni naturali.

Questo principio viene fra gli altri ripudiato anche dal Mach [2] che identifica il principio di economia con un intervento di concezioni teologiche nel campo della meccanica, intervento da tenere accuratamente lontano. Però bisogna aver presente che tra un punto A di una traiettoria ed ogni altro punto che precede il suo fuoco cinetico B non si ha soltanto la stazionarietà dell'integrale di Hamilton, ma le traiettorie dinamiche minimizzano il suddetto integrale. In altre parole in queste condizioni (esistenza di fuochi cinetici) esigere la stazionarietà equivale ad esigere il minimo dell'espressione suddetta.

Da un punto di vista strettamente analitico una caratterizzazione formale delle equazioni di Lagrange è esposta da Birkhoff [3] nella sua trattazione sui sistemi dinamici. Secondo questo A. fintantochè queste equazioni sono considerate nell'intorno di un punto non di equilibrio non hanno nulla di speciale che le distingue da un generico sistema differenziale di uguale rango; una differenziazione tipica invece si presenta in vicinanza dei punti di equilibrio (soluzioni statiche), o delle orbite periodiche. In effetti gli esponenti caratteristici delle soluzioni statiche di tipo normale per le equazioni provenienti da un principio variazionale (lagrangiane o equivalenti hamiltoniane o più generalmente per le equazioni pfaffiane) sono reali o immaginari puri distinti; e si presentono sempre a coppie di segno opposto. La caratterizzazione nei riguardi delle orbite periodiche risulta previa riduzione al problema d'equilibrio. Nei puri riguardi analitici, e cioè nel processo d'integrazione, non v'è effettivamente altra particolarità che differenzi le equazioni dinamiche.

Deriva dalle considerazioni finora scelte che se è da scartare l'esistenza nel mondo fisico di una *finalità assoluta*, restringendosi a considerazioni più modeste può parlarsi di una *finalità convenientemente limitata nel tempo*.

---

[1] Born, *Cause, purpose, and economy in natural laws*. Royal Institution Weekly Meeting, 10 Feb. 1939.

[2] Mach, *La Meccanica*. Cap. IV.

[3] Birkhoff, *Dynamical Systems*. « Am. Math. Society Colloquium Publications », vol. IX, p. 55.

Evidentemente queste considerazioni possono estendersi; il moto dei corpi naturali e più generalmente i fenomeni fisici elettromagnetici, quantistici ecc., sono regolati da relazioni che nel caso generale si ricavano dalla stazionarietà di un'espressione dipendente da tutte le successive configurazioni nel tempo – integrale hamiltoniano generalizzato –: se l'intervallo di tempo è limitato opportunamente si potrà ottenere in più la minimizzazione delle suddette espressioni, e quindi si conclude che può considerarsi in un certo senso esistente una legge economica primordiale, ma con una validità temporale condizionata, per ogni particolare fenomeno, dal fenomeno stesso che si considera: in altre parole la Natura in ogni sua manifestazione vede innanzi a sè la via da seguire, ma non oltre un certo intervallo di tempo, caratteristico per ogni fenomeno studiato. Stabilito questo punto, nelle pagine che seguono vogliamo porre in evidenza varie conclusioni che possono trarsi da quanto abbiamo detto.

2. Le leggi del mondo fisico sono espresse da equazioni differenziali, e si ottiene da ciò che i dati iniziali del problema considerato determinano l'ulteriore andamento del fenomeno. A questo andamento corrisponde la stazionarietà di un certo integrale e nel caso generale anzi vi corrisponde un comportamento « economico » cioè l'esistenza di un minimo. Possiamo allora attribuire a queste circostanze il valore di *un principio naturale fondamentale* e ricercare se è possibile con un ragionamento logicamente sostenibile di ricavare le anzidette equazioni differenziali come conseguenze necessarie e sufficienti.

Il significato da attribuire a questa deduzione è ovviamente il seguente: il *finalismo condizionato* contenuto nel principio d'economia (o il significato non perfettamente definito contenuto in un principio di stazionarietà) sarebbe in sostanza equivalente al *determinismo locale* espresso dalle equazioni del moto.

Per sviluppare questo punto di vista bisogna cercare d'istituire un gruppo di principî dai quali possa logicamente dedursi che le equazioni dinamiche sono le lagrangiane. Noi tratteremo il caso di problemi dinamici e si potrà mostrare che la risolubilità del problema proposto è strettamente connessa con la considerazione di fenomeni non dissipativi. Ammetteremo come principi oltre quello fondamentale di stazionarietà (o più particolarmente di economia) il principio di conservazione dell'energia ed il principio di reversibilità del moto. Poniamo cioè i seguenti assiomi:

1° esiste una funzione $\mathfrak{L}(q\,\dot{q})$ delle coordinate e delle loro derivate rispetto al tempo tale che l'integrale

[1] $$\mathfrak{I} = \int_{t_1}^{t_2} \mathfrak{L}\, dt$$

è stazionario (o più particolarmente minimo) lungo ogni moto naturale (e per intervalli di tempo $t_1 - t_0$ convenientemente limitati). *Principio di stazionarietà* (*ed in generale di minimo*).

2° L'energia totale del sistema è costante, il che significa che le equazioni differenziali del moto devono ammettere un integrale primo della forma

[2] $$\mathcal{T} - U = h$$

dove $\mathcal{T}$ è una forma quadrata della velocità $\dot{q}$ e U una funzione delle coordinate (*Principio di conservazione*).

3° Ogni moto può effettuarsi anche in senso opposto. (*Principio di reversibilità*).

Dalla stazionarietà di [1] (o dal fatto che [1] è effettivamente minimo) risulta che le leggi differenziali devono essere del tipo

[3] $$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 .$$

Come conseguenza generale di queste relazioni (poichè $\mathcal{L}$ non contiene esplicitamente il tempo) esiste l'integrale primo

[4] $$\Sigma_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\dot{q} - \mathcal{L} = \text{cost} .$$

La $\mathcal{L}$ è generica, e quindi non può ritenersi a priori che per essa esitono altri integrali uniformi oltre [4], ma le [3] d'altra parte devono ammettere in base al principio di conservazione dell'energia l'integrale [2]: questi due integrali devono quindi coincidere. Deve cioè sussistere l'identità

[5] $$\Sigma_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - \mathcal{L} \equiv \mathcal{T} - U .$$

Posto

$$\mathcal{L} - U = \varphi$$

la [5] si scrive pure

[6] $$\Sigma_i \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - \varphi \equiv \mathcal{T}(q/\dot{q})$$

dove $\mathcal{T}$ per quello che è stato ammesso ha la forma

[7] $$\mathcal{T} = \frac{1}{2}\Sigma_{ij}\alpha_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j .$$

Derivando la [6] rispetto ad una delle $\dot{q}_j$ e tenendo conto della [7] si ottiene:

$$\Sigma_i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \dot{q}_i \partial q_j}\dot{q}_i \equiv \Sigma_i \alpha_{ij}\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}_j}$$

che dovendo essere identicamente soddisfatta porta alla conclusione che

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} = \alpha_{ij} = \text{funzione delle sole } q_i .$$

Integrando si ha

$$\varphi = \frac{1}{2} \Sigma_{ij} \alpha_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j + \Sigma_i \beta_i \dot{q}_j + \gamma$$

con β, γ anche funzioni delle sole q_i.

Si ha dunque

$$\mathfrak{L} = \varphi + U = \mathfrak{T} + U + \Sigma_i \beta_i \dot{q}_i + \gamma .$$

Ora per l'identità [5] deve aversi $\gamma = 0$; inoltre il terzo principio ammesso, e cioè il principio di reversibilità, porta alla conclusione che i termini lineari nelle velocità devono essere nulli, e cioè $\beta_i = 0$

In conclusione dai tre principî ammessi segue che le equazioni dinamiche sono le [3] dove

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{T} + U .$$

I tre principî ammessi dunque determinano conseguentemente le equazioni del moto.

3. Stabilito l'esistenza di questo principio variazionale, e generalmente di minimo, bisogna domandarsi se il principio variazionale esaurisce il suo significato nell'affermazione di quella condizione di stazionarietà, e il principio di minimo nell'affermazione « economica » che essa esprime. Ora l'avvicinamento fra Dinamica e Statica com'è ben noto [1] è assai suggestivo. Con questo avvicinamento già noto da molto tempo, il Born [2] ha potuto per esempio mostrare in una forma intuitiva che l'integrale di Hamilton in alcuni casi è certamente non minimo, ed in conseguenza quindi questa importante deduzione ci ha portato ad enunciare un principio economico di carattere limitato.

Noi ora riportiamo sotto forma più generale il ragionamento di Born, ragionamento che è passibile di estensione e che permetterà di ricavare ancora qualche deduzione nuova. Consideriamo dunque secondo questo A. una lamina elastica omogenea, fissata per un suo estremo O e sollecitata da un peso P all'altro suo estremo N (fig. 1). ci limitiamo a trattare il problema piano e cioè sia le configurazioni statiche che quelle di moto saranno supposte appartenere ad un piano verticale.

---

[1] A. E. H. Love, *Lehrbuch der Elastizität; deutsch von Timpe*, p. 459.

[2] Born, loc. cit.

Determiniamo le equazioni del moto, dalle quali si ricaveranno in particolare quelle di equilibrio: sia Ox orizzontale Oy verticale e diretta verso il basso, sia Θ l'angolo misurato nel verso positivo della rotazione che la verticale Oy forma con la tangente t nel generico punto M di coordinate x, y orientata nel verso $M \to O$. Siano F (forza di taglio) e φ (momento flettente) le reazioni che il tratto MN della lamina esercita nella sezione M sul tratto OM. Anche queste due grandezze sono ovviamente funzioni dell'arco $l = OM$, e a priori del tempo t. Conveniamo per semplicità di trascurare la massa della lamina ed allora la quantità di moto ed il momento della quantità di moto si riducono a quello della massa attaccata in N.

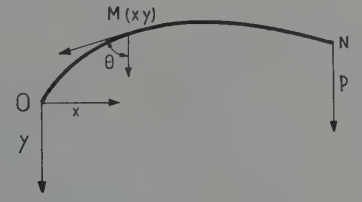


Fig. 1.

Per l'arco generico OM quantità di moto e momento sono identicamente nulli e quindi per i teoremi cardinali della dinamica devono essere nulli sia la somma delle forze esterne che la somma dei loro momenti rispetto al punto fisso O. Si ha cioè

$$[8] \qquad F - F_0 = 0 \qquad [9] \qquad \Gamma - \varphi_0 = 0$$

dove Γ è il momento rispetto ad O della reazione applicata in M,

$$[10] \qquad \Gamma = \varphi + xF_y - yF_x$$

e F_0 e φ_0 sono i valori di queste grandezze in O.

Dette x e y le coordinate di M si ha

$$dx = \operatorname{sen} \Theta \, dl \qquad dy = -\cos \Theta \, dl$$

da cui

$$[11] \qquad x = \int_0^l \operatorname{sen} \Theta \, (l, t) \, dl \qquad y = -\int_0^l \cos \Theta \, (l, t) \, dl \, .$$

La [8] afferma che F è costante lungo tutta la verga, e perciò uguale al suo valore in N, che si ricava scrivendo le equazioni del moto della massa $\frac{P}{g}$ collocata all'estremo N e che sono

$$[12] \qquad \frac{P}{g} \frac{d^2 x_N}{dt^2} = -F_x \; ; \; \frac{P}{g} \frac{d^2 y_N}{dt^2} = P - F_y \, .$$

Anche la [9] vale per ogni valore di l, per cui derivando rispetto a l e tenendo conto delle [10] e [11] nonchè delle

$$\frac{\partial F_x}{\partial l} = \frac{\partial F_y}{\partial l} = 0$$

che si ricavano dalla [8] si ottiene

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial l} = \frac{\partial \varphi}{\partial l} + F_y \operatorname{sen} \Theta + F_x \cos \Theta = 0 . \tag{13}$$

Il comportamento elastico della lamina è espresso com'è noto dalla relazione

$$\varphi = A \frac{\partial \Theta}{\partial l} \tag{14}$$

dove A è un parametro che dipende dalla forma e dal materiale di cui è fatta la lamina per cui le equazioni dinamiche del sistema sono la [12] e la [13] nella quale si introduce la [14]

$$- A \frac{\partial^2 \Theta}{\partial l^2} = F_x \cos \Theta + F_y \operatorname{sen} \Theta . \tag{15}$$

Se in particolare la lamina è in equilibrio, dalla [12] si ha $F_x = 0$ $F_y = P$ e la [15] diventa

$$A \frac{\partial^2 \Theta}{\partial l^2} = - P \operatorname{sen} \Theta \tag{16}$$

che ponendo

$$\frac{P}{A} = \frac{g}{a}$$

diventa

$$\frac{d^2 \Theta}{dl^2} = - \frac{g}{a} \operatorname{sen} \Theta . \tag{17}$$

Quest'equazione coincide formalmente con l'equazione del moto del pendolo di lunghezza a solo che si sostituisca alla variabile arco l il tempo t. All'estremo libero N della lamina evidentemente è $\varphi = 0$, e cioè per la [11] $\frac{d\Theta}{dl} = 0$. Nel moto pendolare associato a questo particolare problema dinamico la corrispondente relazione (ottenuta con la trasformazione $\Theta \to s$, $l \to t$) $\frac{ds}{dt} = 0$ è verificata nei punti d'arresto del moto oscillatorio; essendo la [16] indipendente dal verso in cui si misura l'arco l, il diagramma $\Theta = \Theta(l)$ con l contato dall'estremo libero N, diagramma che rappresenta la configurazione d'equilibrio dell'elastica, ed il diagramma $s = s(t)$ del moto pendolare oscillatorio, con t contato da un istante d'arresto, e con un opportuna scelta per s, coincidono.

Nella fig. 2 sono riportate alcune di queste curve. La figura è ripresa dal lavoro citato di Born. Le curve rappresentano quindi ugualmente sia le configurazioni d'equilibrio dell'elastica cimentata con una forza lungo y all'estremo, sia moti pendolari oscillatorî. È da osservare che queste curve ammettono un inviluppo che s'inizia in un punto angoloso dell'asse delle ascisse l, oppure t, di ascissa λ. Ed inoltre è da osservare che per i punti del piano a sinistra dell'inviluppo passa una sola curva della famiglia, e cioè, rimanendo nel caso l'elastica, se la sua lunghezza ed il suo angolo d'incastro

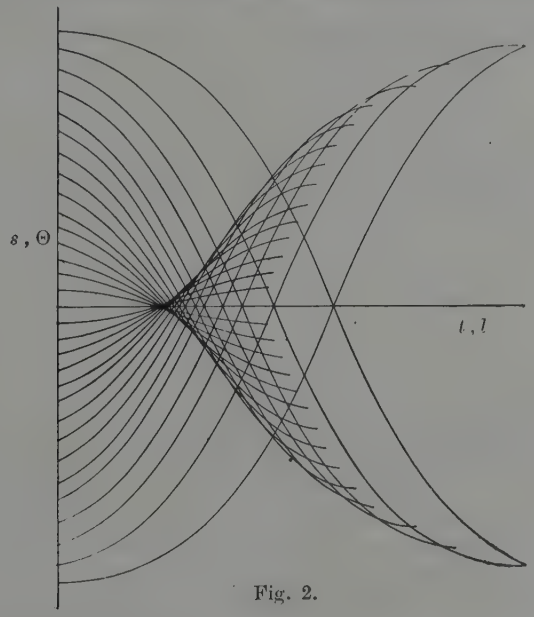


Fig. 2.

in O sono tali che il punto figurativo capiti a sinistra dell'inviluppo vi è una sola conformazione d'equilibrio. Invece se la sua lunghezza ed il suo angolo d'incastro in O sono tali che il punto figurativo capiti a destra dell'inviluppo, ma non su di esso per questi punti passano tre curve; e cioè quando l'elastica ha una lunghezza maggiore di quella data lunghezza λ per un dato valore dell'angolo d'incastro sono possibili tre distinte posizioni d'equilibrio. Di queste tre curve, procedendo nel verso delle ascisse, una ha già toccato l'inviluppo, mentre ciò non è ancora avvenuto per le altre due. Per interpretare queste circostanze è da osservare che l'equazione [16] è l'equazione di Eulero del problema variazionale relativo all'integrale

$$[18] \qquad \mathfrak{I} = \int_0^{l_1} \left\{ \frac{1}{2} A \left(\frac{d\Theta}{dl} \right)^2 + P \cos \Theta \right\} dl$$

e questo integrale rappresenta l'energia totale del sistema che è formato dalla lamina elastica e dal peso P. Infatti [18] è la somma di due termini, di cui il primo esprime il potenziale elastico della lamina, il secondo, $\int_0^{l_1} P \cos\Theta d\Theta$ – ricordando che per le [11] l'espressione $-\int_0^{l_1} \cos\Theta\, dl$, se l_1 è la lunghezza della lamina, rappresenta l'ordinata dell'estremo N, e cioè l'ordinata di P – è l'energia potenziale della forza gravitazionale.

La variazione dell'integrale [18] tenendo fisso l'estremo 0, e cioè tenendo l'incastro fisso, per ogni curva estremale e cioè per ogni soluzione dell'equazione [16], è data da

$$\delta \mathfrak{J} = -A\left(\frac{d\Theta}{dl}\right)_{l=0} \delta\Theta;$$

come si vede nella figura riportata le configurazioni d'equilibrio soddisfano tutte alla condizione

$$\frac{d\Theta}{dl} = 0$$

nel punto $l = 0$, e cioè in altre parole queste curve sono *trasversali* all'asse delle ordinate.

In base ad un teorema del calcolo delle variazioni [1] si può allora affermare che su ognuna di esse l'integrale [18] non è solo stazionario ma anche *minimo* purchè l'arco considerato compreso fra le ascisse 0 e l, non abbia toccato l'inviluppo dell'estremali considerate. Se l'arco cui [18] si riferisce ha invece già toccato in un suo punto interno l'inviluppo allora il corrispondente $\mathfrak{J}$ non è minimo, ma soltanto stazionario. Giova ripetere che relativamente al problema considerato dell'elastica le variazioni qui considerate corrispondono ad una variazione arbitraria della configurazione della lamina, rimanendo fisso l'incastro nel punto O.

Ma come già si è detto, è molto importante l'avvicinamento fra Statica e Dinamica: il problema dell'elastica considerato ha il suo analogo in Dinamica nel moto pendolare. Ora facendo la sostituzione $\Theta \to s, l \to t$ si ha che l'integrale [18] diventa quello di HAMILTON; e questo integrale si comporta nei riguardi del minimo lungo i vari archi di curve come l'energia totale della lamina elastica considerata.

Questo risultato può evidentemente generalizzarsi se le forze lungo l'asse y sono variabili a secondo del punto dell'arco; l'equazione d'equilibrio sarà analogamente

[16'] $$A\frac{d^2\Theta}{dl^2} = -F_y(l)\,\mathrm{sen}\,\Theta.$$

---

[1] HADAMARD, *Calcul des variations*, p. 424.

Supponiamo che l'espressione $F(l)$ sen Θ si possa considerare funzione di Θ, e che inoltre sia del tipo

$$F_y(l) \operatorname{sen} \Theta = \frac{\partial W}{\partial \Theta}.$$

Calcoliamo in questo caso quale deve essere l'equivalente dell'integrale [18]. Vi sarà analogamente un termine dipendente dell'energia elastica, termine che ha come espressione

$$\int_0^{l_1} \frac{1}{2} A \left(\frac{d\Theta}{dl}\right)^2 dl,$$

ed inoltre un termine che è dato dall'energia potenziale delle forze che deformano l'elastica: per calcolare questo termine di $\mathfrak{Z}$ nel caso più generale bisogna tener presente che se un elemento dl dell'elastica ruota di un piccolo angolo $d\Theta$ lo spostamento del punto d'applicazione dello sforzo F è dato da $dl\,d\Theta$ in una direzione che fa l'angolo $\frac{\pi}{2} - \Theta$ con la direzione dello sforzo, e quindi il lavoro elementare per questa energia di posizione è dato da

$$F \operatorname{sen} \Theta \, dl \, d\Theta .$$

L'energia potenziale totale per effetto di questo spostamento per tutta la verga da 0 a l_1 e dal valore 0 al valore Θ dell'angolo è dato da

$$\int_0^{l_1} dl \int_0^{\Theta} d\Theta \, F \operatorname{sen} \Theta ,$$

e poichè si è ammesso che F sen Θ sia la derivata di una funzione $W(\Theta)$ di Θ si può dire che l'energia dell'elastica deformata è data da

$$\int_0^{l} \frac{1}{2} \left\{ A \left(\frac{d\Theta}{dl}\right)^2 + W(\Theta) \right\} dl .$$

Nel caso che si considera si può dire dal punto di vista dinamico che [16] in cui P sen Θ è sostituito da $\frac{\partial W}{\partial s}$ si trasforma nella equazione

$$A \frac{d^2 s}{dt^2} = - \frac{\partial W}{\partial s}$$

e l'integrale di Hamilton corrispondente è perfettamente analogo all'espressione soprascritta.

Si può dunque dire che in tutti i moti ad un solo grado di libertà se le traiettorie sono ortogonali all'asse s, (e cioè se si parte da velocità nulla) l'integrale corrispondente di HAMILTON è minimo fino a che l'arco non ha toccato l'inviluppo.

4. Quest'analogia fra Dinamica e Statica può servire a stabilire un teorema di carattere generale. Riprendiamo in effetti il problema dinamico: sia l_1 la lunghezza della lamina, si ricava allora dalle [11]

$$[19] \qquad \dot{x}_N = \int_0^{l_1} \frac{\partial \Theta}{\partial t} \cos \Theta \, dl \qquad \dot{y}_N = \int_0^{l_1} \frac{\partial \Theta}{\partial t} \operatorname{sen} \Theta \, dl .$$

Moltiplichiamo le [12] ordinatamente per $\dot{x}_N$ e $\dot{y}_N$, la [15] per $\frac{\partial \Theta}{\partial t}$, ed integriamo la [15] da 0 a l_1,: sommando membro a membro queste tre equazioni, e tenendo conto delle [19] si ottiene:

$$[20] \qquad \frac{P}{2g} \frac{d}{dt} (\dot{x}_N^2 + \dot{y}_N^2) - \int_0^{l_1} \left\{ A \frac{\partial^2 \Theta}{\partial l^2} \frac{\partial \Theta}{\partial t} + P \frac{\partial \Theta}{\partial t} \operatorname{sen} \Theta \right\} dl = 0 .$$

Integrando per parti il primo termine dell'integrale si ottiene

$$\int_0^{l_1} A \frac{\partial^2 \Theta}{\partial l^2} \frac{\partial \Theta}{\partial t} \, dl = A \frac{\partial \Theta}{\partial l} \frac{\partial \Theta}{\partial t} \Big|_0^{l_1} - \int_0^{l_1} \frac{A}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial l} \right)^2 dl$$

per cui [20] può scriversi

$$\frac{P}{2g} \frac{d}{dt} (\dot{x}_N^2 + \dot{y}_N^2) + \int_0^{l_1} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{2} A \left(\frac{\partial \Theta}{\partial l} \right)^2 + P \cos \Theta \right\} dl = A \frac{\partial \Theta}{\partial l} \frac{\partial \Theta}{\partial t} \Big|_0^{l_1}$$

od anche osservando che $\frac{\partial}{\partial t}$ può portarsi fuori dell'integrale, poichè l e t sono variabili indipendenti, e che fuori diventa $\frac{d}{dt}$,

$$[21] \qquad \frac{d}{dt} \left[\frac{P}{2g} (\dot{x}_N^2 + \dot{y}_N^2) + \int_0^{l_1} \left\{ \frac{1}{2} A \left(\frac{\partial \Theta}{\partial l} \right)^2 + P \cos \Theta \right\} dl \right] = A \frac{\partial \Theta}{\partial l} \frac{\partial \Theta}{\partial t} \Big|_0^{l_1} .$$

Il secondo membro di questa equazione è nullo perchè nel punto d'incastro ($l = 0$) l'angolo Θ è costante, e quindi $\frac{\partial \Theta}{\partial t} = 0$; allo estremo libero ($l = l_1$) in ogni istante $\frac{\partial \Theta}{\partial l} = 0$ in base alla [14] in quanto che il momento flettente φ è ivi nullo.

L'equazione [21] integrata dà quindi

$$[22] \qquad \frac{P}{2g}(\dot{x}_N^2 + \dot{y}_N^2) + \int_0^{l_1} \left\{ \frac{1}{2} A \left(\frac{\partial \Theta}{\partial t} \right)^2 + P \cos \Theta \right\} dl = h$$

equazione che poteva anche scriversi direttamente in quanto che esprime il principio dell'energia. Stabilita la relazione [22] consideriamo il seguente problema di moto: nella configurazione d'equilibrio C_0 la massa $\frac{P}{g}$ sia lanciata comunque con una forza viva $\mathcal{T}_0$ sufficientemente piccola: in ogni istante varrà l'integrale [22] e cioè se indichiamo con $\mathcal{J}_{c_0}$ l'integrale [18] nella configurazione d'equilibrio iniziale C_0 e con $\mathcal{J}_c$ quello relativo ad una qualunque configurazione della lamina al generico tempo t si avrà

$$\mathcal{J}_{c_0} + \mathcal{T}_0 = h \qquad \text{per } t = 0$$

$$\mathcal{J}_c + \mathcal{T} = h \qquad \text{per } t \text{ qualunque}$$

da cui sottraendo

$$[23] \qquad \mathcal{J}_c - \mathcal{J}_{c_0} = \mathcal{T}_0 - \mathcal{T}.$$

Supponiamo che l'integrale $\mathcal{J}$ sia minimo per C_0, allora per un teorema di OSGOOD [1] alle curve C variate di C_0 che escono da un certo intorno R di C_0 corrisponde una differenza $\mathcal{J}_c - \mathcal{J}_{c_0}$ che è *maggiore* di un numero μ. La forza viva $\mathcal{T}_0$ impressa inizialmente sia $< \mu$, allora la differenza $\mathcal{T}_0 - \mathcal{T}$ (> 0 per l'ipotesi che $\mathcal{J}_c$ sia minimo in C_0) non è mai $> \mu$, per cui dal sussistere della [23] si ricava che la configurazione C della lamina per t qualunque non esce all'esterno di R. La configurazione C_0 per la quale $\mathcal{J}$ è minimo è dunque *una configurazione d'equilibrio stabile*.

È da notare che alla stessa conclusione si arriverebbe tenendo anche conto dell'inerzia della lamina, oltre che del peso che la sollecita, perchè la dimostrazione riposa sull'esistenza di un'equazione del tipo [22], nel primo membro della quale è aggiunto all'integrale che si considera un termine essenzialmente positivo che rappresenta la forza viva del sistema.

5. Da quanto precede risulta dunque che il significato del minimo dell'integrale [18], nei casi appunto nei quali tale minimo esiste, è « dinamico » e cioè è connesso con la stabilità della configurazione d'equilibrio, stabilità che è evidentemente connessa con problemi dinamici. Questa constatazione può anche mettersi sotto altra forma, e cioè si può dire che l'interpretazione della esistenza di un minimo risulta dalla estensione del pro-

[1] Cfr. HADAMARD, loc. cit., pag. 482.

blema analitico alla considerazione di un'altra variabile, *il tempo*, oltre le variabili posizionali relative al problema statico. Questa estensione è effettivamente realizzata, come si è visto, nel quadro della meccanica naturale.

Da un punto di vista formale l'estensione è sempre possibile; riferendosi non più ad un problema statico ma ad un problema dinamico l'introduzione di una nuova variabile è sempre attuabile, ma evidentemente è necessario che con l'introduzione della nuova variabile esista sempre un integrale primo del tipo [22] anche generalizzato nel senso sopradetto. In tali condizioni continua allora a sussistere la conclusione che l'esistenza del minimo di un'espressione del tipo [18] equivale alla stabilità delle corrispondenti traiettorie *nella famiglia delle curve variate relative a successivi valori della nuova variabile introdotta e crescente indefinitamente.*

Si consideri per fissare le idee il problema dinamico associato al problema dell'equilibrio dell'elastica. Con l'eliminazione di F_x e F_y fra le [12] e [15] e tenendo conto delle [11] si ottiene l'equazione

$$[24] \quad A\frac{\partial^2\Theta}{\partial l^2} + P\,\mathrm{sen}\,\Theta = \frac{P}{g}\left[\cos\Theta\int_0^{l_1}\frac{\partial^2\,\mathrm{sen}\,\Theta}{\partial t^2}\,dl + \mathrm{sen}\,\Theta\int_0^{l_1}\frac{\partial^2\cos\Theta}{\partial t^2}\,dl\right]$$

le cui soluzioni $\Theta = \Theta(l,t)$ determinate con la condizione $\Theta = \Theta_0 = \text{cost.}$ per $l = 0$ (incastro in O) rappresentano i moti dell'elastica. Per quanto si è visto precedentemente nell'intorno della configurazione di minimo dell'espressione [18] il moto è infinitesimo (supposto tale all'inizio).

Nell'interpretazione dinamica (e cioè moto pendolare) da quanto ora è stato detto facendo le sostituzioni $s \to \Theta$, $l \to t$, e indicando con τ la nuova variabile introdotta al posto di t nell'equazione [24], si ottiene una equazione che si può così interpretare: essa risulta dalla lagrangiana del moto « naturale »

$$A\frac{d^2 s}{dt^2} + P\,\mathrm{sen}\,s = 0$$

considerando la s come $s(t,\tau)$, e aggiungendo al secondo membro un termine che contiene fino alla derivata seconda di Θ rapporto alla τ e tale che dall'equazione così modificata segue un integrale del tipo [22].

Quanto precede può essere schematizzato nel seguente modo: sia $\mathfrak{L}(q \mid \dot{q} \mid t)$ il potenziale cinetico di un problema dinamico. Le equazioni lagrangiane del *moto naturale* corrispondono, nel caso più generale per il quale anche gli estremi sono variati, al seguente principio variazionale

$$[25] \quad \delta\int_{t_0}^{t_1}\mathfrak{L}\,dt = \Sigma_i\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\dot{q}_i}\,\delta q_i\Big|_{t_0}^{t_1}.$$

Immaginiamo che le q_i oltre che dal tempo t dipendano anche da un ulteriore variabile τ; nella [25] compare un termine complementare in cui per analogia a quanto è stato finora detto compariranno derivate seconde: nel caso generale noi porremo come equazioni le seguenti nelle quali appunto nel secondo membro si hanno derivate seconde rispetto a τ e precisamente

$$[26] \qquad \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_i} - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial \tau}\frac{\partial \mathfrak{L}^*}{\partial q_i'} - \frac{\partial \mathfrak{L}^*}{\partial q_i}$$

dove si conviene di denotare col punto le derivate parziali $\frac{\partial q}{\partial t} = \dot{q}_i$ e con « apice » le derivate parziali rispetto a τ: $\frac{\partial q}{\partial \tau} = q_i'$. Per analogia con $\mathfrak{L}$, per $\mathfrak{L}^*$ è presa una funzione $\mathfrak{L}^*(q \mid q')$ per ora non ulteriormente specificata.

Le [26] formano un sistema di equazioni a *derivate parziali* i cui integrali $q_i = q_i(t, \tau)$ sono determinati per esempio assegnando $q_i = q_i^0(t)$ e $q_i' = \varphi(t)$ per $\tau = 0$. Se poniamo come condizione per la $\mathfrak{L}^*$ che le $\frac{\partial \mathfrak{L}^*}{\partial q_i}$ si annullino identicamente assieme con le q_i', allora gli integrali di [26] *indipendenti da* τ sono soluzioni dinamiche del moto naturale.

Assumendo per $q_i = q_i^0(t)$ una siffatta soluzione, che diremo C_0, e $(q_i')_{\tau=0}$ uguale ad una funzione arbitraria di t, il corrispondente integrale $q_i = q_i(t, \tau)$ di [26] rappresenta per i successivi valori di τ una famiglia di curve C nella varietà delle variabili q_i, t che contiene la traiettoria dinamica naturale. La generalizzazione [26] delle equazioni di Lagrange corrisponde in sostanza alla definizione di un modo per associare ad una traiettoria naturale dinamica una famiglia di *curve variate*, ciascuna corrispondente ad un valore dell'ulteriore parametro τ.

Stabilito questo punto si deve passare a stabilire, per l'estensione dell'analogia, l'esistenza per le [26] di un integrale del tipo [22] e cioè l'integrale dell'energia. Moltiplichiamo a tal fine ognuna delle [26] per q_i' sommiamo rispetto alle i, integriamo rispetto a t da t_0 a t_1 e per τ costante, cioè lungo una generica C; otteniamo

$$[27] \qquad \int_{t_0}^{t_1} \Sigma_i \left\{ q_i' \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_i} q_i' \right\} dt = \int_{t_0}^{t_1} \Sigma_i \left\{ q_i' \frac{\partial}{\partial \tau}\frac{\partial \mathfrak{L}^*}{\partial q_i'} - \frac{\partial \mathfrak{L}^*}{\partial q_i} q_i' \right\} dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \Sigma_i \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial \mathfrak{L}^*}{\partial q_j'} q_i' - \mathfrak{L}^* \right) dt,$$

e l'ultima espressione si ottiene in base all'osservazione che la $\mathfrak{L}^*$ non contiene esplicitamente la τ. Integrando per parti il primo termine del 1° membro si ha

$$\int_{t_0}^{t_1} \Sigma_i q_i' \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_i} dt = \Sigma_i q_i' \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_i}\Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \Sigma_i \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_i}\frac{\partial^2 q_i}{\partial t \partial \tau} dt$$

e perciò il primo membro della [27] si può scrivere

$$\Sigma_i q_i' \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_i} \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \tau} dt .$$

In questa espressione la derivata parziale $\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \tau}$ è calcolata pensando la $\mathfrak{L}$ funzione delle q e $\dot{q}_i$ e queste anche funzione di τ, e ciò vale anche per il 2° membro della [27].

La [27] fatta dunque questa integrazione per parti diventa

$$[28] \qquad \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\mathfrak{L} + \Sigma_i \left(\frac{\partial \mathfrak{L}^*}{\partial q_i'} q_i' - \mathfrak{L}^* \right) \right] dt = \Sigma q_i' \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_i} \Big|_{t_0}^{t_1} .$$

Supponiamo che si possa determinare una soluzione di [26] contenente per $\tau = 0$ una traiettoria dinamica C_0, in modo che $\Sigma_i q_i' \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_i}$ s'annulli identicamente rispetto a τ, sia in t_0 che in t_1. Noi non vogliamo qui ricercare dal punto di vista analitico se questo sia sempre possibile, o se eventualmente occorre condizionare la funzione $\mathfrak{L}^*$, qui basta trarre la conseguenza dell'ipotesi ammessa. Allora annullandosi il secondo membro [28] e potendo portare fuori il segno d'integrale la derivata rispetto a τ, si ricava che

$$[29] \qquad \int_{t_0}^{t_1} \left[\mathfrak{L} + \Sigma_i \left(\frac{\partial \mathfrak{L}^*}{\Sigma q_i'} q_i' - \mathfrak{L}^* \right) \right] dt = h .$$

Se inoltre la $\mathfrak{L}^*$ è una funzione tale che la Σ_i in [29] sia ovunque positiva (ad esempio la $\mathfrak{L}^*$ sia una forma quadrata definita positiva delle q_i') allora si ritorna nelle condizioni del numero precedente e conseguentemente valgono ancora le stesse conclusioni: facendo quindi variare l'integrale [25] tra la curva C_0 ed una qualunque curva C d'equazione $q_i = q_i(t, \tau)$ con τ parametro costante, lungo questa curva che si ottiene facendo variare t, si deve assumere

$$\delta q_i = q_i' \delta \tau$$

e ciò sia per t_1 che per t_0. Da ciò si ricava, nell'ipotesi

$$\Sigma_i q' \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_i} = 0 \quad \text{per} \quad t = t_0, t_1$$

che abbiamo ammessa per ottenere la [29], che il primo membro della [25] è nullo, e cioè è nulla la variazione prima dell'integrale di Hamilton. Procedendo ora allo stesso modo del numero precedente si conclude che quando questo integrale fra t_0 e t_1 è minimo per C_0, ciò significa che la soluzione dinamica naturale C_0 è *stabile* nella famiglia delle curve C.

Poichè le curve C rimangono vicine alla C_0 in tutto l'intervallo (t_0, t_1) nel quale l'integrale di Hamilton è minimo, l'arco corrispondente di C_0 può in un certo senso considerarsi come l'asse di un tubo elementare di curve C, e, a meno di piccole deviazioni limitate quanto si vuole, le rappresenta tutte. Questa circostanza può in linea concettuale essere addotta a giustificare la sufficienza di una sola variabile, *il tempo*, per la descrizione dei fenomeni dinamici, nel caso del minimo l'integrale di Hamilton; un'ulteriore variabile, come la τ che abbiamo considerata, introduce per intervalli di tempo generalmente limitati in « indeterminazione » che può essere contenuta in limiti prefissati.

Astronomia. — *I problemi fondamentali della Cosmogonia e la legge di Newton.* Nota VII[1] di GIUSEPPE ARMELLINI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

1. L'EVOLUZIONE DEI SISTEMI STELLARI. — Proseguendo le nostre ricerche cosmogoniche [2], applicheremo ora la nostra teoria allo studio dell'evoluzione dei Sistemi Stellari, od in altre parole della Galassia e delle grandi nebule extragalattiche, che sono appunto costituite dalla riunione di miliardi di stelle. Comincieremo con l'occuparci di un problema di fondamentale importanza cosmogonica e cioè quelle della loro progressiva condensazione; fenomeno che – come ora vedremo – riesce assai difficilmente spiegabile con la semplice legge newtoniana, mentre invece risulta una semplice conseguenza meccanica della nostra teoria.

A tale scopo consideriamo un sistema di n punti materiali, $S_1\, S_2 \cdots S_n$; prendiamo per origine il suo baricentro G e facciamo partire da G tre assi ortogonali di direzione invariabile. Indichiamo rispettivamente con $m_i\, x_i\, y_i\, z_i\, X_i\, Y_i\, Z_i$ la massa del punto S_i, le sue coordinate e le componenti della forza agente su di esso, supponendo per generalità che $X_i\, Y_i\, Z_i$ possano dipendere sia dalle posizioni che dalle velocità. Chiamiamo poi con T e W *l'energia cinetica* ed il *viriale* del Sistema, dati rispettivamente dalle note formole:

$$[1] \qquad T = \frac{1}{2} \Sigma m_i \left[\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2 \right]$$

$$[2] \qquad W = \Sigma \left(X_i x_i + Y_i y_i + Z_i z_i\right)$$

dove t indica sempre il tempo.

Come insegna la Meccanica, se le coordinate e le velocità si mantengono sempre finite e non tendono all'infinito con t, si ha:

$$[3] \qquad \lim_{\tau = \infty} (2\,\overline{T} + \overline{W}) = 0$$

---

[1] Pervenuta all'Accademia il 28 agosto 1940–XVIII.

[2] Le precedenti Note sono pubblicate in « Rend. Lincei », 1937 sem. II; 1938 sem. I; 1938 sem. II; 1939 sem. I; e « Rend. Acc. d'Italia » 1940 fasc. 6 e fasc, 12.

dove $\overline{T}$ e $\overline{W}$ indicano i valori medi che T e W assumono in un intervallo di tempo τ qualsiasi.

Supponiamo ora che i punti $S_1\, S_2 \cdots S_n$ si attirino tra loro con la legge di NEWTON. Chiamando con f il coefficiente attrattivo, con r_{ik} la distanza di S_i da S_k e con P l'energia potenziale del sistema, avremo per note formole di Meccanica:

$$[4] \qquad W = P = -\frac{f}{2} \sum_i \sum_k \frac{m_i m_k}{r_{ik}}$$

mentre – se supponiamo che non vi siano urti materiali tra i punti – l'integrale dell'energia ci dà:

$$[5] \qquad T + P = h = \text{costante}.$$

In conseguenza, per intervalli di tempo sufficientemente lunghi, si ha dalla [3]:

$$[6] \qquad \overline{P} = -\frac{f}{2} \sum_i \sum_k \frac{m_i m_k}{r_{ik}} = 2\,h = \text{costante}.$$

Ovviamente, se invece vi sono urti, $T + P$ diminuisce bruscamente dell'energia perduta in ogni urto.

2. Supponiamo ora che i punti $S_1\, S_2 \cdots S_n$ rappresentino le stelle di un sistema sidereo.

Se il movimento è periodico o si trova in uno stato di regime, ovviamente non potrà avvenire col tempo nessuna progressiva condensazione del sistema. Ma anche nel caso generale, in cui il movimento non è periodico nè di regime, tale condensazione progressiva non potrà aver luogo – purchè non vi siano urti materiali – giacchè la [6] mostra che le distanze reciproche r_{ik} restano, in media, costanti. Ora, nei sistemi stellari, gli urti materiali tra le stelle sono estremamente rari ed anzi assolutamente eccezionali. Possiamo quindi concludere che, ammettendo la legge di NEWTON nella sua forma classica, i sistemi stellari *non* tendono a condensarsi. Inutile aggiungere che tale conclusione rimane inalterata per il passaggio di due stelle a grande – ed anche estrema – vicinanza tra loro, (purchè non vi sia urto materiale), giacchè il teorema delle forze vive continua sempre a sussistere [1].

---

[1] Se invece i punti S rappresentano le molecole di un gas, racchiuso in un recipiente, l'attrazione reciproca tra le molecole è trascurabile, mentre invece sono frequentissimi gli urti delle molecole tra loro e con le pareti del recipiente stesso. Ma tali urti, dovendo – secondo la fisica – supporsi le molecole come perfettamente elastiche, non consumano energia, onde la [5] seguita a sussistere. Però, in tal caso, essendo trascurabile l'attrazione newtoniana, essa si riduce semplice-

3. Esaminiamo invece che cosa accade quando la legge classica di NEWTON venga completata con l'aggiunta del nostro *termine cosmogonico*. Supponiamo cioè che la forza attrattiva F_{ik} tra due punti S_i ed S_k sia data da:

$$[7] \qquad F_{ik} = -f \frac{m_i m_k}{r_{ik}^2} \left[1 + \varepsilon \frac{dr_{ik}}{dt}\right]$$

dove ε indica un numero positivo ed estremamente piccolo, che è appunto il nostro coefficiente cosmogonico.

A tale scopo, scriviamo le equazioni del moto del punto generico S_i sotto l'attrazione delle altre stelle. Avremo facilmente:

$$[8] \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2 x_i}{dt^2} = f \sum_k \dfrac{m_k (x_k - x_i)}{r_{ik}^3} \left(1 + \varepsilon \dfrac{dr_{ik}}{dt}\right) \\ \dfrac{d^2 y_i}{dt^2} = f \sum_k \dfrac{m_k (y_k - y_i)}{r_{ik}^3} \left(1 + \varepsilon \dfrac{dr_{ik}}{dt}\right) \\ \dfrac{d^2 z_i}{dt^2} = f \sum_k \dfrac{m_k (z_k - z_i)}{r_{ik}^3} \left(1 + \varepsilon \dfrac{dr_{ik}}{dt}\right). \end{cases}$$

Moltiplicando le [8] per $m_i \dfrac{dx_i}{dt}$, $m_i \dfrac{dy_i}{dt}$, $m_i \dfrac{dz_i}{dt}$ e sommando rispetto all'indice i, otteniamo:

$$[9] \qquad \sum_i m_i \left(\frac{dx_i}{dt}\frac{d^2 x_i}{dt^2} + \frac{dy_i}{dt}\frac{d^2 y_i}{dt^2} + \frac{dz_i}{dt}\frac{d^2 z_i}{dt^2}\right) =$$

$$= f \sum_i \sum_k \frac{m_i m_k}{r_{ik}^3} \left\{ (x_k - x_i) \frac{dx_i}{dt} + (y_k - y_i) \frac{dy_i}{dt} + (z_k - z_i) \frac{dz_i}{dt} \right\} \left\{ 1 + \varepsilon \frac{dr_{ik}}{dt} \right\} =$$

$$= \frac{f}{2} \sum_i \sum_k \frac{m_i m_k}{r_{ik}^3} \left\{ (x_k - x_i) \left(\frac{dx_i}{dt} - \frac{dx_k}{dt}\right) + (y_k - y_i) \left(\frac{dy_i}{dt} - \frac{dy_k}{dt}\right) + \right.$$

$$\left. + (z_k - z_i) \left(\frac{dz_i}{dt} - \frac{dz_k}{dt}\right) \right\} \left\{ 1 + \varepsilon \frac{dr_{ik}}{dt} \right\}.$$

---

mente alla formola: T = costante. D'altra parte il viriale W si calcola facilmente tenendo conto che le uniche forze agenti sono quelle derivanti dagli urti delle molecole tra loro e con le pareti del recipiente. Nella sommatoria [2], le prime scompaiono – essendo a due a due eguali e di segno contrario – e si ha: $W = -3\,pv$, dove p e v indicano la pressione ed il volume occupato dal gas. La [3] dà quindi:

$$T = \frac{3}{2} pv$$

vale a dire, essendo l'energia cinetica proporzionale alla temperatura assoluta del gas, se ne ricava la legge fondamentale dei gas perfetti.

Adottando la nostra legge, poichè l'attrazione reciproca delle molecole gassose è trascurabile, è evidente che essa resterà ancora tale anche con l'introduzione del termine cosmogonico. In altre parole, *la teoria cinetica dei gas rimane inalterata, completando la legge di Newton col termine cosmogonico.*

Ma si ha ovviamente:

[10] $$r_{ik}^2 = (x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2 + (z_k - z_i)^2$$

onde la [9] diviene:

[11] $$\frac{dT}{dt} = -\frac{f}{2} \sum_i \sum_k \frac{m_i m_k}{r_{ik}^2} \frac{dr_{ik}}{dt} \left(1 + \varepsilon \frac{dr_{ik}}{dt}\right) =$$

$$= -\frac{dP}{dt} - \frac{\varepsilon f}{2} \sum_i \sum_k m_i m_k \left(\frac{1}{r_{ik}} \frac{dr_{ik}}{dt}\right)^2 .$$

Poniamo:

[12] $$H(t) = -\frac{\varepsilon f}{2} \int \sum_i \sum_k m_i m_k \left(\frac{1}{r_{ik}} \frac{dr_{ik}}{dt}\right)^2 dt + \text{costante} .$$

Avremo dalla [11]

[13] $$T + P = H(t)$$

che sostituisce l'equazione dell'energia [5], nel caso in cui si tenga conto del termine cosmogonico.

Poichè H è certamente una funzione sempre decrescente del tempo – eccettuato il caso in cui tutte le r_{ik} si mantengano costanti – vediamo che *l'energia newtoniana totale del sistema è funzione decrescente del tempo.* Ovviamente se ε fosse zero, H si ridurrebbe alla costante h e si riavrebbe il noto integrale dell'energia.

4. Esaminiamo ora che cosa divenga il viriale W, tenendo conto del termine cosmogonico.

Essendo le forze $X_i\ Y_i\ Z_i$ date dai secondi membri delle [8] moltiplicati per m_i, avremo dalla [2]:

[14] $$W = f \sum_i \sum_k \frac{m_i m_k}{r_{ik}^3} \{(x_k - x_i) x_i + (y_k - y_i) y_i + (z_k - z_i) z_i\} \left\{1 + \varepsilon \frac{dr_{ik}}{dt}\right\} =$$

$$= \frac{f}{2} \sum_i \sum_k \frac{m_i m_k}{r_{ik}^3} \{(x_k - x_i)(x_i - x_k) + (y_k - y_i)(y_i - y_k) +$$

$$+ (z_k - z_i)(z_i - z_k)\} \left\{1 + \varepsilon \frac{dr_{ik}}{dt}\right\} =$$

$$= -\frac{f}{2} \sum_i \sum_k \frac{m_i m_k}{r_{ik}} \left\{1 + \varepsilon \frac{dr_{ik}}{dt}\right\} = P + Q$$

essendo:

[15] $$Q = -\frac{\varepsilon f}{2} \sum_i \sum_k \frac{m_i m_k}{r_{ik}} \frac{dr_{ik}}{dt} .$$

Ovviamente nel caso newtoniano, essendo $\varepsilon = 0$, la W si riduce a P; come ho detto. si suppone sempre che le coordinate e le velocità *non* tendano all'infinito.

Se l'intervallo di tempo è sufficientemente grande, la [3] ci dà:

$$[16] \qquad 2\,\overline{T}(t) + \overline{W}(t) = 2\,\overline{T}(t) + \overline{P}(t) + \overline{Q}(t) = 0$$

e quindi, per la [13], abbiamo in fine:

$$[17] \qquad \overline{P}(t) = 2\,\overline{H}(t) + \overline{Q}(t)$$

dove, al solito, indichiamo con una linea superiore i valori medi che le funzioni P, H, Q, assumono nell'intervallo di tempo compreso fra t_0 e t.

Ricordando che il valor medio $\overline{Q}(t)$ è dato alla formola

$$[18] \qquad \overline{Q}(t) = \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^{t} Q(t)\,dt = \frac{\varepsilon f}{2\,(t - t_0)} \sum_i \sum_k m_i\, m_k \log \frac{a_{ik}}{r_{ik}}$$

dove a_{ik} indica il valore iniziale di r_{ik}, si potrebbe dimostrare che – se non vi sono urti – $\overline{Q}(t)$ tende a zero [1] quando t cresce indefinitamente. Ne segue che, nel caso della nostra legge, la teoria del Viriale, per t grandissimo da l'equazione:

$$[19] \qquad \overline{P}(t) = 2\,\overline{H}(t)$$

interamente analoga alla [6] della legge newtoniana. Di tale equazione ci serviremo in seguito.

5. Cominciamo ora a ricercare se è possibile che il sistema stellare considerato assuma un movimento periodico o, più generalmente, uno stato di regime. In tal caso, poichè P e T debbono oscillare intorno a valori costanti od anche mantenersi costanti, si deve avere H = costante, e quindi tutte le r_{ik} debbono essere costanti; in altre parole, gli unici movimenti periodici, o di regime, possibili, *sono i movimenti rigidi*. In tal caso, la nostra legge coincide ovviamente con la legge di Newton.

Esaminiamo più da vicino questo caso.

Anzitutto, muovendosi il sistema come un corpo rigido ed essendo fisso il suo baricentro G, è chiaro – per facili nozioni cinematiche – che esso

---

[1] Basta infatti osservare che, per t tendente all'infinito le r_{ik} possono al più divenire infinite, od infinitesime, di ordine *finito*, secondo noti tecremi di Meccanica, e che inoltre non possono mai annullarsi per valori finiti del tempo giacchè, per ipotesi, non avvengono urti.

ruoterà in ogni istante intorno ad un asse istantaneo R passante per G. Ma, moltiplicando le [8] per $\frac{dx_i}{dt}$, $\frac{dy_i}{dt}$, $\frac{dz_i}{dt}$, si ha:

$$[20] \qquad \frac{dx_i}{dt}\frac{d^2x_i}{dt^2} + \frac{dy_i}{dt}\frac{d^2y_i}{dt^2} + \frac{dz_i}{dt}\frac{d^2z_i}{dt^2} =$$

$$= f\sum_k \frac{m_k}{r_{ik}^3}\left[(x_k - x_i)\frac{dx_i}{dt} + (y_k - y_i)\frac{dy_i}{dt} + (z_k - z_i)\frac{dz_i}{dt}\right] =$$

$$= \frac{f}{2}\sum_k \frac{m_k}{r_{ik}^3}\left[(x_k - x_i)\left(\frac{dx_i}{dt} - \frac{dx_k}{dt}\right) + (y_k - y_i)\left(\frac{dy_i}{dt} - \frac{dy_k}{dt}\right) +\right.$$

$$\left. + (z_k - z_i)\left(\frac{dz_i}{dt} - \frac{dz_k}{dt}\right)\right] = \frac{f}{2}\sum_k \frac{m_k}{r_{ik}^2}\frac{dr_{ik}}{dt} = 0$$

essendo tutte le $\frac{dr_{ik}}{dt}$ nulle. Ne segue integrando:

$$[21] \qquad \left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2 = \text{costante}$$

vale a dire ogni stella si muove con velocità di grandezza costante. Ne segue, per cose note, che l'asse R è fisso nello spazio come pure nell'interno del sistema.

Assumendolo come asse z, sarà allora per ogni stella $\frac{dz}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} = 0$; vale a dire ogni stella descriverà un cerchio posto in un piano parallelo al piano xy ed avente per centro il punto d'intersezione di questo piano con l'asse z. Dico ora che tutti questi piani coincidono col piano xy, vale a dire che per ogni stella si ha sempre $z = 0$.

Infatti, se ciò non fosse, vi sarebbe certamente una stella S_q la cui ordinata z_q sarebbe maggiore di tutte le altre z, od almeno maggiore di alcune di esse ed eguale alle altre. Ma, dall'ultima delle [8] abbiamo per il moto di questa stella:

$$[22] \qquad \frac{d^2z_q}{dt^2} = f\sum_k \frac{m_k(z_k - z_q)}{r_{ik}^3},$$

Ne segue che, poichè il secondo membro risulterebbe composto di termini nulli per alcuni valori di k e negativi per altri, il primo membro non potrebbe essere eguale a zero. Dunque tutte le z sono eguali tra loro. Ma, cadendo il baricentro nell'origine, si ha $\Sigma m_i z_i = 0$; dunque le z sono nulle. In altre parole tutte le stelle del sistema, si muoveranno sopra uno stesso piano, descrivendo in tempi eguali cerchi concentrici aventi per centro G. Ovviamente la densità stellare superficiale sul piano, dovrà

essere tale che l'accelerazione risulti proporzionale al raggio; cosa che importa un *addensamento* nelle regioni centrali, come meglio vedremo in altra Nota.

6. Supponiamo ora il caso opposto [1] cioè che le r_{ik} non siano costanti, nè tendano a valori costanti; vale a dire che il movimento di regime non possa stabilirsi. Dico che il sistema sarà soggetto ad una condensazione progressiva, vale a dire che in media le r_{ik} diminuiranno col tempo. Infatti se le r_{ik} *non* tendono all'infinito e le loro derivate *non* tendono a zero, ovviamente l'integrale in [12] sarà divergente e quindi, secondo la [13], quando cresce il tempo, $T + P$ tenderà verso $-\infty$. Ma T è essenzialmente positiva, dunque P tenderà verso $-\infty$ e quindi, in media, le distanze reciproche tenderanno ad annullarsi. Ciò può ancora dedursi più brevemente dalla [19], osservando che essendo $H(t)$ funzione sempre decrescente del tempo, lo sarà anche il suo valor medio e cioè $\bar{H}(t)$

---

[1] Per vedere come anche questo caso sia possibile, supponiamo per esempio che sia $n = 3$ e, per maggior semplicità, supponiamo pure che i tre corpi A, B, C, abbiano identica massa m. Come è noto, coincidendo nel moto rigido la nostra legge con quella di Newton, le uniche soluzioni rigide possibili sono allora quelle corrispondenti al triangolo equilatero con lati di lunghezza costante e quella corrispondente al caso in cui i tre punti siano sempre allineati a distanza costante tra loro.

Indichiamo con r il lato del triangolo equilatero e con K il momento della quantità di moto del sistema; momento che deve sempre mantenersi costante. Si ha allora dalla Meccanica, per la soluzione triangolare:

$$K^2 = 3fm^3r \quad ; \quad T + P = -\frac{3fm^2}{2r} = -\frac{9f^2m^5}{2K^2}.$$

Analogamente, nel caso della soluzione rettilinea, posto $AB = BC = r$, $AC = 2r$, si ha:

$$K^2 = 5fm^3r \quad ; \quad T + P = -\frac{5fm^2}{4r} = -\frac{25f^2m^5}{4K^2}.$$

Se dunque il valore iniziale di $T + P$ è inferiore alla quantità $-\frac{25f^2m^5}{4K^2}$, poichè K si mantiene costante e $T + P$ non può giammai crescere col tempo, è evidente che nessuna delle due soluzioni potrà mai verificarsi. Soltanto nel caso di $n = 2$, il moto relativo tende *sempre* a divenire circolare uniforme. Ciò apparisce chiaramente dalla formola [10] della nostra Nota I, la quale mostra che $u = \frac{1}{r}$ non può mai tendere a zero. In conseguenza, per la legge delle aree (tranne il caso specialissimo in cui la costante delle aree sia nulla), il punto A deve compiere infiniti giri intorno a B e quindi, per la stessa formola [10], r tende a divenire costante.

Riepilogando, un sistema stellare autonomo (e cioè non sottomesso all'attrazione di altri sistemi, come sono per esempio gli « ammassi aperti » della nostra Via Lattea), se non si disperde all'infinito, o tende ad assumere la forma di un disco ruotante, oppure si condensa progressivamente intorno al proprio baricentro. Ovviamente però data la piccolezza del coefficiente ε, occorre un tempo estremamente lungo (come vedremo in una prossima Nota) affinchè questi stati di regime siano praticamente raggiunti. Ma abbiamo già innumerevoli esempi in cui tali stati appaiono ora abbastanza avanzati.

Infatti, nel cielo, vediamo molti esempi di ammassi globulari in cui le stelle sono già assai addensate tra loro ed abbiamo pure un gran numero di nebulose extragalattiche, aventi forma di un disco schiacciato, spesso con condensazione centrale. Nella teoria newtoniana, tale forma nebulare viene spiegata ammettendo che queste nebule – oggi composte di milioni di stelle – fossero state anticamente gassose e che ruotando sempre più rapidamente (a causa della contrazione prodotta dal raffreddamento) avessero assunto la forma di un ellissoide molto schiacciato. Ma tale spiegazione è assai labile, giacchè – dalla teoria delle figure di equilibrio – qualunque sia la distribuzione interna delle densità, l'asse polare risulta sempre maggiore di 2.3 di quello equatoriale; mentre invece, nelle nebule extragalattiche, tale rapporto è spesso inferiore ad 1/10. Così pure, tra le nebulose extragalattiche irregolari, vediamo molti esempi di condensazioni centrali; ed anzi le osservazioni dimostrano [1] che la nebula è in media tanto più avanzata nella sua evoluzione, quanto più tale condensazione è progredita. Questa condensazione veniva spiegata con gli urti; ma tale spiegazione è anche essa assai labile, giacchè gli urti materiali tra stelle debbono considerarsi come eccezionali. Vediamo invece come la nostra teoria cosmogonica fornisca una spiegazione assai semplice dell'uno e dell'altro caso.

---

[1] Cfr. G. Armellini, *Trattato di Astronomia Siderale*, vol. III (*Le Nebule*); ed. Zanichelli, Bologna.

Astronomia. — *Sui problemi fondamentali della Cosmogonia.* Nota di CATALDO AGOSTINELLI, presentata da GIUSEPPE ARMELLINI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

PARTE I [1].

EQUAZIONI DEL MOTO DI UN PIANETA PUNTIFORME E DI UN SOLE DI FORMA QUALSIASI

1. *Introduzione.* — Recentemente il prof. G. ARMELLINI, in diverse Note di alto interesse matematico e astronomico [2], ispirandosi ai vari tentativi tendenti a modificare la legge di NEWTON, ha proposto di spiegare i processi cosmogonici del sistema planetario e delle nebulose estragallattiche, introducendo, nella formula che dà l'attrazione di due punti, un *termine complementare o cosmogonico*, e cioè ammettendo che il coefficiente attrattivo f della legge di NEWTON vari lievemente con la velocità con cui si allontanano o si avvicinano tra loro i due punti attraentisi, in modo analogo a quanto è suggerito dalla propagazione della luce.

Più precisamente egli suppone che la forza di attrazione F fra due punti di massa m_0 ed m sia data da

$$[1] \qquad F = -f\left(1 + \varepsilon \frac{dr}{dt}\right) \frac{m_0\, m}{r^2},$$

ove f è la costante gravitazionale, ed ε è una seconda costante *positiva*, estremamente piccola, tanto che l'effetto che ne deriva divenga sensibile solo in intervalli di tempo estremamente lunghi, quali sono quelli che si considerano appunto nella Cosmogonia. L'ARMELLINI, con l'aggiunta di quel termine, e con considerazioni puramente meccaniche, è riuscito a

---

[1] Pervenuta all'Accademia il 5 agosto 1940-XVIII.

[2] G. ARMELLINI, *I problemi fondamentali della Cosmogonia e la legge di Newton.* Nota I (« Rendiconti » della R. Accademia dei Lincei, vol. XXVI, ser. 6ª, pag. 209, a. 1937-XVI); IDEM, Nota II (idem, vol. XXVII, serie 6ª, pag. 609, a. 1938-XVII); IDEM, Nota III (idem, vol. XXVIII, serie 6ª, pag. 117, a. 1938-XVII); IDEM, Nota IV (idem, vol. XXIX, serie 6ª, pag. 649, a. 1939-XVIII); IDEM, Nota V (« Rendiconti» R. Acc. d'Italia, adunanza 18 novembre 1939-XVIII); IDEM, Nota VI (id. adunanza 16 maggio 1940-XVIII); IDEM, *Una nuova ipotesi cosmogonica* in « Scientia » (gennaio 1939-XVII).

spiegare immediatamente un gran numero di problemi cosmogonici, dopo aver determinata l'equazione della traiettoria relativa di due punti che si attraggono colla legge [1].

Ha dimostrato ad esempio che: I) *le orbite planetarie tendono a divenire circolari, con un raggio uguale al parametro dell'orbita iniziale*; II) *i pianeti debbono muoversi intorno al Sole nello stesso verso in cui il Sole ruota intorno al proprio asse;* III) *le orbite planetarie tendono a divenire complanari e precisamente a disporsi nel piano dell'equatore solare.*

In queste sue ricerche il prof. ARMELLINI suppone che le masse dei pianeti siano piccole rispetto alla massa del Sole, che ritiene sferico, e che il diametro del globo solare sia piccolo rispetto alle distanze dei pianeti; ammette inoltre che l'asse di rotazione solare sia di direzione invariabile.

Sebbene queste ipotesi si avvicinano molto alla realtà, e siano sufficienti agli effetti delle valutazioni secolari, ho creduto non privo di interesse di riprendere tali ricerche, ponendomi da un punto di vista più generale, ammettendo cioè che il sole abbia forma qualsiasi (in particolare di un ellissoide rotondo), con velocità angolare variabile in grandezza e direzione; infine, indicando con δ la distanza di un punto generico del Sole dal suo baricentro, e con ρ la distanza di un pianeta P (supposto puntiforme), dal baricentro solare, siano trascurabili soltanto i termini di ordine superiore al secondo nel rapporto $\frac{\delta}{\rho}$.

In queste ipotesi ho stabilito le equazioni differenziali del moto relativo di un pianeta rispetto al Sole e quelle del moto del Sole intorno al suo baricentro. Di questo sistema di equazioni ho assegnato un notevole *integrale primo vettoriale*, che lega il vettore momento della quantità di moto del Sole rispetto al suo baricentro, col vettore velocità areolare del pianeta nel suo movimento intorno al Sole.

Per mezzo di esso ho potuto completare alcuni dei risultati del prof. ARMELLINI e trovarne dei nuovi, dimostrando, ad esempio, che, ammessa la [1], il moto medio n del pianeta e la velocità angolare ω del Sole, tendano, dopo un tempo infinito, a divenire eguali.

§ 1.

Equazioni del moto di un pianeta puntiforme in presenza di un Sole di forma qualsiasi.

2. Consideriamo un Sole S di forma qualsiasi e di massa m_0, il cui baricentro indicheremo con Q_0, ed un pianeta puntiforme P di massa m, e supponiamo che le forze di attrazione che si esercitano fra i punti di S e il pianeta P siano della forma [1]. Essendo allora Q un punto generico

di S, μ la sua densità, ed R la distanza PQ, l'equazione del moto del punto P risulterà

$$[2] \qquad m\frac{d^2P}{dt^2} = -fm\int_S \frac{\mu\, dS}{R^3}(P-Q) - \varepsilon fm\int_S \frac{\mu\, dS}{R^3}\frac{dR}{dt}(P-Q).$$

Inoltre, per un noto teorema di Meccanica il baricentro Q_0 di S si muove come se in esso fosse concentrata tutta la massa m_0 del Sole e su Q_0 agissero le sole forze esterne ad S.

Ma nel nostro caso l'unica forza di attrazione esterna è quella esercitata dal pianeta P, perciò l'equazione del moto del punto Q_0 è

$$[3] \qquad m_0\frac{d^2Q_0}{dt^2} = fm\int_S \frac{\mu\, dS}{R^3}(P-Q) + \varepsilon fm\int_S \frac{\mu\, dS}{R^3}\frac{dR}{dt}(P-Q).$$

Dalle [2] e [3] segue

$$[4] \qquad \frac{d^2(P-Q_0)}{dt^2} = -f\left(1+\frac{m}{m_0}\right)\int_S \frac{\mu\, dS}{R^3}(P-Q) -$$

$$-\varepsilon f\left(1+\frac{m}{m_0}\right)\int_S \frac{\mu\, dS}{R^3}\frac{dR}{dt}(P-Q),$$

che è l'equazione vettoriale del moto relativo del punto P rispetto a Q_0.

3. Indicando con δ la distanza di un punto generico Q di S, da Q_0, con ρ la distanza $\overline{PQ_0}$ e con γ l'angolo formato dai raggi vettori $\overline{Q_0Q}$, $\overline{Q_0P}$, calcoleremo gli integrali a secondo membro della [4] trascurando i termini in $\frac{\delta}{\rho}$ di ordine superiore al secondo.

Per le posizioni fatte si ha

$$R = \sqrt{\rho^2+\delta^2-2\rho\delta\cos\gamma}$$

e quindi

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\rho}\left[1-\left(\frac{2\delta}{\rho}\cos\gamma-\frac{\delta^2}{\rho^2}\right)\right]^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\rho}\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{2\delta}{\rho}\cos\gamma-\frac{\delta^2}{\rho^2}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{3}{8}\left(\frac{2\delta}{\rho}\cos\gamma-\frac{\delta^2}{\rho^2}\right)^2+\cdots\right],$$

cioè

$$[5] \qquad \frac{1}{R} = \frac{1}{\rho}\left[1+\frac{\delta}{\rho}\cos\gamma+\frac{1}{2}\frac{\delta^2}{\rho^2}(3\cos^2\gamma-1)+\cdots\right],$$

da cui si ricava

$$[6] \qquad \frac{1}{R^3} = \frac{1}{\rho^3}\left[1+3\frac{\delta}{\rho}\cos\gamma+\frac{3}{2}\frac{\delta^2}{\rho^2}(5\cos^2\gamma-1)+\cdots\right].$$

Ciò premesso possiamo scrivere

$$[7] \qquad \int_S \frac{\mu\, dS}{R^3}(P-Q) = \int_S \frac{\mu\, dS}{R^3}\cdot(P-Q_0) - \int_S \frac{\mu\, dS}{R^3}(Q-Q_0),$$

e coll'approssimazione voluta in virtù della [6] risulta

$$\int_S \frac{\mu\, dS}{R^3} = \frac{1}{\rho^3}\int_S \mu\, dS + \frac{3}{\rho^4}\int_S \mu\delta\cos\gamma\cdot dS + \frac{3}{2\rho^5}\int_S \mu\delta^2(5\cos^2\gamma - 1)\, dS.$$

Ma

$$\int_S \mu\, dS = m_0, \quad \text{ed} \quad \int_S \mu\delta\cos\gamma\cdot dS = 0,$$

poichè quest'ultimo integrale non è altro che il momento statico di S rispetto alla retta $Q_0 P$, che è asse baricentrico di S, mentre il terzo integrale diventa

$$\int_S \mu\delta^2(5\cos^2\gamma - 1)\, dS = 4\int_S \mu\delta^2\, dS - 5\int_S \mu\delta^2 \operatorname{sen}^2\gamma\cdot dS = 4\mathfrak{M} - 5\mathfrak{J},$$

ove $\mathfrak{M}$ è il momento d'inerzia polare di S rispetto a Q_0, ed $\mathfrak{J}$ è il momento d'inerzia di S rispetto alla retta $Q_0 P$.

Perciò

$$[8] \qquad \int_S \frac{\mu\, dS}{R^3} = \frac{m_0}{\rho^3} + \frac{3}{2\rho^5}(4\mathfrak{M} - 5\mathfrak{J}).$$

Analogamente si ha

$$[9] \qquad \int_S \frac{\mu\, dS}{R^3}(Q-Q_0) = \frac{1}{\rho^3}\int_S \mu(Q-Q_0)\, dS + \frac{3}{\rho^4}\int_S \mu\delta\cos\gamma\cdot(Q-Q_0)\, dS +$$

$$+ \frac{3}{2\rho^5}\int_S \mu\delta^2(5\cos^2\gamma - 1)(Q-Q_0)\, dS,$$

e risulta.

$$\int_S \mu(Q-Q_0)\, dS = 0,$$

$$\int_S \mu\delta\cos\gamma\cdot(Q-Q_0)\, dS = \int_S \mu(Q-Q_0)\cdot(Q-Q_0)\times\frac{P-Q_0}{\rho}\, dS =$$

$$= \int_S \mu(Q-Q_0)\wedge\left[(Q-Q_0)\wedge\frac{P-Q_0}{\rho}\right] dS + \int_S \mu(Q-Q_0)^2\, dS\cdot\frac{P-Q_0}{\rho} =$$

$$= \left\{\int_S \mu[(Q-Q_0)\wedge]^2\, dS + \int_S \mu\delta^2\, dS\right\}\frac{P-Q_0}{\rho},$$

cioè

$$\int_S \mu\delta\cos\gamma\cdot(Q-Q_0)\, dS = (\mathfrak{M} - \sigma)\frac{P-Q_0}{\rho},$$

ove

$$\sigma = -\int_S \mu\,[(Q - Q_0) \wedge]^2\, dS\,,$$

è *l'omografia d'inerzia* di S rispetto a Q_0.

L'ultimo integrale del secondo membro della [9] si può trascurare, poichè, essendo δ il modulo di $(Q - Q_0)$, l'espressione integranda è del terzo ordine rispetto a δ.

In definitiva si ha

$$[10] \qquad \int_S \frac{\mu\, dS}{R^3}\,(Q - Q_0) = \frac{3}{\rho^5}\,(\mathfrak{M} - \sigma)\,(P - Q_0)\,,$$

e la [7], per le [8] e [10], diventa

$$[11] \qquad \int_S \frac{\mu\, dS}{R^3}\,(P - Q) = \frac{1}{\rho^3}\left[m_0 + \frac{3}{2\rho^2}\,(2\,\mathfrak{M} \quad 5\,\mathfrak{J} + 2\sigma)\right](P - Q_0)\,.$$

4. Osservando ora che possiamo scrivere

$$[12] \qquad \int_S \frac{\mu\, dS}{R^3}\,\frac{dR}{dt}\,(P - Q) = \int_S \frac{\mu\, dS}{R^4}\,(P - Q) \times \frac{d\,(P - Q)}{dt}\,(P - Q) =$$

$$= \int_S \frac{\mu\, dS}{R^4}\,[(P - Q_0) - (Q - Q_0)] \times \left[\frac{d\,(P - Q_0)}{dt} - \frac{d\,(Q - Q_0)}{dt}\right](P - Q_0) -$$

$$- \int_S \frac{\mu\, dS}{R^4}\,[(P - Q_0) - (Q - Q_0)] \times \left[\frac{d\,(P - Q_0)}{dt} - \frac{d\,(Q - Q_0)}{dt}\right](Q - Q_0)\,,$$

che l'ultimo membro si scompone in otto integrali, e che dalle [5] e [6] si ricava

$$\frac{1}{R^4} = \frac{1}{\rho^4}\left[1 + 4\,\frac{\delta}{\rho}\cos\gamma + 2\,\frac{\delta^2}{\rho^2}\,(6\cos^2\gamma - 1) + \cdots\right],$$

e che

$$\frac{d\,(Q - Q_0)}{dt} = \omega \wedge (Q - Q_0)\,,$$

ove ω è il vettore velocità angolare del Sole, con calcoli perfettamente analoghi, e colla stessa approssimazione, si ricava (1):

---

(1) Infatti si ha:

$$\int_S \frac{\mu\, dS}{R^4}\,(P - Q_0) \times \frac{d}{dt}\,(P - Q_0) = \rho\,\frac{d\rho}{dt}\int_S \frac{\mu\, dS}{R^4} =$$

$$= \rho\,\frac{d\rho}{dt}\int_S \frac{\mu\, dS}{\rho^4}\left[1 + 4\,\frac{\delta}{\rho}\cos\gamma + 2\,\frac{\delta^2}{\rho^2}\,(6\cos^2\gamma - 1)\right] = \frac{1}{\rho^3}\,\frac{d\rho}{dt}\left[m_0 + \frac{2}{\rho^2}\,(5\,\mathfrak{M} - 6\,\mathfrak{J})\right],$$

$$[13]\qquad \int_S \mu \frac{dS}{R^3}\frac{dR}{dt}(P-Q) = \left\{\frac{1}{\rho^3}\frac{d\rho}{dt}\left[m_0+\frac{2}{\rho^2}(5\,\mathfrak{M}-6\,\mathfrak{J})\right] - \right.$$

$$\left. -\frac{4}{\rho^6}(\mathfrak{M}-\sigma)(P-Q_0)\times\left[\frac{d(P-Q_0)}{dt}-\boldsymbol{\omega}\wedge(P-Q_0)\right]\right\}(P-Q_0) -$$

$$-\frac{4}{\rho^5}\frac{d\rho}{dt}(\mathfrak{M}-\sigma)(P-Q_0)+\frac{1}{\rho^4}(\mathfrak{M}-\sigma)\left[\frac{d(P-Q_0)}{dt}-\boldsymbol{\omega}\wedge(P-Q_0)\right].$$

5. In virtù delle [11] e [13], l'equazione [4] del moto relativo di P rispetto a Q_0 diventa infine:

$$\int_S \frac{\mu\,dS}{R^4}(P-Q_0)\times\frac{d}{dt}(Q-Q_0) = \int_S \frac{\mu\,dS}{R^4}(P-Q_0)\times\boldsymbol{\omega}\wedge(Q-Q_0) =$$

$$=(P-Q_0)\wedge\boldsymbol{\omega}\times\frac{1}{\rho^4}\int_S \mu\left(1+4\frac{\delta}{\rho}\cos\gamma\right)(Q-Q_0)\,dS = \frac{4}{\rho^6}(P-Q_0)\wedge\boldsymbol{\omega}\times(\mathfrak{M}-\sigma)(P-Q_0),$$

$$\int_S \frac{\mu\,dS}{R^4}(Q-Q_0)\times\frac{d}{dt}(P-Q_0) = \frac{d}{dt}(P-Q_0)\times\frac{1}{\rho^4}\int_S \mu\left(1+4\frac{\delta}{\rho}\cos\gamma\right)(Q-Q_0)\,dS =$$

$$=\frac{4}{\rho^6}(\mathfrak{M}-\sigma)(P-Q_0)\times\frac{d}{dt}(P-Q_0),$$

$$\int_S \frac{\mu\,dS}{R^4}(Q-Q_0)\times\frac{d}{dt}(Q-Q_0) = 0,$$

poichè $(Q-Q_0)\times\dfrac{d}{dt}(Q-Q_0) = (Q-Q_0)\times\boldsymbol{\omega}\wedge(Q-Q_0) = 0,$

$$\int_S \frac{\mu\,dS}{R^4}(P-Q_0)\times\frac{d}{dt}(P-Q_0)\cdot(Q-Q_0) = \rho\frac{d\rho}{dt}\int_S \frac{\mu\,dS}{R^4}(Q-Q_0) = \frac{4}{\rho^5}\frac{d\rho}{dt}(\mathfrak{M}-\sigma)(P-Q_0),$$

$$\int_S \frac{\mu\,dS}{R^4}(P-Q_0)\times\frac{d}{dt}(Q-Q_0)\cdot(Q-Q_0) = \int_S \frac{\mu\,dS}{R^4}(P-Q_0)\wedge\boldsymbol{\omega}\times(Q-Q_0)\cdot(Q-Q_0) =$$

$$=\int_S \frac{\mu\,dS}{R^4}(Q-Q_0)\wedge\{(Q-Q_0)\wedge[(P-Q_0)\wedge\boldsymbol{\omega}]\}+$$

$$+\int_S \frac{\mu\,dS}{R^4}(Q-Q_0)^2\cdot(P-Q_0)\wedge\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{\rho^4}(\mathfrak{M}-\sigma)[(P-Q_0)\wedge\boldsymbol{\omega}],$$

$$\int_S \frac{\mu\,dS}{R^4}(Q-Q_0)\times\frac{d}{dt}(P-Q_0)\cdot(Q-Q_0) = \int_S \frac{\mu\,dS}{R^4}(Q-Q_0)\wedge\left[(Q-Q_0)\wedge\frac{d}{dt}(P-Q_0)\right]+$$

$$+\int_S \frac{\mu\,dS}{R^4}(Q-Q_0)^2\cdot\frac{d}{dt}(P-Q_0) = \frac{1}{\rho^4}(\mathfrak{M}-\sigma)\frac{d}{dt}(P-Q_0),$$

$$\int_S \frac{\mu\,dS}{R^4}(Q-Q_0)\times\frac{d}{dt}(Q-Q_0)\cdot(Q-Q_0) = 0,$$

sostituendo perciò nella [12], si ottiene la [13].

$$[14]\quad \frac{d^2(P-Q_0)}{dt^2} = -f\left(1+\frac{m}{m_0}\right)\frac{1}{\rho^3}\left[m_0+\frac{3}{2\rho^2}(2\mathfrak{M}-5\mathfrak{J}+2\sigma)\right](P-Q_0)-$$

$$-\varepsilon f\left(1+\frac{m}{m_0}\right)\left[\left\{\frac{1}{\rho^3}\frac{d\rho}{dt}\left[m_0+\frac{2}{\rho^2}(\mathfrak{M}-6\mathfrak{J}+2\sigma)\right]+\right.\right.$$

$$+\frac{4}{\rho^6}\sigma(P-Q_0)\times\left[\frac{d(P-Q_0)}{dt}-\boldsymbol{\omega}\wedge(P-Q_0)\right]\Big\}(P-Q_0)+$$

$$\left.+\frac{1}{\rho^4}(\mathfrak{M}-\sigma)\left\{\frac{d}{dt}(P-Q_0)-\boldsymbol{\omega}\wedge(P-Q_0)\right\}\right].$$

Se assumiamo come assi di riferimento gli *assi centrali d'inerzia* del Sole S, indichiamo con $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$, tre vettori unitari ortogonali aventi le direzioni di quegli assi, e con x, y, z le coordinate del pianeta P rispetto agli stessi assi, si ha

$$P-Q_0 = x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k};$$

$$\frac{d(P-Q_0)}{dt} = \frac{dx}{dt}\boldsymbol{i}+\frac{dy}{dt}\boldsymbol{j}+\frac{dz}{dt}\boldsymbol{k}+x\frac{d\boldsymbol{i}}{dt}+y\frac{d\boldsymbol{j}}{dt}+z\frac{d\boldsymbol{k}}{dt},$$

cioè, per le formule di Poisson,

$$\frac{d}{dt}(P-Q_0) = \frac{dx}{dt}\boldsymbol{i}+\frac{dy}{dt}\boldsymbol{j}+\frac{dz}{dt}\boldsymbol{k}+\boldsymbol{\omega}\wedge(P-Q_0),$$

e di qui ancora

$$\frac{d^2(P-Q_0)}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\boldsymbol{i}+\frac{d^2y}{dt^2}\boldsymbol{j}+\frac{d^2z}{dt^2}\boldsymbol{k}+2\boldsymbol{\omega}\wedge\left(\frac{dx}{dt}\boldsymbol{i}+\frac{dy}{dt}\boldsymbol{j}+\frac{dz}{dt}\boldsymbol{k}\right)+$$

$$+\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\wedge(P-Q_0)+\boldsymbol{\omega}\times(P-Q_0)\cdot\boldsymbol{\omega}-\omega^2(P-Q_0).$$

Ponendo inoltre

$$\boldsymbol{\omega} = p\boldsymbol{i}+q\boldsymbol{j}+r\boldsymbol{k},$$

si ricava

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \frac{dp}{dt}\boldsymbol{i}+\frac{dq}{dt}\boldsymbol{j}+\frac{dr}{dt}\boldsymbol{k};$$

indicando infine con $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ i momenti principali d'inerzia di S rispetto a Q_0 si ha

$$\sigma\boldsymbol{i} = \mathfrak{A}\boldsymbol{i}, \sigma\boldsymbol{j} = \mathfrak{B}\boldsymbol{j}, \sigma\boldsymbol{k} = \mathfrak{C}\boldsymbol{k}.$$

Le equazioni scalari corrispondenti alla [14], col riferimento scelto, si ottengono moltiplicando ambo i membri di essa scalarmente per $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$, e risultano pertanto:

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\frac{d^2x}{dt^2} + 2(q\dot{z} - r\dot{y}) + (\dot{q}z - \dot{r}y) + (px + qy + rz)\,p - \omega^2 x = \\
&\quad = -f\left(1 + \frac{m}{m_0}\right)\frac{1}{\rho^3}\left[m_0 + \frac{3}{2\rho^2}(2\mathfrak{M} - 5\mathfrak{J} + 2\mathfrak{A})\right]x - \\
&\quad - \varepsilon f\left(1 + \frac{m}{m_0}\right)\left[\left\{\frac{1}{\rho^3}\dot{\rho}\left[m_0 + \frac{2}{\rho^2}(\mathfrak{M} - 6\mathfrak{J} + 2\mathfrak{A})\right] + \right.\right. \\
&\quad \left.\left. + \frac{4}{\rho^6}(\mathfrak{A}x\dot{x} + \mathfrak{B}y\dot{y} + \mathfrak{C}z\dot{z})\right\}x + \frac{1}{\rho^4}(\mathfrak{M} - \mathfrak{A})\,\dot{x}\right], \\
&\frac{d^2y}{dt^2} + 2(r\dot{x} - p\dot{z}) + (\dot{r}x - \dot{p}z) + (px + qy + rz)\,q - \omega^2 y = \\
&\quad = -f\left(1 + \frac{m}{m_0}\right)\frac{1}{\rho^3}\left[m_0 + \frac{3}{2\rho^2}(2\mathfrak{M} - 5\mathfrak{J} + 2\mathfrak{B})\right]y - \\
&\quad - \varepsilon f\left(1 + \frac{m}{m_0}\right)\left[\left\{\frac{1}{\rho^3}\dot{\rho}\left[m_0 + \frac{2}{\rho^2}(\mathfrak{M} - 6\mathfrak{J} + 2\mathfrak{B})\right] + \right.\right. \\
&\quad \left.\left. + \frac{4}{\rho^6}(\mathfrak{A}x\dot{x} + \mathfrak{B}y\dot{y} + \mathfrak{C}z\dot{z})\right\}y + \frac{1}{\rho^4}(\mathfrak{M} - \mathfrak{B})\,\dot{y}\right], \\
&\frac{d^2z}{dt^2} + 2(p\dot{y} - q\dot{x}) + (\dot{p}y - \dot{q}x) + (px + qy + rz)\,r - \omega^2 z = \\
&\quad = -f\left(1 + \frac{m}{m_0}\right)\frac{1}{\rho^3}\left[m_0 + \frac{3}{2\rho^2}(2\mathfrak{M} - 5\mathfrak{J} + 2\mathfrak{C})\right]z - \\
&\quad - \varepsilon f\left(1 + \frac{m}{m_0}\right)\left[\left\{\frac{1}{\rho^3}\dot{\rho}\left[m_0 + \frac{2}{\rho^2}(\mathfrak{M} - 6\mathfrak{J} + 2\mathfrak{C})\right] + \right.\right. \\
&\quad \left.\left. + \frac{4}{\rho^6}(\mathfrak{A}x\dot{x} + \mathfrak{B}y\dot{y} + \mathfrak{C}z\dot{z})\right\}z + \frac{1}{\rho^4}(\mathfrak{M} - \mathfrak{C})\,\dot{z}\right],
\end{aligned}
\right. \qquad [15]
$$

ove si sono soprassegnate con un punto le derivate rispetto al tempo.

§ 2.

Equazioni del moto del Sole intorno al suo baricentro.

6. Per ottenere ora le equazioni del moto del Sole S intorno al suo baricentro Q_0, in presenza del solo pianeta P, nell'ipotesi che le forze di attrazione che si esercitano fra i punti Q di S e il punto P siano della forma [1], e colla stessa approssimazione stabilita nel paragrafo precedente, ricorriamo all'*equazione cardinale dei momenti*, scrivendo che la derivata rispetto al tempo del momento della quantità di moto K_{Q_0} di S, rispetto al baricentro Q_0, è uguale al momento risultante, rispetto a Q_0, di tutte e sole le forze esterne.

Si avrà allora

$$[16] \qquad \frac{d\boldsymbol{K}_{Q_0}}{dt} = fm \int_{\dot{S}} (Q - Q_0) \wedge \frac{\mu\, dS}{R^3}(P - Q) +$$

$$+ \varepsilon fm \int_{\dot{S}} (Q - Q_0) \wedge \frac{\mu\, dS}{R^3} \frac{dR}{dt}(P - Q).$$

Ma avendo riguardo alla [10] risulta

$$\int_{\dot{S}} (Q - Q_0) \wedge \frac{\mu\, dS}{R^3}(P - Q) = \int_{\dot{S}} (Q - Q_0) \wedge \frac{\mu\, dS}{R^3}(P - Q_0) = \left[\int_{\dot{S}} \frac{\mu\, dS}{R^3}(Q - Q_0)\right] \wedge$$

$$\wedge (P - Q_0) = \frac{3}{\rho^5}(\mathfrak{M} - \sigma)(P - Q_0) \wedge (P - Q_0) = \frac{3}{\rho^5}(P - Q_0) \wedge \sigma (P - Q_0),$$

e così pure, poichè

$$\int_{\dot{S}} (Q - Q_0) \wedge \frac{\mu\, dS}{R^3} \frac{dR}{dt}(P - Q) = \left[\int_{\dot{S}} \frac{\mu\, dS}{R^3} \frac{dR}{dt}(Q - Q_0)\right] \wedge (P - Q_0) =$$

$$= \left[\int_{\dot{S}} \frac{\mu\, dS}{R^4}(P - Q) \times \frac{d(P - Q)}{dt}(Q - Q_0)\right] \wedge (P - Q_0) =$$

$$= \left\{\int_{\dot{S}} \frac{\mu\, dS}{R^4}[(P - Q_0) - (Q - Q_0)] \times \left[\frac{d}{dt}(P - Q_0) - \frac{d}{dt}(Q - Q_0)\right](Q - Q_0)\right\} \wedge (P - Q_0) =$$

$$= \left\{\rho \frac{d\rho}{dt} \int_{\dot{S}} \frac{\mu\, dS}{R^4}(Q - Q_0) - \int_{\dot{S}} \frac{\mu\, dS}{R^4}(P - Q_0) \times \frac{d}{dt}(Q - Q_0) \cdot (Q - Q_0) - \right.$$

$$\left. - \int_{\dot{S}} \frac{\mu\, dS}{R^4}(Q - Q_0) \times \frac{d(P - Q_0)}{dt}(Q - Q_0)\right\} \wedge (P - Q_0),$$

ricordando i calcoli effettuati in nota nel numero 4, si ha

$$\int_{\dot{S}} (Q - Q_0) \wedge \frac{\mu\, dS}{R^3} \frac{dR}{dt}(P - Q) = \frac{1}{\rho^4}\left\{\frac{4}{\rho} \frac{d\rho}{dt}(\mathfrak{M} - \sigma)(P - Q_0) - \right.$$

$$\left. - (\mathfrak{M} - \sigma)\left[\frac{d(P - Q_0)}{dt} - \boldsymbol{\omega} \wedge (P - Q_0)\right]\right\} \wedge (P - Q_0) = \frac{1}{\rho^4}\left\{\frac{4}{\rho} \frac{d\rho}{dt}(P - Q_0) \wedge \right.$$

$$\left. \wedge \sigma (P - Q_0) + (P - Q_0) \wedge (\mathfrak{M} - \sigma)\left[\frac{d(P - Q_0)}{dt} - \boldsymbol{\omega} \wedge (P - Q_0)\right]\right\};$$

perciò l'equazione cardinale [16] diventa

$$[17]\quad \frac{d\boldsymbol{K}_{Q_0}}{dt} = \frac{3fm}{\rho^5}(P-Q_0)\wedge\sigma(P-Q_0) + \frac{\varepsilon fm}{\rho^4}\left\{\frac{4}{\rho}\frac{d\rho}{dt}(P-Q_0)\wedge\sigma(P-Q_0) + \right.$$
$$\left. + (P-Q_0)\wedge(\mathfrak{M}-\sigma)\left[\frac{d(P-Q_0)}{dt} - \boldsymbol{\omega}\wedge(P-Q_0)\right]\right\}.$$

Proiettando sugli assi centrali d'inerzia di S, e osservando che

$$\boldsymbol{K}_{Q_0} = \sigma\boldsymbol{\omega},$$

la [17] dà luogo alle equazioni scalari

$$[18]\quad \begin{cases} \mathfrak{A}\dfrac{dp}{dt} - (\mathfrak{B}-\mathfrak{C})\,qr = \dfrac{3fm}{\rho^5}(\mathfrak{C}-\mathfrak{B})\,yz + \\ \qquad + \dfrac{\varepsilon fm}{\rho^4}\left[\dfrac{4}{\rho}\dot{\rho}\,(\mathfrak{C}-\mathfrak{B})\,yz + (\mathfrak{M}-\mathfrak{C})\,y\dot{z} - (\mathfrak{M}-\mathfrak{B})\,z\dot{y}\right], \\ \mathfrak{B}\dfrac{dq}{dt} - (\mathfrak{C}-\mathfrak{A})\,rp = \dfrac{3fm}{\rho^5}(\mathfrak{A}-\mathfrak{C})\,zx + \\ \qquad + \dfrac{\varepsilon fm}{\rho^4}\left[\dfrac{4}{\rho}\dot{\rho}\,(\mathfrak{A}-\mathfrak{C})\,zx + (\mathfrak{M}-\mathfrak{A})\,z\dot{x} - (\mathfrak{M}-\mathfrak{C})\,x\dot{z}\right], \\ \mathfrak{C}\dfrac{dr}{dt} - (\mathfrak{A}-\mathfrak{B})\,pq = \dfrac{3fm}{\rho^5}(\mathfrak{B}-\mathfrak{A})\,xy + \\ \qquad + \dfrac{\varepsilon fm}{\rho^4}\left[\dfrac{4}{\rho}\dot{\rho}\,(\mathfrak{B}-\mathfrak{A})\,xy + (\mathfrak{M}-\mathfrak{B})\,x\dot{y} - (\mathfrak{M}-\mathfrak{A})\,y\dot{x}\right]. \end{cases}$$

di cui vedremo l'importanza.

7. Le equazioni [14] e [17] ovvero le [15] e [18], dànno, nelle ipotesi ammesse, la completa impostazione del problema del moto di un pianeta puntiforme P intorno al baricentro Q_0 del Sole, e del moto del Sole intorno al suo baricentro. Per la risoluzione di esse è bene rilevare che risulta

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{2}(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C})\,;\, I = \frac{1}{\rho^2}\sigma(P-Q_0)\times(P-Q_0) =$$
$$= \frac{1}{\rho^2}(\mathfrak{A}x^2 + \mathfrak{B}y^2 + \mathfrak{C}z^2).$$

va ricordato poi che riferendo il Sole ad una terna di assi ξ, μ, ζ, con l'origine in Q_0, e di direzione invariabile, i cui *versori* indichiamo con $\boldsymbol{I}, \boldsymbol{J}, \boldsymbol{K}$, introducendo gli angoli di Eulero θ, φ, ψ, che la terna mobile degli *assi centrali* x, y, z di S, forma colla terna di direzione invariabile ξ, η, ζ, i coseni direttori della prima terna rispetto alla seconda sono dati da [1]

[1] Cfr. T. LEVI-CIVITA e U. AMALDI, *Meccanica razionale*, vol. I, pag. 190 (Zanichelli, Bologna, 1927).

$$[19]\qquad \begin{cases} \alpha_1 = \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{I} = \cos\varphi\cos\psi - \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\psi\cos\theta\,, \\ \beta_1 = \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{J} = \cos\varphi\operatorname{sen}\psi + \operatorname{sen}\varphi\cos\psi\cos\theta\,, \\ \gamma_1 = \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{K} = \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta\,, \\ \alpha_2 = \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{I} = -\operatorname{sen}\varphi\cos\psi - \cos\varphi\operatorname{sen}\psi\cos\theta\,, \\ \beta_2 = \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{J} = -\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\theta\,, \\ \gamma_2 = \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{K} = \cos\varphi\operatorname{sen}\theta\,, \\ \alpha_3 = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{I} = \operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\theta\,, \\ \beta_3 = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{J} = -\cos\psi\operatorname{sen}\theta\,, \\ \gamma_3 = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{K} = \cos\theta\,. \end{cases}$$

Inoltre le coordinate $x\,,\ y\,,\ z$ del punto P, rispetto agli assi mobili sono legate alle coordinate $\xi\,,\ \eta\,,\ \zeta\,,$ dalle relazioni

$$[20]\qquad \begin{cases} x = \alpha_1\xi + \beta_1\eta + \gamma_1\zeta\,, \\ y = \alpha_2\xi + \beta_2\eta + \gamma_2\zeta\,, \\ z = \alpha_3\xi + \beta_3\eta + \gamma_3\zeta\,; \end{cases}$$

e le componenti $p\,,\ q\,,\ r$ della velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ di S sono espresse dalle

$$[21]\qquad \begin{cases} p = \dot\theta\cos\varphi + \dot\psi\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta\,, \\ q = -\dot\theta\operatorname{sen}\varphi + \dot\psi\cos\varphi\operatorname{sen}\theta\,; \\ r = \dot\varphi + \dot\psi\cos\theta\,. \end{cases}$$

PARTE II [1].

Moto asintotico del pianeta e del Sole.

§ 1. – Relazione fra il momento della quantità di moto del Sole e la velocità areolare del pianeta.

8. Dall'equazione vettoriale [14] del moto relativo del pianeta P intorno al baricentro Q_0 di S, moltiplicando ambo i membri vettorialmente a sinistra per $(P - Q_0)$, e indicando con

$$[22]\qquad \boldsymbol{A} = (P - Q_0) \wedge \frac{d(P - Q_0)}{dt}\,,$$

[1] Pervenuta all'Accademia il 28 settembre 1940–XVII.

il *vettore velocità areolare* del pianeta P nel suo moto relativo intorno a Q_0, si ottiene:

$$\frac{d\boldsymbol{A}}{dt} = -3f\left(1+\frac{m}{m_0}\right)\frac{1}{\rho^5}(P-Q_0)\wedge\sigma(P-Q_0)-$$

$$-\varepsilon f\left(1+\frac{m}{m_0}\right)\frac{1}{\rho^4}\left\{\frac{4}{\rho}\frac{d\rho}{dt}(P-Q_0)\wedge\sigma(P-Q_0)+\right.$$

$$\left.+(P-Q_0)\wedge(\mathfrak{M}-\sigma)\left[\frac{d(P-Q_0)}{dt}-\boldsymbol{\omega}\wedge(P-Q_0)\right]\right\}.$$

Dal confronto di questa relazione colla [17], si deduce

$$\frac{1}{m}\frac{d\boldsymbol{K}_{Q_0}}{dt}+\frac{1}{1+\frac{m}{m_0}}\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}=0,$$

da cui segue subito l'*integrale primo*

$$\boldsymbol{K}_{Q_0}+\frac{mm_0}{m+m_0}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}, \qquad [24]$$

con $\boldsymbol{a}$ vettore costante arbitrario. Esso costituisce una notevole relazione fra il momento della quantità di moto $\boldsymbol{K}_{Q_0}$ del Sole nel suo moto intorno al baricentro Q_0, e la velocità arcolare $\boldsymbol{A}$ del pianeta P nel moto relativo intorno a Q_0.

Moltiplicando ambo i membri della [24] scalarmente per $(P-Q_0)$, ovvero per $\frac{d(P-Q_0)}{dt}$, e osservando che,

$$\boldsymbol{A}\times(P-Q_0)=0, \quad \text{e} \quad \boldsymbol{A}\times\frac{d(P-Q_0)}{dt}=0,$$

si deduce

$$\boldsymbol{K}_{Q_0}\times(P-Q_0)=\boldsymbol{a}\times(P-Q_0) \quad ; \quad \boldsymbol{K}_{Q_0}\times\frac{d(P-Q_0)}{dt}=\boldsymbol{a}\times\frac{d(P-Q_0)}{dt},$$

le quali dicono che le *proiezioni del momento della quantità di moto del Sole sul raggio Q_0P e sulla direzione tangente alla traiettoria relativa di P, sono eguali alle analoghe proiezioni del vettore costante $\boldsymbol{a}$.*

L'integrale [24] esprime inoltre che il *piano per Q_0, parallelo ai vettori $\boldsymbol{K}_{Q_0}$ ed $\boldsymbol{A}$, passa costantemente per l'asse $(Q_0, \boldsymbol{a})$.*

§ 2. – VARIAZIONE SECOLARE DELL'INCLINAZIONE DEL PIANO DELL'ORBITA DI UN PIANETA.

9. Il prof. ARMELLINI nella Nota III citata ha dimostrato che le orbite dei pianeti tendono a divenire complanari e a disporsi nel piano equatoriale del Sole. Egli si riferisce però a un Sole sferico e suppone fisso il suo asse di rotazione.

Ma dalle equazioni qui stabilite si deduce facilmente che se l'asse di rotazione del Sole si suppone fisso, e coincidente con uno degli assi centrali d'inerzia, il piano dell'orbita del pianeta deve necessariamente coincidere col piano dell'equatore solare.

Infatti, se il Sole ruota intorno all'asse centrale d'inerzia z, il cui versore $\boldsymbol{k}$ si suppone fisso, si ha

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{k} \quad ; \quad \boldsymbol{K}_{Q_0} = \sigma \boldsymbol{\omega} = \mathcal{C} \omega \boldsymbol{k} ,$$

e quindi

$$\frac{d\boldsymbol{K}_{Q_0}}{dt} = \mathcal{C} \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \boldsymbol{k} .$$

Ma dalla [17] si ricava

$$(P - Q_0) \times \frac{d\boldsymbol{K}_{Q_0}}{dt} = 0 ,$$

si deduce perciò in questo caso

$$(P - Q_0) \times \boldsymbol{k} = 0 .$$

Cioè, *nell'ipotesi che il Sole ruoti intorno a un suo asse centrale d'inerzia, il quale conservi direzione invariabile nello spazio, il moto relativo del pianeta P intorno al baricentro Q_0 di S è piano, e si svolge precisamente nel piano dell'equatore solare, che conserva giacitura invariabile.*

10. Per rimuovere allora la difficoltà accennata, riprendiamo la questione servendoci delle equazioni qui stabilite e utilizzando l'integrale [24]. Perverremo al risultato ottenuto dal prof. Armellini dimostrando che la normale al piano istantaneo dell'orbita del pianeta P, tende ad una direzione fissa. Vedremo inoltre che alla stessa direzione tende il vettore momento della quantità di moto del Sole.

Poichè il vettore velocità areolare $\boldsymbol{A}$ è normale al piano dell'orbita istantanea del pianeta P, basta far vedere innanzi tutto che *il vettore $\boldsymbol{A}$ tende ad una direzione fissa e precisamente alla direzione del vettore costante $\boldsymbol{a}$ che figura nell'integrale* [24]. Se indichiamo con J l'angolo formato da questi due vettori si ha evidentemente

$$[25] \qquad \tan^2 J = \frac{1}{\cos^2 J} - 1 = \frac{a^2 A^2}{(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{a})^2} - 1 ,$$

da cui, derivando ambo i membri rispetto al tempo, moltiplicando quindi per $(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{a})^3$, e semplificando si ottiene

$$(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{a})^3 \frac{\tan J}{\cos^2 J} \frac{dJ}{dt} = a^2 \left[\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{A} \times \frac{d\boldsymbol{A}}{dt} - \boldsymbol{A}^2 \cdot \frac{d\boldsymbol{A}}{dt} \times \boldsymbol{a} \right] =$$

$$= a^2 (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}^2 \cdot \boldsymbol{a}) \times \frac{d\boldsymbol{A}}{dt} = a^2 \cdot \boldsymbol{A} \wedge (\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{a}) \times \frac{d\boldsymbol{A}}{dt} ,$$

cioè

$$[26] \qquad (\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{a})^2 \frac{\tan J}{\cos^2 J}\frac{dJ}{dt} = a^2\cdot\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\wedge\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{a}).$$

Se ora supponiamo soltanto che il Sole abbia struttura giroscopica intorno all'asse z, che siano cioè eguali i due momenti d'inerzia $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, e osserviamo che in questo caso, qualunque sia il vettore $\boldsymbol{U}$ si ha

$$\sigma\boldsymbol{U} = \mathfrak{A}\boldsymbol{U} + (\mathfrak{C}-\mathfrak{A})\,\boldsymbol{U}\times\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k},$$

l'equazione [23], ove si trascurino i termini che contengono il prodotto $\varepsilon(\mathfrak{C}-\mathfrak{A})$, (essendo molto piccola la differenza $\mathfrak{C}-\mathfrak{A}$ in confronto di $\mathfrak{C}$), diventa

$$[27] \qquad \frac{d\boldsymbol{A}}{dt} = -\frac{3f\left(1+\frac{m}{m_0}\right)}{\rho^5}(\mathfrak{C}-\mathfrak{A})\,z(P-Q_0)\wedge\boldsymbol{k} -$$

$$-\frac{\varepsilon f\left(1+\frac{m}{m_0}\right)\mathfrak{C}}{2\rho^4}(P-Q_0)\wedge\left[\frac{d(P-Q_0)}{dt}-\boldsymbol{\omega}\wedge(P-Q_0)\right].$$

Moltiplicando ambo i membri di questa vettorialmente a destra per il vettore $\boldsymbol{A}$, osservando che $\boldsymbol{A}$ è ortogonale a $(P-Q_0)$ ed a $\frac{d(P-Q_0)}{dt}$, e ricordando che qualunque siano i vettori $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$, si ha

$$(\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v})\wedge\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{u},$$

si ottiene

$$\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\wedge\boldsymbol{A} = \frac{3f\left(1+\frac{m}{m_0}\right)}{\rho^5}(\mathfrak{C}-\mathfrak{A})\,zA_z(P-Q_0) -$$

$$-\frac{\varepsilon f\left(1-\frac{m}{m_0}\right)\mathfrak{C}}{2\rho^4}\boldsymbol{\omega}\wedge(P-Q_0)\times\boldsymbol{A}\cdot(P-Q_0),$$

ove si è posto $A_z = \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{k}$. Da quest'ultima relazione, moltiplicando scalarmente per $\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{a}$, si ricava ancora

$$[28] \qquad \frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\wedge\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{a}) = \frac{3f\left(1+\frac{m}{m_0}\right)}{\rho^5}(\mathfrak{C}-\mathfrak{A})\,zA_z(P-Q_0)\times\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{a} -$$

$$-\frac{\varepsilon f\left(1-\frac{m}{m_0}\right)\mathfrak{C}}{2\rho^4}(P-Q_0)\times\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{\omega}\cdot(P-Q_0)\times\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{a}.$$

Ma dall'integrale [24], essendo $K_{Q_0} = \sigma\omega$, si deduce

$$\omega = \sigma^{-1}\left(a - \frac{mm_0}{m+m_0}A\right) = \frac{1}{\mathfrak{A}}\left(a - \frac{mm_0}{m+m_0}A\right) + \\ + \left(\frac{1}{\mathfrak{C}} - \frac{1}{\mathfrak{A}}\right)\left(a - \frac{mm_0}{m+m_0}A\right)\times k\cdot k,$$

cioè

$$[29] \qquad \omega = \frac{1}{\mathfrak{C}}\left(a - \frac{mm_0}{m+m_0}A\right) + \frac{\mathfrak{C}-\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}\mathfrak{C}}\left[\left(a - \frac{mm_0}{m+m_0}A\right) - \right. \\ \left. - \left(a - \frac{mm_0}{m+m_0}A\right)\times k\cdot k\right]$$

Sostituendo perciò nel secondo membro della [28] in luogo di ω questo valore e trascurando al solito il termine che contiene il prodotto $\varepsilon(\mathfrak{C}-\mathfrak{A})$, si ha infine

$$\frac{dA}{dt}\wedge A\times(A\wedge a) = \frac{3f\left(1+\frac{m}{m_0}\right)}{\rho^5}(\mathfrak{C}-\mathfrak{A})\,zA_z\,(P-Q_0)\times A\wedge a - \\ - \frac{\varepsilon f\left(1+\frac{m}{m_0}\right)}{2\rho^4}[(P-Q_0)\times A\wedge a]^2,$$

e pertanto la relazione (26) diventa

$$[30] \quad (A\times a)^3\frac{\tan J}{\cos^2 J}\cdot\frac{dJ}{dt} = a^2\left\{\frac{3f\left(1+\frac{m}{m_0}\right)}{\rho^5}(\mathfrak{C}-\mathfrak{A})\,zA_z(P-Q_0)\times A\wedge a - \right. \\ \left. - \frac{\varepsilon f\left(1+\frac{m}{m_0}\right)}{2\rho^4}[(P-Q_0)\times A\wedge a]^2\right\}.$$

Nel caso del Sole sferico, essendo $\mathfrak{C} = \mathfrak{A}$, questa porge

$$(A\times a)^3\frac{\tan J}{\cos^2 J}\frac{dJ}{dt} = -a^2\frac{\varepsilon f\left(1+\frac{m}{m_0}\right)}{2\rho^4}[(P-Q_0)\times A\wedge a]^2,$$

e poichè il secondo membro è positivo, e per J compreso fra zero e π, tan J ed $A\times a$ sono dello stesso segno, si ha che $\frac{dJ}{dt}$ è sempre *negativo*, cioè l'angolo J formato dai vettori A e a va continuamente decrescendo col tempo, e ciò in accordo col risultato ottenuto dal prof. Armellini.

11. Ciò non si può più affermare a priori nel caso di un Sole non sferico, ma schiacciato ai poli e quindi con $\mathfrak{C} > \mathfrak{A}$. Si arriva però allo stesso risultato considerando la variazione secolare di $\frac{dJ}{dt}$.

Intanto, poichè

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{a} = Aa\cos J\,, \quad \text{e} \quad (P-Q_0)\times\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{a} = \rho Aa\,\text{sen}\,J\cos l\,,$$

ove si è indicato con l l'angolo formato dal vettore $P - Q_0$ col vettore $\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{a}$, la [30] si riduce facilmente alla seguente

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{3f\left(1+\frac{m}{m_0}\right)}{\rho^4}(\mathfrak{C}-\mathfrak{A})\cdot\frac{zA_z}{A^2}\cos l - \frac{\varepsilon f\left(1+\frac{m}{m_0}\right)}{2\rho^2}\cdot\frac{a}{A}\,\text{sen}\,J\cdot\cos^2 l.$$

Per ottenere il valore secolare di $\frac{dJ}{dt}$ basta prendere il valore medio del secondo membro per l variabile fra zero e 2π. Poichè il valore medio di $\cos l$ è zero, e quello di $\cos^2 l$ è $\frac{1}{2}$, si ottiene

$$[31] \qquad \frac{dJ}{dt} = -\frac{\varepsilon f\left(1+\frac{m}{m_0}\right)}{4\rho^2}\frac{a}{A}\,\text{sen}\,J\,,$$

la quale mostra che il valore secolare di $\frac{dJ}{dt}$ è sempre negativo; quindi l'angolo J diminuisce secolarmente fino a tendere a zero.

12. La formula [31] è in buon accordo colla [27] stabilita dal prof. ARMELLINI nella Nota III citata. Per denderla più adatta al calcolo numerico osserviamo che dall'integrale [24], moltiplicando ambo i membri scalarmente per $\boldsymbol{A}$ si ottiene

$$\sigma\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{A} + \frac{mm_0}{m+m_0}A^2 = Aa\cos J\,,$$

da cui

$$\frac{a}{A} = \frac{1}{\cos J}\left[\frac{\sigma\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{A}}{A^2} + \frac{mm_0}{m+m_0}\right].$$

Ma si ha $A = \rho^2 n$, ove ρ è la distanza media del pianeta dal Sole, ed n è il moto medio dello stesso pianeta, e quindi con molta approssimazione

$$\sigma\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{A} = \mathfrak{C}\omega\rho^2 n\,,$$

perciò

$$\frac{a}{A} = \frac{1}{\cos J}\left[\frac{\mathfrak{C}\omega}{\rho^2 n} + \frac{mm_0}{m+m_0}\right].$$

La [31] diventa allora

$$\frac{dJ}{dt} = -\frac{\varepsilon f\left(1+\frac{m}{m_0}\right)\mathfrak{C}\omega}{4\rho^4 n}\left[1+\frac{mm_0\rho^2 n}{(m+m_0)\mathfrak{C}\omega}\right]\tan J\,.$$

13. Da quanto precede risulta dimostrato che la direzione del vettore velocità areolare $\boldsymbol{A}$ tende alla direzione del vettore costante $\boldsymbol{a}$ cioè *il piano dell'orbita del pianeta tende ad assumere la giacitura fissa perpendicolare al vettore* $\boldsymbol{a}$.

Per l'integrale [24] si deduce ancora che il *vettore momento della quantità di moto* $\boldsymbol{K_{Q_0} = \sigma\omega}$ *del Sole tende a diventare parallelo alla stessa direzione* $\boldsymbol{a}$.

§ 3. - Valore limite della velocità angolare del Sole e del moto medio di un pianeta.

14. Vogliamo ora far vedere che la velocità angolare ω del Sole e il moto medio del pianeta, tendono al crescere indefinito del tempo, allo stesso valore limite.

Incominciamo dal caso in cui l'asse di rotazione del Sole si supponga di direzione invariabile e coincidente con l'asse centrale d'inerzia z, nel qual caso, come abbiamo già visto, il moto del pianeta P avviene nel piano dell'equatore solare ($z = 0$). Osserviamo intanto che nell'ipotesi che il Sole abbia struttura giroscopica, nello stesso modo con cui dalla [23] si è ottenuta la [27], e notando ancora che

$$(P - Q_0) \wedge \left[\frac{d}{dt}(P - Q_0) - \boldsymbol{\omega} \wedge (P - Q_0)\right] = \boldsymbol{A} - \rho^2 \boldsymbol{\omega} + (P - Q_0) \times \boldsymbol{\omega} \cdot (P - Q_0),$$

dalla [17] si deduce ora

$$[32] \qquad \frac{d\boldsymbol{K}_{Q_0}}{dt} = \frac{3fm}{\rho^5}(\mathcal{C} - \mathcal{A})\, z\,(P - Q_0) \wedge \boldsymbol{k} +$$

$$+ \frac{\varepsilon f m\, \mathcal{C}}{2\rho^4}\left[\boldsymbol{A} - \rho^2 \boldsymbol{\omega} + (P - Q_0) \times \boldsymbol{\omega} \cdot (P - Q_0)\right].$$

Ma nel nostro caso, essendo

$$z = 0 \quad , \quad (P - Q_0) \times \boldsymbol{\omega} = 0 \quad ; \quad \boldsymbol{K_{Q_0} = \sigma\omega} = \mathcal{C}\omega\boldsymbol{k} \quad ; \quad \boldsymbol{A} = A\boldsymbol{k},$$

con $\boldsymbol{k}$ vettore unitario costante, le [27] e [32] diventano rispettivamente

$$[33] \qquad \begin{cases} \dfrac{d\boldsymbol{A}}{dt} = \dfrac{\varepsilon f\left(1 + \dfrac{m}{m_0}\right)\mathcal{C}}{2\rho^2}\left(\boldsymbol{\omega} - \dfrac{1}{\rho^2}\boldsymbol{A}\right), \\ \dfrac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = -\dfrac{\varepsilon f m}{2\rho^2}\left(\boldsymbol{\omega} - \dfrac{1}{\rho^2}\boldsymbol{A}\right), \end{cases}$$

e l'integrale [24] dà luogo al seguente integrale scalare

$$[34] \qquad \mathcal{C}\omega + \frac{mm_0}{m+m_0} A = a\,, \quad \text{(costante)}\,.$$

Ponendo nei secondi membri delle [33] in luogo di ρ ed A i loro valori medi e ricordando che $\frac{1}{\rho^2} A = n$, ove n è il *moto medio del pianeta*, si ha ancora

$$[33'] \qquad \begin{cases} \dfrac{dA}{dt} = -\dfrac{\varepsilon f\left(1+\dfrac{m}{m_0}\right)\mathcal{C}}{2\rho^2}(\omega - n)\,, \\ \dfrac{d\omega}{dt} = -\dfrac{\varepsilon f m}{2\rho^2}(\omega - n)\,. \end{cases}$$

Ora il moto medio di ciascun pianeta intorno al Sole è notoriamente minore della velocità angolare del Sole, si ha cioè $\omega > n$, e pertanto le relazioni [33'] dicono che *la velocità angolare ω del sole va diminuendo lentamente e costantemente col tempo, mentre la velocità areolare del pianeta va aumentando continuamente col tempo.*

15. Eliminiamo ora, nella seconda delle [33'], il moto medio n, per mezzo della [34], ove in luogo di A si ponga il suo valore medio $\rho^2 n$. Si ottiene così

$$[35] \qquad \frac{d\omega}{dt} = -\frac{\varepsilon f m}{2\rho^2}\left[1 + \frac{\mathcal{C}(m+m_0)}{mm_0\rho^2}\right](\omega - \omega_0)\,,$$

ove si intende per ρ la distanza media del pianeta dal Sole, ed ove si è posto

$$[36] \qquad \omega_0 = \frac{a(m+m_0)}{mm_0\rho^2 + \mathcal{C}(m+m_0)} = \text{costante}\,.$$

Integrando la [35] si ricava

$$\omega - \omega_0 = \Omega e^{-\frac{\varepsilon f m}{2\rho^2}\left[1+\frac{\mathcal{C}(m+m_0)}{mm_0\rho^2}\right]t}, \qquad (\Omega = \text{costante})\,,$$

e questa relazione mostra che la velocità angolare ω del Sole, al crescere indefinitamente del tempo, tende al valore costante ω_0.

Dalla [34] poi, tenendo conto della posizione [36], si deduce che anche il moto medio $n = \frac{A}{\rho^2}$, del pianeta, tende ad ω_0.

Resta così dimostrato quanto si è precedentemente affermato.

16. Ma la proprietà sussiste anche quando, più in generale, si suppone, variabile l'asse di rotazione del Sole e si dimostra che quest'asse tende a disporsi parallelamente alla direzione del vettore velocità areolare $\boldsymbol{A}$ e quindi del vettore costante $\boldsymbol{a}$. Cioè *l'asse di rotazione del Sole tende ad assumere una direzione fissa.*

Facciamo vedere innanzi tutto che il vettore momento della quantità di moto $\boldsymbol{K}_{Q_0} = \sigma\boldsymbol{\omega}$ del Sole, oltre a tendere, come abbiamo già visto, a una direzione fissa, che è quella del vettore $\boldsymbol{a}$ dell'integrale [24], tende anche a un valore numerico costante.

A tal fine assumiamo l'asse fisso ζ, il cui versore abbiamo indicato con $\boldsymbol{K}$, parallelo al vettore costante $\boldsymbol{a}$, poniamo cioè

$$\boldsymbol{a} = a\boldsymbol{K},$$

e moltiplichiamo ambo i membri della [32] scalarmente per $\boldsymbol{K}$. Si ottiene così

$$[37] \qquad \frac{d}{dt}(\boldsymbol{K}_{Q_0} \times \boldsymbol{K}) = \frac{3fm}{\rho^5}(\mathcal{C} - \mathcal{A})\, z\,(P - Q_0) \wedge \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{K} +$$

$$+ \frac{\varepsilon f m \mathcal{C}}{2\rho^4}\left[\boldsymbol{A}_\zeta - \rho^2\,\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{K} + (P - Q_0) \times \boldsymbol{\omega} \cdot \zeta\right],$$

ove si è posto $\boldsymbol{A}_\zeta = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{K}$.

Ma dalla [29] si ricava

$$(P - Q_0) \times \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{\mathcal{C}}\,\boldsymbol{a} \times (P - Q_0) +$$

$$+ \frac{\mathcal{C} - \mathcal{A}}{\mathcal{A}\mathcal{C}}\left[\boldsymbol{a} \times (P - Q_0) - \left(\boldsymbol{a} - \frac{mm_0}{m + m_0}\,\boldsymbol{A}\right) \times \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k} \times (P - Q_0)\right].$$

cioè

$$[38] \qquad (P - Q_0) \times \boldsymbol{\omega} = \frac{a}{\mathcal{C}}\,\zeta + \frac{\mathcal{C} - \mathcal{A}}{\mathcal{A}\mathcal{C}}\left[a\zeta - \left(\boldsymbol{a} - \frac{mm_0}{m + m_0}\,\boldsymbol{A}\right) \times \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{z}\right],$$

sostituendo perciò nella [37] e trascurando, come sempre, i termini che contengono il prodotto $\varepsilon\,(\mathcal{C} - \mathcal{A})$, si ricava

$$[39] \qquad \frac{d}{dt}(\boldsymbol{K}_{Q_0} \times \boldsymbol{K}) = \frac{3fm}{\rho^5}(\mathcal{C} - \mathcal{A})\, z\,(P - Q_0) \wedge \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{K} -$$

$$\frac{\varepsilon f m \mathcal{C}}{2\rho^2}\left[\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{K} - \frac{1}{\rho^2}\left(\boldsymbol{A}_\zeta + \frac{a}{\mathcal{C}}\,\zeta^2\right)\right].$$

Occorrendoci il valore secolare di $\frac{d}{dt}(\boldsymbol{K}_{Q_0} \times \boldsymbol{K})$, basta considerare nel secondo membro della [39] i valori medi dei termini che ivi compaiono e trascurare i termini periodici.

Ma ponendo

$$\xi = \rho \operatorname{sen}\lambda \cos\Phi \quad , \quad \eta = \rho \operatorname{sen}\lambda \operatorname{sen}\Phi \quad , \quad \zeta = \rho\cos\lambda ,$$

ove λ è la *colatitudine* e Φ la *longitudine* del punto P, per la terza delle [20] e le ultime tre delle relazioni [19] si ha

$$[40] \qquad z = -\rho \operatorname{sen}\lambda \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}(\Phi - \psi) + \zeta\cos\theta ,$$

e

$$(P - Q_0) \wedge k \times K = K \wedge (P - Q_0) \times k =$$

$$= (\xi J - \eta I) \times k = -\rho \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\lambda \cos(\Phi - \psi) .$$

Perciò

$$z\,(P - Q_0) \wedge k \times K =$$

$$= \rho^2 \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\lambda \cos(\Phi - \psi)\,[\operatorname{sen}\lambda \operatorname{sen}\theta \cdot \operatorname{sen}(\Phi - \psi) - \cos\lambda\cos\theta] ,$$

il cui valore medio, per Φ variabile da zero a 2π, è evidentemente nullo

Indicando allora con N il valore medio di

$$\frac{1}{\rho^2}\left(A_\zeta + \frac{a}{\mathcal{C}}\,\zeta^2\right)$$

la [39] porge, per la $\dfrac{d}{dt}(K_{Q_0} \times K)$, il valore secolare

$$\frac{d}{dt}(K_{Q_0} \times K) = -\frac{\varepsilon f m \mathcal{C}}{2\,a^2}(\omega \times K - N) ,$$

ovvero, essendo $K_{Q_0} = \sigma\omega = \mathcal{C}\omega - (\mathcal{C} - \mathcal{A})(\omega - rk)$, a meno di un termine contenente il prodotto $\varepsilon\,(\mathcal{C} - \mathcal{A})$, risulta

$$[41] \qquad \frac{d}{dt}(K_{Q_0} \times K) = -\frac{\varepsilon f m}{2\,\rho^2}(K_{Q_0} \times K - \mathcal{C}N) .$$

Poichè è $K_{Q_0} \times K > \mathcal{C}N$, la [41] dice che *la componente del momento della quantità di moto del Sole, secondo la direzione* K, *va secolarmente diminuendo.*

Intendendo che nel secondo membro di essa il valore di ρ sia uguale alla distanza media del pianeta dal Sole, si ricava integrando

$$K_{Q_0} \times K - \mathcal{C}N = K_0\, e^{-\frac{\varepsilon f m}{2\varrho^2}t} , \quad (K_0 = \text{costante}) .$$

Questa dimostra che per t tendente a infinito la componente del momento della quantità di moto del Sole, secondo la direzione K, tende al valore costante $\mathcal{C}N$. Ma abbiamo dimostrato nel paragrafo precedente che il

vettore $\boldsymbol{K}_{Q_0}$ tende proprio alla direzione $\boldsymbol{K}$, possiamo perciò concludere che *il vettore* $\boldsymbol{K}_{Q_0}$ *tende a diventare uguale al vettore costante* $\mathcal{C}N\boldsymbol{K}$.

17. Ciò premesso, riprendiamo la [32]. Dopo aver sostituito nel secondo membro in luogo di $(P - Q_0) \times \boldsymbol{\omega}$, il valore appossimato $\frac{a}{\mathcal{C}}\zeta$, dato dalla [38] e in luogo di z il valore $\zeta \cos\theta$, che si ottiene dalla [40], trascurando il primo termine che è periodico, si deduce

$$\frac{d\boldsymbol{K}_{Q_0}}{dt} = \frac{3fm}{\rho^5}(\mathcal{C} - \mathcal{A})\zeta\cos\theta \cdot (P - Q_0) \wedge \boldsymbol{k} +$$

$$+ \frac{\varepsilon f m \mathcal{C}}{2\rho^4}\left[\boldsymbol{A} - \rho^2\boldsymbol{\omega} + \frac{a}{\mathcal{C}}\zeta(P - Q_0)\right].$$

Passando ora al limite per $t \to \infty$, e ricordando che $\boldsymbol{K}_{Q_0}$ tende a un vettore costante, e ζ tende a zero, al limite si ha

$$\boldsymbol{A} - \rho^2\boldsymbol{\omega} = 0,$$

cioè

[42] $$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{\rho^2}\boldsymbol{A} = \bar{n}\boldsymbol{K},$$

essendo $\bar{n}$ il valore limite del moto medio del pianeta.

La [42] dimostra completamente quanto avevamo affermato, e cioè che *l'asse di rotazione del Sole tende a una direzione fissa e che la velocità angolare del Sole e il moto medio del pianeta tendono allo stesso valore.*

18. Quello che si è detto per il Sole, vale evidentemente anche per un pianeta, considerato come un corpo attratto da un punto lontano, e si conclude che la velocità angolare di rotazione di un pianeta intorno al proprio asse tende a diventare uguale al suo moto medio intorno al Sole. Altrettanto si dica per il moto di un satellite intorno al proprio pianeta.

Fisica. — *Centrifugazione fotoelettrica.* Nota (1) di QUIRINO MAJORANA, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

1.

In due Note precedenti (2), ho esposto il risultato di talune mie ricerche, sulla *centrifugazione elettronica*. In particolare, mi riferisco a quelle che concernono l'uso di cellule fotoelettriche in gas, poste in rotazione più o meno rapida. Ho continuato tale studio sperimentale, in condizioni variamente modificate; di esso desidero dare qui resoconto. Comunico anzitutto, che nel proseguirlo, ho sempre più riconosciuto, quanto grande sia la complessità dei fatti osservati od osservabili. Mentre io, nell'intraprendere le ricerche in parola, ero stato mosso dal desiderio di ottenere effetti derivabili da una accelerazione meccanica, impressa ad elettroni, il loro sviluppo ulteriore mi ha fatto comprendere, per ragioni che saranno specificate in seguito, che, ponendo in rotazione delle cellule fotoelettriche, illuminate, con una certa probabilità, si provoca l'accelerazione di particelle elettrizzate di varia natura. Esse possono essere non solo elettroni, ma anche ioni pesanti, e forse atomi e particelle metalliche. Si tratta con ciò di un'asserzione di carattere intuitivo, la cui sicura attendibilità non ho sinora potuto controllare.

Comunque, credo che sia più proprio chiamare *centrifugazione fotoelettrica* e non *elettronica*, i fatti osservabili ponendo, come si è detto, in rotazione, delle cellule fotoelettriche. Se in certi casi, non ancora perfettamente specificabili, si può con ciò ottenere una pura centrifugazione elettronica, la dicitura da me ora proposta li comprende evidentemente.

Come ho già annunziato in fine della seconda Nota citata, il dispositivo a rotazione usato, già descritto, presentava l'inconveniente di ostacolare il passaggio delle correnti fotoelettriche, attraverso i cuscinetti a sfere, sostenenti l'albero di rotazione. Circa la spiegazione di questo fatto, ho osservato che realmente tali cuscinetti offrono una resistenza elettrica abbastanza notevole, quando l'albero ruota. Questa resistenza, se misurata con un comune ponte di WHEATSTONE, nel quale sia inserita una f. e. m. di un paio di volt, risulta dell'ordine di qualche centinaio di ohm. E cre-

(1) Pervenuta all'Accademia il 22 agosto 1940-XVIII.

(2) Questi « Rendiconti », Serie VII, vol. I, fasc. 8, 9, 1940-XVIII.

detti dapprima che, per ciò, l'inserzione nel circuito delle cellule, di tale resistenza, nessun'influenza avrebbe potuto avere sulla misura delle correnti fotoelettriche osservate. Ciò si dice, perchè, come è noto, queste non rimangono sensibilmente affievolite, nemmeno per l'inserzione di più decine di migliaia di ohm, in conseguenza dell'elevatissimo valore della resistenza corrispondente, alla tenue carica spaziale fotoelettrica. Ma realmente, non era esatto, nel caso dei cuscinetti a sfere in rotazione, parlare di vera e propria resistenza ohmica. Infatti, la misura eseguita col ponte di WHEATSTONE, dipende dalla f. e. m. usata. Se questa è evanescente, la resistenza che si crede di misurare, tende all'infinito. Ora, nel caso delle correnti fotoelettriche, generate ed osservate senza l'inserzione di alcuna f. e. m. (come appunto avveniva nelle prime ricerche da me descritte), la causa che le provoca corrisponde alla energia impressa agli elettroni, per altro non troppo numerosi, in conseguenza della loro estrazione, operata dalla luce. A tale energia si aggiunge, è vero, quella eventuale, corrispondente al ricercato fenomeno di centrifugazione; ma, in complesso, si può dire, che la f. e. m. equivalente che muove i fotoelettroni, debba essere estremamente debole. Come risultato dunque, le correnti fotoelettriche osservate con un dispositivo del genere, restano notevolmente affievolite dalla apparente resistenza dei cuscinetti a sfere. La causa prima di ciò va ricercata nella presenza del lubrificante, che si rinnova continuamente, e con tanto maggiore facilità, quanto maggiore è la velocità di rotazione del congegno.

Da tutto ciò deriva, che i diagrammi da me dati nelle due Note citate, hanno subìto l'azione di quella causa perturbatrice. Essi si abbattono verso l'asse delle velocità al crescere di questa, assai più di quanto corrisponde, in certi casi, al solo ricercato effetto di centrifugazione.

In vista di simile constatazione, ho modificato l'apparecchio a rotazione già descritto, come ora è indicato nello schema della fig. 1. In essa si vede, a differenza di quanto avveniva nel primo modello, che, mentre la presa di corrente dalle placche (reoforo positivo) è ancora fatta mediante il pozzetto in rame, contenente mercurio, P, solidale con l'asse di rotazione, portato dai cuscinetti a sfere N, N'; quella dalle griglie è realizzata con un secondo pozzetto simile P'. Questo è però fisso sul sostegno dell'apparecchio e non ruota. Un filo di rame centrale, col quale termina in basso l'asse di rotazione, pesca in P'. Il complesso dei due pozzetti, P e P', non dà sensibili effetti termoelettrici accidentali, al ruotare del congegno. Una traccia se ne nota però, cortocicuitando le cellule (cioè unendo metallicamente placca e griglia). Non sono però rilevabili, nemmeno in questo caso, effetti del campo magnetico terrestre.

Col dispositivo così modificato, ho da qualche tempo, ripreso in esame i vari effetti osservabili, ponendo in rotazione, cioè, cellule fotoelettriche, di differenti caratteristiche. Tali effetti possono variare grandemente con

la natura del metallo fotoelettrico (per ora sempre alcalino), la presenza o meno di atmosfera gassosa nella cellula e di f. e. m. acceleratrice. Pur contando in seguito di riferire sullo studio dell'influenza del variare di tante modalità, mi limito a dire in questa Nota dei risultati ottenuti sperimentando con sole cellule al sodio, in atmosfera gassosa, poste in circuito con f. e. m. acceleratrice. Effetti notevoli si ottengono anche in tali condizioni, che si differiscono, peraltro, da quelli già esposti nelle Note prece-

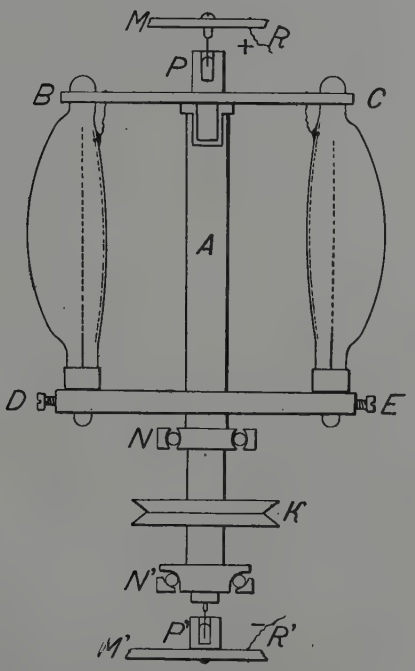


Fig. 1. – Nuovo apparecchio per la centrifugazione fotoelettrica.

denti. Allora, avevo, di proposito, eliminato l'uso di qualsiasi f. e. m. Essendomi poi accorto che introducendo questa, si ottengono cospicui effetti di centrifugazione, che, per senso, coincidono con quelli prevedibili, in base all'idea informatrice delle ricerche attuali, credo opportuno, come ho ora detto, esporre subito i risultati ottenuti nelle condizioni accennate.

Caratteristiche delle cellule al sodio usate. Le cellule usate sono tre; hanno la forma rappresentata schematicamente nella figura 1 che ne indica solo due, per semplicità di disegno. Contengono un'atmosfera di argon ed elio mescolati, di pressione non precisata. Il diametro di placca è di cm. 4,7; le griglie sono di molibdeno, in filo piegato a cerchio, del dia-

metro delle placche; sono a queste parallele e sostengono ciascuna una rete di filo sottile (mm. 0,1), con maglie di mmq. 4 di area. Placca e griglia, in ciascuna cellula, distano per circa mm. 5. Le griglie sono sostenute, oltre che dalla parte bassa, anche dalla alta; il che per semplicità, non è indicato in figura. Ciò ha importanza, ai fini della resistenza meccanica del congegno, alla forza centrifuga. Con tutto ciò, una lieve deformazione delle griglie si verifica, al ruotare dell'apparecchio. Non credo che tal fatto possa in qualche modo influire sui risultati di cui sarà presto detto. Ma mi riservo di verificare più sicuramente ciò in seguito; ed in attesa di poter disporre di cellule con griglie indeformabili, mi sia lecito esporre obbiettivamente i fatti osservati, servendomi delle descritte cellule.

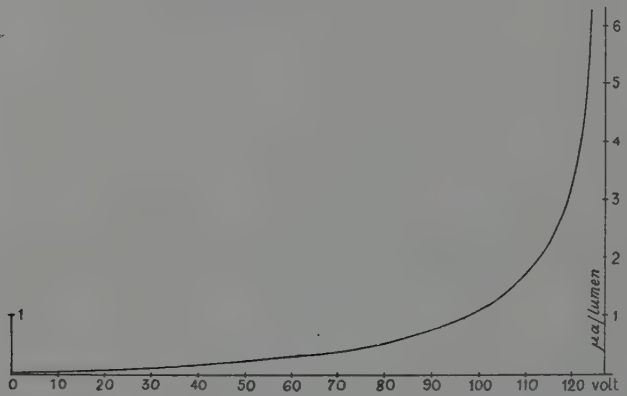


Fig. 2. – Diagramma di sensibilità delle cellule a sodio, in atmosfera gassosa.

Queste cellule si *accendono*, quando sono sottoposte ad una f. e. m. di almeno, circa 130 volt; lo spettro del gas, così reso incandescente (una resistenza zavorra di 20000 ohm è inserita), rivela la costituzione chimica suaccennata. È peraltro da avvertire, che le cellule non presentano sensibilità esattamente eguali; ciò dipende da evidente incertezza costruttiva. Ma, per il modo con cui le cellule sono connesse, questo fatto non ha importanza. Infatti, il galvanometro, per la inerzia del suo equipaggio, integra gli impulsi fotoelettrici ad esso trasmessi, dalle tre cellule in rotazione, ed illuminate a turno da un fascio che cade lateralmente sull'apparecchio.

La figura 2 dà il diagramma di sensibilità media delle cellule, rilevato cioè, mentre il sistema è in lenta rotazione (giri 1 per sec.). In esso, le ascisse rappresentano la f. e. m. acceleratrice, regolata progressivamente sino a circa 130 volt; le ordinate, le corrispondenti correnti fotoelettriche, espresse in μa/lumen, ottenute quando si illumina il sistema, lateralmente, con 1 hefner, a m. 0,20 di distanza. Il flusso luminoso, così cadente su

di esso è, nell'istante in cui una cellula ha la sua placca perpendicolare ai raggi della lampada, di 0,042 lumen. Ciò perchè l'area delle placche è di cmq. 17. Essendo le tre cellule disposte a 120°, questo flusso pulsa alquanto, scendendo a valori non troppo inferiori a quello ora dato. Ciò dipende, dai dati geometrici del congegno ruotante.

In conseguenza, si comprende, che il diagramma rappresentato nella fig. 2, non rappresenta con precisione, la sensibilità reale media delle tre cellule, ma qualcosa di alquanto meno. Da tale diagramma, si rileva un brusco salto di corrente fotoelettrica, a circa 126 volt. Questo fatto corrisponde all'accensione di una, almeno, delle tre cellule (la più sensibile). Per una tensione di circa 120 volt, si rileva inoltre, che il sistema ha una sensibilità di circa 3 μa/lumen, che va rapidamente decrescendo per tensioni più deboli, sino a diventare circa 100 volte più piccola, per tensione nulla. Realmente dunque, la vera sensibilità media delle cellule è alquanto più grande. Ma poichè si sperimenterà sempre col sistema in movimento, ciò non ha importanza.

Nelle esperienze che saranno descritte, l'illuminazione delle cellule vien fatta con una lampada ad incandescenza di 800 candele, sita a distanza regolabile. Si possono osservare così, correnti sino a circa 5 μa. A tale intensità, osservata con una f. e. m. di 120 volt, corrisponde un flusso luminoso di 1,7 lumen, dato dalla lampada suddetta, posta a cm. 90 di distanza. Allontanandola, si può diminuire a piacere l'illuminazione.

Nel corso delle esperienze, queste cellule sono dunque sottoposte a volte, ad intensa illuminazione. Poichè esse sono a gas, non si può ammettere che vi sia esatta proporzionalità tra flusso luminoso e corrente fotoelettrica, specialmente per forti illuminazioni. Per semplicità, non ho voluto preoccuparmi di tale fatto, che porta evidentemente ad una complicazione di più, nella descrizione dei fenomeni. Mi sono perciò sempre limitato ad osservare, caso per caso, l'intensità delle correnti fotoelettriche, che, per brevità, chiamerò *intensità fotoelettriche*, senza meglio specificare i flussi luminosi.

2.

Passo ora a indicare il modo con cui ho sperimentato col descritto dispositivo.

Premetto che in tutte le esperienze, di cui sarà detto in questa parte della Nota, si usa sempre una f. e. m. acceleratrice dei fotoelettroni. Il caso di effetti osservabili in assenza di essa, che venne già da me trattato all'inizio di queste ricerche, usando il primitivo apparecchio, sarà ripreso in seguito.

L'osservazione delle correnti fotoelettriche date dalle cellule, in rotazione lentissima (1 giro a sec.), o comunque rapida (sino a circa 40

giri/sec.), viene eseguita, inserendole in circuito con un galvanometro della sensibilità di $5{,}7 \cdot 10^{-10}$ amp., le cui letture si fanno su scala lunga m. 2, sita a m. 6 di distanza, dal galvanometro. Questo è a bobina mobile e del tipo differenziale. Possiede cioè una seconda bobina, nella quale si può inviare una corrente compensatrice, per annullare la deviazione prodotta dalle correnti fotoelettriche. Con tale artificio, gli spostamenti osservabili dalla posizione di equilibrio, sono da imputarsi esclusivamente agli effetti che si studiano. Si usa determinare ogni volta il valore del rapporto i/I, fra la corrente i, corrispondente ad una data deviazione, a compensazione avvenuta, e la corrente fotoelettrica I, totale, che è stata compensata. Il valore di questa corrente, lo si legge, con opportuna taratura, in un altro galvanometro, in circuito con la bobina compensatrice, una conveniente resistenza e un accumulatore da 2 volt. Nel circuito delle cellule è inoltre inserita una resistenza di circa 20.000 ohm, che ha lo scopo di proteggere il galvanometro, da una fortuita *accensione* delle cellule.

Gli effetti osservabili quando l'apparecchio, indicato nella fig. 1 viene posto in rotazione, saranno detti di *centrifugazione diretta*; ciò per distinguerli da quelli che si rilevano quando ciascuna cellula viene rovesciata di 180°, sui suoi due sostegni nei dischi *BC*, *DE*. In tal caso si tratterà di *centrifugazione inversa*. Le due posizioni delle cellule, che corrispondono a questi due diversi casi, si differenziano per il fatto, che, nel primo, le griglie sono, rispetto alle placche, più lontane dall'asse; mentre, nel secondo sono più vicine.

Centrifugazione fotoelettrica diretta. – Si cominci ad usare una f. e. m. applicata alle cellule alquanto inferiore, ma non molto vicina, a quella di *accensione*: per es. di volt 106. Con una conveniente illuminazione, si abbia così una moderata intensità fotoelettrica, misurabile al galvanometro compensatore: $I = \mu a$ 1,25; ciò avvenga quando la velocità di rotazione dell'apparecchio è la più piccola possibile, perchè la deviazione del galvanometro sia praticamente fissa (1 giro/sec.). Accrescendo ora tale velocità, non si nota effetto sicuro o sensibile, sinchè essa non supera 6 od 8 giri/sec. Questo risultato si differenzia molto da quanto era stato osservato nelle prime ricerche, nelle quali era facile rilevare una notevolissima riduzione della corrente fotoelettrica, già a velocità così poco elevate. Salvo a ritornare in seguito su ciò, credo opportuno dire che tale differenza di risultati, non ha come unica causa, la soppressione dell'accennato inconveniente, proveniente dalla presenza dei cuscinetti a sfere. Esso dipende inoltre, e forse principalmente, dalla circostanza che, nelle esperienze di cui ora si discorre, si usa una f. e. m. acceleratrice, che mancava del tutto nei primi dispositivi.

Al crescere ulteriore della velocità di rotazione, il galvanometro comincia nettamente a deviare, nel senso di *accrescimento della corrente*

fotoelettrica. Per la massima velocità, di circa 40 giri/sec., la deviazione è di 490 mm., al che corrisponde un aumento di corrente fotoelettrica di $i = \mu a\ 0{,}279$, ossia di circa il 20 % del suo valore iniziale. Le osservazioni si fanno poi, per varie velocità intermedie, e si costruisce la più bassa curva del gruppo della figura 3, che si riferisce alla tensione di volt 106. In tale figura sono riportate come ascisse le velocità, e come ordinate i valori dei rapporti i/I. Per la stessa tensione di volt 106, si costruiscono altre curve, corrispondenti ad intensità fotoelettriche iniziali, successivamente crescenti: $I = \mu a\ 2{,}5$; 3.85; 5. Tali curve, come si vede dalla figura,

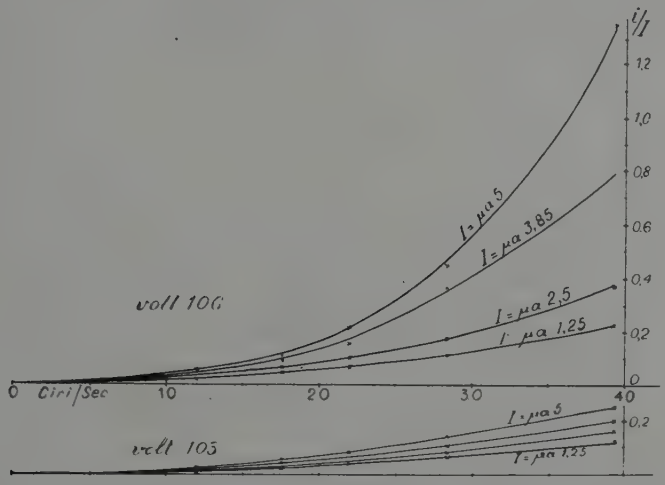


Fig. 3. – Diagrammi dell'effetto a varie velocità e f. e. m. acceleratrici.

sono sempre più rialzate, rispetto alla prima. Ciò indica il fatto per cui, *tanto più efficiente è la velocità di rotazione delle cellule, ai fini dell'accrescimento relativo, i/I, della corrente fotoelettrica, quanto maggiore è il valore iniziale di questa corrente*. Forse la legge che lega insieme velocità di rotazione, valore iniziale ed accrescimento della corrente fotoelettrica, è di carattere esponenziale. Così, per es., si rileva che, alla velocità massima di giri 39,3/sec., mentre, per $I = 1{,}25$ si ha un accrescimento, come si è detto, del 20 %, per $I = 5$, quell'accrescimento è del 130 %.

I risultati predetti sono legati al valore particolare della f. e. m. acceleratrice, di volt 106. Se si ripetono le osservazioni per un valore anche di poco più basso, per esempio volt 103, si ha il gruppo di diagrammi corrispondentemente segnato, nella parte bassa della stessa figura 3. Si vede da esso, quanto il fenomeno si sia ridotto; infatti il massimo accrescimento, di cui si è ora detto, non è in questo caso, che di circa il 25 %,

cioè di 1/5 del caso precedente. Si avverte che evidentemente, per ottenere correnti fotoelettriche iniziali, con volt 103, corrispondentemente eguali a quelle che prima si erano avute per volt 106, occorre adoperare intensità di illuminazione delle cellule, alquanto maggiori. Ciò risulta dal diagramma di sensibilità, di cui si è fatto cenno precedentemente.

Se ora si sperimenta con f. e. m. più elevate di volt 106, cioè più vicine a quella a cui corrisponde l'*accensione* delle cellule, si hanno effetti più complicati. Essi sono rappresentati nella parte alta della fig. 4 (centrifugazione diretta), e si riferiscono ad una f. e. m. di volt 110. Si noti anzitutto, che con tale tensione, non si fa luogo all'*accensione* spontanea delle cellule, cioè senza l'eccitazione ottica. Neanche ponendole in rotazione rapidissima, si provoca tale accensione: ciò è vero, comunque si

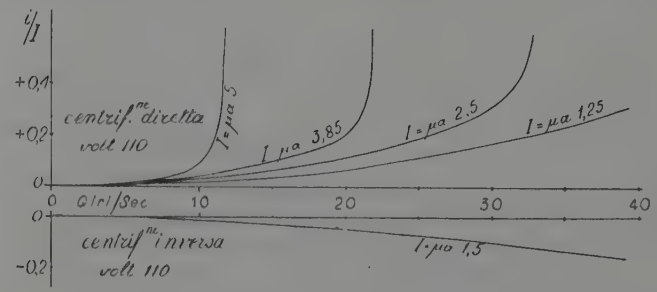


Fig. 4. – Centrifugazione diretta o inversa con f. e. m. elevata (110 volt).

forzi il voltaggio acceleratore, mantenendolo però sempre al disotto del limite massimo, di circa 126 volt. Ora, per 110 volt e per una intensità fotoelettrica iniziale moderata, quale è quella di μa 1,25, si ha, per vero, un diagramma simile per andamento a quelli della fig. 3, sebbene alquanto rialzato; per le intensità maggiori, gli altri tre diagrammi della figura 4, fanno vedere, che si provoca l'accensione delle cellule, per valori tanto più piccoli della velocità di rotazione, quanto più vivacemente le cellule sono illuminate. Nella figura, l'accensione corrisponde alla brusca salita dei singoli diagrammi. Forse, anche per il diagramma più basso ($I = 1{,}25$) si sarebbe potuto osservare un andamento simile, se si fosse potuta forzare la velocità di rotazione, al disopra di 39,3 giri/sec. E, probabilmente, per ogni tipo di cellule, deve esistere una certa intensità critica fotoelettrica, al disotto della quale non è possibile, comunque forzando la velocità di rotazione, provocarne l'accensione. È superfluo rilevare che, essendo la sensibilità delle tre cellule usate, alquanto diversa dall'una all'altra, quando se ne osserva l'accensione, mentre esse ruotano, ciò avverrà probabilmente in una sola di esse: la più sensibile. Ma evidentemente, il fatto non è rile-

vabile ad occhio; esso non tocca però, l'interesse generale di tutte queste considerazioni.

Da quanto precede si rileva che l'accensione delle cellule può dipendere, oltre che dai valori della f. e. m. acceleratrice e della intensità di illuminazione delle cellule, dalla loro velocità rotatoria; ossia dalla forza centrifuga, che nel loro interno si sviluppa.

Centrifugazione fotoelettrica inversa. – Se possiamo pensare che i fatti descritti sieno dovuti ad una sorta di centrifugazione di particelle elettrizzate, che così sono più facilmente sollecitate a portarsi dalle placche alle griglie, è da attendersi qualche cambiamento nella loro osservazione, invertendo il senso della centrifugazione stessa. Ciò si può facilmente realizzare, rovesciando la posizione delle cellule, come è stato detto in principio di questa Nota. Si avrà allora la *centrifugazione inversa*. In tali condizioni la luce che illumina le cellule, per ragioni geometriche rilevabili in figura, perviene sulle placche sensibili, in modo meno efficiente. Infatti, l'albero A proietta la sua ombra, attraverso la griglia, sullo strato sensibile. Ma comunque, forzando il valore della intensità luminosa, si possono ricavare correnti fotoelettriche paragonabili a quelle ottenute, nel caso della centrifugazione diretta.

Non sono state fatte sinora misure molto numerose, in queste nuove condizioni sperimentali, in attesa di realizzare un dispositivo più razionale; tuttavia, posso dare il diagramma rilevato, usando una f. e. m. di 110 volt ed una intensità fotoelettrica di μa 1,25. Esso, perchè sia meglio confrontabile con l'altro già ottenuto nel caso della centrifugazione diretta, per la stessa f. e. m. di 110 volt, è riportato nella parte bassa della figura 4. Da tale diagramma, si rileva che le ordinate sono negative, almeno per velocità di rotazione superiori a circa 7 giri/sec. Ciò vuol dire, che la corrente fotoelettrica, al ruotare delle cellule, anzichè aumentare, diminuisce. Tale diminuzione si appalesa però, in valore assoluto, alquanto più piccola dell'accrescimento indicato dal corrispondente diagramma superiore ($\mu a = 1{,}25$) della centrifugazione diretta.

Per quanto diagrammi ottenibili in simili condizioni e nel caso di più intense illuminazioni, non sieno da me ancora stati rilevati, per le ragioni più sopra specificate; è da attendersi che essi non possono assomigliare, per il loro andamento e a parte il segno, a quelli della centrifugazione diretta, indicati nella stessa figura e di cui già si è detto. Infatti, il fenomeno della accensione delle cellule, essendo caratteristico della crescente intensità fotoelettrica, deve mancare quando questa anzichè crescere, decresce. I diagrammi in parola, dunque, presenteranno andamento analogo all'unico indicato in figura, e con ordinate probabilmente maggiori, in valore assoluto.

Un altro fatto interessante si riferisce agli effetti della centrifugazione inversa, nel caso delle piccole velocità. Ho infatti constatato che essi,

non solo non corrispondono ad una sicura *diminuzione* della corrente fotoelettrica (come avviene per le grandi velocità), ma possono consistere in un *accrescimento* (come avviene sempre per la centrifugazione diretta). Una simile anomalìa può già essere sospettata, esaminando il diagramma inferiore della figura 4. In esso, potrebbero forse le ordinate essere leggermente positive, tra la velocità zero e quella di circa 7 giri/sec.; ma il diagramma non metterebbe in evidenza questo fatto o perchè la sua scala è molto ridotta, oppure per incertezze sperimentali. Sulle vere ragioni dell'anomalìa in parola, ritornerò in seguito.

3.

Discussione dei risultati sperimentali. — In attesa di riferire su nuove ricerche in corso, con cellule appositamente costruite, si fanno ora alcune considerazioni sui risultati esposti. Questi si riferiscono, come si è visto, all'uso di cellule al sodio, di particolare costruzione, in gas, soggette a f. e. m. acceleratrice.

Come è noto, la presenza del gas, nella cellula, mentre può moltiplicare considerevolmente, per ionizzazione, gli effetti fotoelettrici, rende questi assai più complicati e di più difficile interpretazione. E ciò deve avvenire in misura maggiore, se al nuovo effetto della centrifugazione, si aggiunge il processo di *fotoionizzazione*.

Si è visto però, quanto sieno cospicui gli effetti osservabili nelle accennate condizioni: la corrente fotoelettrica vien persino raddoppiata, sotto l'azione della forza centrifuga. È perciò che, pur comprendendo le difficoltà di interpretare i fatti osservati, ho anteposto lo studio in tali condizioni, a quello di cellule in vuoto spinto, che sarà ripreso in seguito.

Nel discutere i risultati annunziati, si può sospettare dapprima, che essi possano ascriversi, almeno in parte, ad una modificazione della distribuzione del gas, nell'interno della cellula, sotto l'azione della forza centrifuga. Questa modificazione, di carattere statico, a velocità rotatoria uniforme, deve consistere in un accrescimento della densità gassosa, presso le pareti della cellula, più lontane dell'asse di rotazione, ed in un affievolimento, presso questo. Rendiamoci conto dell'entità di un simile effetto e all'uopo, consideriamo un cilindro a base circolare, ruotante intorno al suo asse, con la velocità angolare ω, riempito di gas. La densità ρ, di questo risulta, per la detta ragione, crescente dall'asse verso le pareti cilindriche. Uno strato cilindrico concentrico, di raggio r, nell'interno della massa gassosa, dà luogo, per cm della sua altezza, all'incremento di forza centrifuga:

$$df = 2\pi\omega^2 \rho r^2 \, dr \, .$$

L'incremento di pressione, per unità di superficie, è:

$$dp = \omega^2 \rho r \, dr .$$

Se M è la massa di 1 cmc. in condizioni normali, del gas usato, T la sua temperatura assoluta, R la costante dei gas, si ha, per la legge di Boyle:

$$M dp = RT \, d\rho .$$

Da tali due relazioni, si ricava:

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{\omega^2 r M}{RT} dr ;$$

che, integrata, dà:

$$\frac{\rho_r}{\rho_0} = e^{\frac{M\omega^2 r^2}{2RT}} ,$$

dove, ρ_r e ρ_0 sono le densità sulle pareti circolari e sull'asse del cilindro. Supponiamo che il gas usato sia l'argon; sia $r =$ cm 10; $\omega = 314$ (50 giri/sec). Sostituendo tali valori, si ha $\rho_r/\rho_0 = 1{,}01$, circa. Il caso delle cellule da me usate, è diverso da quello ora considerato, essendo le placche distanti dalle griglie, solo cm. 0,5. L'eventuale differenza fra le densità gassose in vicinanza di tali elettrodi, deve essere assai più piccola di quella ora calcolata (che si riferisce ad una distanza di cm. 10). Il loro rapporto, anche per le massime velocità, non può differire dall'unità, per più di qualche decimillesimo. Ad una così tenue differenza, non si può certo attribuire, almeno in parte notevole, l'insieme degli effetti osservati.

Un'altra causa perturbatrice, alla quale ho peraltro già accennato, potrebbe esser costituita dalla deformabilità dell'anodo. Questo difetto può occasionare, al ruotare delle cellule, una variazione, sia pur lieve, della distanza fra catodo ed anodo; in conseguenza, al ruotar delle cellule, la corrente fotoelettrica potrebbe restar modificata. Una presunzione del genere è rafforzata dal fatto che il cammino medio degli atomi neutri di argon, alla pressione esistente nella cellula, è di un ordine di grandezza più piccolo dello spessore dello strato gassoso. Infatti, mentre questo è di mm. 5, l'altro è di mm. 0,36. Gli ioni, accelerati secondo un'unica direzione, dal campo, possono avere un cammino medio alquanto differente. Ma si comprende, comunque, che il numero di urti probabili possa accrescersi, con l'aumentare della distanza degli elettrodi; il che tenderebbe a favorire la ionizzazione e ad accrescere il valore della corrente fotoelettrica osservabile. Questo processo è però accompagnato da una causa che tende a diminuire gli effetti. Infatti, all'allontanamento della griglia, dal catodo, corrisponde un affievolimento dell'intensità del campo, dato dalla f. e. m. esterna, inserita nel circuito della cellula. In conseguenza, gli ioni sono al-

quanto più debolmente sollecitati a muoversi. Queste due cause opposte, non è detto che in generale si compensino, nei loro effetti. Ciò dicasi, a parte la circostanza, che le leggi con cui esse agiscono, sono probabilmente di natura assai diversa: esponenziale la prima, lineare la seconda. Può dunque darsi, che le osservazioni fatte vengano perturbate, in misura difficilmente comprensibile *a priori*, dall'insieme di queste due cause.

Assai interessante, appare dunque, sperimentare con altre cellule al sodio, con griglie assolutamente indeformabili, sotto l'azione della forza centrifuga. Ciò è attualmente in corso di preparazione, ma non so quando potrò riferire, sui risultati di un simile studio. Credo opportuno però aggiungere, che esperimenti preliminari, eseguiti con cellule al cesio, in gas nobile, con anodo diversamente foggiato da quello delle cellule al sodio descritte, hanno dato risultati qualitativamente analoghi. L'anodo di tali cellule è costituito da un corto filo rigido, rettilineo, ben fissato ai suoi estremi, che non subisce sensibile deformazione al loro ruotare. Ma si tratta di esperimenti preliminari, che avranno in seguito, maggiore sviluppo.

Per discutere ulteriormente gli effetti osservati, ammettiamo che le due cause accennate (centrifugazione del gas e deformabilità dell'anodo, sotto l'azione della forza centrifuga), non abbiano, entrambe, influenza apprezzabile, nella manifestazione degli effetti studiati. Non resta, allora, che attribuire questi, ad una reale variazione del numero delle cariche elettriche, che si portano da un elettrodo all'altro. Tale numero verrebbe accresciuto o diminuito, a seconda che si tratti di cariche negative o positive (che viaggerebbero fra loro, in senso inverso) e di centrifugazione diretta od inversa. Come si è già detto, l'effetto è misurato dal valore del rapporto $R = i/I$, fra l'accrescimento i della corrente fotoelettrica, ed il valore I, di questa. R dipende, oltre che dalle caratteristiche particolari delle cellule usate, dalla f. e. m. acceleratrice V, e dalla stessa intensità fotoelettrica I, osservabile con cellule in quiete. Fra tali quattro variabili esiste una certa relazione:

$$R = f(V, \omega, I),$$

dove la natura della funzione f, è sconosciuta. La I, espressa in unità di corrente fotoelettrica, è a sua volta dipendente dalla intensità dell'illuminazione delle cellule, in un modo che non è necessario esplicitare. La funzione f deve corrispondere all'andamento dei diagrammi già visti. E deve sodisfare a fatti limiti, stabiliti anch'essi dall'esperienza.

Ma l'esperienza non stabilisce sinora, quale possa essere il comportamento della cellula, per velocità superiori ad un certo limite (40 giri/sec.). Sarebbe interessante cimentare un dispositivo fotoelettrico, particolarmente adatto, a velocità molto superiori (1000 e più giri/sec.). È possibile che esperienze del genere, se realizzate, permettano di

osservare notevoli effetti, intermedi tra la disgregazione meccanica, per forza centrifuga della materia, ed un'altra, di tipo elettrico, favorita dalla luce.

Anche fissando le modalità di tali effetti limiti, sarà pur sempre difficile determinare la natura della funzione f. Avviene qui, qualcosa di più complicato (in conseguenza del parametro in più, *velocità rotatoria*), di quanto si rileva, per il puro effetto fotoelettrico, in presenza di gas. Lì, il fenomeno può essere rappresentabile da una superficie gobba, in uno spazio euclideo; mentre per la centrifugazione fotoelettrica, si ha una superficie, in un iperspazio a quattro dimensioni.

Circa la natura dei corpuscoli che sarebbero responsabili, sotto l'azione della forza centrifuga, degli effetti annunziati, si può presumere che essi sieno, almeno in parte, costituiti da grossi ioni, dovuti alla presenza del gas, che per la complessa azione *fotoelettromeccanica* di cui è questione, si ionizza. Si può infatti supporre che più facilmente, grossi ioni, per la oro massa rilevante (nel caso dell'argon, circa 70.000 volte quella dell'elettrone), possano subire l'azione della forza centrifuga. Vediamo quale attendibilità ha un'ipotesi di tale genere.

I fotoelettroni che partono dal metallo, con una certa velocità iniziale, vengono accelerati dal campo esterno. Gli urti che ne derivano dànno luogo promiscuamente alla formazione di ioni positivi e negativi. Ma il numero di questi ultimi è superiore a quello dei primi, sia perchè possono restare liberi elettroni di rimbalzo, sia ancora perchè forse, qualche elettrone può fissarsi, in modo non eccessivamente stabile, sugli atomi neutri. Ora, se l'atmosfera ionica fosse costituita da ioni dei due segni, in egual numero, e tutti di egual massa materiale, è evidente che mai l'azione centrifuga potrebbe esercitare un effetto, su di un tale insieme. Infatti, i due gruppi, che procedono in senso inverso, nel dar luogo alla corrente fotoelettrica, verrebbero l'uno accelerato, l'altro ritardato dalla forza centrifuga. Poichè si è visto invece che gli ioni negativi sono in maggioranza, si può pensare che questa forza sia efficiente, ai fini degli effetti rilevati. Un controllo quantitativo, fa ora vedere che tale conclusione è inesatta.

Diciamo M ed e la massa materiale e la carica elettrica di ciascun grosso ione; d la distanza fra gli elettrodi; V la d. d. p. fra questi esistente; ω la velocità rotatoria, r il raggio del cerchio su cui ruotano le cellule. Le due forze centrifuga f_c ed elettrica f_e saranno espresse, rispettivamente da

$$f_c = M\omega^2 r \quad , \quad f_e = \frac{eV}{d} \cdot$$

Se facciamo: $M = \text{gr } 6{,}5 \cdot 10^{-23}$ (argon); $\omega = 314$ (50 giri/sec.); $r = \text{cm } 5$; $V = \text{volt } 110$; $d = \text{cm } 0{,}5$; $e = 4{,}77 \cdot 10^{-10}$ u. e. s.; si ha, in fine: $f_c = 3{,}2 \cdot 10^{-17}$; $f_e = 3{,}5 \cdot 10^{-10}$ dine. E, cioè, nelle condizioni di

esperimento, la forza elettrica è enormemente superiore a quella centrifuga. Ancora più stridente sarebbe la differenza fra queste due forze, se invece di ipotetici grossi ioni, si trattasse di elettroni.

Questo risultato fa scartare l'ipotesi che i constatati effetti abbiano la loro reale sede, nello spazio che è compreso fra il catodo e l'anodo; nel quale, le due forze agiscono in concomitanza. Infatti, l'incremento estremamente piccolo, che viene a subire la forza che muove gli ioni o gli elettroni (sospingendoli a nuove ionizzazioni), sotto l'azione della forza centrifuga, non può avere apprezzabile influenza, sul valore della corrente fotoelettrica osservata.

Sempre che, dunque, nessuna azione perturbatrice abbia, la deformabilità dell'anodo, sotto l'azione della forza centrifuga, (e su ciò mi riservo, ancora una volta, di istituire appositi controlli), si deve ammettere che la vera sede del fenomeno osservato, debba localizzarsi, là dove l'effetto fotoelettrico, propriamente detto, si svolge. In altri termini, si deve ammettere che la forza centrifuga favorisca, in certo modo, l'estrazione elettronica da parte della luce, dal metallo (il sodio, nel caso sinora più a lungo studiato); o quanto meno l'uscita di ioni negativi già formati, nel suo strato superficiale. Questo, infatti, può contenere notevoli quantità di gas *adsorbiti*; e può, forse, espellere, sotto l'azione della luce, atomi o particelle metalliche elettrizzate.

A giustificare un'ipotesi di tal genere, si può osservare che la luce cadente sul metallo fotoelettrico, può penetrarvi per uno spessore dell'ordine di un decimo di micron. L'estrazione elettronica può dunque avvenire fino a spessori di tale entità. Ora, come è noto, i fotoni, a cui corrisponde l'uscita di elettroni, sono appena il 5 %, nel caso più favorevole, di tutti quelli assorbiti dal metallo. Potrebbe darsi che al residuale 95 %, corrispondano elettroni estratti, in un primo tempo, ma subito dopo fermati dal metallo stesso. Questa ipotesi ci aiuta a comprendere che forse, un certo numero di tali elettroni, prima ancora di venir così fermati, possano subire l'azione della forza centrifuga e venire espulsi. Essi infatti, in tale fase, sono animati solo dalla propria forza viva; e sovrattutto è importante ammettere, che non subiscono ancora l'azione del campo elettrico acceleratore esterno. Questo infatti, essendo per sua natura *statico*, non può penetrare nell'interno del reticolo metallico, nel quale penetra invece, come si è detto, la luce, almeno sino ad una certa profondità.

Naturalmente, è difficile analizzare col ragionamento, a fondo, una ipotesi del genere. Ciò anche perchè il lavoro totale di estrazione, dato dalla formula di Einstein, si riferisce al completo allontanamento dell'elettrone dal reticolo metallico. Comunque, nell'ignoranza in cui si trova il fisico, circa le precise modalità, del processo con cui si svolge il fenomeno fotoelettrico, si può accettare per ora la enunciata ipotesi, salvo a verificarne in seguito l'attendibilità definitiva.

A chiarimento della portata della ipotesi in parola, si può aggiungere che, tanto più facilmente può la forza centrifuga agire sugli elettroni, quanto minore è la forza viva da essi posseduta. Una simile condizione di cose si verifica probabilmente per il sodio, colpito da luce, da cui sia stata filtrata la parte ultravioletta, spinta. Ciò avviene realmente nelle mie esperienze, per l'uso inevitabile di vetro comune, attraverso cui la luce passa. Il sodio, avendo una soglia fotoelettrica piuttosto elevata (di fronte al potassio ed al cesio), deve lasciar sfuggire elettroni, relativamente poco veloci, per effetto fotoelettrico.

A controllo di tutte le considerazioni fatte, mi riservo di completare ricerche in corso. In esse vengono usate cellule con metalli o preparati fotoelettrici, diversi da caso a caso, con griglie possibilmente indeformabili, con o senza f. e. m. acceleratrice.

Sui risultati che otterrò, nello svolgere questo complesso piano di ricerca, che potrà o meno confermare le singole ipotesi avanzate, riferirò in seguito.

Chimica (Chimica biologica). — *Controllo delle condizioni di idrolisi dei cerebrosidi nei loro metodi volumetrici di dosamento* (1). Nota (2) di FRANCO LANFRANCHI, presentata da SABATO VISCO, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

I. – Introduzione e scopo del presente lavoro.

I metodi fino ad oggi conosciuti per dosare i cerebrosidi si basano tutti sulla determinzione volumetrica del galattosio messo in libertà per idrolisi totale dei cerebrosidi.

Già NOOL (3) per dosare il così detto protagone utilizzò il potere riducente del galattosio (dal protagone liberato per idrolisi con HCl dil.) sul liquido di FEHLING; ma fu KIMMELSTIEL (4) (5) il primo ad elaborare un micrometodo di dosamento dei cerebrosidi, basato sul dosamento volumetrico del galattosio con il procedimento dell'HAGEDORN–JENSEN.

Secondo l'A. il tessuto, sul quale viene eseguita la determinazione, dopo di essere stato immerso in aria liquida per evitare una scissione fermentativa del galattosio, viene triturato, pesato e ripetutamente estratto (fino ad esaurimento) con piccole quantità di alcool assoluto, che, riunite assieme, a raffreddamento avvenuto, vengono portate ad un volume di 25 cm^3. Dall'estratto alcoolico appena raffreddato, quando ancora la sostanza bianca separatasi si trova in sospensione omogenea, vengono pipettate due uguali aliquote di liquido.

Sul residuo di un'aliquota ottenuto per evaporazione di tutto l'alcool, dopo di avere aggiunto un determinato volume di acqua, si determina il potere riducente secondo l'HAGEDORN–JENSEN. Dal valore ottenuto si detrae il potere riducente di un egual volume di acqua e si ottiene così il *potere riducente prima dell'idrolisi*, che viene espresso, in base ad una tabella empiricamente stabilita dal KIMMELSTIEL per le condizioni sperimen-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia generale di Roma.
(2) Pervenuta all'Accademia il 16 settembre 1940–XVIII.
(3) A. NOOL, « Hoppe Seyler's Z. », 27, 370 (1899).
(4) P. KIMMELSTIEL, *Mikrochemie*, «Sonderband Pregl Festschrift», 165 (1929).
(5) P. KIMMELSTIEL, « Biochem. Zeit. », *212*, 359 (1929).

tali nelle quali vengono fatte le determinazioni, in mgr. di galattosio. Ciò dimostra che fra le sostanze estratte ve ne sono alcune, che riducono il ferricianuro ancor prima che il galattosio venga messo in libertà per idrolisi.

Il residuo della seconda aliquota viene sottoposto ad idrolisi mediante riscaldamento in termostato a 112° per 15–18 min. con 4 cm^3. di HCl all'11 %. Ad idrolisi effettuata, si filtra, si neutralizza e si porta con acqua distillata ad un volume eguale a quello delle due titolazioni precedenti; dopo di che si determina il potere riducente secondo l'Hagedorn–Jensen Da questo si detrae il potere riducente di una soluzione ottenuta neutralizzando nello stesso modo 4 cmc. di HCl all'11 % e portando con acqua distillata al medesimo volume. Si ottiene così il *potere riducente dopo l'idrolisi*, che al solito viene espresso in mgr. di galattosio. Moltiplicando la differenza tra il potere riducente dopo l'idrolisi e il potere riducente prima dell'idrolisi per il fattore 4,6 si ottiene la quantità dei cerebrosidi contenuta nell'aliquota di estratto alcoolico presa in esame.

Recentemente Fawaz, Lieb e Zacherl [6] hanno indicato una modificazione del precedente micrometodo che, oltre ad una notevole semplificazione, presenta il vantaggio di una maggiore esattezza. Secondo gli AA. innanzi tutto non è da riscontrare, anche diverse ore dopo la morte, alcuna scissione fermentativa del galattosio; cosicchè viene eliminato il trattamento preliminare con aria liquida.

La modificazione essenziale però consiste nel ripetuto trattamento preliminare del tessuto pesato con una soluzione di acido tricloroacetico al 5 %, che scioglie i composti fosforati non lipoidei. Il tessuto così trattato viene poi esaurito per ebollizione con alcool etilico assoluto e l'estratto alcoolico, a raffreddamento avvenuto, viene portato ad un determinato volume ed impiegato per il dosaggio dei cerebrosidi analogamente al metodo precedente. Il trattamento preliminare con soluzione di acido tricloroacetico presenta, secondo gli AA., diversi vantaggi. Innanzi tutto per raffreddamento dell'estratto alcoolico non si ha che un leggero intorbidamento mentre con tessuto non preventivamente trattato con soluzione di acido tricloroacetico si ha un forte intorbidamento con successiva precipitazione, a distanza di breve tempo, di sostanza bianca. Il prelevamento dei campioni per l'analisi viene quindi facilitato.

Inoltre non presentando il residuo dell'estratto alcoolico prima dell'idrolisi più alcun potere riducente rispetto al ferricianuro, è sufficiente determinare il *potere riducente dopo l'idrolisi*. Questo viene determinato in maniera essenzialmente analoga al metodo del Kimmelstiel e, al solito, espresso in mgr. di galattosio.

---

[6] G. Fawaz, H. Lieb e M. K. Zacherl, « Biochem. Z. », *293*, 121 (1937).

Anche le condizioni di idrolisi sono diverse. Gli AA. infatti riscaldano in termostato il residuo dell'aliquota di estratto alcoolico con 5 cmc. di HCl all'11 % per un'ora a 105°.

Da quanto precede risulta chiaramente che il metodo degli AA. presenta rispetto a quello del KIMMELSTIEL gli innegabili vantaggi di una maggiore semplicità ed esattezza. Nel metodo del KIMMELSTIEL infatti per ogni determinazione sono necessarie 4 titolazioni; mentre nel metodo degli AA. bastano 2 titolazioni. Come conseguenza di ciò sui risultati ottenuti col primo metodo si accumulano gli errori sperimentali di 4 titolazioni; mentre su quelli ottenuti col secondo gli errori di 2 titolazioni soltanto.

Il punto che in previsione di una serie di determinazioni di cerebrosidi nel tessuto nervoso, ho ritenuto opportuno riprendere in esame è stato quello delle condizioni di idrolisi.

Il KIMMELSTIEL afferma infatti che, riscaldando con 4 cmc. di HCl all'11 % a 112° per 15–18 minuti un cerebroside da lui preparato e contenente ancora tracce di fosforo (l'A. non specifica di quale cerebroside si trattasse), ottenne risultati soddisfacenti (per la verità l'A. riporta il risultato di una sola determinazione con 1 mgr. del cerebroside). Parimenti partendo da galattosio purissimo, come già WINTERSTEIN aveva affermato, non fu riconosciuta alcuna decomposizione.

Al contrario secondo FAWAZ, LIEB e ZACHERL, nelle condizioni, nelle quali fu eseguita da loro l'idrolisi (riscaldamento con 5 cmc. di HCl all'11 % per un'ora a 105°), non si ottengono risultati soddisfacenti nè partendo da galattosio puro, nè partendo da cerebrone e cherasina purissima.

Avendo preparato principalmente per ricerche enzimatiche del cerebrone, che risultò all'analisi esente da fosforo, ho eseguito esperienze d'idrolisi riscaldando in termostato quantità via via decrescenti di cerebrone con 4 cmc. di HCl all'11 % ed ho ottenuto risultati (riportati nella parte sperimentale), che si possono considerare soddisfacenti e che depongono in favore del buon grado di purezza del cerebrone.

Dovendo quindi eseguire dosamenti di cerebrosidi nei tessuti è opportuno impiegare il metodo di FAWAZ, LIEB e ZACHERL eseguendo l'idrolisi nelle condizioni da me indicate e che di poco si discostano da quelle del KIMMELSTIEL.

II. – PARTE SPERIMENTALE.

A) *Preparazione del cerebrone.*

Il metodo di preparazione del cerebrone da noi seguito è basato sulla preparazione del protagone secondo KITAGAWA e THIERFELDER [7] e LOENING e THIERFELDER [8], sull'isolamento dei cerebrosidi dal prota-

[7] F. KITAGAWA e H. THIERFELDER, « Hoppe Seyler's Z. », *49*, 286 (1906).

[8] H. LOENING e H. THIERFELDER, « Hoppe Seyler's Z. », *68*, 464 (1910).

gone secondo il metodo di Loening e Thierfelder (9) mediante saponificazione con acqua di barite dei fosfolipidi e sull'isolamento del cerebrone dal miscuglio dei cerebrosidi (9).

1° *Preparazione del protagone.* – La preparazione del protagone fu eseguita a partire da 6 kg. di cervello di bue (14 cervelli) seguendo, anche per quanto riguarda i rapporti quantitativi fra solventi e sostanza nervosa, il metodo indicato da Kitagawa e Thierfelder e Loening e Thierfelder per la preparazione del protagone dal cervello umano.

La sostanza nervosa fu prima estratta a temperatura ambiente con acetone (2 estrazioni) e poi con etere (6 estrazioni). Dopo di avere eliminato così acqua, colesterina, lecitine e cefaline, il cervello finemente polverizzato in molino a palle (gr. 650) fu ripetutamente estratto (4 volte) con una medesima quantità di alcool all'85 % bollente. Furono ottenuti così circa 160 gr. di protagone (25 % circa sfingomieline + 75 % circa cerebrosidi).

2° *Isolamento dei cerebrosidi dal protagone.* – La preparazione di un miscuglio di cerebrosidi puri a partire da protagone fu eseguita seguendo il metodo di Loening e Thierfelder.

Il protagone, dopo di essere stato sottoposto a saponificazione con acqua satura di barite bollente, fu ripetutamente estratto con acetone anidro bollente facendo durare le successive estrazioni 5, 10, 15, 20, 30 min. ed infine 2 ore. Delle frazioni cerebrosidiche precipitate per raffreddamento dell'estratto acetonico le prime due (5–10 min.) risultarono esenti da fosforo; mentre le altre risultarono ancora impure. Dalle frazioni cerebrosidiche ottenute per estrazione durante 15, 20 e 30 min., per rinnovata estrazione furono ottenute altre frazioni cerebrosidiche esenti da fosforo. Elaborando, per porzioni di 30 gr., i 160 gr. di protagone, furono ottenuti complessivamente 30 gr. di prodotto esente da fosforo.

3° *Isolamento del cerebrone dal miscuglio di cerebrosidi.* – Per isolare il cerebrone dal miscuglio dei cerebrosidi 15 gr. del prodotto esente da fosforo furono sciolti con moderato riscaldamento in 1050 gr. di alcool etilico assoluto (70 p. p. alcool assoluto per 1 p. p. di cerebrosidi). La soluzione fu mantenuta in termostato a 29° per 24 ore. A tale temperatura precipitò lentamente una polvere bianchissima, che venne molto rapidamente filtrata alla pompa su imbuto di Büchner. Rendimento gr. 7. Lasciando raffreddare alla temperatura ambiente (circa 18°) si separò sotto forma di fiocchi gelatinosi una seconda porzione cerebrosidica (cherasina). I 7 gr. di cerebrone furono sottoposti ad un identico trattamento

(9) H. Loening e H. Thierfelder, « Hoppe Seyler's Z. », *74*, 282 (1911).

sciogliendoli in 490 gr. di alcool etilico assoluto e lasciando stare la soluzione a 29° per 24 ore. Rendimento gr. 3,5. Elaborando nello stesso modo anche gli altri 15 gr. di prodotto esente da fosforo, furono ottenuti 7 gr. di cerebrone puro. Il cerebrone così ottenuto fu ritenuto di purezza sufficiente per le nostre ricerche e non fu sottoposto ad ulteriore trattamento con alcool metilico contenente il 20 % di cloroformio, alcool metilico contenente il 10 % di cloroformio ed alcool metilico per ottenerlo cristallizzato (V. (7) e (8)).

B) *Preparazione di una soluzione titolata di cerebrone.*

Fu preparata una soluzione titolata di cerebrone sciogliendo con moderato riscaldamento su bagno-maria in 200 cmc. di alcool etilico al 95 % contenuti in un matraccio tarato da 250 cmc. 0,125 gr. di cerebrone. Riprecipitando però parte del cerebrone per raffreddamento della soluzione al disotto di 27°, la soluzione fu portata al volume esatto di 250 cmc. a 30°.

Tale soluzione conteneva così 0,5 mgr. di cerebrone per 1 cmc. Con pipette riscaldate in termostato a 30° furono sempre misurati i cmc. di soluzione per le nostre determinazioni. Il prelevamento dei campioni fu facilitato dal fatto che, venendo fatte le determinazioni in pieno estate quando la temperatura ambiente è assai elevata, le pipette tolte dal termostato non avevano il tempo di raffreddarsi sensibilmente durante il prelevamento dei campioni.

Il cerebrone da noi preparato dimostrò di non possedere alcun potere riducente prima dell'idrolisi contrariamente a quanto trovò Kimmelstiel (4) per il cerebroside impuro da fosforo da lui preparato (probabilmente cerebrone per quanto non venga specificatamente detto) e concordemente a quanto trovarono Fawaz, Lieb e Zacherl (6). Questi ultimi AA. infatti, come già è stato detto nell'introduzione, trovarono, che il residuo dell'estratto alcoolico del tessuto nervoso, previamente trattato con soluzione di acido tricloroacetico al 5 %, non manifesta alcun potere riducente.

Al residuo di 2 cmc. della soluzione titolata di cerebrone furono aggiunti 17 cmc. di acqua distillata e 2 cmc. della soluzione di ferricianuro (in queste condizioni secondo Kimmelstiel vien determinato il potere riducente). Il potere riducente così trovato non differì da quello ottenuto con 17 cmc. di acqua solamente. Nel primo caso infatti furono impiegati 1,94 cmc. di tiosolfato N/200 nel secondo ne furono impiegati 1,95 cmc.

C) *Esperimenti d'Idrolisi.*

L'idrolisi del cerebrone fu eseguita riscaldando il residuo della soluzione alcoolica di cerebrone con quattro cmc. di HCl all'11 % a 110° per venti minuti. In quattro palloncini tarati da 25 cmc. furono introdotti

con 4 pipette da 4; 3; 2; 1 cmc. rispettivamente 4 cmc., 3 cmc., 2 cmc., 1 cmc. della soluzione titolata di cerebrone corrispondenti a 2 mgr.; 1,5 mgr.; 1 mgr.; 0,5 mgr. di cerebrone. I palloncini vennero immersi in un bagnomaria di acqua bollente e così mantenuti fino a che l'alcool fu completamente scacciato. In ciascun palloncino furono poi versati con pipetta 4 cmc. di acido cloridrico all'11 %. È essenziale per la buona riuscita delle determinazioni che il residuo del cerebrone venga completamente coperto dalla soluzione di HCl. Per questo si ebbe l'avvertenza di scacciare l'alcool tenendo immersi i palloncini perpendicolarmente mediante morsetti. I palloncini tappati con i tappi a smeriglio vennero poi messi in termostato e mantenuti a 110° per 20 min. (il liquido non deve bollire). Ad idrolisi effettuata per il dosaggio del galattosio fu seguita la tecnica del Kimmelstiel. I risultati ottenuti sono riportati nella seguente tabella:

cc. Sol. Titolata cerebrone	Calcolato		Trovato	
	mgr. cerebrone	mgr. galattosio	mgr. galattosio	mgr. cerebrone = mgr. galattosio x 4,6
4	2 mgr.	0,435	0,427	1,964
3	1,5 »	0,326	0,319	1,467
2	1 »	0,217	0,210	0,966
1	0,5 »	0,109	0,108	0,496

Dalla precedente tabella risulta che la differenza tra il calcolato e il trovato oscilla tra l'1 % e il 3 %. Gli errori non sono quindi eccessivi in considerazione della delicatezza delle micro-determinazioni. Siccome non vi è ragione di pensare che quello che vale per il cerebrone non valga anche per gli altri cerebrosidi, così si può concludere che le sopra indicate condizioni d'idrolisi sono suscettibili di dare buoni risultati nelle micro-determinazioni dei cerebrosidi nei tessuti. Ci proponiamo tuttavia di eseguire quanto prima numerose altre determinazioni anche variando opportunamente temperatura e durata del riscaldamento in modo da avere un maggiore numero di dati sperimentali.

Da quanto precede nell'introduzione risulta pertanto opportuno, dovendo dosare i cerebrosidi nei tessuti, impiegare il metodo di dosamento del Fawaz, Lieb e Zacherl idrolizzando però i cerebrosidi nelle condizioni sopra indicate.

Geologia. — *Osservazioni geologiche sull'Appennino Pugliese.* (1). Nota (2) di GIUSERPE CHECCHIA-RISPOLI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

Nella presente Nota vengono sommariamente esposte alcune osservazioni compiute, nell'estate del 1939, in occasione del rilevamento del Foglio di Lucera (n. 163 della Carta d'Italia al 100.000) e luoghi limitrofi (3). Di questa parte dell'Appennino meridionale, oltre alla Carta geologica al 1.000.000 (4), si posseggono due cartine al 500.000: una annessa ad uno studio sul Molise del prof. SACCO (5) e l'altra, più recente, del LOTTI (6): quest'ultima, compilata in base ai rilevamenti di campagna esistenti presso il R. Ufficio geologico, è abbastanza particolareggiato.

Le tre carte nella parte occidentale del Foglio (quadranti di Celenza Valfortore e di San Bartolomeo in Galdo) segnano concordantemente per estesissimi tratti l'Eocene, rappresentato da scisti argillosi varicolori, calcari compatti nummulitici e marne e, per tratti molto limitati, il Miocene, rappresentato da arenarie e mollasse. Il riferimento cronologico di queste ultime è esatto, mentre quello all'Eocene di tutti gli scisti argillosi varicolori con i soprastanti calcari, calcari marnosi e marne va oggi in gran parte modificato.

* * *

La formazione arenacea, che ho già segnalato nell'attiguo Foglio di San Severo, acquista, in quello di Lucera, una estensione molto maggiore. Essa si osserva nei pressi di Colletorto sulla sinistra del fiume For-

---

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Geo-paleontologico della R. Università di Roma.

(2) Pervenuta all'Accademia il 12 ottobre 1940–XVIII.

(3) Del Foglio di Lucera sono completamente rilevati i quadranti di Lucera e Troia; a buon punto sono quelli di Celenza Valfortore e di San Bartolomeo in Galdo, dei quali si parla in questa Nota.

(4) Pubblicata a cura del R. Ufficio geologico. Roma, 1931.

(5) F., SACCO, *Il Molise. Schema geologico.* Soc. Geol. Ital., vol. XXVII, 1908.

(6) Annessa alla « Prima Relazione sull'attività dell'Ufficio speciale d'irrigazione » a cura dell'Ente autonomo per l'Acquedotto pugliese. Bari, 1924.

tore ed un po' dapertutto, in lembi più o meno ristretti, come resti di denudazione; con notevole estensione si presenta tra Volturara Appula e San Marco la Catola e tra Celenza Valfortore e Carlantino ed ancora più nei dintorni di Baselice, in provincia di Benevento (quadrante di San Bartolomeo in Galdo).

Le arenarie per lo più sono tenere e passano talora a mollasse oppure a sabbioni più o meno cementati; qua e là contengono delle zonule ghiaioso ciottolose. Il loro colore è bianco tendente al giallo-paglierino; più di rado è grigio. Sono poverissime di fossili, che si trovano di preferenza nei sabbioni bruno-rossicci o grigi, per lo più allo stato di modelli o profondamente alterati. Molti anni or sono, nella regione Valva a sud-est di Celenza Valfortore [1], ebbi la fortuna di raccogliere fra gli altri: *Terebratula sinuosa*, *Rynchonella plicato-dentata* var. *taurosimplex*, *Ostrea cochlear*, *Chlamys scabrella*, *C.* cfr. *pesfelis*, *Amussium cristatum*, *Pecten Iosslingi*, *P. revolutus*, *P. Besseri*, *P. Reghiensis*, *Pectunculus obtusatus*, *Turritella vermicularis*, *Balanus tulipiformis* ecc.

Delle arenarie dei dintorni di Baselice, nel 1893, il Patroni [2] determinò un certo numero di fossili, tra cui ricordo: *Ostrea plicata*, *O. cucullata*, *O. cyatula*, *O. crassissima*, *O. crassicostata*, *Hinnites Defrancei*, *Chlamys latissima*, *C. scabriscula* var. *iberica*, *Pecten solarium*, *P. Besseri*, *P. Beudanti* ecc. Lo stesso A. riporta un elenco di echinidi, comunicatogli dall'ing. Capecelatro, provenienti pure dai dintorni di Baselice, in massima parte clipeastri, cioè: *Clypeaster intermedius*, *C. intermedius* var. *calabra*, *C. Reidii*, *C. altus*, *C. piramidalis*, *C. gibbosus*, *C. marginatus*, *C. alticostatus*, *C. portentosus*, ecc.

Dal complesso di tutta la fauna, ora indicata, risulta chiara l'appartenenza delle arenarie all'Elveziano.

Secondo i vecchi rilevamenti le arenarie verrebbero a trovarsi in forte discordanza sulla formazione dei calcari marnosi attribuiti, insieme con i sottostanti scisti argillosi, all'Eocene medio. Le arenarie invece sono concordanti con i calcari marnosi, a cui sono connesse da graduali passaggi litologici: infatti è possibile osservare qua e là, alla base di esse, delle intercalazioni di un calcare arenaceo grigio identico per tutti i caratteri a quello del sottostante complesso.

Le arenarie che in questi luoghi coronano la formazione miocenica dovevano una volta estendersi ininterrottamente sui calcari marnosi e se oggi si presentano molto discontinuamente ciò devesi alla loro facile erodibilità.

---

[1] G. Checchia-Rispoli, *Osservazioni geologiche lungo la valle del Fortore (Capitanata)*. « Boll. Soc. Geol. Ital. », vol. XXIII, 1904.

[2] C. Patroni, *Fossili miocenici di Baselice in provincia di Benevento*. « Atti R. Acc. d. Scienze fis. e mat. di Napoli », ser. 2, vol. V, 1893.

* * *

Il complesso calcareo-marnoso è stato da me già descritto (1); ora ricordo rapidamente che esso è costituito da una alternanza di marne di colorito bianco-paglierino, calcari marnosi e calcari arenacei di tinta grigia.

Nel Foglio in corso di rilevamento questo complesso assume uno sviluppo imponente: si può dire che esso si estende quasi interrottamente da nord a sud, formando quasi tutte le maggiori elevazioni dei *monti della Daunia*, scende talora verso est sino all'orlo del Tavoliere, ove è ricoperto dalla formazione pliocenica e verso ovest al Fortore ed al di là, nel Sannio.

Questa formazione è molto povera di fossili macroscopici e qua e là sulla superficie degli strati non è raro osservare di tanto in tanto frammentini di pettini costati e colonie di briozoi.

Rammento a proposito che dopo lunghe ricerche eseguite con lo scopo di fissare l'età controversa di questi calcari marnosi, sono riuscito a raccogliere nei dintorni di S.ta Croce di Magliano alcuni importanti elementi paleontologici: (*Aequipecten scabrellus*, *A. Haveri*, *Ostrea langhiana*, *Cyathocidaris avenionensis*, *Chrysophrys* sp., *Sargus* sp. *Oxyrhina hastalis*, *Alopecias latidens*, nonchè *Amphistegina*, *Miogypsina*, *Ditrupa incurva*, e resti di *alghe*, *briozoi*, piccoli radioli di echinidi ecc.), che hanno permesso di riportare al Langhiano la formazione delle marne e dei calcari marnosi, così estesa in tutta la provincia e fuori e che dai tempi di Pilla sino a qualche anno fa era da tutti concordantemente riferita all'Eocene medio.

* * *

Col passaggio dei calcari marnosi al Miocene medio si presentò la questione dell'età degli sciști argillosi variegati, comunemente conosciuti col nome di *argille scagliose*, immediatamente sottostanti ai primi e ritenuti insieme a questi dell'Eocene medio. Detti sciști, che costituiscono la formazione basale di questa parte dell'Appennino meridionale compresa nella provincia di Capitanata, sono molto sviluppati nel Foglio in corso di rilevamento: troppo lungo sarebbe l'enumerare i luoghi dove essi si presentano: grande estensione e potenza gli sciști acquistano nei dintorni di Castelnuovo della Daunia, Motta Montecorvino, Alberona, Biccari, Roseto Valfortore, Castelluccio Valmaggiore, Faeto ed oltre. Se è impossibile valutarne la potenza, è difficile stabilire la successione completa dei

(1) G. Checchia-Rispoli, *Su di una formazione miocenica dell'Appennino della Capitanata*. « Rend. R. Acc. d. Lincei », vol. XXII, 1935.

vari componenti il complesso per la scarsezza di sezioni di una certa importanza, per le frequenti dislocazioni ed anche per le frane che tormentano tutta la regione. Tuttavia dove è stato possibile studiare in modo sicuro la successione, sono stati osservati regolarmente in posto fasci di strati, talora molto potenti, di un calcare per lo più di colorito chiaro, grigio-cenere od azzurrognolo, talora selcioso e molto tenace. Questi calcari risultano di un impasto specialmente di *Lepidocycline*, per lo più di piccole dimensioni, e di *Miogypsine*. Come ho già scritto questi calcari vanno riferiti ad un Miocene, che ritengo molto basso; le ulteriori ricerche potranno modificare appena tale riferimento. Gli strati in parola per quanto elevati non rappresentano i più alti di tutto il complesso della formazione delle argille scagliose: le escursioni compiute nel 1939 hanno mostrato che al disopra di essi continuano a svilupparsi gli scisti argillosi varicolori con intercalazioni di calcari di vario aspetto, ma paleontologicamente molto vicini ai calcari che si trovano nel soprastante complesso calcareo-marnoso, riferito ora al Miocene medio.

Negli anni 1911-14 in alcune rapidissime escursioni di ricognizione attraverso questa parte della Capitanata, raccolsi, in varie località, un abbondantissimo materiale paleontologico consistente di Nummuliti ed altri foraminiferi dell'Eocene medio accompagnati da rare Lepidocicline. Per la grandissima abbondanza specifica e numerica dei fossili eocenici (circa una quarantina di specie di Alveoline, Chapmanine, Nummuliti, Assiline, Ortofragmine ecc.), per la grande scarsezza delle Lepidocicline, per il medesimo stato di conservazione di tutti i fossili, per l'omogeneità della fauna composta di specie tutte dell'Eocene medio, per il frequente ripetersi del fatto non solo in Capitanata ed in altri punti dell'Appennino, ma anche in luoghi lontanissimi della terra, si formò in me la convinzione che le Lepidocicline fossero coesistite insieme con tutti gli altri fossili in quegli strati ritenuti eocenici da tutti i precedenti rilevatori.

In seguito, quando per incarico del R. Ufficio geologico, ho iniziato il rilevamento della regione, ho constatato che questi strati si trovano alla base di quelli a *Lepidocyclina* ed a *Miogypsina*, i quali seguono immediatamente in stretta connessione stratigrafica.

* * *

Riepilogo. – In seguito ai risultati dei recenti studi compiuti da me nella regione occidentale della Capitanata varie importanti modificazioni sono state apportate alle antiche levate, che qui riassumo. Già nella revisione del Foglio di Sansevero si è visto come tutta la massa dei calcari marnosi bianco-giallognoli sia passata dall'Eocene medio al Miocene

medio (1). Altrettanto avviene per il Foglio di Lucera, dove detti calcari sono maggiormente sviluppati. La scoperta poi di calcari a *Lepidocyclina* ed a *Miogypsina* ha permesso di ringiovanire una parte almeno degli scisti argillosi, riportandoli dall'Eocene medio al Miocene inferiore (2). Lo studio della successione stratigrafica della Valle del Celone ha dimostrato che fra i più bassi calcari a foraminiferi eocenici di quella serie e quelli a *Lepidocyclina* ed a *Miogypsina* vi sono stretti legami litologici e continuità stratigrafica di guisa che non sembra possibile una separazione dei primi dai secondi: ne ho concluso allora che i foraminiferi eocenici non possono ritenersi in posto, ma depositatisi, in seguito a trasporto, alla base degli strati a *Lepidocyclina* ed a *Miogypsina* (3).

Nel Foglio di Lucera calcari più o meno simili a quelli della valle del Celone sono frequenti e possono assumere talora rilevanti spessori, come nei dintorni di Castelluccio Valmaggiore. È stato in base a questa frequenza ed alla grande abbondanza delle Nummuliti contenute in detti calcari che le argille scagliose sono state da tutti riferite all'Eocene medio. Si tratta ora di vedere se a tutti questi calcari indistintamente dovranno applicarsi le conclusioni di cui sopra, o se una parte della grande massa di quelle argille dovrà essere riferita a terreni più antichi, come avviene altrove. Alla soluzione di questi problemi saranno dirette le ulteriori ricerche. Lo scopo è di poter stabilire, alla fine, con sicuri criteri paleontologici e stratigrafici, la successione dei vari termini della serie cenozoica di questa parte dell'Appennino meridionale.

---

(1) Ved. *Foglio di San Severo* (F. 155 della Carta al 100.000) parzialmente rilevato dall'ing. E. Cortese e M. Cassetti, riveduto e completato dal prof. G. Checchia-Rispoli. Roma, 1932.

(2) G. Checchia-Rispoli, *Osservazioni preliminari sulla serie cenozoica dell'Appennino pugliese*. « Rend. R. Acc. dei Lincei », ser. VI, vol. XXV, Roma, 1937.

(3) G. Checchia-Rispoli, *Osservazioni geologiche preliminari lungo la Valle del Celone (Capitanata)*. « Rend. R. Acc. dei Lincei », ser. VI, vol. XXIX, Roma, 1939.

Paleontologia. — *Nuovi dati sulla fauna echinitica del macco di Nettunia* (1). Nota (2) di Giuseppe Checchia-Rispoli, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

Gli Echinidi del Pliocene di Nettunia sono stati oggetto di studio sin dal 1884 da parte del Meli (3) e successivamente dello scrivente (4) e della dott.a Serra (5). Tra le Echinofaune plioceniche italiane questa di Nettunia deve considerarsi come la più ricca di tutte per numero di specie e per grande abbondanza d'individui. Debbo aggiungere che l'Istituto Geo-paleontologico dell'Università di Roma si va arricchendo sempre più di nuovo materiale echinologico di quel giacimento, man mano che i fossili vanno isolandosi dalla roccia per l'azione erosiva del mare, molto attiva su quel tratto di litorale compreso tra Anzio e Nettuno, le due antiche cittadine del Tirreno, oggi riunite col nome di Nettunia. Recentemente il laureando V. Fois ha raccolto un certo numero di Echinidi, insieme ad altri fossili, nella parte inferiore di quel *macco*, la quale è di color grigio-azzurrognolo come le sottostanti argille piacenziane. Le argille sono poverissime di fossili, che abbondano invece nei soprastanti sabbioni calcarei più o meno cementati, che rappresentano la parte superiore del Pliocene. Questa roccia, come le simili della regione laziale, è conosciuta col nome di *macco*, oramai passato nella nomenclatura geologica.

---

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Geo-paleontologico dell'Università di Roma.

(2) Pervenuta all'Accademia il 12 ottobre 1940-XVIII.

(3) R. Meli, *Cenni geologici sulla costa di Anzio e Nettuno* ecc. « Ann. R. Istit. Tecn. di Roma », 1884; Id., *Echinodermi ed altri fossili pliocenici di Anzio.* « Boll. R. Uff. geol. d'Italia », vol. XVI, 1885.

(4) G. Checchia-Rispoli, *Gli Echinidi del Pliocene di Anzio.* « Mem. p. servire alla descr. d. Carta geol. d'Italia », vol. IX, 1923; Id., *Sopra un Psammechinus del Pliocene di Anzio (Roma).* « Boll. R. Uff. geol. d'Italia », vol. LVII, 1932.

(5) G. Serra, *Di alcuni Echinidi del Pliocene di Anzio (Roma).* « Boll. Soc. Geol. Ital. », vol. LII, 1933.

* * *

Fra gli echinidi raccolti dal Fois va segnalato in modo speciale uno, che è nuovo per il Pliocene d'Italia. Si tratta di un Emiasterino discretamente conservato, che per tutti i caratteri va riferito al genere *Trachyaster* Pomel. Come fu inteso dal suo autore nel 1869, questo genere comprende quegli *Hemiasterinae* che hanno i tubercoli del guscio impiantati su zoccoli obliqui; ad esso sono stati riportati numerosi echinidi prima erroneamente riferiti al genere *Hemiaster*.

I *Trachyaster* tipici hanno il guscio gonfio e quattro pori genitali; nel sottogenere *Opissaster* dello stesso autore sono state riunite quelle specie di forma schizasterica e con meno (2 o 3) di quattro pori genitali.

Per quanto l'esemplare di Nettunia non faccia vedere la costituzione dell'apparecchio apicale, perchè rotto alla sommità, pure noi lo riferiamo senza esitare al genere *Trachyaster* per la fisionomia generale e soprattutto per i rapporti molto stretti che ha con *T. globosus*, dal quale sembra difficilissimo separarlo (1).

* * *

Come è noto i *Trachyaster* e gli *Opissaster* sono piuttosto comuni nelle formazioni eoceniche e mioceniche e nei mari attuali; in quelle plioceniche invece rappresentano vere rarità. Basti dire che per tutto il Pliocene sono note due specie appena di limitatissima distribuzione geo-

(1) Riservandomi di figurare questo esemplare in una prossima occasione, ne dò sin da ora i caratteri principali: « Guscio molto sottile, globoso, con la maggiore altezza dietro l'apparecchio apicale, che è fortemente spostato indietro, e con la faccia posteriore obliquamente troncata. Apparecchio apicale non conservato. Solco impari stretto e profondo verso la sommità apicale ed affievolentesi rapidamente per scomparire del tutto prima di raggiungere la fasciola peripetala. Petali pari poco scavati, corti, larghi, arrotondati all'estremità e poco flessuosi: i posteriori simili agli anteriori, ma molto più corti e divergenti. Zone porifere larghe, composte di coppie di pori allungati, avvicinate e separate da strettissime costicine: le zone anteriori dei petali sono meno sviluppate delle posteriori. Spazi interzonali più larghi di una zona porifera. Peristoma piccolo, fortemente spostato avanti, semilunare con labbro sporgente e munito di un bordo stretto e rilevato. Periprotto piccolo, ovale, longitudinale, soprastante ad un'area stretta ed appena pronunciata. Fasciola peripetala larga, poco sinuosa e circoscrivente molto da vicino i petali, mantenentesi perciò molto al disopra dell'àmbito. Tubercoli impiantati sopra zoccoli obliqui su tutta la superficie del guscio: essi sono piuttosto radi sulla faccia superiore, più grossi e più fitti in tutta la regione dell'àmbito e seriati sul plastron ».

grafica: *Trachyaster globosus* Pomel ed *Opissaster declivis* Pomel, entrambi del Pliocene inferiore dell'Algeria. Per questa circostanza mi è parso di un certo interesse il rinvenimento fatto recentemente a Nettunia, che oltre ad accrescere il numero delle specie di quel *macco*, dimostra che il genere *Trachyaster* viveva ancora, durante il Pliocene superiore, nel Mediterraneo, donde emigrò insieme ad altri echinidi alla fine del Neogene.

Credo utile dare alla fine della presente comunicazione l'elenco completo degli Echinidi finora raccolti nel *macco* di Nettunia:

Dorocidaris Cerullii Checchia-Rispoli, *Dorocidaris papillata* Leske; *Arbacina romana* Mérian; *Psammechinus astensis* Sismonda, *Psammechinus microtuberculatus* de Blainville, *Psammechinus macrostomus* Checchia-Rispoli; *Echinus acutus* Lamarck, *Echinus Portisi* Checchia-Rispoli; *Schizechinus serialis* Pomel; *Echinocyamus pusillus* Müller; *Clypeaster pliocenicus* Seguenza; *Schizaster canaliferus* Lamarck, *Schizaster Aichinoi* Checchia-Rispoli; *Brissopsis lyrifera* Forbes; *Brissus Scillae* Agassiz; *Prospatangus purpureus* O. F. Müller, *Prospatangus Lamberti* Checchia-Rispoli, *Prospatangus subinermis* Pomel, *Prospatangus Distefanoi* Checchia-Rispoli var. *praecursor* Checchia-Rispoli; *Trachyaster globosus* Pomel; *Amphidetus cordatus* Pennant, *Amphidetus Melii* Checchia-Rispoli, *Amphidetus pennatifidus* Norman.

Mineralogia. — *I giacimenti di nichelio e cobalto delle ofioliti mesozoiche delle Alpi Piemontesi* (1). Nota (2) di MASSIMO FENOGLIO, presentata dall'Ecc. FEDERICO MILLOSEVICH.

Scopo della presente Nota è di riassumere per sommi capi i risultati più salienti da me ottenuti nello studio dei giacimenti di nichelio e cobalto, legati alla grande formazione mesozoica dei calcescisti con ofioliti delle Alpi Piemontesi.

Si tratta di un gruppo di giacimenti che presentano un certo interesse non solo dal punto di vista scientifico, ma altresì dal punto di vista minerario ai fini dell'autarchia. Tale interesse pratico non era sfuggito agli antichi che ne fecero saltuariamente oggetto di intensa coltivazione, come stanno ad attestare numerose vestigia di lavori importanti eseguiti tanto a giorno che in sotterraneo.

Le notizie sicure sulla effettiva coltivazione di questi giacimenti risalgono al secolo XVIII, pare però che inizi di coltivazione abbiano avuto luogo addirittura qualche secolo prima. La coltivazione era allora fatta per l'estrazione del cobalto, e causa precipua della chiusura definitiva di un gruppo di miniere, che aveva avuto un periodo di attività così fiorente, avvenuta nella seconda metà del secolo XIX, deve essere stata indubbiamente la scoperta di nuovi colori sintetici che portò al deprezzamento dello smalto od azzurro di cobalto. A questo abbandono non dovette poi essere estranea la grande elevazione dei giacimenti che ne rendeva piuttosto difficile l'accesso dai paesi di fondo valle.

Il problema della eventuale coltivazione attuale dei giacimenti in parola si prospetta alquanto differente, poichè essi verrebbero coltivati, oltre che per l'estrazione del cobalto, altresì per l'estrazione del nichelio, il cui rifornimento, come tutti sanno, è estremamente difficile; in secondo luogo la grandissima difficoltà di accesso, che dovevano affrontare gli antichi, potrebbe ora essere risolta con relativa facilità, se pur con qualche onere economico, con moderni impianti di teleferiche. Del resto le nume-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia e Petrografia della R. Università di Torino.

(2) Pervenuta all'Accademia il 23 ottobre 1940-XVIII.

rose richieste recenti e recentissime di permessi di ricerca da parte di società e di privati stanno a dimostrare l'interesse che tuttora presentano anche dal punto di vista industriale i giacimenti che stiamo per descrivere.

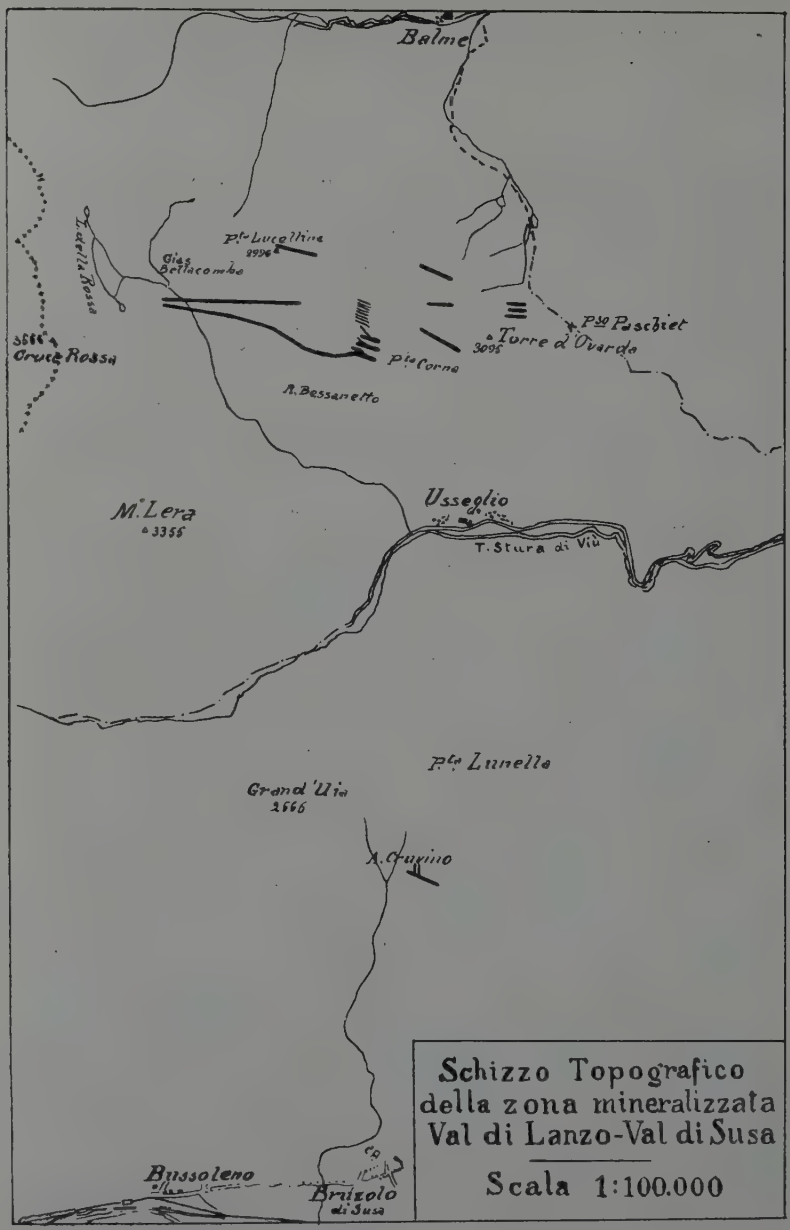
* * *

La zona mineralizzata, che comprende i giacimenti di nichelio e cobalto che formarono oggetto dei miei studi, si stende da nord a sud dall'alta Val d'Ala attraverso l'alta Val d'Usseglio fino al versante sinistro della Val di Susa (ved. schizzo a pag. 218). Ad essa appartengono i giacimenti di nichelio e cobalto del versante destro della Val d'Ala fra Punta Lucellina e Torre d'Ovarda, di Gias Bellacomba, del Bessanetto, di Punta Corna e Torre d'Ovarda nella Val d'Usseglio e del Cruvino in Val di Susa.

Dal punto di vista geologico la zona mineralizzata viene a cadere nella imponente formazione mesozoica dei calcescisti con ofioliti dei ricoprimenti pennidici, che raggiunge nelle regioni suddette uno sviluppo veramente enorme sia per estensione che per potenza.

Lo studio accurato e dettagliato, eseguito sul terreno, mi ha consentito di precisare che questo complesso di giacimenti metalliferi spetta alla classe dei giacimenti filoniani, e che le rocce incassanti sono essenzialmente rappresentate da ofioliti. E precisamente i tipi litologici di epizona, messi in evidenza dallo studio petrografico, sono prasiniti decisamente prevalenti, costituendo esse i contrafforti dell'alta Val d'Ala e dell'alta Val d'Usseglio, dove la zona mineralizzata raggiunge il suo massimo sviluppo; scisti cloritico–epidotici e serpentinoscisti sono invece quanto mai subordinati, non figurando i primi che in letti piuttosto sottili, alternantisi nelle prasiniti del Cruvino (Val di Susa), e formando i secondi le rocce incassanti dei filoni nel livello più prossimo alla superficie della stessa località.

Il complesso dei giacimenti in parola è costituito da vari sistemi di vene, filoncelli e filoni, diretti prevalentemente da O N O ad E S E (vedi schizzo a pag. 218), generalmente con forte inclinazione ora a nord ora a sud, e talvolta raddrizzati e quasi verticali. Le dimensioni di queste manifestazioni filoniane sono poi variabili entro limiti enormemente ampii. Infatti si passa da vene molto sottili, dello spessore variabile da meno di un centimetro a qualche centimetro, a filoncelli un po' più grossi della potenza di qualche diecina di centimetri, la cui estensione in direzione è superiore a quella di qualche metro delle vene, raggiungendo talvolta anche qualche diecina di metri. Si hanno infine filoni, la cui potenza media varia da uno a due metri, e solo in qualche rarissimo caso raggiungono spessori di 5–6 metri, mentre la loro estensione in direzione è generalmente dell'ordine di qualche centinaio di metri, e solo in pochi casi di qualche chilometro. E precisamente sono stati notati due filoni, nella


Balme
P.ta Lucelline
2996
Cles. Bellacomba
Lucella Rossa
3566
Cruce Rossa
P.ta Corna
A. Bessanetto
P.ta Pischiet
Torre d'Ovarda
3095
M.t Lera
3356
Usseglio
T. Stura di Viù
P.ta Lunella
Grand'Uia
2566
A. Gravino
Bussoleno
Brizolo di Susa
Schizzo Topografico
della zona mineralizzata
Val di Lanzo-Val di Susa
Scala 1:100.000

regione Bessanetto–Gias Bellacomba (alta Valle d'Usseglio), uno con estensione di oltre due chilometri e l'altro di oltre tre, ambedue con potenza variabile da 1 a 6 metri.

Carattere morfologico peculiare di qualche sistema filoniano della zona studiata è la disposizione dei filoni a ventaglio verso l'alto, come si nota nella regione di Punta Corna ed al Cruvino (ved. schizzo a pag. 218).

Vene, filoncelli e filoni risultano costituiti da prevalente ganga carbonatico–quarzosa, in cui si trova il minerale utile più interessante, rappresentato da smaltite–cloantite accompagnata da considerevole quantità di tetraedrite, da poca pirite e calcopirite.

I risultati dello studio mineralogico (1), (2) consentirono di identificare fra le ganghe siderite e mesitina manganesifere, non che calcite, dolomite e quarzo talvolta cristallizzati in geodine di discreta bellezza.

I risultati di ricerche calcografiche permisero di accertare oltre ai minerali metallici testè ricordati (smaltite–cloantite, tetraedrite, pirite e calcopirite) la safflorite–rammelsbergite in quantità notevole, associata alla smaltite–cloantite, l'arsenopirite, la pirrotite, la marcasite e la covellite in piccole quantità (2), (3).

Sono poi stati osservati i minerali di origine secondaria, che di solito accompagnano i minerali dianzi accennati, e segnatamente: limonite, eritrite, malachite e azzurrite.

Tutti i giacimenti descritti, dal punto di vista genetico, sono da ascriversi al noto gruppo di giacimenti filoniani idrotermali non argentiferi (4) a minerali di nichelio e cobalto a ganga carbonatico–quarzosa. La natura delle ganghe, la natura, la paragenesi e la struttura dei minerali metallici, messe in evidenza dallo studio calcografico, autorizzano a ritenere che il deposito nei nostri sistemi filoniani sia normalmente avvenuto a temperature non molto alte, in ogni caso non certamente superiori a quella che gli autori sogliono indicare come « media termalità ». Del resto è risaputo che la temperatura alquanto elevata, attribuita in un primo tempo da Beutell (5) al deposito di qualcuno dei minerali (smaltite–cloantite) facenti

---

(1) M. Fenoglio, *Sui giacimenti di cobalto dell'Alta Valle di Lanzo.* « Atti della Soc. Ital. di Scienze Naturali », vol. LXVII, 1928, pag. 182.

(2) M. Fenoglio e M. Fornaseri, *Il giacimento di nichelio e cobalto del Cruvino in Val di Susa.* « Periodico di Mineralogia », n. 1, 1940–XVIII, pag. 23.

(3) P. Piepoli, *Studio micrografico di minerali complessi delle vecchie miniere di cobalto di Usseglio (Valle di Viù).* « Periodico di Mineralogia », n. 2, 1934–XII, pag. 141.

(4) H. Schneiderhöhn, *Erzlagerstätten. Handwörterbuch der Naturwissenschaften,* Bd. III, pag. 844. Jena, 1933.

(5) A. Beutell, *Zur Genese von Speiskobalt und Chloantit auf Erzgängen.* « Centralblatt f. Min., Geol., u. Pal. », 1916, pag. 460.

parte dei nostri giacimenti, è già stata oggetto di opportuna messa a punto [1].

Perciò i giacimenti di nichelio e cobalto delle Alpi Piemontesi sono da ascriversi ai giacimenti definiti « mesotermali » [2], [3].

Tenuto poi conto delle condizioni geologiche in cui vengono a trovarsi i nostri giacimenti, legati alle ofioliti della grande formazione mesozoica dei calcescisti dei ricoprimenti pennidici, essi sono verosimilmente da porsi in relazione genetica con i magmi basici ed ultrabasici, dai quali provengono le ofioliti stesse, entro cui hanno sede. Infine per i giacimenti nichelo–cobaltiferi delle Alpi Piemontesi, secondo quanto opina Huttenlocher [4] anche per altri giacimenti similari legati alla stessa formazione, non sarebbero estranei all'estrazione degli elementi metallici (nichelio, cobalto, rame, ferro ecc.) dal magma primitivo fenomeni tettonici posteriori, relativi all'orogenesi alpina. Sarebbe cioè avvenuto durante questo periodo uno spostamento (*Mobilisierung*) dei metalli in questione con rideposizione per opera di acque termali.

Da quanto sono venuto brevemente esponendo emerge chiaramente l'importanza non solo scientifica, ma altresì tecnica, di un complesso di giacimenti, che indubbiamente, tenuto conto degli altri modesti giacimenti italiani di nichelio e cobalto, potrebbero rappresentare per il nostro Paese una riserva non del tutto trascurabile.

L'interesse presentato da questi giacimenti, dal punto di vista minerario, risulta poi ancora più evidente, se, dopo averne accennate le dimensioni, passiamo ad esaminarne brevemente la composizione dei minerali utili.

Il minerale utile più interessante, come già fu detto, è rappresentato da arseniuri delle serie isomorfe smaltite–cloantite e safflorite–rammelsbergite, ma non si può fare a meno di richiamare anche l'attenzione sulla discreta quantità di tetraedrite e sulla siderite manganesifera, accompagnata da scarsa ematite. Quantitativamente la siderite costituisce uno dei minerali di riempimento più importanti dei giacimenti filoniani studiati.

Allo scopo di dare un'idea concreta della composizione del minerale nichelo–cobaltifero più comune riporto i risultati di due analisi della smal–

---

[1] H. Schneiderhöhn und P. Ramdohr, *Lehrbuch der Erzmikroskopie*, Bd. II, Berlin, 1931. Bd. I, I Teil, Berlin, 1934.

[2] W. Lindgren, *Mineral deposits*. New–York, 1933.

[3] W. A. Obrutschew, *Ueber die Systematik der Erzlagerstätten*. Halle, 1926.

[4] H. F. Huttenlocher, *Die Erzlagerstättenzone der Westalpen*. « Schweiz. Min. u. Petr. Mitt. », Bd. XIV, 1934, pag. 22.

tite–cloantite dell'alta Val d'Usseglio (I e II), eseguite la prima da Rammelsberg [1] e la seconda da Fenoglio [2], non che i risultati dell'analisi della smaltite–cloantite del Cruvino (III), eseguita da Fenoglio e Fornaseri [3]:

	I	II	III
As	76,55	75,97	76,70
Sb	0,32	0,19	0,30
S	0,75	0,71	0,80
Co	7,31	7,65	2,77
Ni	4,37	4,22	11,15
Fe	7,84	7,93	7,55
Cu	0,22	0,10	0,20
Zn	4,11	3,81	0,91
Somma	101,47	100,58	100,38

Uno sguardo ai dati analitici della tabella è sufficiente per persuaderci che effettivamente i tenori in cobalto e nichelio sono veramente cospicui, essendo i tenori in cobalto compresi fra il 2,77 ed il 7,65 % ed i tenori in nichelio fra il 4,22 ed 11,15 %.

Evidentemente le oscillazioni nei tenori di questi due metalli trovano plausibile spiegazione nel fatto che il nostro minerale è costituito da una miscela isomorfa di arseniuro di cobalto (smaltite) e di arseniuro di nichelio (cloantite), dove cobalto e nichelio sono vicarianti.

Volendo poi ancora soffermarci sui tenori in nichelio, che, nel caso nostro, interessano in modo particolare, notiamo subito che per quanto oscillanti entro limiti notevolmente ampii (4,22–11,15 %), essi sono tuttavia sempre abbastanza elevati, e degni della massima considerazione.

La tetraedrite, in quantità non trascurabile agli effetti dello sfruttamento, ha evidentemente anch'essa una certa importanza.

Infine la siderite, sia dal punto di vista qualitativo che quantitativo, presenta particolare interesse pratico, poichè è manganesifera e si trova in masse considerevoli decisamente predominanti a formare il riempimento dei filoni, specialmente di quelli più potenti. Del resto è documentato che gli antichi nella regione di Gias Bellacomba–Bessanetto sfruttarono i due filoni di maggiori dimensioni (ved. schizzo a pag. 218) sopra ricordati per l'estrazione del ferro. Perciò, anche in vista della possibilità di sfruttamento del ferro spatico, questo notevole gruppo di giacimenti pare ancora degno di ulteriore attenzione.

---

[1] C. Rammelsberg, *Untersuchung einiger natürlichen Arsen– und Schwefelverbindungen.* « Zeit. der Deutsch. geol. Gesell. », Bd. XXV, 1873, pag. 284.

[2] M. Fenoglio, loc. cit., pag. 190.

[3] M. Fenoglio e M. Fornaseri, loc. cit., pag. 35.

Antropologia. — *Sulla variabilità dei caratteri antropometrici lineari* [1]. Nota [2] preliminare di ALFREDO SACCHETTI, presentata da SERGIO SERGI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

Nella moderna metodologia statistica si usa classificare gli indici atti alla misura della variabilità in due grandi classi: indici di variabilità assoluta e indici di variabilità relativa, che, rispetto ai primi, hanno lo scopo di permettere il confronto reciproco della variabilità di diversi caratteri.

Tra i principali indici di variabilità assoluta si annoverano, come è noto, il campo di variazione, lo scostamento semplice medio dalla media aritmetica, lo scostamento quadratico medio, lo scostamento probabile, la differenza interquartile, la differenza media. L'uso di questi metodi non è naturalmente indifferente e la scelta dipende spesso, in rapporto allo scopo che si vuole raggiungere e alla struttura matematica delle singole formule, dalla intuizione statistica di chi si propone lo studio della variabilità. Nel campo dell'antropometria però, come già altrove affermai [3], è generale l'uso di solo uno di questi metodi, e cioè lo scostamento quadratico medio. Tale preferenza risulta giustificata in quanto, essendo in pratica limitato il numero dei casi osservati, è preferibile l'uso di quell'indice che meno degli altri risente l'influenza dello scarso numero di osservazioni; è questo lo scostamento quadratico medio se la distribuzione del fenomeno segue la legge di GAUSS. Ed è ben noto come in antropometria la distribuzione dei caratteri lineari segua appunto la legge suddetta.

Accettato pertanto come indice il più adatto nelle comuni ricerche antropometriche lo scostamento quadratico medio (senza escludere però che si possa ricorrere, in alcuni casi, anche alla differenza media o ad altri indici), resta a vedere quale soluzione si debba scegliere per la formulazione di un indice relativo che permetta utili confronti tra la variabilità di diversi caratteri.

---

[1] Dall'Istituto di Antropologia della R. Università di Roma.

[2] Pervenuta all'Accademia il 2 ottobre 1940-XVIII.

[3] A. SACCHETTI, *Sulla misura della variabilità in antropometria*. « Rivista di Antropologia », vol. XXXII, Roma, 1938-39.

A tale riguardo il metodo più naturale è, partendo dalla conoscenza dello scostamento quadratico medio, quello che rapporta detto valore alla média del carattere in esame fatta eguale a cento, metodo che va sotto il nome di indice o coefficiente di variabilità percentuale $\left(\mathrm{CVp} = \frac{\sigma}{M} 100\right)$.

Fin dall'ultimo decennio del secolo scorso, quando per la prima volta gli studiosi, e tra gli altri Brewster e Pearson, si occuparono della questione degli indici atti alla misura relativa della variabilità, tale metodo

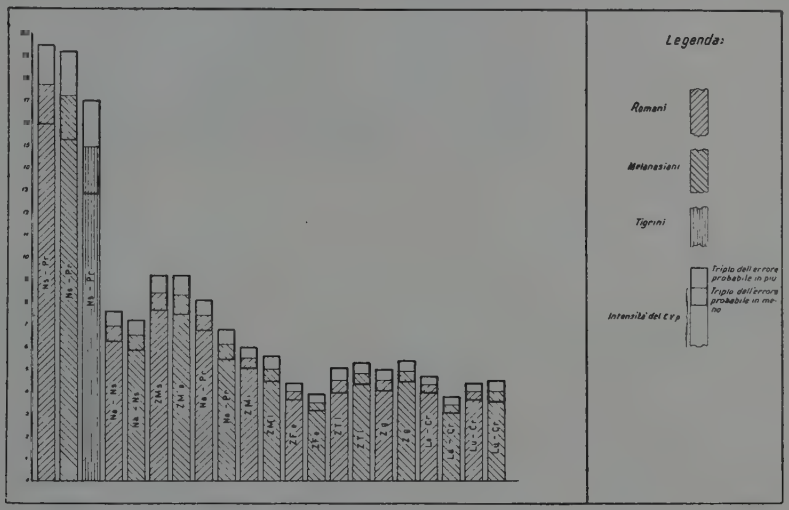


Fig. 1. – Grado di variabilità (determinato col CVp) di alcuni caratteri cranici ordinati secondo l'intensità crescente dei rispettivi valori medi.

è stato ed è tuttora universalmente adottato nei campi più diversi delle scienze statistiche. Soltanto nel 1910 il Gini, per la prima volta, si soffermò sul significato strutturale intimo della formula di questo coefficiente, e propose pertanto in via collaterale un nuovo indice che rapportava il σ non più alla media, ma alla $\sqrt{M}$ [1].

Io ho avuto l'opportunità di constatare il significato e l'importanza della formula $\frac{\sigma}{\sqrt{M}}$ in occasione di una mia indagine antropologica riguardante alcuni problemi di morfo–fisiologia cranica e particolarmente la posizione spaziale e la forma di alcuni elementi ossei della faccia rispetto a certi determinati piani di orientamento. Studiando la variabilità di alcuni

[1] C. Gini, *Sulla variabilità dei due sessi alla nascita e nelle età adulte*. Cagliari, 1910.

diametri facciali trovavo molto difficile poter spiegare biologicamente l'altissimo valore che l'indice $\frac{\sigma}{M}$ 100 assumeva per una certa dimensione dello scheletro facciale; mentre l'indice del GINI, in tal caso, permetteva di arrivare a risultati convincenti [1].

Il diametro in questione è il più piccolo tra quelli esaminati. Questa circostanza, che potrebbe a prima vista sembrare insignificante, appare

---

[1] Ecco i dati essenziali della ricerca riferita nel testo.

Nella fig. 1 sono riportati i coefficienti di variabilità percentuale $\left(\text{CVp} = \frac{\sigma}{M}\,100\right)$ con i relativi errori probabili (triplo) $\left(3\,\text{Ec} = \pm 3 \cdot 0{,}6745\,\frac{\text{CVp}}{\sqrt{2n}}\left[1 + 2\left(\frac{\text{CVp}}{100}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\right)$ da me calcolati per una serie di caratteri cranici rilevati su due centurie di teschi composte, rispettivamente, di 200 Romani moderni e circa 160 Melanesiani. Mi sono servito a tale riguardo del prezioso materiale posseduto dal Museo dell'Istituto di Antropologia della R. Università di Roma e che ho potuto avere a mia disposizione per la cortese liberalità del Direttore prof. SERGIO SERGI.

Per ogni singola dimensione ho disegnato nel diagramma della figura 1 un rettangolo con base costante ed altezza proporzionale al rispettivo coefficiente di variabilità percentuale (il cui valore si può leggere facilmente sulla scala graduata corrispondente alle ordinate); mentre per mezzo di opportune bande che si estendono egualmente al disopra e al disotto del vertice di ogni colonnina, ho poi precisato l'entità dell'errore probabile (triplo) in più e in meno per ciascun carattere. I limiti delle singole bande così costruite non dovranno quindi incrociarsi perchè si possa affermare con quasi certezza l'esistenza di variabilità diverse.

L'ordine di successione dei caratteri, da sinistra a destra, è quello per intensità crescente dei rispettivi valori medi.

Con metodo analogo è stata inoltre costruita la figura 2 nella quale sono riportati i valori del coefficiente di variabilità relativa calcolati sullo stesso materiale (evitando però la determinazione dell'errore probabile poichè, se non erro, in questo caso, non è stata ancora determinata la formula relativa. Del resto, sullo scarso significato che alcuni statistici attribuiscono all'errore probabile cfr. C. GINI, *I pericoli della statistica* in « Rivista di Politica Economica », Anno XXIX, fasc. XI, pag. 11 e segg. dell'estratto).

Nella tabella seguente sono riportati i valori medi dei caratteri rappresentati nelle figure, per i Romani, i Melanesiani e, nel caso del diametro *Ns-Pr*, per una serie di 105 crani del Tigrè.

Le costanti che si riferiscono al materiale del Tigrè sono state elaborate sui dati grezzi pubblicati nel 1912 dal prof. SERGIO SERGI in un suo importante studio sull'*Antropologia dell'Africa Orientale*. I crani appartengono alla Virchow Sammlung della Società di Antropologia di Berlino. In questa sua opera (*Crania Habessinica*, Roma, Ermanno Loescher, 1912) il SERGI non riporta le misure dirette del

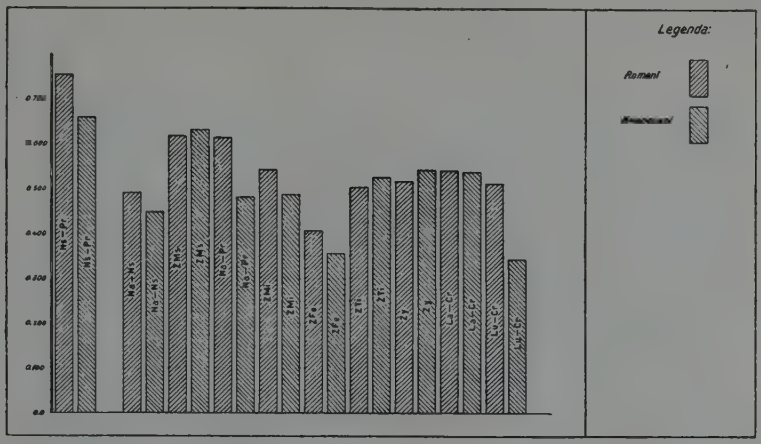


Fig. 2. – Grado di variabilità (determinato col CVr) di alcuni caratteri cranici ordinati secondo l'intensità crescente dei rispettivi valori medi.

invece sotto tutt'altra luce tenendo presente quanto scrisse il Gini, sempre nel 1910, a proposito del vecchio coefficiente di variabilità: « A base di questo procedimento sta solo l'ipotesi che la variabilità di un fenomeno

---

piccolo diametro alveolare (*Ns–Pr*); esso è stato pertanto ottenuto facendo la differenza fra i due diametri *Na–Pr* ed *Na–Ns*.

Tabella I.

Caratteri e loro abbreviazioni	$M \pm Em$		
	Romani	Melanesiani	Tigrini
Bizigomaxillare superiore (*ZMs*)	53,78 ± 0,21	57,27 ± 0,25	—
Bizigomaxillare inferiore (*ZMi*)	94,05 ± 0,25	92,13 ± 0,25	—
Bizigotemporale inferiore (*ZTi*)	126,84 ± 0,27	122,40 ± 0,31	—
Bizigofrontale esterno (*ZFe*) . .	105,11 ± 0,19	100,85 ± 0,19	—
Bizigomatico (*Zy*)	132,21 ± 0,28	124,80 ± 0,32	—
Nasion–prostion (*Na–Pr*) . . .	69,48 ± 0,24	62,26 ± 0,20	—
Nasion–nasospinale (*Na–Ns*) . .	51,24 ± 0,16	47,52 ± 0,16	—
Nasospinale–prostion (*Ns–Pr*) .	18,24 ± 0,15	14,71 ± 0,13	19,23 ± 0,19
Larghezza cranica (*La. cr.*). . .	141,24 ± 0,29	128,38 ± 0,26	—
Lunghezza cranica (*Lu. cr.*) . .	180,60 ± 0,34	174,45 ± 0,38	—

sia teoricamente proporzionale al suo valore medio. È questa certamente una ipotesi discutibile ».

Con tali parole veniva individuata sin da allora la realtà. Specialmente in antropometria infatti il σ non aumenta proporzionalmente alla media ma ad una funzione di questa. Perciò il GINI propose, come ho detto, l'espressione $\frac{\sigma}{\sqrt{M}}$, chiarendo che dovremmo ammettere la proporzionalità tra la variabilità (σ) e la $\sqrt{M}$ del fenomeno a cui essa si riferisce solo quando si potesse ritenere che i singoli elementi da cui il fenomeno risulta costituito variano accidentalmente l'uno indipendentemente dall'altro. Così, d'altra parte, la proporzionalità assoluta tra la variabilità (σ) e il valore medio si può ammettere solo nel caso teorico in cui i singoli elementi che costituiscono il fenomeno variano non accidentalmente, l'uno indipendentemente dall'altro, ma nello stesso senso e con la stessa intensità.

A prima vista si può subito dire che nessuna di queste circostanze limite si avvera in antropometria, mentre si deve ammettere in generale una condizione intermedia (1). Ma spontanea ci si presenta ora una domanda: quale è la realtà e quale dei due metodi usati si avvicina di più ad essa ? (2)

In questa Nota preliminare e nelle successive che saranno dedicate allo stesso problema mi propongo di esporre brevemente solo i primi risultati di alcune mie laboriose ricerche sulla misura relativa della variabilità dei caratteri lineari in antropometria. In una Memoria di prossima pubblicazione tratterò poi più estesamente l'argomento (3).

Un approfondito esame dei dati su esposti che qui tralascio per brevità mi ha portato a concludere con considerazioni anatomiche e biologiche le quali possono facilmente spiegare la forte variabilità delle misure di altezza della faccia ed anche una relativa maggiore variabilità del segmento alveolare (*Ns–Pr*); ma non di una intensità tale da giustificare l'altissimo valore espresso dal coefficiente percentuale per tutti e tre i gruppi etnici esaminati.

Nel lavoro citato (*Sulla misura della variabilità* ecc.) si può trovare un primo sia pure rudimentale tentativo di soluzione del problema dal punto di vista statistico. In esso infatti i grafici 1, 2, 3 e 4 si riferiscono appunto allo stesso materiale scheletrico qui ricordato.

(1) C. GINI, *Memorie di Metodologia statistica*. Vol. I, *Variabilità e mutabilità*, pag. 305, Milano, 1939.

(2) Il GINI, nell'ultimo lavoro da noi citato (pag. 305), si limitava ad osservare che, « di caso in caso, si potrà giudicare se è da ritenersi che risponda meglio alla realtà delle cose l'ipotesi su cui si fonda l'uno o l'altro di essi [metodi] ».

(3) Alcuni risultati riguardanti queste indagini furono da me illustrati nell'ultima adunanza (22 maggio 1940) dell'Istituto Italiano di Antropologia e in quella della Società Italiana di Statistica tenuta a Roma il 27 giugno dello stesso anno.

Per mostrare tutta la portata della questione valga ora qualche semplice esempio scelto a caso tra le centinaia che ho potuto raccogliere nel corso del lavoro.

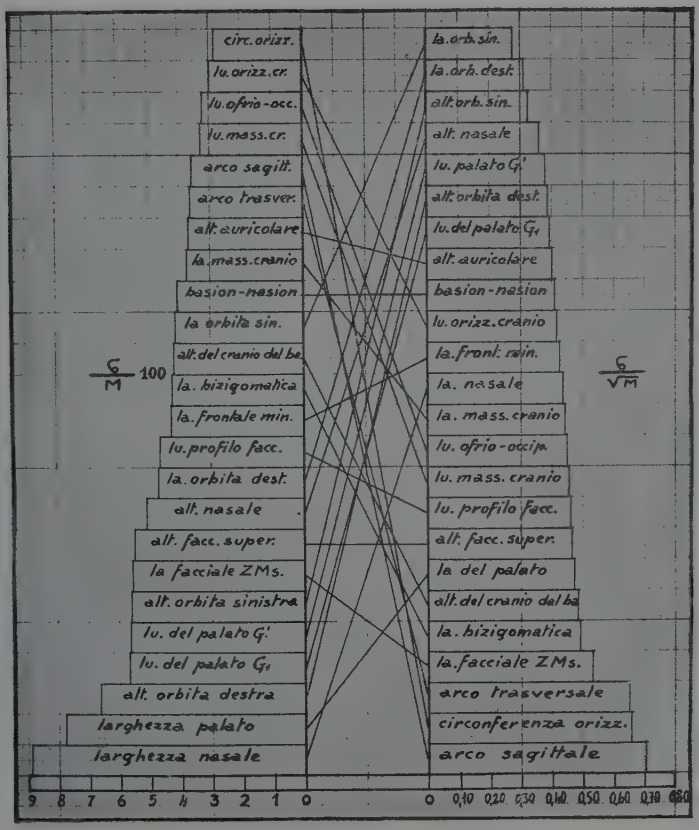


Fig. 3.

crani inglesi ♂

Fonte: W. R. Macdonell, *A study of the variation and correlation of the human skull, with special reference to english crania.* « Biometrika », vol. III.

I. Sui dati pubblicati da W. R. Macdonell nella sua Memoria *A study of the variation and correlation of the human skull, with special reference to english crania* (« Biometrika », vol. III), concernenti un gruppo di crani inglesi ♂, ho calcolato i due indici di variabilità percentuale e relativa per ogni carattere metrico lineare. Poi, elencati i caratteri in ordine crescente, secondo il primo e rispettivamente il secondo indice, li ho riportati nel diagramma della figura 3 nel modo seguente: stabiliti

due punti come origine di due graduatorie opposte su un asse orizzontale, ho segnato su di esso, verso sinistra una scala di valori relativi al coefficiente $\frac{\sigma}{M}$ 100, verso destra una scala di valori relativi al coefficiente $\frac{\sigma}{\sqrt{M}}$.

Partendo sempre da una retta perpendicolare allo zero di destra e di sinistra ho poi disegnato rispettivamente una banda per ogni carattere la cui estensione, proiettata sulla scala relativa, rappresenta il valore che

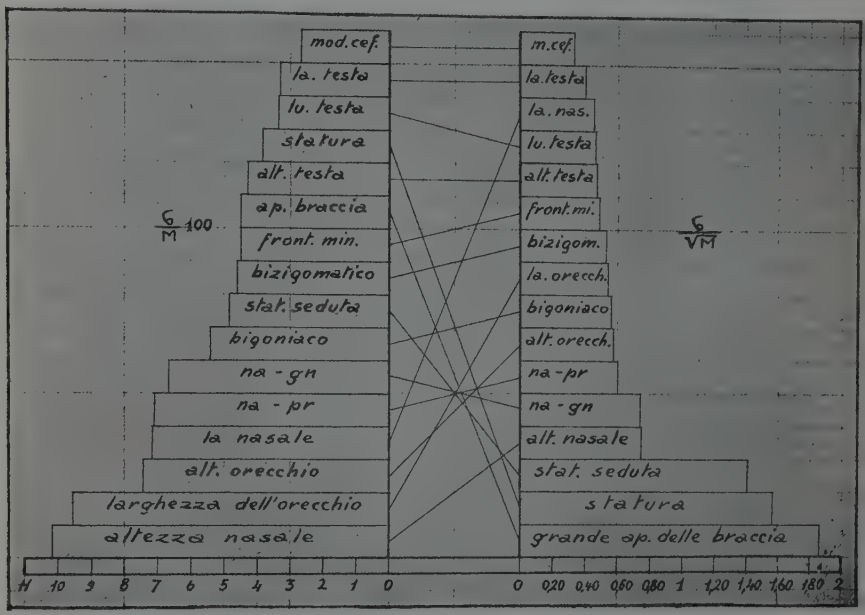


Fig. 4.

♂ beduini di Akeydat

Fonte: W. M. Shanklin, *Anthropology of the Akeydat and the Manaly Bedouin.* « American Journal of Physical Anthropology », vol. XXI, n. 2.

in ogni singolo caso assume il rispettivo coefficiente di variabilità. L'ordine con cui si susseguono le bande è naturalmente tanto più diverso a destra e a sinistra quanto più divergono i risultati cui portano i due metodi. Con le congiungenti segnate nel centro del grafico ho sempre unito le bande dei due lati che si riferiscono allo stesso carattere. L'incrociarsi più o meno frequente delle congiungenti mostra quindi la maggiore o minore gravità delle divergenze che si osservano quando si prende in esame il fenomeno della variabilità con i metodi considerati.

II. Con lo stesso procedimento seguito per l'esempio precedente è stato costruito il grafico della figura 4 riguardante un certo numero di

caratteri antropometrici rilevati dal Shanklin su un gruppo di ♂ beduini viventi della tribù di Akeydat. Le divergenze fra i due metodi, che teoricamente vorrebbero dare una misura esatta dello stesso fenomeno, sono anche in questo caso evidentissime.

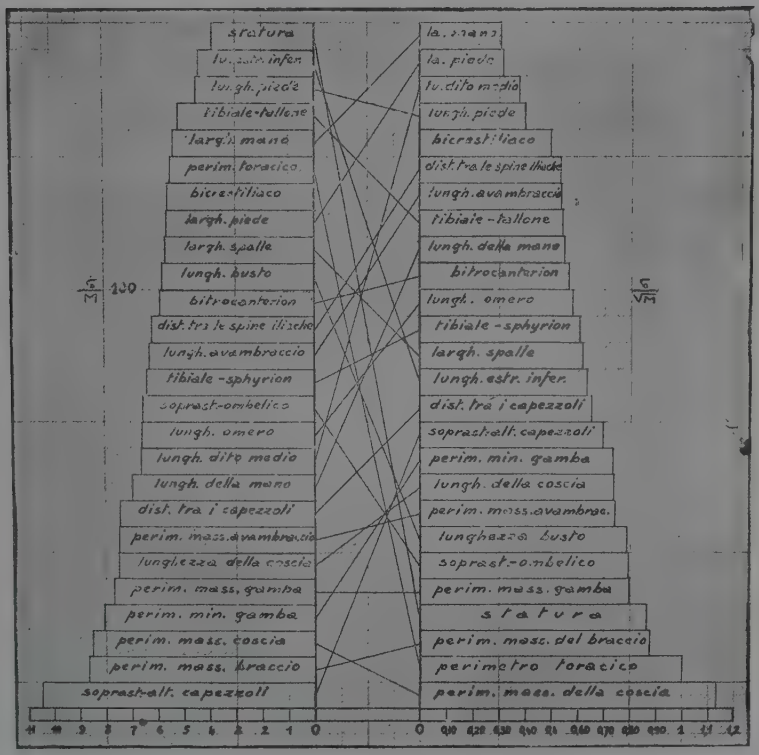


Fig. 5.

♀ neonate di Zurigo

Fonte: E. Kugler, *Körperproportionen und Kopfform bei Neugeborenen.* Aus dem Anthropologischen Institut der Universität Zürich, 1932.

III. Con la figura 5 se ne dà ancora un saggio, basato sui risultati di una interessante ricerca di una allieva dello Schlaginhaufen sui caratteri fisici dei neonati di Zurigo.

IV. Da vari autori ho rilevato i dati riguardanti la statura (*S*) e contemporaneamente la statura seduta (*Ss*) di 52 gruppi di individui sempre abbastanza numerosi e appartenenti alle razze più diverse. Ho potuto così confrontare la variabilità del carattere *S* con quella del carattere *Ss* seguendo i due metodi $CVp\left(=\frac{\sigma}{M}\ 100\right)$ e $CVr\left(=\frac{\sigma}{\sqrt{M}}\right)$ e regi-

strando tra l'altro i risultati ottenuti nel complesso dei 52 gruppi esaminati secondo le 4 combinazioni possibili elencate nella tabella seguente

TABELLA II.

Combinazioni possibili nei risultati ottenuti con i due coefficienti CVp e CVr	Casi osservati		
	Cifre assolute	Cifre percentuali	
Combinazioni concordanti			
$CVp \rightarrow S > Ss$ / $CVr \rightarrow S > Ss$	13	25,00	32,69
$CVp \rightarrow S < Ss$ / $CVr \rightarrow S < Ss$	4	7,69	
Combinazioni divergenti			
$CVp \rightarrow S < Ss$ / $CVr \rightarrow S > Ss$	35	67,31	67,31
$CVp \rightarrow S > Ss$ / $CVr \rightarrow S < Ss$	—	—	
TOTALE . . .	52	100,00	100,00

V. Quest'ultimo esempio, simile al precedente, riguarda il confronto della variabilità della lunghezza massima della testa (*Lu*) con quella della larghezza massima della testa (*La*). I dati si riferiscono a 70 gruppi di individui sempre appartenenti alle razze più diverse. I risultati ottenuti sono riportati nella tabella III.

Le divergenze degli ultimi due esempi, che ammontano rispettivamente a 67,31 % e 42,86 %, sono impressionanti; esse non possono meravigliare, d'altra parte, se si pensa appena un momento alla struttura matematica delle formule dei due coefficienti.

Risultati così diversi mostrano come il vaglio dello statistico e le critiche che devono farsi ai metodi, anche se questi si considerano oramai standardizzati, non sono mai troppe. E non bisogna illudersi neppure se questi metodi di pura tecnica statistica in alcuni casi hanno dato risultati soddisfacenti. Quale esempio migliore del nostro?

Il coefficiente di variabilità percentuale $\frac{\sigma}{M}$ 100 da quasi mezzo secolo si trova usato su vasta scala in tutta la letteratura biologica. I risultati

cui esso ha portato non sono stati, per di più, mai messi in dubbio (prima del Gini) dagli autori, sì che su questi si sono basate sempre le conclusioni più importanti. Teorie su teorie sono sorte per spiegare fenomeni che, qualche volta, bisogna riconoscerlo, erano sembrati imprevedibili; e ciò specialmente quando le medie dei caratteri da mettere a confronto sono molto diverse tra loro.

Tabella III.

Combinazioni possibili nei risultati ottenuti con i due coefficienti CVp e CVr	Casi osservati		
	Cifre assolute	Cifre percentuali	
Combinazioni concordanti			
CVp → $Lu > La$ / CVr → $Lu > La$	29	41,43	57,14
CVp → $Lu < La$ / CVr → $Lu < La$	11	15,71	
Combinazioni divergenti			
CVp → $Lu < La$ / CVr → $Lu > La$	29	41,43	42,86
CVp → $Lu > La$ / CVr → $Lu < La$	1	1,43	
Totale . . .	70	100,00	100,00

Al fine di eseguire un esame approfondito del problema, ho raccolto un vasto materiale di studio che ora va estendendosi dall'antropometria anche agli altri campi della biometria, perchè non si può prevedere se le stesse leggi possano valere per tutti i fenomeni biologici.

In una Nota successiva mi limiterò a dare una visione sintetica dei risultati essenziali riguardanti il problema del confronto della variabilità di più caratteri nello stesso gruppo di individui. Accennerò soltanto, in fine, al confronto della variabilità dello stesso carattere in più gruppi di individui.

* * *

Da tutto quanto precede risulta stabilito chiaramente un concetto fondamentale: il confronto della variabilità di caratteri che presentano valori medi differenti è solo possibile dopo avere eliminato l'influenza che esercita sugli indici di variabilità assoluta questa diversità di valori medi.

Vari autori avevano invero già notato che il coefficiente di variabilità percentuale non riesce affatto, in pratica, a *sganciarsi* dalla influenza che esercita su di esso l'intensità del valore medio di ogni singolo carattere e che con l'aumentare del valore medio diminuisce – in genere – la misura percentuale degli scostamenti che si determina per ciascun carattere.

A questa conclusione era arrivato, ad esempio, VIOLA già nel 1905 [1] e, più tardi (1911), il NICEFORO in un suo lavoro pubblicato nella « Rivista di Antropologia » [2].

Basandosi sulla formula per il calcolo della correlazione fra gli elementi di due serie proposta da YULE $\left(r = \frac{ad - bc}{ad + bc}\right)$, la quale dà un indice oscillante tra 0 e ± 1, il NICEFORO trovava una correlazione tra l'ampiezza della misura e la dispersione (σ) = 0,988; mentre la correlazione tra l'ampiezza della misura e il coefficiente di variabilità risultava eguale a —0,909.

Il VIOLA parlava di una vera e propria legge avente un carattere generale (dottrina dei *compensi antropometrici*); dal nostro punto di vista la cosa è oltremodo istruttiva: a che vale calcolare un coefficiente relativo di variabilità quando questo non raggiunge poi il suo scopo fondamentale, di individuare cioè differenze di variabilità tra i singoli caratteri che siano veramente ed esclusivamente legate alla natura di questi e alla loro intima struttura anatomica e fisiologica ?

Concludendo, senza ricorrere ad altre fonti, si può dire che, pur conoscendo la relazione esistente tra il valore medio e il coefficiente di variabilità percentuale, gli autori non si sono mai preoccupati di indagare a fondo per via statistica la questione.

Nella mia Nota citata in principio e negli Atti della Società Italiana di Statistica (attualmente in corso di pubblicazione) ho riportato i risultati di un saggio a carattere esplorativo condotto sui dati riguardanti alcuni diametri cranici per vedere fino a qual punto il CVp dipendeva dall'intensità della media. Questi risultati mostrano una notevole relazione negativa tra CVp ed M [3].

---

[1] G. VIOLA, *Gli scostamenti antropometrici individuali le loro leggi* ecc. « Lavori dell'Istituto », vol. II, Padova, 1905, pagg. 254, 256, 257.

Si deve notare che il VIOLA usava denominazioni invertite rispetto alle nostre (che sono oramai quelle generalmente accettate nella moderna tecnica statistica) per quanto riguarda gli scostamenti dei singoli caratteri. Per scostamento relativo infatti egli intendeva la sua misura effettiva rispetto alla lunghezza vera dei caratteri, e viceversa per scostamento assoluto.

[2] A. NICEFORO, *Contributo allo studio della variabilità di alcuni caratteri antropologici*. « Riv. di Antr. », Roma, 1911, pag. 41.

[3] Tale relazione si scorge, del resto, anche nella figura 1 dove i caratteri si susseguono secondo l'intensità crescente dei rispettivi valori medi. Relazione che scompare invece nella fig. 2 costruita sui dati del CVr.

Da ciò appare chiaro come si possa spiegare facilmente il fatto che accennavo prima della forte e sproporzionata variabilità che il più piccolo dei diametri preso in esame avrebbe presentato secondo il metodo $\frac{\sigma}{M} \cdot 100$. Essendovi infatti una relazione negativa tra l'indice percentuale e il valore medio è logico che, quando una dimensione è molto piccola, il valore dell'indice diventi molto grande e viceversa. Il coefficiente CVr, d'altra parte, ha portato a conclusioni meglio accettabili da un punto di vista strettamente anatomico e biologico. Ma risultati simili, che riguardano casi singoli, non devono influenzare una ricerca obbiettiva. Per altra via doveva essere risolto il problema.

Antropologia. — *Sul confronto reciproco della variabilità dei caratteri antropometrici lineari.* Nota (1) di ALFREDO SACCHETTI, presentata da SERGIO SERGI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

La presente Nota si ricollega con alcune considerazioni sulla misura relativa della variabilità dei caratteri lineari in antropometria da me pubblicate in questi stessi Rendiconti (2).

Innanzi tutto è opportuno quindi chiarire o ricordare qualche concetto fondamentale, necessario per la giusta interpretazione di tutto quanto verrà esposto in questo scritto.

In antropometria e, in genere in biometria due problemi sostanzialmente ci si propone di risolvere per quanto riguarda *la misura relativa della variabilità*:

Di quanto e come differisce la variabilità di un carattere X rispetto a quella di un carattere Y nello stesso gruppo di individui ? Ecco il primo problema.

Di quanto e come differisce la variabilità dello stesso carattere in più gruppi di individui ? Ecco il secondo problema.

L'impostazione del primo problema costituisce l'argomento essenziale per una prima serie di ricerche che, in forma preventiva, verranno brevemente illustrate nelle pagine seguenti. Si accennerà soltanto, infine, al secondo problema e alle indagini relative che tuttora sono in corso di elaborazione.

Nella Nota precedente fu già messo in luce e dimostrato come *il confronto della variabilità di caratteri che presentano valori medi differenti sia solo possibile dopo avere eliminato l'influenza che esercita sugli indici di variabilità assoluta questa diversità di valori medi.*

I due metodi CVp $\left(= \frac{\sigma}{M} 100\right)$ e CVr $\left(= \frac{\sigma}{\sqrt{M}}\right)$ che, come si è visto (2), sono basati su ipotesi limite opposte, simmetriche ed entrambe irreali

(1) Pervenuta all'Accademia il 31 ottobre 1940–XIX.

(2) A. SACCHETTI, *Sulla variabilità dei caratteri antropometrici lineari*, nel presente fascicolo, pag. 222.

per quanto riguarda la correlazione esistente tra i diversi elementi che costituiscono i singoli caratteri antropometrici, dànno del resto risultati in gran parte discordanti tra loro e non realizzano certo quel postulato fondamentale che abbiamo ora ricordato e che originariamente spinse gli autori alla ricerca di un nuovo indice per la misura relativa della variabilità. Ma come orientare le indagini per tentare una nuova e più razionale soluzione del problema?

Il procedimento seguìto è analogo a quello adottato dal Gini nella sua Memoria *Indici di concentrazione e di dipendenza* per alcuni fenomeni economici (1).

Si considerino due coppie di valori m_1, n_1 ed m_2, n_2, corrispondenti rispettivamente a due fenomeni diversi, in cui sia:

[1] $$m_2 > m_1$$

[2] $$n_2 > n_1$$

[3] $$\frac{n_1}{m_1} > \frac{n_2}{m_2}.$$

Questo è lo schema teorico nel quale si può inquadrare il nostro quesito qualora si sostituisca ad n lo scostamento quadratico medio (σ) e ad m il valore medio (M) di ogni carattere.

Se si considerano infatti due caratteri qualsiasi, definiti rispettivamente dalle costanti M_1, σ_1 ed M_2, σ_2 (in cui $M_2 > M_1$), in generale, come risulta da quanto si è detto precedentemente, si osserva che

$$\frac{\sigma_1}{M_1} 100 > \frac{\sigma_2}{M_2} 100$$

e quindi

[4] $$\frac{\sigma_1}{M_1} > \frac{\sigma_2}{M_2}$$

da cui

[5] $$\frac{M_2}{M_1} > \frac{\sigma_2}{\sigma_1}.$$

In sostanza il còmpito che ci si deve proporre è di eliminare in media queste diseguaglianze.

Noi chiameremo indice di proporzionalità tra σ ed M un'espressione che misuri la relazione esistente tra i due membri della diseguaglianza [5].

---

(1) C. Gini, *Memorie di metodologia statistica*, vol. I, pag. 17 e 18.

Una prima formula che potrebbe portare alla individuazione di un tale indice è la seguente:

$$[6] \qquad \left[\frac{M_i}{M_1}\right]^b = \frac{\sigma_i}{\sigma_1}$$

in cui sia posto sempre $M_i > M_1$.

Essa si può però ammettere solo nel caso che si avverino determinate ipotesi.

Nella pratica, qualora risultasse soddisfacente la [6], si potrebbero calcolare, operando sui logaritmi, i valori effettivi di b per ogni carattere e prendere quindi come indice di proporzionalità la media di tali valori. Ma in questo caso con quale criterio obbiettivo si sarebbe scelto il carattere di riferimento indicato nella [6] dalle costanti M_1 e σ_1?

Ecco la soluzione adottata.

Posti in un diagramma cartesiano ortogonale sulle ascisse i valori di $\log M_i$ e sulle ordinate i valori corrispondenti di $\log \sigma_i$ per un gruppo di caratteri antropometrici lineari (tutti rilevati sugli stessi soggetti) si ottengono dei punti che possono venire convenientemente interpolati con una retta secondo l'equazione:

$$[7] \qquad \log \sigma_i = b \log M_i - \log k.$$

La costante b si può così evidentemente interpretare come l'*esponente a cui bisogna innalzare la media di ogni carattere per renderla in generale proporzionale ai singoli valori di sigma*. Infatti, passando dai logaritmi ai numeri, si ottiene:

$$\sigma_i = M_i^b \frac{1}{k}$$

dove b risulterà eguale ad uno (ipotesi ammessa per il CVp) solo nel caso teorico di proporzionalità assoluta tra σ_i ed M_i, mentre sarà eguale a 0,5 (ipotesi ammessa per il CVr) nel caso di proporzionalità assoluta tra σ_i e $\sqrt{M_i}$.

Dalla [7], ammessa la linearità della relazione tra M_i e σ_i, si può poi anche risalire alla [6]. Sostituendo infatti ad M_i e σ_i, M_1 e σ_1 si ha:

$$\log \sigma_1 = b \log M_1 - \log k$$

e quindi:

$$\log \sigma_i - \log \sigma_1 = b \, (\log M_i - \log M_1)$$

da cui, eliminando i logaritmi, si ritrova la [6].

In pratica si è seguìto il procedimento dell'interpolazione lineare secondo la [7], poichè, come ho detto, in generale, essa interpreta in modo soddisfacente i dati sperimentali studiati fino ad ora. È stato poi sempre adottato il metodo di interpolazione dei minimi quadrati.

Nella Memoria definitiva mi soffermerò alquanto sulla portata pratica della nostra interpolazione lineare e sul significato degli scostamenti dei singoli punti che stanno ad indicare ciascun carattere nel diagramma [1], poichè è opportuno, in queste indagini, non perdere mai di vista il significato biologico dei dati che si vanno elaborando statisticamente. Per ora passo ai risultati più importanti, risultati che riguardano le dimensioni corporee più disparate, dalle più complesse (ad esempio *statura* e *grande apertura delle braccia*) alle più elementari (come i singoli *segmenti delle dita della mano*). Quasi sempre inoltre ogni gruppo di caratteri rilevati in una popolazione o in una serie scheletrica si riferisce allo stesso numero di soggetti.

Nel complesso si tratta di più di cento rilevazioni (ognuna delle quali comprende un certo numero di dimensioni che oscilla da circa 8–10 a circa 30) compiute sui gruppi etnici più disparati; materiale prezioso che io ho rilevato da autori delle scuole più diverse.

I risultati ottenuti con la suddetta interpolazione sul nostro materiale sono riportati nella Tabella.

In essa, oltre ai singoli coefficienti angolari espressi dalla lettera b, vengono date tra l'altro le indicazioni seguenti: un numero d'ordine generale, una notazione distintiva per gruppi di rilevazioni e, infine, la media dei coefficienti angolari b per ogni gruppo. Ho ritenuto opportuno fare dei gruppi di rilevazioni quando alcune di queste si riferivano agli stessi caratteri, poichè in tal caso gli scostamenti dei singoli punti del grafico, a cui si è appena accennato, e che riguarda la distribuzione dei log. σ_i corrispondentemente ai log.M_i, sono molto simili fra loro e, inoltre, anche il coefficiente angolare b varia poco fra le diverse rilevazioni. Osservando la tabella ci si può del resto convincere facilmente di questa ultima circostanza. Si vedano ad esempio le rilevazioni di Davenport e Love, quelle di Shanklin, quelle di Craig, quelle di Buxton.

Ma ciò che interessa sopratutto ora è la distribuzione del coefficiente angolare b secondo la sua intensità, in quanto, a priori, date le conoscenze attuali noi non siamo in grado di prevederne la forma. Invero, rappresentando in un diagramma cartesiano ortogonale sulle ascisse i valori di b e sulle ordinate il numero dei casi osservati, avremmo potuto aspettarci indifferentemente uno dei fatti seguenti:

1° Le estremità superiori delle varie ordinate avrebbero potuto disporsi nel diagramma senza nessuna regolarità, tanto che, al limite, nessuna curva continua avrebbe servito per sintetizzare i risultati sperimentali;

---

[1] Sostanzialmente, questa analisi, ci induce tra l'altro ad ammettere che gli scostamenti dei punti, rappresentanti ogni singolo carattere, rispetto alla retta interpolatrice, non si distribuiscono a caso, ma seguono sopratutto leggi ben definite che sono legate alla intima struttura architetturale delle regioni studiate.

2° Le estremità delle ordinate avrebbero potuto disporsi seguendo certe determinate leggi, individuate, al limite, da una curva la cui forma dipenda dal tipo del materiale preso in esame o da altre circostanze;

3° La distribuzione avrebbe potuto dipendere da una sola legge generale definita, al limite, da una curva determinata.

Prima di ogni possibile tentativo di risposta (1) ecco alcuni dati di fatto.

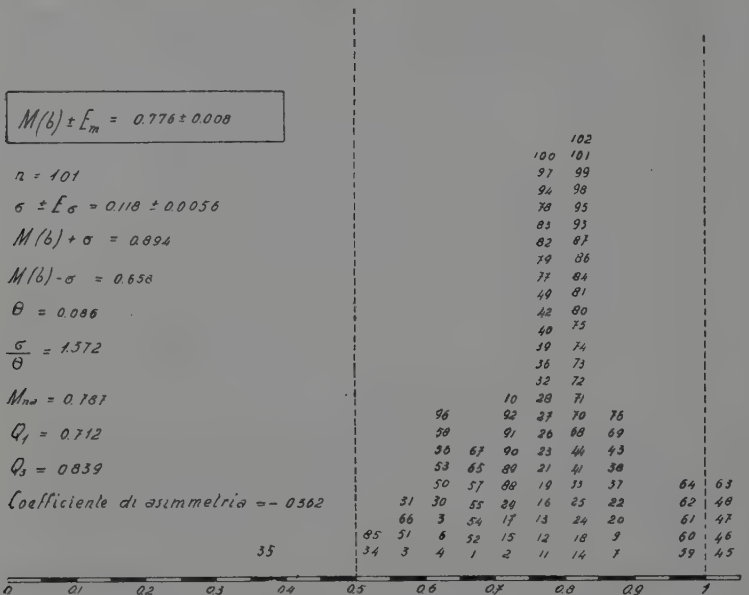


Fig. 1. — Distribuzione dei coefficienti angolari *b* ottenuti per ciascun gruppo di individui preso in esame.

Nella figura 1 riproduco la distribuzione generale di tutti i coefficienti angolari *b* ottenuti per ciascun gruppo di individui preso in esame; nella

(1) Le nostre conclusioni, sia pure basate su notevoli dati di fatto sperimentali, non potranno per ora portarci alla individuazione di una vera e propria legge generale di distribuzione dei valori di *b* ed alla sua *stabilità*, nel senso matematico della parola, anche se questa legge esiste in natura; in quanto, per accertare in modo definitivo la stabilità di una legge statistica del genere, sarebbe opportuno tentare per via deduttiva una eventuale soluzione del problema (cfr. ad esempio: P. Medolaghi, *Sulla stabilità della curva di distribuzione dei redditi*, «Atti della Società Italiana di Statistica», 1939), cosa che finora si è espressamente evitata.

figura 2 rappresento invece la distribuzione dei coefficienti angolari medi per i soli gruppi di rilevazioni riguardanti il vivente; nella figura 3 infine si ha la distribuzione di tutti i coefficienti angolari medi riportati nella colonna 6 della tabella (1). La composizione del materiale che è servito per la costruzione della figura 2 deve quindi ritenersi più omogenea delle altre.

Fondamentalmente ritengo di avere accertato:

a) I coefficienti angolari 0,5 ed 1, che appositamente ho voluto mettere in evidenza nelle figure 1, 2 e 3, non rispondono alla realtà dei fatti se non in casi estremi ed eccezionali;

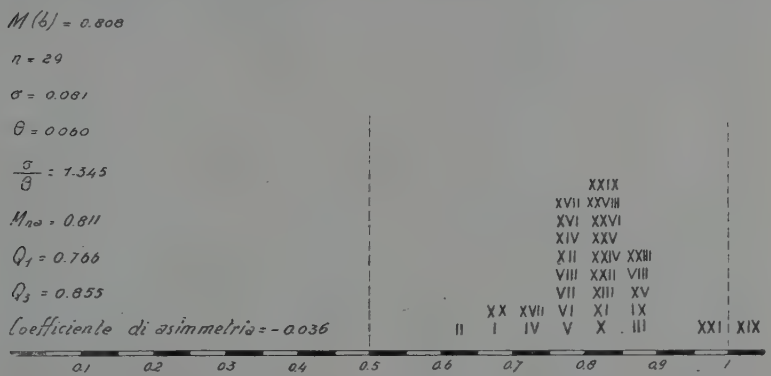


Fig. 2. — Distribuzione dei coefficienti *b* medi per i soli gruppi di rilevazioni riguardanti il vivente.

b) una legge generale di distribuzione sembra regolare i valori di *b* accertati per ogni rilevazione comprendente un certo numero di caratteri lineari, in altre parole si osserva un addensamento dei coefficienti intorno ad un valore centrale intermedio fra 0,5 e 1;

c) esistono leggere differenze tra i valori medi delle distribuzioni di *b* nel caso di indagini che si riferiscono a gruppi di rilevazioni diverse tra loro o comunque aventi un diverso grado di omogeneità;

---

(1) Ciascun coefficiente *b* è rappresentato nelle figure con il numero d'ordine o la notazione distintiva adottata nella tabella.

Spiegazione dei simboli adottati nelle figure: $M(b)$=media di b; E_m (errore prob. della media) $= \pm 0{,}6745 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$; n = numero dei casi osservati; σ = scostamento quadratico medio; E_σ (errore prob. di σ) $= \pm 0{,}6745 \frac{\sigma}{\sqrt{2n}}$; θ = scostamento semplice medio; Q_1 = primo quartile; Q_3 = terzo quartile; M_{na} = mediana; Coeff. di asimmetria $= \frac{Q_3 + Q_1 - 2\,M_{na}}{\frac{Q_3 - Q_1}{2}}$.

d) l'aver individuato anche approssimativamente una regola per quanto riguarda i valori che può assumere il coefficiente *b* ci autorizza a ritenere che, per dare una misura attendibile della variabilità relativa dei vari caratteri antropometrici, non si possa procedere col vecchio metodo del coefficiente di variabilità percentuale. Non è possibile allo stato attuale delle ricerche proporre un nuovo sistema, ma tuttavia si può *b* sin d'ora affermare qualche cosa al riguardo: sappiamo che il coefficiente deve interpretarsi come l'esponente a cui bisogna innalzare il valore medio di ogni carattere per renderlo, nella massa, proporzionale allo scostamento quadratico medio rispettivo; ma ciò non basta per permet-

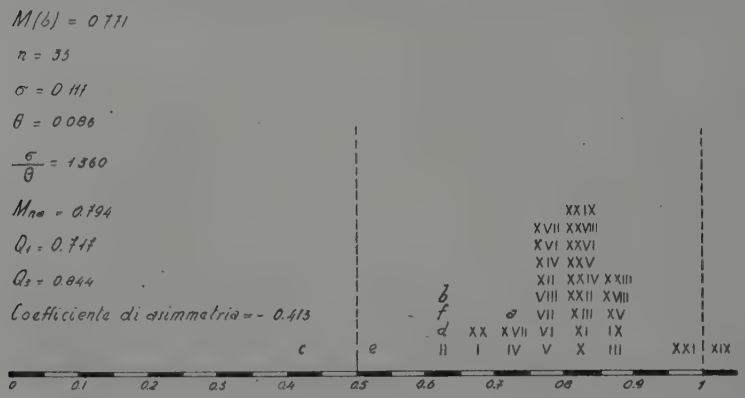


Fig. 3. — Distribuzione dei coefficienti *b* medi per tutti i gruppi di rilevazioni presi in esame.

terci, in ogni rilevazione riguardante un certo numero di caratteri, di adottare, ai fini del calcolo del coefficiente relativo di variabilità, il valore di *b* che in quel caso si è ottenuto; poichè allora ci si dovrebbero rivolgere due obbiezioni fondamentali, e cioè che verremmo così ad usare un metodo variabile da rilevazione a rilevazione e che, inoltre, i caratteri su cui ci si è basati sono sempre limitati, mentre un coefficiente di tal genere, non solo deve permettere il confronto dei risultati ottenuti sulle indagini più diverse (dato che è appunto questo uno degli scopi che ci si propone) ma sostanzialmente non deve dipendere di volta in volta dalla specie o dal numero dei caratteri studiati. Dato poi che una legge generale di distribuzione si è fin d'ora intravista, un qualsiasi valore medio che ad essa appartenga sarà certo consigliabile, in prima approssimazione, per lo meno rispetto ai valori estremi di *b* eguali a 1 o a 0,5. Tutto ciò naturalmente sempre in attesa di eventuali ulteriori conferme sperimentali basate su materiale statistico ancora più vasto, e inoltre di una rigorosa e definitiva giustificazione teorica condotta per via deduttiva.

* * *

Prima di chiudere questa Nota desidero accennare ancora al problema pure interessantissimo del confronto della variabilità dello stesso carattere in più gruppi di individui. Problema che è stato sempre confuso con il precedente e che invece, a mio parere, richiede una trattazione nettamente separata.

Io qui richiamo un istante l'attenzione su di esso appunto per mostrarne la portata ed evitare equivoci che potrebbero far estendere i risultati raggiunti con le indagini che precedono anché a questo secondo fine. Naturalmente a danno del contributo che crediamo di avere apportato allo studio della misura relativa della variabilità.

A tale riguardo ho condotto qualche indagine esplorativa sullo stesso materiale raccolto per la ricerca precedente. I risultati ottenuti hanno sopratutto chiaramente dimostrato che, in questo caso, ci troviamo di fronte a fenomeni diversissimi rispetto a quelli esaminati finora. E basterebbe perciò accennare al fatto che, se si prova ad interpolare successivamente i valori dei $\log \sigma$ corrispondenti a ciascun valore di $\log M$ (per un solo carattere rilevato in più gruppi di individui) si ottengono dei valori di b (coefficiente angolare) che non possono assolutamente inquadrarsi nei risultati ottenuti per la soluzione del primo problema, dato che, spesso, ci si può trovare a dover interpretare differenze di variabilità per caratteri che persino non comportano o quasi alcuna relazione positiva tra i valori di *sigma* e quelli delle medie rispettive. Si veda al riguardo l'esempio riportato con la fig. 4 che si riferisce alla lunghezza della testa rilevata in 58 gruppi umani. I punti del grafico rappresentano i singoli 58 gruppi di individui esaminati e sono contraddistinti da un numero d'ordine corrispondente a quello della tabella qui riprodotta.

In conclusione, allo stato attuale delle nostre ricerche, si deve ritenere che neppure in questo caso l'uso del metodo $\frac{\sigma}{M}$ 100 risulti sempre giustificato. Ma di ciò si parlerà successivamente.

log s
log M

TABELLA

N. d'ordine	Rilevazioni singole			Gruppi di rilevazioni	
	Autore *	Descrizione del materiale	*b*	Notazione distintiva	Medie di *b*
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
1	Nedrigayloff	= dimensioni del corpo in un gruppo di ♂ e ♀ di Kolarovka (Ukraina del Sud) .	0,687		
2	»	= *idem* c. s. per i soli ♂ . .	0,741	I	0,687
3	»	= *idem* c. s. per le sole ♀ .	0,634		
4	»	= dimensioni della testa nello stesso gruppo di ♂ e ♀ .	0,617		
5	»	= *idem* c. s. per le sole ♀ . .	0,591	II	0,616
6	»	= *idem* c. s. per i soli ♂ . .	0,639		
7	Benedetti (Pende)	= dimensioni del corpo e della testa in un gruppo di ♂ adulti italiani	0,895		
9	Viola–Facchinelli (Pende)	= *idem* c. s. in un gruppo di ♀ adulte italiane . . .	0,880	III	0,887
10	Boxich–Niceforo	= dimensioni del corpo e della testa in un gruppo di 100 delinquenti italiani	0,711	IV	0,711
11	Buxton–Rice	= dimensioni della testa e del corpo in un gruppo di ♂ adulti di Kisch	0,751	V	0,751
12	Seligmann	= dimensioni della testa e del corpo in un gruppo di ♂ di Hadendoa ed Amara	0,768		
13	»	= *idem* c. s. per un gruppo di ♂ di Beni Amer	0,790	VI	0,778
14	Morant	= dimensioni della testa e del corpo in un gruppo di Torwali	0,804		
15	»	= *idem* c. s. per un gruppo di Hunza	0,718	VII	0,761

* Rimando ad un articolo successivo le indicazioni bibliografiche particolareggiate.

Segue: TABELLA.

N. d'ordine	Rilevazioni singole			Gruppi di rilevazioni	
	Autore	Descrizione del materiale	*b*	Notazione distintiva	Medie di *b*
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
16	Joyce	= dimensioni della testa e del corpo in un gruppo di Roshani	0,758		
17	»	= *idem* c. s. in un gruppo di Kirghiz.	0,722	VIII	0,766
18	»	= *idem* c. s. in un gruppo di Wakhi	0,818		
19	»	= *idem* c. s. in un gruppo di Shignani	0,766		
20	George	= dimensioni della testa e del corpo in un gruppo di ♂ Yucatecans	0,859	IX	0,859
21	Howells	= dimensioni della testa e del corpo in un gruppo di ♂ australiani	0,783		
22	»	= *idem* c. s. per un gruppo di ♀ australiane	0,856	X	0,811
23	»	= *idem* ç. s. per un gruppo di ♂ australiani dell'Arnhem Land.	0,793		
24	Daniel	= dimensioni della testa e del corpo in un gruppo di industriali	0,800		
25	»	= *idem* c. s. per un gruppo di preindustriali.	0,839	XI	819
26	Field	= dimensioni della testa e del corpo in un gruppo di arabi (1°)	0,799		
27	»	= *idem* c. s. in un altro gruppo di arabi (2°) . . .	0,760	XII	0,779
28	Macdonell	= dimensioni varie in un gruppo di crani inglesi ♀ .	0,785		
29	»	= *idem* c. s. in un gruppo di crani inglesi ♂.	0,702	*a*	0,743

Segue: Tabella.

N. d'ordine	Rilevazioni singole			Gruppi di rilevazioni	
	Autore	Descrizione del materiale	*b*	Notazione distintiva	Medie di *b*
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
30	Fawcett	= dimensioni varie in un gruppo di crani Naqada ♂	0,613	*b*	0,602
31	»	= *idem* c. s. in un gruppo di crani Naqada ♀	0,591		
32	Schlaginhaufen	= dimensioni della testa e del corpo in un gruppo di ♂ tedeschi (Schangnau). . .	0,779	XIII	0,801
33	»	= *idem* c. s. in un gruppo di ♀ tedesche (Schangnau) . .	0,823		
34	Sacchetti	= dimensioni craniche varie in un gruppo di romani moderni	0,508	*c*	0,435
35	»	= *idem* c. s. in un gruppo di melanesiani	0,363		
36	Dunn	= dimensioni della testa e del corpo in un gruppo di ♂ avaiani	0,775	XIV	0,775
37	Kugler	= dimensioni della testa e del corpo in un gruppo di neonati ♂ di Zurigo . . .	0,860	XV	0,870
38	»	= *idem* c. s. per un gruppo di neonate ♀ di Zurigo . .	0,881		
39	Bosshart	= dimensioni del corpo e della testa in un gruppo di ♂ tedeschi (Engstligen e Frutigtal)	0,798	XVI	0,793
40	»	= *idem* c. s. per un gruppo di ♀ tedesche (Engstligen e Frutigtal)	0,789		
41	Lawenz-Whiteley	= dimensioni dei vari segmenti della mano destra .	0,803	XVII	0,796
42	»	= *idem* c. s. per la mano sinistra	0,790		

Segue: TABELLA.

N. d'ordine	Rilevazioni singole			Gruppi di rilevazioni	
	Autore	Descrizione del materiale	b	Notazione distintiva	Medie di b
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
43	Maier	= dimensioni della testa e del corpo in un gruppo di ♂ bavaresi	0,891	XVIII	0,857
44	»	= *idem* c. s. per un gruppo di ♀ bavaresi	0,824		
45	Schuster	= dimensioni della testa e del corpo in un gruppo di ♂ di 18 anni (Oxford) . .	1,005	XIX	1,056
46	»	= *idem* c. s. per un gruppo di ♂ di 19 anni.	1,057		
47	»	= *idem* c. s. per un gruppo di ♂ di 20 anni	1,038		
48	»	= *idem* c. s. per un gruppo di ♂ di 21 anni	1,123		
49	Davenport-Love	= dimensioni del corpo in un gruppo di soldati negri americani	0,759	XX	0,657
50	»	= *idem* c. s. per un gruppo di soldati bianchi.	0,641		
51	»	= *idem* c. s. per un gruppo di soldati tedeschi	0,592		
52	»	= *idem* c. s. per un gruppo di soldati italiani	0,654		
53	»	= *idem* c. s. per un gruppo di soldati ebrei.	0,639		
54	»	= *idem* c. s. per un gruppo di soldati francesi	0,695		
55	»	= *idem* c. s. per un gruppo di soldati polacchi	0,656		
56	»	= *idem* c. s. per un gruppo di soldati irlandesi	0,640		
57	»	= *idem* c. s. per un gruppo di soldati inglesi	0,655		
58	»	= *idem* c. s. per un gruppo di soldati scozzesi	0,638		

Segue: Tabella.

N. d'ordine	Rilevazioni singole			Gruppi di rilevazioni	
	Autore	Descrizione del materiale	*b*	Notazione distintiva	Medie di *b*
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
59	Craig	= dimensioni della testa e del corpo in egiziani indigeni di Gharbia	0,960		
60	»	= *idem* c. s. per un gruppo di indigeni di Alessandria	0,979		
61	»	= *idem* c. s. per un gruppo di indigeni del Cairo	0,967		
62	»	= *idem* c. s. per un gruppo di indigeni di Menufia . .	0,992	XXI	0,987
63	»	= *idem* c. s. per un gruppo di indigeni di Aswan . . .	1,029		
64	»	= *idem* c. s. per un gruppo di indigeni di Assiut . . .	0,994		
65	Benington	= dimensioni craniche in un gruppo di ♂ del Congo . .	0,659		
66	»	= *idem* c. s. per un gruppo di ♂ di Gaboon.	0,595	*d*	0,646
67	»	= *idem* c. s. per un gruppo di ♀ di Gaboon	0,685		
68	Genna	= dimensioni del corpo nei Samaritani	0,825	XXII	0,825
69	Gould	= dimensioni della testa e del corpo in un gruppo di americani ventenni	0,855	XXIII	0,855
70	Shanklin	= dimensioni della testa e del corpo in un gruppo di ♂ siriani di Bekaa	0,813		
71	»	= *idem* c. s. per un gruppo di Mitwali	0,809		
72	»	= *idem* c. s. per un gruppo di Alouite	0,826		
73	»	= *idem* c. s. per un gruppo di Hama	0,830		
74	»	= *idem* c. s. per un gruppo di Mhardeh	0,820	XXIV	0,821
75	»	= *idem* c. s. per un gruppo di Hafar	0,820		
76	»	= *idem* c. s. per un gruppo di Hidjaneh	0,854		
77	»	= *idem* c. s. per un gruppo di Rwala	0,794		

Segue: TABELLA.

N. d'ordine	RILEVAZIONI SINGOLE			GRUPPI DI RILEVAZIONI	
	Autore	Descrizione del materiale	*b*	Notazione distintiva	Medie di *b*
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
78	Istituto di Anatomia ed Embriologia di Bucarest	= Dimensioni della testa e del corpo in un gruppo di ♂ del villaggio carpatico di Nerejul Mare (Moldavie–Vrancea)	0,781		
79	»	= *idem* c. s. per un gruppo di ♀ dello stesso villaggio	0,761		
80	»	= *idem* c. s. per un gruppo di ♂ di Fundul Moldovii (Bucovina)	0,816		
81	»	= *idem* c. s. per un gruppo di ♀ dello stesso villaggio . .	0,837	XXV	0,802
82	»	= *idem* c. s. per un gruppo di ♂ del villaggio di Drà-gus (Transilvania)	0,797		
83	»	= *idem* c. s. per un gruppo di ♀ dello stesso villaggio	0,772		
84	»	= *idem* c. s. per un gruppo di studenti rumeni ♂	0,849		
85	Sergi S.	= dimensioni craniche in un gruppo di abissini del Tigrè	0,503	*e*	0,503
86	Shanklin	= dimensioni della testa e del corpo in un gruppo di ♂ beduini di Akeydat . .	0,822		
87	»	= *idem* c. s. per un gruppo di ♂ beduini di Manaly .	0,806	XXVI	0,814
88	Buxton	= dimensioni della testa e del corpo in un gruppo di indiv. appartenenti a 4 villaggi di Cipro	0,744		
89	»	= *idem* c. s. per il primo villaggio	0,727		
90	»	= *idem* c. s. per il secondo villaggio	0,721	XXVII	0,732
91	»	= *idem* c. s. per il terzo villaggio	0,749		
92	»	= *idem* c. s. per il quarto villaggio	0,719		

Segue: Tabella.

N. d'ordine	Rilevazioni singole			Gruppi di rilevazioni	
	Autore	Descrizione del materiale	*b*	Notazione distintiva	Medie di *b*
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
93	Seltzer	= dimensioni della testa e del corpo in un gruppo di ♂ siriani	0,838		
94	»	= *idem* c. s. per un gruppo di ♂ del Libano	0,773	XXVIII	0,817
95	»	= *idem* c. s. per un gruppo di ♂ armeni	0,840		
96	Buxton	= dimensioni craniche in teschi medioevali di Malta (♂)	0,603	*f*	0,603
97	»	= dimensioni della testa e del corpo in un gruppo di ♂ adulti di Malta	0,784		
98	»	= *idem* c. s. per un gruppo di ♀ di Malta	0,811		
99	»	= *idem* c. s. per i ♂ dei distretti urbani di Malta .	0,809		
100	»	= *idem* c. s. per le ♀ dei distretti urbani di Malta .	0,778	XXIX	0,803
101	»	= *idem* c. s. per i ♂ dei distretti rurali di Malta . . .	0,804		
102	»	= *idem* c. s. per le ♀ dei distretti rurali di Malta . . .	0,831		

Geometria. — *Varietà a connessione proiettiva e loro immagini tangenziali.* Nota di ENEA BORTOLOTTI, presentata (1) da ENRICO BOMPIANI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

1. GENERALITÀ. — La ricerca, di cui qui espongo alcuni primi risultati, concerne soprattutto le proprietà *topologiche locali* delle « immagini tangenziali » per una varietà a connessione proiettiva; e quindi anche, come vedremo, degli spazi anolonomi. Ha dato origine a questa ricerca la lettura di un Capitolo dell'opera di E. CARTAN sugli spazi P_n a connessione proiettiva (2): ove l'A. tratta la geometria differenziale di una superficie immersa in un tale spazio P_3 (a tre dimensioni); e di alcune pubblicazioni di J. KANITANI (3), che di lì appunto hanno ispirazione. Il CARTAN e, secondo il suo esempio, il KANITANI si valgono, per lo studio delle proprietà locali di una varietà X_m in P_n, della rappresentazione, determinata dalla connessione dell'ambiente P_n, delle curve della X_m uscenti da un punto O nello spazio proiettivo ordinario (S_n) tangente in O a P_n: mediante curve che dirò, seguendo V. HLAVATY, loro immagini tangenziali. Ebbene: il fatto, notato dal CARTAN (4), che sulle superficie (X_2) in P_3, almeno in generale (quando la connessione dell'ambiente non ha torsione) estendendo la nozione di tangenti coniugate si ottenga attorno a ciascun punto della X_2 una proiettività *non involutoria* fra le direzioni coniugate che ne escono, proprio come accade su una superficie anolonoma (X_3^2) immersa in un S_3 proiettivo ordinario (5), unito alla possibilità di differenti estensioni, alle X_2 in P_3, delle tangenti di DARBOUX (6), che appaiono corrispondere ad estensioni, pure fra loro diverse, ottenute per le X_3^2 in S_3 da A. MAXIA (7), faceva già intravvedere una relazione intima fra i due campi di studio. Il seguente risultato generale che ho conseguito rende conto in modo espres-

(1) Nell'Adunanza del 23 novembre 1940-XIX.

(2) Ved. **21** (il numero si riferisce all'elenco bibliografico): Cap. VI della II parte, pagg. 258-277.

(3) Ved. **35**, **36**, **37**.

(4) Ved. **21**, pag. 262.

(5) Ved. VOSS, **1**, **2**; DALL'ACQUA, **3**.

(6) Ved. CARTAN, **21**, pagg. 272-277; KANITANI, **35** e **36**.

(7) **14**, pagg. 249-251: cfr. **22**, ved. anche **40**.

sivo delle analogie ora accennate, come pure di altre cui avrò occasione di accennare più innanzi: *Gli elementi del 4° ordine* (E_4) *delle immagini tangenziali in* O, I_Γ, *delle curve* Γ *della* X_m (*data in ambiente* P_n) *che ne escono appartengono tutti a una varietà* (generalmente) *anolonoma* X_n^m *dell'*S_n *tangente*. Dunque: *sino al 4° ordine* (almeno) la « immagine tangenziale » I_X della X_m sull'S_n tangente in O a P_n – convenendo di chiamare così la totalità formata da tutte le curve I_Γ, immagini tangenziali delle curve Γ della X_m uscenti da O – *può approssimarsi mediante una varietà anolonoma* di ambiente proiettivo ordinario. Tenuto presente quanto già è conosciuto per queste varietà anolonome [8] avremo dunque, in particolare, che *gli elementi del 2° ordine* (E_2) *delle curve* I_Γ *in* O *appartengono a una calotta olonoma del 2° ordine* di X_m dell'S_n; mentre un'analoga proprietà in generale *non sussiste per gli* E_3. Ma sotto certe condizioni restrittive (soddisfatte ad es. se l'ambiente P_n è a connessione proiettiva *senza torsione*) esiste anche una calotta olonoma osculatrice in O alla I_X *sino al 3° ordine*. È occorrono ulteriori condizioni (che ad es. si verificano se l'ambiente è anche *senza curvatura*: caso ovvio) perchè esista una calotta olonoma osculatrice *del 4° ordine*. Vi sono però, purchè la dimensione della X_m sia abbastanza grande in relazione a quella dell'ambiente $\left(\frac{m(m+1)}{2} \geqq n\right)$ *nel caso generale* – in cui si ha soltanto calotta olonoma osculatrice del 2° ordine – in ogni direzione della X_m in O curve *i cui* E_3 *appartengono a un'assegnata calotta olonoma del 3° ordine* che contenga quella osculatrice; e così pure, *se vi è calotta olonoma osculatrice del 3° ordine*, vi sono curve *i cui* E_4 *appartengono a un'assegnata calotta olonoma del 4° ordine* che contenga quella osculatrice. In particolare, abbiamo che se $m = 2$, $n = 3$ gli E_3 delle immagini tangenziali delle curve della superficie di P_3 si distribuiscono (generalmente) in ∞^1 calotte olonome di superficie di S_3. La stessa proprietà vale per gli E_3 delle curve di una qualunque superficie anolonoma X_3^2 dell'S_3; si completa così, nei riguardi topologici, la descrizione delle calotte superficiali anolonome del 3° ordine in S_3 [9].

2. *Premesse*: *trasporto e derivazione covariante*; *rappresentazione tangenziale delle linee di una* X_m *in* P_n.

Stabiliamo anzitutto le formule che servono a dare l'immagine tangenziale I_Γ di una curva Γ della X_m sull'S_n tangente a P_n in un punto O.

Richiamiamo per questo le relazioni fra *il trasporto dei punti* (o dei vettori) determinato da una connessione lineare e la corrispondente *derivazione assoluta* lungo una linea, riferita a un parametro t.

---

[8] Ved. il mio lav. **22**, pag. 309, per le X_3^2 in S_3; Bompiani, **31**, per le X_n^m in S_n

[9] A questo riguardo ved. spec. **31**; e anche **14**, **32**, **39**,**40**.

Per semplicità di discorso riferiamoci al trasporto *dei vettori* determinato da una connessione *affine*: ma è ovvio che le stesse considerazioni valgono in generale. Indichiamo ([10]) con $\xi^r\ (t_0|t)$ il vettore ottenuto in un punto t_0 della linea Γ assegnata, $u^r = u^r\ (t)$, a partire da un punto t di questa, e dal vettore ivi applicato di una serie $\xi^r = \xi^r\ (t)$, mediante il trasporto determinato dalla connessione:

$$[2.1] \qquad \frac{\delta\xi^r}{dt} = \frac{d\xi^r}{dt} + \Gamma^r_{sp}\,\xi^s\,\frac{du^p}{dt} = 0$$

(Γ^r_{sp} essendone i parametri). Ebbene: per la derivata assoluta $\frac{\delta\xi^r}{dt}$ di $\xi^r\ (t)$ nel punto t si ha la formula seguente:

$$[2.2] \qquad \frac{\delta\xi^r}{dt} = \lim_{t_0 \to t} \frac{\xi^r\ (t_0|t) - \xi^r\ (t_0))}{t - t_0}\ .$$

Da questa formula – che riporta la costruzione della derivata assoluta $\frac{\delta\xi^r}{dt}$ e quindi anche, se ξ^r è dato in un'intera regione della varietà, di quella covariante $\nabla_s \xi^r \left(\frac{\delta\xi^r}{dt} = \nabla_s \xi^r \cdot \frac{du^s}{dt}\right)$ alla nozione di *trasporto parallelo* relativo alla connessione e alla determinazione del limite di una sorta di *rapporto incrementale* – è agevole ricavarne un'altra che ci riconduce al calcolo di una vera e propria derivata:

$$[2.3] \qquad \frac{\delta\xi^r}{dt} = \left(\frac{d\xi\ (t_0|t)}{dt}\right)_{t_0 \to t};$$

ove intendiamo che con $\left(A\ (t_0)\right)_{t_0 \to t}$ sia designato l'ente geometrico ottenuto, *pel trasporto lungo la supposta linea*, nel punto t a partire dal punto t_0, di un ente geometrico qualunque $A\ (t_0)$: vettore, tensore, punto, direzione, ... pel quale sia definita la legge di trasporto lungo le linee della varietà.

Con applicazione ripetuta della [2.3] abbiamo, per la serie di vettori $\xi^r\ (t_0|t)$ ottenuta in t_0 (cioè: entro lo spazio ivi tangente) a partire dai

([10]) Questa notazione (o più esattamente un'altra non sostanzialmente diversa) è stata adottata già da me e da HLAVATY in un lavoro comune (**17**, pag. 18). Analoga notazione era già stata usata da P. DIENES (4). La form. (2.2) si trova già (con riferimento a una legge di trasporto assai generale) nel lav. ora citato del DIENES; e anche in **17** (ved. pag. 26) e in precedenti lavori di V. HLAVATY (ad es. **15**, pag. 11) e così pure la form. (2.3). Una formula data da M. MANARINI (**12**, **13**; cfr. P. BURGATTI, **24**, pagg. 334-335) appare rispondere al medesimo concetto: ma deve venire scritta nella forma (2.2) per risultare valida.

vettori di una serie assegnata $\xi^r(t)$, dati nei punti di una linea che esce dal quel punto, il seguente sviluppo (11):

$$[2.4] \qquad \xi^r(t_0|t) = \xi^r(t_0) + \left(\frac{\delta\xi^r}{dt}\right)_0 (t-t_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{\delta^2\xi^r}{dt^2}\right)_0 (t-t_0)^2 + \\ + \frac{1}{3!}\left(\frac{\delta^3\xi^r}{dt^3}\right)_0 (t-t_0)^3 + \cdots$$

gli indici $_0$ contrassegnando i valori calcolati nel punto t_0.

La serie di vettori $\xi^r(t_0|t)$ (ove t_0 s'intende fissa, t variabile) potrà dirsi (cfr. n. 1) una *immagine tangenziale* della serie di vettori $\xi^r(t)$.

La stessa formula varrà senz'altro anche per la costruzione della immagine tangenziale *di una serie di punti* $y^\alpha(t)$ associati ai punti di una linea Γ, $x^\lambda = x^\lambda(t)$, di una varietà *a connessione proiettiva*, P_n, per la quale le $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$, soddisfacenti alle condizioni $\Gamma^\alpha_{0\beta} = \Gamma^\alpha_{\beta 0} = \delta^\alpha_\beta$, siano parametri normalizzati (12):

$$[2.5] \qquad y^\alpha(t_0|t) = y^\alpha(t_0) + \left(\frac{\delta y^\alpha}{dt}\right)_0 (t-t_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{\delta^2 y^\alpha}{dt^2}\right)_0 (t-t_0)^2 + \\ + \frac{1}{3!}\left(\frac{\delta^3 y^\alpha}{dt^3}\right)(t-t_0)^3 + \cdots \quad \begin{pmatrix} \lambda, \mu, \nu, \tau, \rho, \sigma, \omega = \dot{1}, \dot{2}, \cdots \dot{n}; \\ \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta = 0, \dot{1}, \cdots \dot{n} \end{pmatrix}.$$

In particolare supponiamo ora che i punti $y^\alpha(t)$ *coincidano coi punti della linea* Γ *cui sono associati*: punti che assumiamo quali vertici $011\cdots 1$ dei riferimenti locali entro gli spazi proiettivi tangenti in essi alla varietà P_n. Avremo allora dalla [2.5], ponendovi $y^\alpha(t) = \delta^\alpha_0$, e per semplicità $t_0 = 0$, *l'immagine tangenziale della linea* Γ (ved. n. 1):

$$[2.6] \qquad y^\alpha(0|t) = \delta^\alpha_0 + \left(\frac{dx^\alpha}{dt}\right)_0 t + \frac{1}{2}\left(\frac{\delta^2 x^\alpha}{dt^2}\right)_0 t^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\delta^3 x^\alpha}{dt^3}\right)_0 t^3 + \cdots$$

Qui le $\dfrac{dx^\lambda}{dt}$ sono ordinarie derivate delle coordinate curvilinee x^λ rispetto a t, e $\dfrac{dx^0}{dt}$ è una prima coordinata *aggiunta in modo arbitrario* ad esse

(11) La questione della convergenza di questo sviluppo, non essenziale per quanto segue (in quanto ci manterremo in intorni infinitesimi del punto preso in considerazione) non verrà qui trattata.

(12) Ved. **11**, pag. 20; **17**, pagg. 32 34. A proposito delle varietà a connessione proiettiva segnalo qui, oltre alle indicazioni bibliografiche che accompagnano i lavori **9**, **11**, **17**, e al libro (**21**) già citato del CARTAN, le pubblicazioni recenti designate coi nn. **16**, **18**, **19**, **20**, **23**, **25** **29**, **30**, **33**, **34**, **35-37**, nell'indice bibliografico che segue il presente lavoro.

in modo da dar luogo alle coordinate proiettive (in relazione al riferimento locale) *di un punto* $\frac{dx^\alpha}{dt}$ sulla tangente che esce dal punto considerato secondo le direzioni dell'elemento dx^λ. $\left(\text{Si ha poi } \frac{\delta^2 x^\alpha}{dt^2} = \frac{\delta}{dt}\frac{dx^\alpha}{dt}, \text{ ecc.}\right)$. In sostanza $\frac{dx^\alpha}{dt}$ è dunque un punto *comunque scelto* sulla tangente ora detta: va da sè (senza bisogno della verifica analitica, che non presenterebbe sostanziali difficoltà) che l'immagine tangenziale non dipenderà affatto dalla scelta di questo elemento arbitrario.

Per fissare le idee possiamo d'ora innanzi supporre che, in relazione ai singoli punti di P_n, entro i rispettivi spazi S_n tangenti, *siano stati presi degli iperpiani* $A_\alpha y^\alpha = 0$ non passanti per essi ($A_0 \neq 0$): e che i punti $\frac{dx^\alpha}{dt}$ s'intendano *posti su questi iperpiani*, il che equivale a prendere $dx^0 = -\frac{A_\lambda}{A_0} dx^\lambda$ e dà anche un significato preciso – legato alla scelta del campo di vettori proiettivi covarianti A_α, cioè d'iperpiani – alle derivate $\frac{\partial x^0}{\partial u^r} = -\frac{A_\lambda}{A_0}\frac{\partial x^\lambda}{\partial u^r}$ su una qualunque varietà $x^\lambda = x^\lambda(u^1, u^2, \cdots, u^m)$ immersa nell'ambiente P_n ([13]).

3. *Varietà* X_m *in un ambiente* P_n; *approssimazione locale della immagine tangenziale mediante una* X_n^m *anolonoma nello spazio tangente.*

Diamo ora appunto in P_n una X_m:

[3.1] $$x^\lambda = x^\lambda(u^1, u^2, \cdots, u^m)$$

e ai singoli punti della X_m associamo nuovi riferimenti proiettivi locali $[B, C]$ aventi quali punti fondamentali quei punti medesimi (come vertici $\underset{0}{B}{}^\alpha = \delta_0^\alpha$), gli m punti $\underset{r}{B}{}^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial u^r}$ sulle tangenti alle m linee coordinate del sistema curvilineo u^r di X_m, infine altri $n-m$ punti $\underset{i}{C}{}^\alpha$ presi comunque purchè sì da formare, coi punti $\underset{0}{B}{}^\alpha$ e $\underset{r}{B}{}^\alpha$, $(n+1)$–uple di punti indipendenti (il che porta che i punti $\underset{i}{C}{}^\alpha$ staranno fuori dei rispettivi S_m tangenti, nei punti $\underset{0}{B}{}^\alpha$, alla X_m. Intendiamo che $r, s, p, q, v, w = 1, 2, \cdots m$;

([13]) Cfr. **11, 17.** L'uso della «gauge variable» di L. BERWALD (**18**, p. 883), collegata in modo semplice e interessante al «parametro proiettivo normale» di J. H. C WHITEHEAD (**10**, pagg. 338 e seg.), quale $(n+1)$–esimo parametro qui non avrebbe senso, perchè tale variabile è legata alla geodetica, su cui viene considerata.

$i, j, h, k, l = m+1, \cdots, n$; per gli indici greci richiamandoci alla [2.5]). Gli elementi reciproci $\overset{0}{B}_\alpha$, $\overset{r}{B}_\alpha$, $\overset{i}{C}_\alpha$ delle $\underset{0}{B}^\alpha$, $\underset{r}{B}^\alpha$, $\underset{i}{C}^\alpha$ nel determinante delle coordinate di questi $n+1$ punti sono le coordinate degli iperpiani fondamentali del riferimento $[B, C]$: in particolare $\overset{0}{B}_\alpha$ è quello opposto al vertice $\underset{0}{B}^\alpha$, e può *identificarsi con l'iperpiano* $A_\alpha y^\alpha = 0$ detto alla fine del numero precedente, il che porta la conseguenza semplificatrice che $dx^0 = 0$, $\dfrac{\partial x^0}{\partial u^r} = 0$. Notiamo ancora che ovviamente risulta $\overset{i}{C}_0 = 0$; le giaciture di questi $n-m$ iperpiani $\overset{i}{C}_\alpha y^\alpha = 0$, passanti per $\underset{0}{B}^\alpha$, sono ivi tangenti alla X_m e anzi determinano quale m-direzione comune quella tangente alla X_m.

La [2.5] dà l'immagine tangenziale I_Γ di una linea Γ della X_m uscente dal punto O, cioè $t = 0$, considerato, quando vi si ponga

$$[3.2]\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{dx^\alpha}{dt} = \underset{r}{B}^\alpha \frac{du^r}{dt}, \quad \frac{\delta^2 x^\alpha}{dt^2} = \nabla_s \underset{r}{B}^\alpha \frac{du^r}{dt}\frac{du^s}{dt} + \underset{r}{B}^\alpha \frac{d^2u^r}{dt^2}, \\ &\frac{\delta^3 x^\alpha}{dt^3} = \nabla_p \nabla_s \underset{r}{B}^\alpha \frac{du^r}{dt}\frac{du^s}{dt}\frac{du^p}{dt} + \\ &\qquad + (2\nabla_s \underset{r}{B}^\alpha + \nabla_r \underset{s}{B}^\alpha)\frac{d^2u^r}{dt^2}\frac{du^s}{dt} + \underset{r}{B}^\alpha \frac{d^3u^r}{dt^3}, \cdots \end{aligned}\right.$$

ove ad es. $\nabla_s \underset{r}{B}^\alpha = \dfrac{\partial}{\partial u^s}\underset{r}{B}^\alpha + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\underset{r}{B}^\beta \underset{s}{B}^\gamma$; e scrivendo ∇_s intendiamo dare a questa s, come in $\underset{s}{B}^\alpha$, il ruolo d'*indice ordinale*.

Vediamo sino a qual punto si possa approssimare la « immagine tangenziale » della X_m sull'S_n tangente in O alla P_n ambiente (luogo delle curve I_Γ) mediante una X_n^m dell'S_n. Questa potrà rappresentarsi in un conveniente intorno di O, dando le coordinate $\overset{i}{P}_\alpha$ di un sistema di $n-m$ iperpiani ad essa tangenti mediante sviluppi della forma [14]:

$$[3.3]\qquad \overset{i}{P}_\alpha = \overset{i}{\varphi}_\alpha + \overset{i}{\varphi}_{\alpha\beta} z^\beta + \frac{1}{2}\overset{i}{\varphi}_{\alpha\beta\gamma} z^\beta z^\gamma + \frac{1}{3!}\overset{i}{\varphi}_{\alpha\beta\gamma\delta} z^\beta z^\gamma z^\delta + \cdots$$

ove intendiamo posto

$$[3.4]\qquad z^\alpha = y^\alpha - \delta^\alpha_0, \quad \text{cioè} \quad z^\lambda = y^\lambda, \; z^0 = y^0 - 1$$

---

[14] Questa rappresentazione analitica, naturalmente non univoca, appare prestarsi bene per sviluppi di carattere generale: converrà sostituirla con una rappresentazione univoca volendo passare ad applicazioni a questioni particolari.

e $\overset{i}{\varphi}_{\alpha\beta\gamma}$, $\overset{i}{\varphi}_{\alpha\beta\gamma\delta}$, $\cdots$ *simmetrici* rispetto agli indici $\beta, \gamma; \beta, \gamma, \delta; \cdots$ seguenti il primo.

Le [3.4], [2.6] ci dànno

$$[3.5] \qquad z^\alpha = \left(\frac{dx^\alpha}{dt}\right)_0 t + \frac{1}{2}\left(\frac{\delta^2 x^\alpha}{dt^2}\right)_0 t^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{\delta^3 x^\alpha}{dt^3}\right) t^3 + \cdots$$

ove le $\frac{dx^\alpha}{dt}$, $\frac{\delta^2 x^\alpha}{dt^2}$, $\frac{\delta^3 x^\alpha}{dt^3}$, $\cdots$ dovranno intendersi ricavate dalle [3.2]. Scrivendo che si ha, per ogni valore di t, in forza delle [3.5]

$$[3.6] \qquad \overset{i}{P}_\alpha \left(\delta_0^\alpha + z^\alpha\right) = 0 \,, \overset{i}{P}_\alpha \frac{dz^\alpha}{dt} = 0$$

esprimiamo l'*appartenenza della immagine tangenziale* che si considera *alla varietà anolonoma* X_n^m; scrivendo che, posti nelle [3.6] al luogo delle $\overset{i}{P}_\alpha$, z^α, $\frac{dz^\alpha}{dt}$ i valori che sono dati dalle [3.3], [3.4] e [3.2], risultano nulli il termine indipendente da t e i coefficienti di $t, t^2, \cdots, t^{\varkappa-1}$ nei primi membri, esprimeremo che alla X_n^m appartiene l'elemento $E_\varkappa$ (d'ordine $\varkappa$) della supposta immagine tangenziale I_Γ. Infine: potremo dire che la X_n^m *contiene l'intorno* (*o cella*) *dell'ordine* $\varkappa$ *di* I_X, o che essa ha contatto d'ordine $\varkappa$ (almeno) con I_X, se le condizioni ora dette valgono per qualunque sistema di valori delle $\frac{du^r}{dt}, \frac{d^2 u^r}{dt^2}, \frac{d^3 u^r}{dt^3}, \cdots, \frac{d^\varkappa u^r}{dt^\varkappa}$.

Ciò posto: la condizione pel contatto del 1° ordine ci dà, come era ovvio,

$$[3.7] \qquad \overset{i}{\varphi}_\alpha \underset{0}{B^\alpha} = \overset{i}{\varphi}_0 = 0 \quad , \quad \overset{i}{\varphi}_\alpha \underset{r}{B^\alpha} = 0 \,;$$

a queste condizioni si soddisfa ponendo $\overset{i}{\varphi}_\alpha = \overset{i}{C}_\alpha + h_j^i \overset{j}{C}_\alpha$, le h_j^i essendo costanti arbitrarie. Ma non sarà restrittivo porre senz'altro $h_j^i = 0$, cioè

$$[3.8] \qquad \overset{i}{\varphi}_\alpha = \overset{i}{C}_\alpha \,:$$

come intenderemo d'ora in poi. Qui per le $\overset{i}{C}_\alpha$ vanno posti naturalmente i loro valori in O, ma va tenuto presente e riesce utile pel seguito il fatto che le $\overset{i}{C}_\alpha$ sono note *anche fuori di* O, quali funzioni delle u^r. Pel contatto del 2° ordine sono da aggiungere le condizioni (ovviamente compatibili)

$$[3.9] \qquad \overset{i}{\varphi}_{0\beta} \underset{r}{B^\beta} = 0 \quad , \quad \overset{i}{\varphi}_{\alpha\beta} \underset{(r}{B^\alpha} \underset{s)}{B^\beta} + \overset{i}{\varphi}_\alpha \nabla_{(s} \underset{r}{B^\alpha} = 0 \,.$$

Di qui non possiamo ricavare, naturalmente, in modo univoco le $\overset{i}{\varphi}_{\alpha\beta}$, ma neppure le somme $\overset{i}{\varphi}_{\alpha\beta} B^{\alpha}_{r} B^{\beta}_{s}$. La cosa era in sostanza ben prevedibile: il contenere gli E_2 delle immagini tangenziali determina la calotta *olonoma* del 2° ordine osculatrice alla X^{m}_{n}, non la calotta *anolonoma*: nè tanto meno *la cella* anolonoma, cioè l'intorno del 2° ordine completo (15).

Ulteriori condizioni per le $\overset{i}{\varphi}_{\alpha\beta}$ – sempre compatibili fra loro e con le [3.9] – otteniamo utilizzando (in parte) anche le condizioni pel contatto del 3° ordine. Queste dànno infatti (all'infuori delle stesse [3.7], [3.9]):

$$[3.10] \qquad \overset{i}{\varphi}_{\alpha\beta} (2 B^{\alpha}_{r} B^{\beta}_{s} + B^{\beta}_{r} B^{\alpha}_{s}) + \overset{i}{\varphi}_{\alpha} (2 \nabla_{s} B^{\alpha}_{r} + \nabla_{r} B^{\alpha}_{s}) = 0 ;$$

$$[3.11] \quad \begin{cases} \overset{i}{\varphi}_{0\beta\gamma} B^{\beta}_{(r} B^{\gamma}_{s)} + \overset{i}{\varphi}_{0\alpha} \nabla_{(s} B^{\alpha}_{r)} + 2 \overset{i}{\varphi}_{\alpha\beta} B^{\alpha}_{(r} B^{\beta}_{s)} + \overset{i}{\varphi}_{\alpha} \nabla_{(s} B^{\alpha}_{r)} = 0 , \\ \overset{i}{\varphi}_{\alpha\beta\gamma} B^{\alpha}_{(r} B^{\beta}_{s} B^{\gamma}_{p)} + \overset{i}{\varphi}_{\alpha\beta} (2 \nabla_{(s} B^{\alpha}_{r} \cdot B^{\beta}_{p)} + \nabla_{(s} B^{\beta}_{r} \cdot B^{\alpha}_{p)}) + \overset{i}{\varphi}_{\alpha} \nabla_{(\rho} \nabla_{s} B^{\alpha}_{r)} = 0 . \end{cases}$$

Le [3.9], [3.10] dànno (in modo compatibile) espressioni per $\overset{i}{\varphi}_{\alpha\beta} B^{\alpha}_{r} B^{\beta}_{s}$, $\overset{i}{\varphi}_{0\beta} B^{\beta}_{s}$. Analogamente otteniamo, utilizzando (le [3.11] e) in parte le condizioni pel contatto del 4° ordine, che dànno

$$[3.12] \quad \begin{cases} 3 \overset{i}{\varphi}_{0\beta\gamma} B^{\beta}_{r} B^{\gamma}_{s} + \overset{i}{\varphi}_{0\beta} (2 \nabla_{s} B^{\beta}_{r} + \nabla_{r} B^{\beta}_{s}) + 3 \overset{i}{\varphi}_{\alpha\beta} (B^{\alpha}_{r} B^{\beta}_{s} + B^{\beta}_{r} B^{\alpha}_{s}) + \\ \quad + \overset{i}{\varphi}_{\alpha} (2 \nabla_{s} B^{\alpha}_{r} + \nabla_{r} B^{\alpha}_{s}) = 0 , \\ 3 (\overset{i}{\varphi}_{\alpha\beta\gamma} + \overset{i}{\varphi}_{\beta\alpha\gamma}) B^{\alpha}_{r} B^{\beta}_{(s} B^{\gamma}_{p)} + 3 (\overset{i}{\varphi}_{\alpha\beta} + \overset{i}{\varphi}_{\beta\alpha}) \nabla_{(s} B^{\alpha}_{p)} \cdot B^{\beta}_{r} + \\ \quad + (3 \overset{i}{\varphi}_{\alpha\beta} + \overset{i}{\varphi}_{\beta\alpha}) (2 B^{\beta}_{(p} \nabla_{s)} B^{\alpha}_{r} + \nabla_{r} B^{\alpha}_{(s} \cdot B^{\beta}_{p)}) + \\ \quad + \overset{i}{\varphi}_{\alpha} (3 \nabla_{(\rho} \nabla_{s)} B^{\alpha}_{r} + 2 \nabla_{(p} \nabla_{s)} B^{\alpha}_{r} + \nabla_{r} \nabla_{(s} B^{\alpha}_{p)}) = 0 ; \end{cases}$$

$$[3.13] \quad \begin{cases} \overset{i}{\varphi}_{0\beta\gamma\delta} B^{\beta}_{(r} B^{\gamma}_{s} B^{\delta}_{p)} + 3 \overset{i}{\varphi}_{0\beta\gamma} B^{\gamma}_{(p} \nabla_{s} B^{\beta}_{r)} + \overset{i}{\varphi}_{0\beta} \nabla_{(p} \nabla_{s} B^{\beta}_{r)} + 3 \overset{i}{\varphi}_{\alpha\beta\gamma} B^{\alpha}_{(r} B^{\beta}_{s} B^{\gamma}_{p)} + \\ \quad + 3 (\overset{i}{\varphi}_{\alpha\beta} + \overset{i}{\varphi}_{\alpha\beta}) B^{\alpha}_{(r} \nabla_{s} B^{\beta}_{p)} + \overset{i}{\varphi}_{\alpha} \nabla_{(p} \nabla_{s} B^{\alpha}_{r)} = 0 . \\ \overset{i}{\varphi}_{\alpha\beta\gamma\delta} B^{\alpha}_{(r} B^{\beta}_{s} B^{\gamma}_{p} B^{\delta}_{q)} + 3 (\overset{i}{\varphi}_{\alpha\beta\gamma} + \overset{i}{\varphi}_{\beta\alpha\gamma}) \nabla_{(s} B^{\alpha}_{r} \cdot B^{\beta}_{p} B^{\gamma}_{q)} + \\ + 3 \overset{i}{\varphi}_{\rho\beta} \nabla_{(s} B^{\alpha}_{r} \nabla_{p} B^{\beta}_{q)} + (3 \overset{i}{\varphi}_{\alpha\beta} + \overset{i}{\varphi}_{\beta\alpha}) \nabla_{(p} \nabla_{s} B^{\alpha}_{r} \cdot B^{\beta}_{q)} + \overset{i}{\varphi}_{\alpha} \nabla_{(q} \nabla_{p} \nabla_{s} B^{\alpha}_{r)} , \end{cases}$$

(15) Cfr. E. Bompiani, **31**, pagg. 40-42.

espressioni per $\overset{i}{\varphi}_{\alpha\beta\gamma} \underset{r}{B^{\alpha}} \underset{s}{B^{\beta}} \underset{p}{B^{\gamma}}$, $\overset{i}{\varphi}_{0\beta\gamma} \underset{r}{B^{\beta}} \underset{s}{B^{\gamma}}$: valendoci delle [3.12], le quali in particolare comprendono le [3.11]. Si noti però che le prime equazioni [3.12] sono fra loro compatibili *solo a condizione che sia*

$$[3.14] \qquad (\overset{i}{\varphi}_{0\alpha} + \overset{i}{\varphi}_{\alpha}) \nabla_{[r} \underset{s]}{B^{\alpha}} = 0 ;$$

vediamo dunque come la condizione del contatto di 4° ordine aggiunga alla prima delle [3.9] *un'ulteriore condizione per* $\overset{i}{\varphi}_{0\alpha}$. Manifestamente in forza delle [3.8] vi è compatibilità; una soluzione evidente è data da

$$[3.15] \qquad \overset{i}{\varphi}_{0\alpha} = -\overset{i}{\varphi}_{\alpha} = -\overset{i}{C}_{\alpha} .$$

Infine le [3.13] sono condizioni (fra loro compatibili) per

$$\overset{i}{\varphi}_{\alpha\beta\gamma\delta} \underset{(r}{B^{\alpha}} \underset{s}{B^{\beta}} \underset{p}{B^{\gamma}} \underset{q)}{B^{\delta}}, \quad \overset{i}{\varphi}_{0\beta\gamma\delta} \underset{(r}{B^{\beta}} \underset{s}{B^{\gamma}} \underset{p)}{B^{\delta}} .$$

Quanto precede basta a provare ciò che nel n. 1 avevamo enunciato. Lasciando per ora impregiudicata la questione, se sia possibile (senza restrizioni per la X_m o per la connessione dell'ambiente P_n) imporre anche un contatto di ordine più elevato, risulta intanto stabilito che:

È sempre possibile, e in infiniti modi, costruire una cella anolonoma del 4° ordine, di dimensione tangenziale [16] m, *nell'*S_n, *tale da contenere tutti gli* E_1 *delle immagini tangenziali delle linee della* X_m *uscenti da* O.

4. *Altro processo di approssimazione mediante varietà anolonome dello spazio* S_n. Vi è un altro modo abbastanza naturale di costruire elementi di X_n^m atti a dare un'approssimazione della immagine tangenziale di una X_m di P_n, relativa a un suo punto O. Possiamo trasportare entro lo spazio tangente a P_n in O, secondo la legge di trasporto della connessione, dai singoli punti delle linee (regolari) di X_m uscenti da O, lungo le linee medesime, i rispettivi S_m tangenti in quei punti alla X_m; costruire insomma *le immagini tangenziali delle serie di* S_m *tangenti* alla X_m lungo le linee di X_m uscenti da O. Otteniamo (rappresentando al solito ciascuno di quegli spazi come intersezione di $n-m$ iperpiani):

$$[4.1] \qquad \overset{t}{\chi}_{\alpha} = (\overset{t}{C}_{\alpha})_0 + \left(\frac{\delta \overset{t}{C}_{\alpha}}{dt}\right)_0 t + \frac{1}{2}\left(\frac{\delta^2 \overset{t}{C}_{\alpha}}{dt^2}\right)_0 t^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{\delta^3 \overset{t}{C}_{\alpha}}{dt^3}\right)_0 t^3 + \cdots .$$

---

[16] Cioè: dimensione della giacitura che contiene tutte le direzioni tangenti.

Che gli S_m immagini ottenuti entro l'S_n, almeno entro un intorno infinitesimo di O, siano *gli S_m tangenti a una X_n^m anolonoma* è ovvio: ma questa X_n^m, al di là dell'intorno *del 3° ordine* di O, *non contiene più* (almeno senza restrizioni), *gli elementi delle linee* I_Γ. Infatti il confronto della [4.1] con la [3.3], ove i coefficienti $\overset{i}{\varphi}_\alpha, \overset{i}{\varphi}_{\alpha\beta}, \overset{i}{\varphi}_{\alpha\beta\gamma}, \overset{i}{\varphi}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ s'intendano soggetti alle condizioni indicate al numero precedente, rivela già nel 4° ordine incompatibilità.

5. *Approssimazione mediante calotte olonome: caso generale.*

Come già al n. 1 accennavo, il risultato del n. 3 unito a quanto già si sa a proposito delle calotte anolonome del 2° e 3° ordine nell'S_n ordinario [17] ci mostra a priori che almeno nelle ipotesi più generali nei riguardi della X_m di P_n e della connessione proiettiva dell'ambiente *la varietà delle immagini tangenziali, I_X, potrà approssimarsi fino al 2° ordine, e non oltre, con calotte olonome di varietà m-dimensionali.* Ma l'effettiva verifica, del resto agevole, ci darà risultati più completi.

Una varietà olonoma m-dimensionale (X_m) di S_n passante per O potrà rappresentarsi in prossimità di O mediante uno sviluppo

$$[5.1] \qquad F^i = \overset{i}{\Phi}_\alpha z^\alpha + \frac{1}{2}\overset{i}{\Phi}_{\alpha\beta} z^\alpha z^\beta + \frac{1}{3!}\overset{i}{\Phi}_{\alpha\beta\gamma} z^\alpha z^\beta z^\gamma + \cdots = 0$$

ove i coefficienti $\overset{i}{\Phi}_{\alpha\beta}, \overset{i}{\Phi}_{\alpha\beta\gamma}, \overset{i}{\Phi}_{\alpha\beta\gamma\delta}, \cdots$ saranno da supporsi *simmetrici* rispetto al gruppo dei loro indici. Dovremo ora semplicemente introdurre nella [5.1] al luogo delle z^α le espressioni [3.5] ed eguagliare a zero – fino a che risulti possibile – i coefficienti dello sviluppo secondo le potenze di t che così si ottiene. Troviamo così pel contatto del 2° ordine le condizioni (cfr. con le [3.7] e le seconde [3.9])

$$[5.2] \qquad \overset{i}{\Phi}_\alpha \underset{r}{B^\alpha} = 0 \quad , \quad (\overset{i}{\Phi}_{\alpha\beta} - \overset{n}{\nabla}_{(\beta}\overset{i}{C}_{\alpha)}) \underset{r}{B^\alpha} \underset{s}{B^\beta} = 0 ;$$

alle prime delle quali non sarà restrittivo, al solito (cfr. n. 3) soddisfare ponendo $\overset{i}{\Phi}_\alpha = \overset{i}{C}_\alpha$; le seconde, (scritte, per semplicità già utilizzando l'ultima osservazione), ove intendiamo che per un tensore dato sulla X_m di P_n sia

$$[5.3] \qquad \overset{0}{\nabla}_\beta = \underset{r}{B_\beta}\nabla_r , \quad \text{ad esempio} \quad \overset{0}{\nabla}_\beta \overset{i}{C}_\alpha = \underset{r}{B_\beta}\left(\frac{\partial \overset{i}{C}_\alpha}{\partial u^r} - \Gamma^\delta_{\alpha\gamma}\overset{i}{C}_\delta \underset{r}{B^\gamma}\right),$$

dànno $\overset{i}{\Phi}_{\alpha\beta} \underset{r}{B^\alpha} \underset{s}{B^\beta}$ e quindi determinano *la calotta olonoma σ_2 osculatrice del 2° ordine.*

---

[17] Ved. i lavori **22** e **31** già cit.

Se cerchiamo di esprimere l'appartenenza di un E_3 di curva immagine tangenziale a una conveniente calotta olonoma del 3° ordine σ_3 contenente σ_2, troviamo che *questo vincola, almeno in generale, il corrispondente elemento* E_2. Scritte, come è agevole, le soluzioni generali delle seconde equazioni [5.2] rispetto alle $\overset{i}{\Phi}_{\alpha\beta}$:

$$[5.4]\quad \overset{i}{\Phi}_{\alpha\beta} = \overset{0}{\nabla}_{(\alpha}\,\overset{i}{C}_{\beta)} + p^i_{rh}\,(\overset{h}{C}_\alpha\,\underset{r}{B}_\beta + \overset{h}{C}_\beta\,\underset{r}{B}_\alpha) + q^i_r\,(\overset{0}{B}_\alpha\,\underset{r}{B}_\beta + \overset{0}{B}_\beta\,\underset{r}{B}_\alpha) +$$

$$+ g^i_j\,(\overset{j}{C}_\alpha\,\overset{0}{B}_\beta + \overset{j}{C}_\beta\,\overset{0}{B}_\alpha) + k^i_{jh}\,\overset{j}{C}_\beta\,\overset{h}{C}_\alpha + h^i\,\overset{0}{B}_\alpha\,\overset{0}{B}_\beta$$

ove le p^i_{rh}, q^i_r, g^i_j, $k^i_{jh} = k^i_{hj}$, h^i sono costanti arbitrarie, e tenuto presente che per ipotesi $\partial_r \underset{s}{B}{}^\beta = \partial_s \underset{r}{B}{}^\beta$, onde sussistono le relazioni (esprimenti l'olonomia della X_m; ove $\overset{0}{\partial}_\alpha = \underset{r}{B}_\alpha\,\partial_r$):

$$[5.5]\quad \partial_{[r}\,\underset{s]}{B}{}^\beta\,\overset{i}{C}_\beta = -\,\underset{r}{B}{}^\alpha\,\underset{s}{B}{}^\beta\,\overset{0}{\partial}_{[\alpha}\,\overset{i}{C}_{\beta]} = 0\,,$$

introdotto infine il *tensore di torsione* della connessione proiettiva dell'ambiente

$$[5.6]\quad S^{\cdots\,\nu}_{\lambda\mu} = \Gamma^\nu_{[\lambda\mu]}$$

troviamo che *gli* E_2 *di* S_n *uscenti da* O *secondo un* E_1 *arbitrario e contenuti in* E_3 *appartenenti a una calotta olonoma* σ_3 *uscente dalla calotta osculatrice* σ_2 *sono quelli (eventuali) che soddisfano al sistema di equazioni:*

$$[5.7]\quad \frac{1}{2}\,S^{\cdots\,\nu}_{\lambda\mu}\,\underset{r}{B}{}^\lambda\,\underset{s}{B}{}^\mu\,\overset{i}{C}_\nu\left(\frac{d^2u^r}{dt^2}\,\frac{du^s}{dt} - \frac{du^r}{dt}\,\frac{d^2u^s}{dt^2}\right) +$$

$$+ \{\,(\overset{i}{\Phi}_{\alpha\beta\gamma} - \overset{0}{\nabla}_\gamma\,\overset{0}{\nabla}_\beta\,\overset{i}{C}_\alpha)\,\underset{r}{B}{}^\alpha\,\underset{s}{B}{}^\beta\,\underset{p}{B}{}^\gamma + \overset{0}{\nabla}_{[\alpha}\,\overset{i}{C}_{\beta]}\,\nabla_r\,\underset{s}{B}{}^\alpha\cdot\underset{p}{B}{}^\beta +$$

$$+ 3\,(p^i_{rh}\,\overset{h}{C}_\beta + q^i_r\,\overset{0}{B}_\beta)\,\nabla_p\,\underset{s}{B}{}^\beta\,\}\,\frac{du^r}{dt}\,\frac{du^s}{dt}\,\frac{du^p}{dt} = 0\,.$$

Potremo generalmente soddisfare a queste $n - m$ condizioni, disponendo dell'E_2 o meglio del suo piano osculatore, *quando sia* $n \leq \dfrac{m(m+1)}{2}$; univocamente solo quando valga il segno di eguaglianza, ad es. nel caso più elementare $n = 3$, $m = 2$. La calotta del 3° ordine σ_3 potrà intendersi assegnata dando a piacere le $F_{\alpha\beta\gamma}\,\underset{r}{B}{}^\alpha\,\underset{s}{B}{}^\beta\,\underset{p}{B}{}^\gamma$. Pel caso, $m = n - 1$, delle *ipersuperficie* di P_n, la cosa più semplice sarà dare *una quadrica oscu-*

latrice (a contatto del 2° ordine) all'immagine tangenziale I_X; la cui rappresentazione (ove figureranno n parametri indeterminati) riesce ovvia [18].

6. *Caso in cui esiste una calotta olonoma del 3° ordine* (σ_3) *osculatrice.* La [5.7] mostra che, sotto ipotesi particolari, potrà per la immagine tangenziale I_X costruirsi *anche una calotta olonoma osculatrice del 3° ordine*, σ_3. Per questo occorre e basta che sia

$$[6.1] \qquad S^{\cdots\nu}_{\lambda\mu}\, B^{\lambda}_{r}\, B^{\mu}_{s}\, \overset{i}{C}_{\nu} = 0\,,$$

cioè: *che il vettore di torsione relativo a un qualunque ciclo appartenente alla giacitura tangente alla X_m in O stia nel piano del ciclo* [19]. In particolare la condizione sarà verificata *se è nulla la torsione* per la connessione di P_n. Ad ogni modo, ove valga la condizione [6.1], avremo dalla [5.7] espressioni per $\overset{i}{\Phi}_{\alpha\beta\gamma}\, B^{\alpha}_{r}\, B^{\beta}_{s}\, B^{\gamma}_{p}$, e anche qui non sarà difficile ricavarne le più generali espressioni per le $\overset{i}{\Phi}_{\alpha\beta\gamma}$ che con le precedenti sono compatibili. Infine ci si potrà porre questo problema: *se esistano elementi del 4° ordine* (E_4) *di immagini tangenziali che appartengano a un'assegnata calotta olonoma del 4° ordine* (σ_4) *contenente la calotta osculatrice* σ_3. Troviamo

---

[18] Già il CARTAN (**21**, pagg. 272-275) e il KANITANI (**36,37**) si sono valsi di quadriche osculatrici alla immagine tangenziale I_X. Come il CARTAN osserva pel caso delle X^2_3 in P_3, così più in generale per una qualunque X^m_n in P_n un'approssimazione (generalmente del 2° ordine) con una calotta olonoma e anzi proprio *con una varietà olonoma* dell'S_n tangente che è del tutto determinata si può ricavare mediante la nozione di « coordinate normali »: ogni punto Q della X^m_n e anzi di P_n sufficientemente prossimo al punto O viene rappresentato dal punto Q dell'S_n che vi ha quali coordinate proiettive le *coordinate normali* del punto Q, in un sistema di origine O (Ved. CARTAN, loc. cit., pag. 221). In sostanza (cfr. **38**) Q' è la posizione in cui va a portarsi Q quando i punti della geodetica congiungente OQ (intendiamo: geodetica per la connessione proiettiva dell'ambiente P_n) vengono portati, secondo la legge di trasporto della connessione, *lungo la geodetica medesima*, nello spazio S_n già detto. Possiamo dunque chiamare « *immagine geodetica* » della X_m la varietà ottenuta rappresentando a questo modo i punti della X_m sull'S_n. Le particolarità delle calotte del 3° e 4° ordine di questa immagine geodetica, dato il loro carattere *intrinseco* alla X_m in P_n, potranno presentare interesse.

[19] Un risultato equivalente a questo è stabilito (**21**, pag. 263) dal CARTAN per le X^2_3 in P_3: egli trova che la condizione ora detta nei riguardi della torsione caratterizza le superficie *per le quali la proiettività di coniugio è involutoria* (ved. nn. 1, 7).

che tali E_1 (eventuali) escono da O secondo un E_1 arbitrario e secondo un E_2 che soddisfi a un sistema di equazioni della forma

$$[6.2]\quad \left(R^{\cdots\alpha}_{\beta\gamma\delta}\, B^{\delta}_{\rho}\, \overset{i}{C}_{\alpha} + R^{\cdots 0}_{\beta\gamma\,j}\, q^{i}_{\rho}\right) B^{\beta}_{r}\, B^{\gamma}_{s} \left(\frac{d^2 u^r}{dt^2}\frac{du^s}{dt} - \frac{du^r}{dt}\frac{d^2 u^s}{dt^2}\right)\frac{du^p}{dt} + \\ + \overset{i}{\Psi}_{rspq}\frac{du^r}{dt}\frac{du^s}{dt}\frac{du^p}{dt}\frac{du^q}{dt} = 0$$

ove $R^{\cdots\alpha}_{\beta\gamma\delta}$ è *il tensore di curvatura* per la connessione proiettiva di P_n (o meglio, per la corrispondente derivazione proiettiva, di parametri $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ [20]); e $\overset{i}{\Psi}_{rspq}$ è un tensore noto (in relazione all'assegnata calotta σ_4).

Dunque: sè l'ambiente *non ha torsione, ma curvatura*, generalmente *esiste una calotta olonoma osculatrice del 3° ordine per la I_X, non di ordine superiore:* il caso contrario, in cui l'approssimazione dell'immagine tangenziale I_X può portarsi sino al 4° ordine almeno, si ha quando, almeno nel punto considerato, la curvatura per la connessione dell'ambiente è nulla (se essa è dovunque nulla il caso è banale); e anche sotto la condizione meno restrittiva che sia

$$[6.3]\qquad R^{\cdots\alpha}_{\beta\gamma\delta}\, B^{\beta}_{r}\, B^{\gamma}_{s}\, B^{\delta}_{p}\, \overset{i}{C}_{\alpha} = 0\,;$$

il che ha un significato evidente.

7. *Conseguenze particolari: caso delle superficie in ambiente a tre dimensioni. Configurazione della calotta anolonoma superficiale del 3° ordine in S_3.* Aggiungiamo alcune osservazioni pel caso particolare delle *ipersuperficie* in P_n e specialmente delle *superficie* in P_3. In relazione con l'esistenza di una calotta anolonoma osculatrice del 4° ordine τ_4 sta il fatto che, definite in ciascun punto O quali *direzioni asintotiche* della X_m in P_n quelle che sono asintotiche ivi per l'immagine tangenziale I_X cioè per una varietà olonoma od anolonoma che ne dia una approssimazione del 2° ordine almeno [21], *le immagini tangenziali delle linee asintotiche della X_m uscenti da O sono, sino al 2° ordine almeno, linee asintotiche anche per I_X*; e anche più in generale, le immagini tangenziali delle serie di direzioni asintotiche uscenti da una linea asintotica sino al 2° ordine almeno sono per I_X serie

---

[20] Ved. **17**, p. 130, nota [40]. Tensore di curvatura *della connessione* è $R^{\cdots\alpha}_{\beta\gamma\delta} - \frac{1}{n+1}\delta^{\alpha}_{\delta} R^{\cdots\eta}_{\beta\gamma\eta}$. Si noti che σ_2 potrà intendersi presa *in modo che sia* $q^{i}_{p} = 0$.

[21] Cfr. CARTAN, **21**, pag. 259. L'altra definizione cui il CARTAN accenna nella pag. prec. (direzioni delle tangenti a geodetiche dell'ambiente che in O abbiano contatto del 2° ordine con la varietà) è manifestamente equivalente a quella qui scelta.

di direzioni asintotiche. Questo spiega in modo ovvio come al KANITANI, pel caso $m = 2$, $n = 3$, si sia presentato [22] un fatto analogo a quello che io avevo già notato [23] per le superficie anolonome in S_3: cioè che la usuale definizione della quadrica di LIE dà luogo *a due differenti quadriche*, che osculano le due rigate (non sviluppabili) di tangenti asintotiche. Le altre analogie, già accennate al n. 1, e riguardanti *le direzioni coniugate*, quelle di DARBOUX ecc., risultano pure conseguenza ovvia di quanto abbiamo qui stabilito in generale: di più risulta evidente come tutto quanto si è sino ad ora ottenuto nei riguardi degli intorni del 2°, 3°, 4° ordine di un punto su una superficie anolonoma dello spazio proiettivo ordinario possa agevolmente estendersi o meglio interpretarsi anche sulle superficie ordinarie di uno spazio P_3 a connessione proiettiva a torsione. Su questo non occorre soffermarci [24].

Noterò ancora soltanto che, anche viceversa, le considerazioni esposte ai nn. 5, 6 possono in parte svolgersi – come le abbiamo svolte in sostanza per la calotta anolonoma del 4° ordine che approssima l'immagine tangenziale di una X_n^m di P_n – *anche direttamente per una varietà anolonoma data ad arbitrio e considerata nell'intorno di un suo punto.* Per una superficie anolonoma in S_3, assegnata in un suo punto O una calotta superficiale olonoma σ_3 del 3° ordine che contenga la calotta osculatrice σ_2, ad esempio mediante l'assegnazione di una quadrica osculatrice), avremo dunque per ogni E_1 che esca da O uno e un solo E_2 tale che tutte le curve (piane o gobbe [25]) della superficie anolonoma che lo contengono abbiano, nel punto O considerato, gli E_3 appartenenti alla calotta σ_3. Tali E_2 sono quelli che soddisfano a un'equazione del tipo

$$[7.1] \qquad h\,(d^2u\,dv - d^2v\,du) = A du^3 + B du^2\,dv + C du\,dv^2 + D dv^3\,,$$

---

[22] Ved. **37**, pag. 352.

[23] **22**, pag. 311. Dalle due quadriche io avevo tratto (quale unica comune al loro fascio e al sistema ∞^3 delle quadriche osculatrici) una terza, che come poi ha mostrato il VYČICHLO (**32**) per varie sue proprietà appare la più naturale generalizzione al caso anolonomo della quadrica di LIE. Il KANITANI si vale delle due quadriche per definire una correlazione (non subordinata a una polarità spaziale) fra la stella O e il piano tangente: a ogni retta di questo fa corrispondere l'intersezione dei piani polari delle sue intersezioni con le tangenti asintotiche rispetto alle due quadriche (considerate in un certo ordine). Questo è uno dei numerosi procedimenti (cfr. BUCHIN SU, **39**) che nel caso olonomo darebbero *sempre la polarità di* DARBOUX e nel caso anolonomo (come per le ordinarie superficie in ambiente P_3) dànno invece correlazioni (fra loro distinte e non subordinabili a polarità).

[24] Noterò che risulta manifesto, da quanto precede, come ad es. dovessero potersi estendere svariate definizioni e proprietà degli spigoli di GREEN per le superficie di S_3: come per le superficie di P_3 ha fatto il KANITANI (**37**).

[25] Per le curve piane (cioè: le sezioni piane della X_3^2) la cosa sotto forma lievemente diversa era già stata notata da me in **22**, p. 311; ved. anche **40**.

ove du, dv sono sulla X_3^2 differenziali anolonomi; cosicchè se in ciascun punto della X_3^2 è data una calotta σ_3, o in particolare una quadrica osculatrice, gli E_2 delle linee aventi, in ciascun punto, l'E_3 contenuto in σ_3 sono quelli *delle geodetiche di una connessione lineare* sulla X_3^2. Il coefficiente h nella [7.1] si annulla allora e solo che, nel punto considerato, la X_3^2 soddisfa alla condizione [5.5] *d'olonomia*; in particolare, se la X_3^2 è olonoma; allora la [7.1] dà luogo sulla X_3^2 a un triplo sistema ∞^1 di linee anzichè a un sistema ∞^2 (o, in un singolo punto, dà una terna di direzioni tangenti); se la calotta σ_3 è quella di una quadrica osculatrice convenientemente scelta, si ottengono le linee (o le direzioni) di Darboux ([26]).

In particolare risulta precisata *la configurazione geometrica della calotta superficiale olonoma del 3° ordine*. Gli E_3 di curva che ne fanno parte sono tutti e soli quelli uscenti dagli E_2 soddisfacenti, in relazione all'assegnazione di una qualunque calotta σ_3 che contenga quella (σ_2) osculatrice, all'equazione [7.1]; essi *si distribuiscono* (ad esempio) *su* ∞^1 *quadriche osculatrici, formanti un fascio* (qualunque, purchè non contenente lo spazio tangente contato due volte) entro il sistema ∞^3 delle quadriche osculatrici. Fissato, ad esempio imponendo il passaggio per due punti presi genericamente nello spazio, un tale fascio, in relazione a ciascuna quadrica di questo una corrispondenza, già altrove da me indicata ([27]), dà luogo, *per ciascuna direzione tangente, a un* E_2 *della* X_3^2: e quindi a ∞^1 E_3 (tutti quelli che lo contengono) uscenti dal punto considerato della X_3^2 secondo la supposta direzione e comuni alla X_3^2 e alla supposta quadrica. Variando la direzione tangente, e poi la quadrica entro il fascio, si hanno tutti gli E_3 della X_3^2 in O.

Se in O vale per la X_3^2 *la condizione d'olonomia*, potremo determinare in O una calotta olonoma σ_3 osculatrice alla X_3^2; assegnata a piacere una σ_4 contenente la σ_3 verrà determinato, mediante un'equazione del tipo

$$[7.2] \quad h_r\, du^r\, (d^2u\, dv - d^2v\, du) = A du^4 + B dv^3\, dv + C du^2\, dv^2 + D du\, dv^3 + E dv^4$$

per ciascun E_1 tangente un E_2 tale che tutti gli E_4 della X_3^2 che ne escono appartengono a σ_4. A priori è prevedibile che varranno, per le costruzioni analitiche date dalle [7.2] e così pure dalle [7.1] interpretazioni geometriche analoghe a quelle che, nel caso olonomo, per le equazioni dei tipi [7.2] e [7.1] (come anche di altri tipi consimili) sono state date da E. Bompiani ([28]).

([26]) Ved. Cartan, **21**, pag. 275. La quadrica va presa in modo che la corrispondente terna di direzioni tangenti sia apolare alla coppia delle direzioni asintotiche.

([27]) Cfr. ([25]). A ciascuna tangente corrisponde un piano per essa, la cui sezione (uscente da O) con la X_3^2 ha contatto del 3° ordine con la supposta quadrica.

([28]) Ved. **5**, **6**, **7**, **8**.

BIBLIOGRAFIA

1. A. Vöss, *Geometrische Interpretation der Differentialgleichung* $Pdx + Qdy + R\,dz = O$. « Mathem. Annalen », *16*, (1880) 556–559.
2. A. Voss, *Zur Theorie der allgemeinen Punktebenensysteme.* Ibid., *23* (1884), 45–81.
3. A. Dall'Acqua, *Sulla teoria delle congruenze di curve in una varietà qualunque a tre dimensioni.* « Annali di Matem. » (3), *6* (1901) 1–41.
4. P. Dienes, *Sur les différentielles secondes et la dérivation des tenseurs.* « Rendiconti Lincei » (5), 33, 1° sem., 1924, 265–269.
5. E. Bompiani, *Ancora sulla geometria delle superficie considerate nello spazio rigato.* Ibid. (6) *4*, (1926) 262–267.
6. E. Bompiani, *Sull'interpretazione proiettiva dell'equazione* $v'' = A + Bv' + Cv'^2 + Dv'^3$. « Bollettino Un. Matem. Italiana » (1), 9 (1930), 154–159.
7. E. Bompiani, *Interpretazione proiettiva di alcune equazioni differenziali ordinarie del 2° ordine.* « Rendiconti Lincei » (6) XI, (1930), 33–40.
8. E. Bompiani, *Significato proiettivo di alcuni tipi di equazioni differenziali del secondo ordine.* « Annali di Matem. » (4) 7, 273–300 (1930).
9. E. Bortolotti, *Connessioni proiettive.* « Bollettino Un. Matem. Ital. » (1), 9 (1930), 298–294; *10*, 28–34, 83–90 (1931).
10. J. G. C. Whitehead, *The representation of projective spaces.* « Annals of Mathem. », *32*, 327–360 (1931).
11. E. Bortolotti, *Sulle connessioni proiettive.* « Rendiconti Circolo Matem. Palermo », *56*, 1–57 (1932).
12. M. Manarini, *Considerazioni sul calcolo vettoriale assoluto in una* V_3 *e sui tensori doppi a divergenza unica.* « Rendiconti Lincei », (6) XIX, 301–305, (1934).
13. M. Manarini, *Sugli spazi di Weyl.* « Annali di Matem. » (4), *14*, 149–177 (1935).
14. A. Maxia, *Sulla geometria proiettiva differenziale di una* X_2^3 *in* S_3. « Rendiconti Lincei » (6), 248–253 (1935).
15. V. Hlavaty, *Espaces courbes de Kōnig.* « Rendiconti Circ. Matem. Palermo », *59*, 1–39 (1935).
16. E. Cartan, *Le calcul tensoriel projectif.* « Matematiceskii Sbornik », *42*, 1935, 131–148.
17. E. Bortolotti, V. Hlavaty, *Contributi alla teoria delle connessioni.* I. *Connessioni proiettive: costruzione al finito, classificazione secondo Klein.* « Annali di Matem. » (4), 15, 1936, 1–45, 129–154.
18. L. Berwald, *On the projective geometry of paths.* « Annals of Mathem. », *37*, 879–898 (1936).
19. J. A. Schouten, J. Haantjes, *Zur allgemeinen projektiven Differentialgeometrie.* «Compositio Mathematica », *3*, 1–51 (1936).

20. E. Cartan, *L'extension du calcul tensoriel aux géometries non affines.* « Annals of Mathem. », *38*, 1–13 (1937).

21. E. Cartan, *Leçons sur la théorie des espaces à connexion projective.* Paris, Gauthier–Villars, 1937 (« Cahiers Scientifiques », fasc. 17).

22. E. Bortolotti, *Geometria proiettiva differenziale delle superficie anolonome.* « Atti I Congr. Unione Matem. Italiana », Firenze, 305–311 (1937).

23. J. Haantjes, *On the projective geometry of paths.* « Proceedings Edinburgh Mathem. Society » (2), 5, 103–115 (1937).

24. P. Burgatti, *Calcolo vettoriale generale.* « Abhandlungen Semin. fur Vektor- und Tensoranalysis », Mosca, IV, 333–336 (1937).

25. K. Yano, *Sur le changement des coefficients d'une connexion projective.* « Comptes Rendus de l'Acad. », Paris, 205, 637–639 (1937).

26. K. Yano, *Sur les équations des géodésiques dans une variété à connexion projective.* Ibid., 829–831.

27. K. Yano, *Sur l'espace projective de M. D. van Dantzig.* Ibid., 206, 1610–1612 (1938).

28. K. Yano, *The non holonomic representation of projective spaces.* « Proceedings Phys. Mathem. Society of Japan » (3) *20*, 442–450 (1938).

29. K. Yano, *Les espaces à connexion projective et la géométrie projective des « paths ».* « Annales Scient. Univ. Jassy », *24*, 395–464 (1938).

30. Shiing–Shen Chern, *On projective normal coördinates.* « Annals of Mathem. », *39*, 165–171 (1938).

31. E. Bompiani, *Sulle varietà anolonome.* I. *Alcuni teoremi generali.* II. *Le V_3^2 di S_3 proiettivo.* « Rendic. Lincei » (6), *27*, 37–52 (1938).

32. F. Vycichlo, *Contributi alla geometria proiettiva delle varietà anolonome.* I. *Teorema topologico per le V_n^m di S_n.* II. *V_3^2 in S_3; fascio di Darboux, quadrica di Lie, spigoli di Green.* Ibid., 646–658.

33. V. Hlavaty, *Hypersurfaces in a projective curved space.* « Annals of Mathem. » *39*, 725–761 (1938).

34. G. Vranceanu, *Gli spazi a connessione proiettiva e loro gruppi di trasformazioni di congruenze.* « Rendiconti Lincei » (6) *29*, 553–558 (1939).

35. J. Kanitani, *Les équations fondamentales d'une surface plongée dans un espace à connexion projective.* « Memoirs Ryojun College of Engineering », *12*, 61–88. (1939).

36. J. Kanitani, *Sur les tangentes de Darboux d'une surface plongée dans un espace à connexion projective.* « Proceedings Phys. Mathem. Society of Japan » (3) *21*, 220–231 (1939).

37. J. Kanitani, *Sur l'arête de Green d'une surface plongée dans un espace à connexion projective*, Ibid. (3), *22*, 343–358 (1940).

38. E. Bortolotti, *Coordinate normali ed « estensioni » nella geometria degli spazi a connessione lineare.* « Rendiconti R. Accademia d'Italia », *2*, 106–116 (1940).

39. B. Su, *On the projective differential geometry of a non-holonome surface in ordinary space.* « Annali di Matem. » (4), *19*, 289–313 (1940).

40. E. Bortolotti, *Sulla geometria proiettiva differenziale di una superficie anolonoma nello spazio ordinario.* Ibid., 315–325.

Matematica. — *Su un classico teorema di Noether e sulle varietà algebriche trasformabili in varietà con infinite quadriche* (1). Nota di FABIO CONFORTO, presentata (2) dall'Accademico FRANCESCO SEVERI.

Risale al 1871 l'importante teorema di NOETHER (3), secondo il quale una superficie con un fascio razionale di curve razionali è razionale e si può rappresentare sul piano in modo che alle curve del fascio rispondano nel piano le rette per un punto. Nel 1898 tale teorema fu generalizzato da F. ENRIQUES (4), il quale potè stabilire che una superficie con un fascio di genere p ($\geqq 1$) di curve razionali si può trasformare birazionalmente in una rigata di genere p, le generatrici corrispondendo alle curve del fascio (5).

Le dimostrazioni di NOETHER ed ENRIQUES procedono sino ad un certo punto parallelamente, l'una e l'altra incominciando col trasformare la superficie in una (rigata od in una) superficie con un fascio di *coniche*. Anzi, questa prima parte della dimostrazione è presa da ENRIQUES di peso dalla Memoria di NOETHER, giacchè, nel ragionamento di NOETHER, essa è affatto indipendente dalla razionalità del fascio di curve razionali sulla superficie ed è basata soltanto sulla possibilità di trasformare una curva razionale d'*ordine pari* in una conica, *senza l'aggiunta di irrazionalità numeriche* rispetto al campo di razionalità individuato dai coefficienti della curva razionale. Arrivati ad una superficie con un fascio di coniche, si tratta nell'uno e nell'altro caso di costruire sulla super-

(1) L'argomento di questa Nota è stato in parte trattato in un corso tenuto dall'A. nel 1939-40 presso il Reale Istituto Nazionale di Alta Matematica.

(2) Nell'Adunanza del 23 novembre 1940-XIX.

(3) M. NOETHER, *Über Flächen welche Schaaren rationaler Kurven besitzen*, « Math. Ann. », Bd. 3, 1871.

(4) F. ENRIQUES, *Sopra le superficie che posseggono un fascio ellittico di curve razionali*, « Rend. Acc. Lincei », ser. 5ª, vol. VII, 1898; *Sopra le superficie che posseggono un fascio di curve razionali*, ivi; e la Memoria: *Sopra le curve algebriche che contengono un fascio di curve razionali*, « Math. Ann. », Bd. 52, 1899.

(5) Per la dimostrazione dei teoremi di NOETHER ed ENRIQUES, si veda anche l'esposizione datane da F. CONFORTO in *Le superficie razionali* (Bologna, Zanichelli, 1939), Lib. II, cap. I.

ficie una *unisecante le coniche del fascio*. L'esistenza di una tale unisecante permette di dimostrare immediatamente la razionalità o la riferibilità a rigata della superficie, con le modalità anzidette, bastando all'uopo proiettare ciascuna conica del fascio dal punto razionalmente determinato sopra di essa dalla unisecante.

Per pervenire alla costruzione della unisecante, NOETHER fa entrare esplicitamente l'ipotesi della razionalità del fascio di coniche e ricorre ad un procedimento relativamente complesso, nel quale giuocano in modo essenziale le coniche degeneri del fascio. Sempre nel caso del fascio razionale, la costruzione della unisecante si può ricondurre, come ha fatto da prima CLEBSCH in un caso particolare e come ha indicato ENRIQUES in generale, al problema della bisezione di una serie lineare sopra una curva [1]; è questo però un metodo, che fa appello a nozioni relativamente elevate. Per quanto riguarda la costruzione della unisecante nel caso di un fascio di genere qualunque (≥ 1), ENRIQUES perviene ad essa con considerazioni estremamente laboriose e riposte, le quali, oltre che sulla bisezione, si basano sulla proposizione seguente: date due curve C_1 e C_2 di genere $2p-1$ ($p \geq 1$), contenenti una stessa involuzione γ, priva di punti doppi, di genere p, e riferibili quindi, senza punti di diramazione, ad una stessa curva doppia K, di genere p, esistono sulla K serie lineari g^1_m, alle quali corrispondono sulle C_1, C_2 serie g^1_{2m} ciascun gruppo delle quali è composto con due gruppi di una g^1_m, autoconiugata rispetto all'involuzione γ.

In due lavori recentissimi E. D. TAGG [2] ed A. COMESSATTI [3] sono ritornati, indipendentemente l'uno dall'altro, sul teorema di NOETHER e di ENRIQUES, offrendo per la costruzione della unisecante un procedimento naturale ed insperatamente semplice.

La Memoria di TAGG tratta del teorema di ENRIQUES. Dopo aver trasformata la superficie in una superficie con un fascio di coniche, l'autore perviene rapidissimamente alla costruzione della unisecante dimostrando per via analitica e con un semplice computo di costanti, il quale non dà adito ad alcun dubbio, che *dato un sistema algebrico ∞^1 di coniche del piano si può sempre determinare razionalmente un punto su ogni conica del sistema*. Il grande valore concettuale e di semplificazione del ragionamento di TAGG specie in confronto al ragionamento di ENRIQUES, sembra tuttavia essere sfuggito al suo autore, tanto che buona parte della Memoria di TAGG è dedicata alla dimostrazione della possibilità di tra-

---

[1] È questo il metodo seguito nel trattato citato di F. CONFORTO.

[2] E. D. TAGG, *Surfaces which contain an irrational pencil of rational curves*, « Journal of the London Math. Soc. », vol. 14, 1939.

[3] A. COMESSATTI, *Intorno ad un classico problema di unisecanti*, « Boll. Un. Mat. It. », ser. 2ª, vol. 2, n. 2, 1940.

sformare la superficie proposta in una superficie con un fascio di coniche; dimostrazione, che l'autore ritiene necessaria, non sembrandogli a ciò sufficiente, come invece è di fatto, l'analisi di NOETHER. La costruzione della uniseccante sembra invece avere, nel concetto di TAGG, un ufficio quasi secondario, mentre il metodo per tale costruzione costituisce il vero contributo portato da TAGG alla questione.

Sostanzialmente coincidente con il metodo di TAGG è il metodo indicato, per la costruzione della uniseccante, da COMESSATTI. Senonchè le considerazioni di COMESSATTI sono limitate al caso del fascio razionale; e COMESSATTI non sembra aver notato che lo stesso suo ragionamento vale anche a dimostrare il teorema di ENRIQUES, per il caso di un fascio di genere qualunque.

Scopo del presente lavoro è anzitutto di mettere in piena luce il ragionamento di TAGG, corredandolo di qualche osservazione complementare, che ci sembra opportuna. Indi di mostrare la fecondità di tale tipo di ragionamento, facendo vedere come da esso possano trarsi delle conseguenze per le varietà ad $s+1$ dimensioni contenenti un fascio (razionale od irrazionale) di quadriche ad s dimensioni e, più in generale, per le varietà ad $r+s$ dimensioni, contenenti un sistema ∞^r d'indice 1 di quadriche ad s dimensioni [1]. Precisamente siamo riusciti a dimostrare il seguente

TEOREMA I. — *Una varietà V_{r+s} di dimensione $r+s$, contenente un sistema ∞^r d'indice 1 di quadriche (generalmente non specializzate) ad s dimensioni, si può trasformare birazionalmente in una varietà di spazi lineari, rappresentatici delle quadriche del sistema, se è soddisfatta la disuguaglianza:*

$$s > 2^r - 2 .$$

Quando il sistema di quadriche sulla V_{r+s} sia razionale si può addirittura enunciare il

TEOREMA II. — *Una varietà V_{r+s} di dimensione $r+s$ contenente un sistema ∞^r, razionale e d'indice 1, di quadriche (generalmente non specializzate) ad s dimensioni, è razionale, se è soddisfatta la disuguaglianza:*

$$s > 2^r - 2 ;$$

la rappresentazione sopra uno spazio lineare di dimensione $r+s$ si può eseguire in modo che le quadriche del sistema vengano rappresentate dagli spazi ad s dimensioni passanti per uno spazio fisso ad $s-1$ dimensioni.

Rimane naturalmente impregiudicato dal teorema I l'importante problema di determinare per ogni valore della dimensione $t = r+s$, il

[1] In tutto il seguito di questo lavoro le coniche verranno considerate come quadriche ad una dimensione.

massimo valore di r per cui la varietà si può trasformare in un luogo di spazi lineari, rappresentativi delle quadriche del sistema. Per $r = 1$ la disuguaglianza soprascritta è sempre verificata, e, al crescere di $t = r + s$ è soddisfatta da valori sempre più alti di r. Ma il teorema I nulla permette di dire se la disuguaglianza indicata non è verificata. Come è noto non si può *certo* salire sino ad $r = t - 1$, esistendo ad esempio nello spazio ordinario congruenze di coniche, che non si possono rappresentare su una stella di rette [1].

Giova osservare altresì che i *teoremi* I *e* II *hanno un senso birazionale* e cioè valgono non solo per le varietà contenenti sistemi di *quadriche* del tipo indicato, ma più in generale per tutte le varietà contenenti sistemi di varietà razionali, *purchè tali sistemi di varietà razionali siano trasformabili in sistemi di quadriche del tipo indicato.*

Questa osservazione diventa molto significativa quando $r = s = 1$, cioè nel caso di una superficie con un fascio di coniche o di curve razionali. Ciò dipende dal fatto già ricordato, che una curva razionale si può trasformare in una (retta od in una) conica senza l'aggiunta di irrazionalità numeriche, per modo che una superficie con un fascio di curve razionali si può sempre trasformare birazionalmente in una (rigata od in una) superficie con un fascio di coniche. I teoremi I e II si riducono così ai teoremi di Enriques e di Noether ed offrono una *caratterizzazione delle superficie con un fascio di curve razionali*

In modo ben diverso vanno le cose per le varietà contenenti sistemi d'indice 1 di *superficie o varietà razionali.* E ciò in dipendenza dal fatto che una superficie o varietà razionale non si può sempre trasformare birazionalmente senza l'aggiunta di irrazionalità numeriche in (uno spazio lineare od in) una quadrica. Per guisa che una varietà contenente un sistema d'indice 1 di varietà razionali subordinate non è sempre trasformabile birazionalmente in (un luogo di spazi lineari od in) una varietà con un sistema d'indice 1 di quadriche. Perciò i teoremi I e II, pur sembrandoci significativi in sè, sono ben lungi dall'offrire una caratterizzazione delle varietà con un sistema d'indice 1 di varietà razionali subordinate [2].

---

[1] D. Montesano, *Sui vari tipi di congruenze lineari di coniche dello spazio,* «Rend. Acc. di Napoli», 1895 (2 note). La condizione necessaria e sufficiente affinchè una V_{r+1} contenente un sistema ∞^r di coniche (o di curve razionali), razionale e d'indice uno, si possa rappresentare sopra uno S_{r+1} in modo che alle coniche corrispondano le rette di una stella è stata determinata da U. Morin nella memoria: *Sulle varietà algebriche che contengono un sistema di curve razionali,* « Rend. Sem. Mat. della R. Università di Padova », anno IX, n. 3-4 (1938).

[2] Per pervenire ad una tale caratterizzazione occorrerebbe una ricerca particolare per ognuno dei tipi ai quali possono ridursi birazionalmente, senza l'ag-

Il lavoro termina con due teoremi sulle V_{r+s} contenenti un sistema ∞^r di quadriche ad s dimensioni, d'indice qualunque, che si deducono facilmente dalla dimostrazione dei teoremi I e II.

1. Sia F una superficie contenente un fascio (razionale od irrazionale) di coniche, i cui elementi corrispondano birazionalmente ai punti di una curva C (che possiamo senz'altro supporre piana). Per proiezione di ciascuna conica del fascio da un opportuno spazio fisso su un piano π, avremo, su π, un sistema algebrico di coniche, che avrà un'equazione del tipo seguente:

$$[1.1] \quad a_{00}(u_0, u_1, u_2)\,x_0^2 + a_{01}(u_0, u_1, u_2)\,x_0 x_1 + a_{02}(u_0, u_1, u_2)\,x_0 x_2 + \\ + a_{11}(u_0, u_1, u_2)\,x_1^2 + a_{12}(u_0, u_1, u_2)\,x_1 x_2 + a_{22}(u_0, u_1, u_2)\,x_2^2 = 0$$

dove x_0, x_1, x_2 denotano coordinate omogenee in π e le $a_{ik}(u_0, u_1, u_2)$ $(i, k = 0, 1, 2)$ sono forme d'un certo grado μ in tre variabili omogenee u_0, u_1, u_2 legate tra loro da una relazione algebrica (equazione della curva C)

$$[2.1] \quad \varphi(u_0, u_1, u_2) = 0$$

di genere p (genere del fascio), ottenuta annullando un polinomio omogeneo φ, che supporremo di grado m, in u_0, u_1, u_2.

Si tratta ora di fissare *razionalmente* un punto su ciascuna conica del sistema [1.1]. Le coordinate $\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2$ di tal punto saranno dunque *funzioni razionali* del punto mobile sulla curva $\varphi = 0$. Preso un $n > m$, consideriamo la totalità delle forme di grado n in u_0, u_1, u_2 e la serie lineare segnata da essa sulla C. In questa serie si possono scegliere

$$N = \binom{n+2}{2} - \binom{n-m+2}{2}$$

gruppi linearmente indipendenti, segati da altrettante forme

$$\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_N.$$

---

giunta di irrazionalità numeriche, le varietà razionali a due, tre ... dimensioni. Tali tipi sono stati determinati per il caso delle superficie da F. Enriques, *Sulle irrazionalità da cui può farsi dipendere la risoluzione d'un equazione algebrica $f(x, y, z) = 0$ con funzioni razionali di due parametri*, « Math. Ann. », Bd. 49, 1897; per il caso delle varietà a tre dimensioni la superficie sezioni razionali cfr. U. Morin, *Sulla classificazione proiettiva delle varietà a superficie sezioni razionali*, « Ann. di Mat. », ser. 4ª, to. 18 (1939).

Dopo ciò, porremo in via di tentativo:

$$[3.1] \qquad \begin{cases} \overline{x}_0 = \sum_1^N{}_i \lambda_i^{(0)} \psi_i \\ \overline{x}_1 = \sum_1^N{}_i \lambda_i^{(1)} \psi_i \\ \overline{x}_2 = \sum_1^N{}_i \lambda_i^{(2)} \psi_i \end{cases}$$

dove le $\lambda_i^{(0)}$, $\lambda_i^{(1)}$, $\lambda_i^{(2)}$ sono *indeterminate.*

Per esprimere che il punto $(\overline{x}_0 , \overline{x}_1 , \overline{x}_2)$ sta sulla conica [1.1] basta immaginare sostituite le $\overline{x}_0 , \overline{x}_1 , \overline{x}_2$ date dalla [3.1] al posto di x_0 , x_1 , x_2 nella [1.1]; si deve così ottenere un'equazione che è soddisfatta, tenuto conto della [2.1]. In altri termini, sostituendo le [3.1] nella [1.1], la [1.1] diviene una forma di grado $2n + \mu$, che deve essere divisibile per la forma $\varphi(u_0 , u_1 , u_2)$. Si avrà cioè identicamente:

$$[4.1] \quad a_{00}(u_0 , u_1 , u_2) \cdot \left(\sum_1^N{}_i \lambda_i^{(0)} \psi_i\right)^2 + a_{01}(u_0 , u_1 , u_2) \cdot \left(\sum_1^N{}_i \lambda_i^{(0)} \psi_i\right) \cdot \left(\sum_1^N{}_i \lambda_i^{(1)} \psi_i\right) +$$

$$+ a_{02}(u_0 , u_1 , u_2) \cdot \left(\sum_1^N{}_i \lambda_i^{(0)} \psi_i\right) \cdot \left(\sum_1^N{}_i \lambda_i^{(2)} \psi_i\right) + a_{11}(u_0 , u_1 , u_2) \cdot \left(\sum_1^N{}_i \lambda_i^{(1)} \psi_i\right)^2 +$$

$$+ a_{12}(u_0 , u_1 , u_2) \cdot \left(\sum_1^N{}_i \lambda_i^{(1)} \psi_i\right) \cdot \left(\sum_1^N{}_i \lambda_i^{(2)} \psi_i\right) + a_{22}(u_0 , u_1 , u_2) \cdot \left(\sum_1^N{}_i \lambda_i^{(2)} \psi_i\right)^2 \equiv$$

$$\equiv \varphi(u_0 , u_1 , u_2) \cdot \sum_{i_0+i_1+i_2=2n+\mu-m} \alpha_{i_0 i_1 i_2} u_0^{i_0} u_1^{i_1} u_2^{i_2} ,$$

dove le $\alpha_{i_0 i_1 i_2}$ sono nuove indeterminate, in numero di

$$\binom{2n + \mu - m + 2}{2} .$$

Esprimendo nella [4.1] l'uguaglianza dei coefficienti dei termini simili abbiamo, in totale, al più

$$\binom{2n + \mu + 2}{2}$$

equazioni. Le incognite sono le indeterminate

$$\lambda_i^{(0)} , \lambda_i^{(1)} , \lambda_i^{(2)} , \alpha_{i_0 i_1 i_2} \quad (i = 1, 2, \cdots, N \ ; \ i_0 + i_1 + i_2 = 2n + \mu - m),$$

in numero di

$$3\left[\binom{n+2}{2} - \binom{n-m+2}{2}\right] + \binom{2n + \mu - m + 2}{2} .$$

È facile provare che, *per n sufficientemente alto*, il numero delle incognite supera quello delle equazioni. Ponendo infatti la condizione:

$$3\left[\binom{n+2}{2}-\binom{n-m+2}{2}\right]+\binom{2n+\mu-m+2}{2}>\binom{2n+\mu+2}{2}$$

si prova, con facili riduzioni, che essa è verificata quando e soltanto quando sia:

$$n > \mu + m - 3 .$$

Basta dunque che n sia più grande del numero *fisso* $\mu + m - 3$, perchè si abbia un sistema con più incognite che equazioni.

Da qui si può dedurre che è possibile soddisfare al nominato sistema di equazioni in modo che le $\lambda_i^{(0)}, \lambda_i^{(1)}, \lambda_i^{(2)}$, acquistino *valori finiti non tutti nulli* (indipendenti dalle variabili u_0, u_1, u_2), come è necessario nel caso nostro. Per arrivare a questa conclusione non basta tuttavia osservare che trattandosi di un sistema con più incognite che equazioni, esso ammette certo soluzioni. Invero tale teorema vale soltanto per i sistemi d'equazioni *omogenee*, mentre le equazioni che qui si ottengono sono equazioni *non omogenee*, per modo che il problema si può bensì interpretare come quello di trovare le varietà intersezioni di $\binom{2n+\mu+2}{2}$ forme in uno spazio proiettivo (complesso) a

$$3\left[\binom{n+2}{2}-\binom{n-m+2}{2}\right]+\binom{2n+\mu-m+2}{2}>\binom{2n+\mu+2}{2}$$

dimensioni, ma non si può escludere *a priori* che le varietà intersezioni siano tutte costituite da punti impropri [1]. Ma il dubbio accennato si può effettivamente rimuovere, giacchè le forme di cui qui si tratta hanno certamente in comune un punto di coordinate tutte finite: tale è invero l'origine, per cui:

$$\lambda_i^{(0)} = 0 , \lambda_i^{(1)} = 0 , \lambda_i^{(2)} = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, N)$$

$$\alpha_{i_0 i_1 i_2} = 0 \qquad (i_0 + i_1 + i_2 = 2n + \mu - m) .$$

---

[1] Si pensi ad esempio al caso di due piani *paralleli*, cioè al caso di due equazioni lineari tra tre incognite, del tipo seguente:

$$a_{00} x_0 + a_{01} x_1 + a_{02} x_2 + a_{03} = 0$$

$$a_{00} x_0 + a_{01} x_1 + a_{02} x_2 + b_{03} = 0$$

con $a_{03} \neq b_{03}$.

Vi è dunque un punto *al finito*, comune a tutte le varietà rappresentate dalle equazioni del nostro sistema. Ma un tal punto deve esser contenuto [1] in una varietà, intersezione delle dette varietà, che ha *almeno* la dimensione

$$3\left[\binom{n+2}{2}-\binom{n-m+2}{2}\right]+\binom{2n+\mu-m+2}{2}-\binom{2n+\mu+2}{2}>0;$$

nè può avvenire che, per tutti i punti di tale varietà intersezione, tutte le λ siano nulle, senza che lo siano tutte le α. Invero, se ciò fosse possibile dovrebbe, nella relazione identica [4.1], essere identicamente nullo il prodotto di due polinomi non identicamente nulli. Ne segue che si può veramente soddisfare al nostro sistema con valori finiti e non tutti nulli delle $\lambda_i^{(0)}$, $\lambda_i^{(1)}$, $\lambda_i^{(2)}$.

Dopo ciò, le formule [3.1], nelle quali al posto delle indeterminate si siano introdotti i valori così determinati delle $\lambda_i^{(0)}$, $\lambda_i^{(1)}$, $\lambda_i^{(2)}$, permettono di calcolare *razionalmente* un punto su ogni conica del sistema [1.1] ovvero su ogni conica del fascio esistente su F. È pertanto dimostrata l'esistenza di una unisecante il fascio di coniche tracciate su F. Tanto basta, come abbiamo già avvertito, a dimostrare i teoremi di NOETHER ed ENRIQUES.

2. Supponiamo che una varietà algebrica V ad $r+s$ dimensioni possegga un sistema ∞^r di quadriche (generalmente non coni) ad s dimensioni, d'indice 1, per guisa che per un punto generico di V passi una ed una sola quadrica del sistema. Gli elementi del sistema corrispondano birazionalmente ai punti di una varietà W ad r dimensioni, che si può senz'altro supporre una ipersuperficie di uno S_{r+1}. Con un metodo del tutto analogo a quello usato nel numero precedente si può cercar di costruire una varietà ad r dimensioni, *unisecante* le quadriche del sistema.

Proiettiamo ciascuna quadrica del sistema, da un conveniente spazio fisso, in uno spazio lineare ad $s+1$ dimensioni. In tale spazio, nel quale $x_0, x_1, \cdots, x_{s+1}$ indichino coordinate proiettive omogenee, avremo un sistema algebrico ∞^r di quadriche, la cui equazione potremo supporre della forma:

$$[1.2] \qquad \sum_{0}^{s+1}{}_{ik} a_{ik}(u_0, u_1, \cdots, u_{r+1}) x_i x_k = 0$$

---

[1] Cfr. ad esempio F. SEVERI, *Lezioni di Analisi* (Bologna, Zanichelli, 1933), vol. I, cap. 9, pag. 411.

le a_{ik} $(u_0, u_1, \cdots, u_{r+1})$ indicando forme di un certo grado μ nelle variabili omogenee $u_0, u_1, \cdots, u_{r+1}$, legate tra loro da una relazione algebrica (equazione della W):

$$[2.2] \qquad \varphi(u_0, u_1, \cdots, u_{r+1}) = 0$$

espressa dall'annullarsi di una forma di grado m nelle stesse variabili.

Si tratta di fissare *razionalmente* un punto su ciascuna delle quadriche [1.2]. Le coordinate $\bar{x}_0, \bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_{s+1}$ di tal punto saranno *funzioni razionali* del punto mobile sulla varietà [2.2]. Preso un intero $n > m$, la totalità delle forme di grado n in $u_0, u_1, \cdots, u_{r+1}$, sega sulla W un sistema lineare, di varietà ad $r-1$ dimensioni, nel quale si possono scegliere:

$$N = \binom{n+r+1}{r+1} - \binom{n-m+r+1}{r+1}$$

varietà linearmente indipendenti, segate da altrettante forme

$$\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_N.$$

In completa analogia con quanto precede, poniamo:

$$[3.2] \qquad \bar{x}_l = \sum_1^N{}_i \lambda_i^{(l)} \psi_i \qquad (l = 0, 1, 2, \cdots, s+1)$$

essendo le $\lambda_i^{(l)}$ $(i = 1, 2, \cdots, N \; ; \; l = 0, 1, 2, \cdots, s+1)$ quantità indeterminate, in numero di

$$(s+2)N = (s+2)\left[\binom{n+r+1}{r+1} - \binom{n-m+r+1}{r+1}\right].$$

Sostituiamo le $\bar{x}_l$ date dalla [3 . 2] al posto delle x_l in [1.2] ed esprimiamo che si ottiene così un'equazione soddisfatta, tenuto conto della [2.2]. Dovrà essere in altri termini:

$$[4.2] \qquad \sum_0^{s+1}{}_{ik} a_{ik}(u_0, u_1, \cdots, u_{r+1}) \cdot \sum_1^N{}_p \lambda_p^{(i)} \psi_p \cdot \sum_1^N{}_q \lambda_q^{(k)} \psi_q \equiv$$

$$\equiv \varphi(u_0, u_1, \cdots, u_{r+1}) \cdot \rho(u_0, u_1, \cdots, u_{r+1}),$$

dove, avendosi a sinistra una forma di grado $2n + \mu$, dovrà

$$\rho(u_0, u_1, \cdots, u_{r+1})$$

essere una forma di grado $2n + \mu - m$:

$$\rho(u_0, u_1, \cdots, u_{r+1}) =$$

$$= \sum_{i_0 + i_1 + \cdots + i_{r+1} = 2n+\mu-m} \alpha_{i_0 i_1 \cdots i_{r+1}} u_0^{i_0} u_1^{i_1} \cdots u_{r+1}^{i_{r+1}}.$$

dipendente da altre

$$\binom{2u + \mu - m + r + 1}{r + 1}$$

indeterminate.

Uguagliando in [4, 2] i coefficienti delle espressioni simili otteniamo un sistema di (al più)

$$\binom{2n + \mu + r + 1}{r + 1}$$

equazioni tra

$$(s+2)\left[\binom{n+r+1}{r+1} - \binom{n-m+r+1}{r+1}\right] + \binom{2n+\mu-m+r+1}{r+1}$$

incognite.

Si tratta ora di vedere se si possa prendere n così alto da far sì che il numero delle incognite superi quello delle equazioni, ossia da far sì che sia soddisfatta la seguente disuguaglianza:

$$(s+2)\left[\binom{n+r+1}{r+1} - \binom{n-m+r+1}{r+1}\right] + \\ + \binom{2n+\mu-m+r+1}{r+1} > \binom{2n+\mu+r+1}{r+1}.$$

Posto $r + 1 = R$, la precedente disuguaglianza, eliminato il comune denominatore $(r + 1)! = R!$, si può scrivere:

$$(s+2)\,[(n+R)\,(n+R-1)\,(n+R-2)\cdots(n+1) - \\ -(n-m+R)\,(n-m+R-1)\cdots(n-m+1)] + \\ +(2n+\mu-m+R)\,(2n+\mu-m+R-1)\cdots(2n+\mu-m+1) - \\ -(2n+\mu+R)\,(2n+\mu+R-1)\cdots(2n+\mu+1) > 0\,.$$

Sotto questa forma si tratta di provare che un polinomio nella variabile n, può assumere valori positivi. A prima vista il nominato polinomio appare di grado R, ma si vede immediatamente che il coefficiente di n^R è identicamente nullo. Consideriamo allora il coefficiente di n^{R-1}. Se questo coefficiente è *positivo*, il polinomio, per valori sufficientemente alti di n, assumerà valori positivi!

Il detto coefficiente si valuta facilmente e risulta precisamente:

$$Rm\,[(s+2) - 2^{R-1}]\,.$$

Non appena sia dunque:

$$s + 2 - 2^{R-1} > 0$$

ossia

$$s > 2^r - 2$$

si può senz'altro, valendo per l'attuale sistema di equazioni le stesse osservazioni e precisazioni esposte al numero precedente, determinare razionalmente un punto su ciascuna delle quadriche [1.2]. Esiste dunque una *varietà uniseeante* le quadriche del sistema tracciato sulla V. Tanto basta per poter affermare che la varietà V si può trasformare birazionalmente in una varietà contenente un sistema d'indice $1\ \infty^r$ di spazi lineari ad s dimensioni: all'uopo occorre soltanto proiettare ciascuna quadrica della V (supposta immersa in uno S_t) dal punto razionalmente determinato sopra di essa in uno S_{t-1}: con ciò ogni quadrica si trasforma in uno spazio lineare. Perveniamo dunque al seguente

TEOREMA I. — *Una varietà V_{r+s} di dimensione $r+s$, con un sistema ∞^r d'indice 1 di quadriche generalmente non specializzate ad s dimensioni (ovvero birazionalmente equivalente ad una $V_{r,s}$ con un sistema di questo tipo), si può trasformare birazionalmente in una varietà di spazi lineari ad s dimensioni, rappresentativi delle quadriche del sistema, se è soddisfatta la disuguaglianza:*

$$s > 2^r - 2 .$$

Se in particolare la $V_{r,s}$ contiene un sistema del tipo detto, che sia *razionale*, essa è trasformabile in una varietà che è un luogo razionale di spazi lineari. E poichè una tal varietà è razionale si può concludere col

TEOREMA II. — *Una varietà V_{r+s} di dimensione $r+s$, contenente un sistema ∞^r, razionale e d'indice 1, di quadriche generalmente non specializzate ad s dimensioni (ovvero birazionalmente equivalente ad una $V_{r,s}$ con un sistema di questo tipo) è razionale, quando sia soddisfatta la disuguaglianza:*

$$s > 2^r - 2 ;$$

la rappresentazione si può eseguire sopra uno spazio lineare di dimensione $r+s$ in modo che le quadriche del sistema vengano rappresentate dagli spazi ad s dimensioni passanti per uno spazio fisso ad $s-1$ dimensioni [1].

3. La disuguaglianza

[1.3] $$s > 2^r - 2 .$$

---

[1] Quest'ultima particolarità della rappresentazione si può realizzare facilmente. Quando si sia invero arrivati a trasformare la V_{r+s} in una varietà contenente una infinità r dimensionale e razionale di spazi lineari ad s dimensioni, si può porre una corrispondenza birazionale tra gli elementi di questa infinità e gli S_s di uno S_{r+s} passanti per uno S_{s-1} fisso. Dopo ciò basta, con un'opportuna proiezione sghemba, proiettare ciascun S_s della varietà nello S_s corrispondente nello S_{r+s}.

è sempre soddisfatta quando $r = 1$, cioè quando si tratta di una V_t contenente un *fascio* (razionale od irrazionale) di quadriche a $t-1$ dimensioni. Si ha dunque, come caso particolare dei teoremi I e II:

Una varietà V_t (birazionalmente equivalente ad una V_t) con un fascio di quadriche a $t-1$ dimensioni è trasformabile birazionalmente in una varietà contenente un fascio di spazi lineari S_{t-1}.

Una varietà V_t (birazionalmente equivalente ad una V_t) con un fascio razionale di quadriche è razionale e si può rappresentare sopra uno S_t in modo che alle quadriche del fascio rispondano gli S_{t-1} per uno S_{t-2} [1].

Se è $t = 2$ si cade poi nei teoremi di ENRIQUES e di NOETHER sulle superficie dotate di un fascio di coniche, dai quali abbiamo preso le mosse.

Se $s \geq 3$, la disuguaglianza [1.3] è verificata, non solo per $r = 1$, ma anche per $r = 2$. Sicchè, ad esempio *è razionale una V_3, la quale possieda un sistema ∞^3, razionale e d'indice* 1, *di quadriche generalmente non specializzate a due dimensioni.*

In generale si può constatare il fatto che i casi di riferibilità a luoghi di spazi lineari o di razionalità *tendono a crescere* col crescere della dimensione $r - s$. Ad esempio: *sono riferibili a varietà luoghi di spazi lineari*

a) *le V_{10} con un fascio di quadriche a 9 dimensioni;*

b) *le V_{10} con un sistema ∞^2 d'indice 1 di quadriche ad 8 dimensioni;*

c) *le V_{10} con un sistema ∞^3 d'indice 1 di quadriche a 7 dimensioni;*

ovvero:

a') *le V_{19} con un fascio di quadriche a 18 dimensioni;*

b') *le V_{19} con un sistema ∞^2 d'indice 1 di quadriche a 17 dimensioni;*

c') *le V_{19} con un sistema ∞^3 d'indice 1 di quadriche a 16 dimensioni;*

d') *le V_{19} con un sistema ∞^4 d'indice 1 di quadriche a 15 dimensioni,*

ecc. ecc.

Tutti i nominati sistemi di quadriche si intendono costituiti da quadriche generalmente non specializzate.

---

[1] Questi due teoremi si possono tuttavia dedurre immediatamente dai teoremi analoghi sulle superficie con un fascio di coniche. Si tagli invero una V_t contenente un fascio di quadriche a $t-1$ dimensioni con un opportuno spazio lineare, in modo che la sezione sia una superficie. Tale superficie possiede un fascio di coniche: una unisecante le coniche del fascio, sempre esistente secondo ENRIQUES e NOETHER, è altresì una unisecante le quadriche del fascio sulla V_t; d'onde seguono i teoremi indicati.

Per il caso del fascio razionale, l'estensione del teorema di NOETHER alle V_t con un fascio di quadriche è stata esplicitamente notata da ENRIQUES nella Memoria del 1897, citata alla fine dell'introduzione. Questa memoria, essendo anteriore a quella del 1899, nella quale viene esteso il teorema di NOETHER al caso del fascio irrazionale, esclude senz'altro le V_t ($t > 2$) con un fascio irrazionale di quadriche: ma, come si vede, anche in questo caso l'estensione è immediata.

4. Giova infine osservare che le considerazioni svolte per dimostrare il teorema I permettono di trarre qualche conclusione anche per le varietà V_{r+s} ad $r+s$ dimensioni, contenenti un sistema ∞^r di varietà razionali ad s dimensioni, d'indice qualunque $\nu > 1$, quando le varietà razionali del sistema si possano trasformare senza l'aggiunta d'irrazionalità numeriche in quadriche generalmente non specializzate ad s dimensioni.

Sia V_{r+s} una varietà contenente un sistema $\{H\}$ del tipo anzidetto. In uno S_n di dimensione abbastanza elevata, si consideri un sistema ∞^r di S_{s+1}, a due a due privi di punti comuni, i cui elementi corrispondano birazionalmente agli elementi del sistema $\{H\}$. Preso un modello della V_{r+s}, che giaccia in S_n, si proietti da un opportuno spazio fisso ciascuna varietà di $\{H\}$ sullo spazio S_{s+1} ad essa corrispondente, ciò che si può fare senza introdurre alcuna irrazionalità numerica. Si genera così una varietà W_{r+s}, di dimensione $r+s$, contenente un sistema ∞^r di varietà razionali ad s dimensioni, $\{K\}$, *d'indice* 1; ed ogni varietà di $\{K\}$ si può trasformare in una quadrica senza l'aggiunta di irrazionalità numeriche. Tra la V_{r+s} e la W_{r+s} vi è una corrispondenza $[1, \nu]$, per modo che ai punti della V_{r+s} corrispondono sulla W_{r+s} i gruppi di punti di una involuzione d'ordine ν.

Poichè ogni varietà di $\{K\}$ si può trasformare birazionalmente in una quadrica, senza l'aggiunta di irrazionalità numeriche, la W_{r+s} si può trasformare birazionalmente in una varietà W_{r+s}, contenente un sistema ∞^r e d'indice 1 di quadriche ad s dimensioni, alla quale si possono applicare i teoremi I e II. Ne seguono immediatamente i due teoremi seguenti:

Teorema III. — *Se una varietà V_{r+s} ad $r+s$ dimensioni possiede un sistema ∞^r e d'indice $\nu > 1$ di varietà razionali ad s dimensioni, e ciascuna varietà del sistema è trasformabile birazionalmente in una quadrica generalmente non specializzata, senza l'aggiunta di irrazionalità numeriche, la V_{r+s} è birazionalmente equivalente ad una involuzione d'ordine ν giacente su una varietà luogo di spazi lineari, rappresentativi delle varietà razionali del sistema, se è soddisfatta la disuguaglianza:*

$$s > 2^r - 2.$$

Teorema IV. — *Se una varietà V_{r+s} ad $r+s$ dimensioni possiede un sistema ∞^r, razionale e d'indice $\nu > 1$, di varietà razionali ad s dimensioni, e ciascuna varietà del detto sistema è trasformabile birazionalmente in una quadrica generalmente non specializzata, senza l'aggiunta di irrazionalità numeriche, la V_{r+s} è unirazionale, se è soddisfatta la disuguaglianza:*

$$s > 2^r - 2;$$

la $V_{r,s}$ è birazionalmente equivalente ad un'involuzione d'ordine ν di uno spazio lineare S_{r+s}, nel quale gli S_s passanti per uno S_{s-1} fisso rappresentano le varietà razionali del sistema.

Come conseguenza particolarissima di questo teorema si ha, per $s = r - 1$, che *una superficie con un sistema ∞^1, razionale e d'indice $\nu - 1$ di curve razionali, è birazionalmente equivalente ad una involuzione piana d'ordine ν* (1). Per il teorema di Castelnuovo sulla razionalità delle involuzioni piane si può anzi dire che la superficie è addirittura *razionale*.

(1) Questa osservazione è stata già fatta da Castelnuovo nella Nota: *Sulle superficie algebriche che contengono una rete di curve iperellittiche*, « Rend. Acc. Lincei », ser. 5ª, vol. III, 1894.

Matematica. — *Sulla curva doppia della proiezione di una superficie generale dell'S_4, da un punto generico su un S_3.* Nota di ALFREDO FRANCHETTA, presentata (1) dall'Accademico FRANCESCO SEVERI (2).

È noto che una data superficie algebrica si può sempre ridurre per trasformazioni birazionali ad un modello del tutto privo di singolarità dell'S_5 (3), la cui proiezione da un punto generico dello spazio sopra un S_4 è dotata di un numero finito di punti doppi impropri (4), tracce sull'S_4 delle corde della superficie che passano pel centro di proiezione. Se poi si proietta la superficie così ottenuta sopra un S_3, da un punto generico dello spazio S_4 (il che equivale a proiettare la superficie originaria da una retta generica dell'S_5 sopra un S_3), la proiezione è dotata di curva doppia (5) con un numero finito di punti tripli e triplanari anche per la superficie, potendosi avere eventualmente una componente tripla o di molteplicità superiore solo per posizioni particolari del centro di proiezione.

In questa breve Nota si dimostra che *tale curva è irriducibile, sempre che la superficie non sia proiezione della superficie di* VERONESE, nel qual caso la proiezione è una superficie di STEINER, la cui curva doppia è spezzata in tre rette per un punto.

Ne segue che *una superficie algebrica si può sempre ridurre per trasformazioni birazionali ad un modello dell'S_3 dotato solo di una curva doppia nodale*, **irriducibile**, *con un numero finito di punti tripli, tripli e triplanari anche per la superficie, e di un numero finito di punti cuspidali* (6).

---

(1) Nell'Adunanza del 23 novembre 1940–XIX.

(2) La questione cui risponde la presente Nota è fra quelle poste come argomento di ricerca, durante l'anno accademico 1939-40, presso il Reale Istituto Nazionale di Alta Matematica. Ved. « Rendiconti di Matematica della R. Università di Roma e del R. Ist. di Alta Mat. », serie V, vol. I, pag. 251.

(3) Cfr. B. LEVI, « Atti R. Acc. di Torino », 1897; O. CHISINI, « Rend. Lincei », 1917; G. ALBANESE, « Rend. Circ. Mat. di Palermo », 1924; R. J. WALKER, « Ann. of Math. », 1935; O. ZARISKI, « Ann. of Math. », 1939.

(4) SEVERI, *Sui punti doppi impropri...* « Rend. di Palermo », 1901.

(5) La quale manca soltanto se la superficie appartiene ad un S_3 e quindi la superficie originaria ad un S_4 perchè la varietà delle corde non può avere la dimensione minore di 4, se non riducendosi ad un S_3 o ad un piano.

(6) Cfr. F. ENRIQUES, *Sulle singolarità che nascono per proiezione...* in *Scritti offerti a L. Berzolari*, Pavia, 1936.

Infatti la superficie di VERONESE, che fa eccezione al teorema precedente, essendo razionale, si può trasformare in un piano, che è un modello del tipo detto.

1. Giova premettere come lemmi alla dimostrazione del teorema enunciato alcune semplici osservazioni.

a) *Data una superficie F dell'S_4, dotata soltanto di un numero finito di punti doppi impropri, non può accadere che un piano tangente generico ne incontri infiniti altri secondo una retta, se la superficie non è proiezione della superficie di* VERONESE *o rigata.*

Chiamiamo π il piano tangente generico; proiettando la superficie da un punto di π sopra un S_3, i piani tangenti alla superficie e secanti π in una retta dànno nella proiezione piani tangenti alla superficie proiezione F' e passanti per la retta r secondo cui il piano π interseca l'S_3 di proiezione.

Non può accadere che gli infiniti piani tangenti di cui si parla si proiettino in un solo piano; perchè in questo caso essi giacerebbero in uno stesso S_3 per il piano π, il quale taglierebbe la superficie F secondo una curva avente una parte doppia. Essendo π generico si avrebbero ∞^2 iperpiani tangenti ad F in tutti i punti di una curva; per un punto generico dello spazio ne passerebbero ∞^1, in modo che, proiettando da quel punto sopra un S_3, le tracce di questi iperpiani sull'S_3 di proiezione darebbero ∞^1 piani tangenti ad F' lungo una curva. Per una nota proprietà differenziale, la F' dovrebbe essere una sviluppabile. La superficie F, proiettata da un qualunque punto dello spazio dovrebbe dare una sviluppabile; sarebbe quindi una sviluppabile essa stessa, e dotata perciò di singolarità che sono state escluse dalle nostre ipotesi.

Dunque esiste per la superficie F', proiezione di F da un punto di π, un fascio di piani per la retta r tangenti propriamente alla superficie. Ciò è assurdo se la retta r non giace sulla superficie. Se poi r giace sulla superficie, essa può avere per F soltanto molteplicità uno o due, perchè la proiezione è fatta da un punto generico dell'S_4. Nel primo caso la superficie F è rigata; nel secondo, contenendo ∞^2 coniche, è proiezione della superficie di VERONESE. Resta così dimostrato il nostro enunciato.

b) Si consideri un sistema ∞^3 di corde della superficie; una corda generica r del sistema si appoggi alla superficie F nei punti A e B. Proiettiamo la superficie da un punto di r sopra un S_3. La proiezione F' avrà una curva doppia D passante per la traccia di r sull'S_3 di proiezione; la D corrisponde sulla superficie F ad una curva Δ luogo delle coppie neutre per il sistema delle sezioni iperpiane per il centro di proiezione.

Qualunque sia il punto della retta r (generica nel sistema ∞^3 considerato) da cui si proietta, la curva Δ passa semplicemente per A e B, se la superficie non è rigata, nè proiezione della superficie di VERONESE.

Infatti i punti A e B sono origine di due falde semplici per la superficie F, le quali si proiettano in due falde semplici della superficie F', passanti per la traccia della retta r. I piani tangenti a queste due falde di F' devono essere distinti, perchè, se fossero coincidenti, i piani tangenti in A e B alla superficie F giacerebbero in uno stesso S_3 e si taglierebbero lungo una retta; e se ciò accadesse per ogni corda del sistema, vi sarebbero ∞^3 coppie di piani tangenti alla superficie, tagliantisi in una retta. Essendo i piani tangenti ∞^2, ognuno di essi ne incontrerebbe infiniti altri secondo una retta, ciò che nelle nostre ipotesi è assurdo in virtù di a).

Ma, d'altra parte, se i piani tangenti alle due falde sono distinti, s'intersecano secondo un ramo semplice di curva, che esaurisce la curva D nell'intorno del punto. A questo ramo semplice di curva corrispondono due rami semplici della curva Δ per A e B.

c) Consideriamo ora una trisecante generica della superficie F. Proiettando da un suo punto, la proiezione F' risulta dotata di un punto triplo, triplo anche per la curva doppia D, nella traccia della trisecante sull'S_3 di proiezione.

In questo caso *la curva Δ corrispondente a D sulla F (sempre se la superficie non è rigata, e non è proiezione della superficie di* VERONESE) *ha molteplicità due in ognuno dei punti A, B, C in cui la trisecante si appoggia alla F, qualunque sia il punto della trisecante da cui si proietta.*

Infatti i punti A, B, C sono origine di tre falde semplici per la superficie F, le quali si proiettano in tre falde semplici per la superficie F', uscenti dalla traccia della trisecante sull'S_3 di proiezione. I piani tangenti a queste falde di F' devono essere distinti, perchè, se due di essi fossero coincidenti, due dei piani tangenti ad F nei punti A, B, C giacerebbero in uno stesso S_3 e si taglierebbero in una retta; siccome le trisecanti della F sono ∞^3, esisterebbero ∞^3 coppie di piani tangenti ad F, secantisi in una retta; e ciò è escluso, in base all'osservazione a), dalle nostre ipotesi.

Le tre falde di F', avendo i piani tangenti distinti, si tagliano complessivamente in tre rami semplici di curva, in modo che su una di esse ne giacciano due; quindi sulla falda corrispondente di F giacciono due soli rami della curva.

2. Data ora una superficie F dell'S_4 dotata soltanto di un numero finito di punti doppi impropri, indichiamo al solito con F' la sua proiezione da un punto P generico dell'S_4 su un S_3; con D la curva doppia di F' e con Δ la curva di F di cui essa è proiezione. Si tratta di esaminare se la curva D (e quindi la curva Δ) possa essere riducibile per ogni posizione del centro di proiezione. Intanto, essendo le Δ in corrispondenza univoca con i punti dell'S_4, sono tutte equivalenti fra loro [1] e il sistema algebrico

[1] Cfr. F. SEVERI, *Serie, sistemi di equivalenza...*, Roma, 1939.

delle curve Δ è contenuto in un sistema lineare $|\Delta|$ (che ha come punti base i punti doppi impropri della F).

Questo sistema lineare potrebbe essere a priori composto con le curve di un fascio. Ma ciò si esclude subito, perchè, se ciò accadesse, due curve Δ distinte non dovrebbero avere punti variabili a comune; invece si costruiscono subito due curve Δ che s'intersecano in un punto P qualunque della superficie. Infatti, fissata una corda della superficie per P, se si proietta da un punto di essa, la corrispondente curva Δ passa per P; presa un'altra corda generica per P della superficie, proiettando da un punto di essa, la corrispondente $\overline{\Delta}$ passerà anch'essa per P; nè può accadere che la curva $\overline{\Delta}$ coincida sempre con Δ, perchè il punto Q in cui la corda generica per P si appoggia ulteriormente alla superficie, riempie, al variare di questa, tutta la superficie.

Il sistema $|\Delta|$ è quindi formato di curve generalmente irriducibili; le curve Δ essendo limiti di curve irriducibili, sono connesse.

Supponiamo che tutte le Δ siano riducibili, e che C_1 e C_2 siano due componenti intersecantisi in qualche punto variabile. Preso un punto generico P dello spazio, sia A uno dei punti in cui le corrispondenti C_1 e C_2 s'intersecano. Esso avrà un coniugato allineato con P su ciascuna delle due curve. A priori si possono fare due ipotesi:

I) i due punti coniugati coincidono, ossia le curve C_1 e C_2 s'intersecano, oltre che in A, in un punto B allineato con A e P;

II) i due punti coniugati B e C sono distinti; allora deve esistere un terzo ramo della curva Δ passante per B e C; questo terzo ramo può costituire una terza componente della curva Δ; ovvero far parte di una delle curve C_1, C_2.

3. In ogni caso è necessario osservare che, per una posizione generica del centro di proiezione, non può accadere che il punto B nella prima ipotesi, o uno dei punti B, C nella seconda, cada infinitamente vicino ad A.

Infatti si osservi che se una tangente generica della superficie interseca ulteriormente F, questa appartiene ad un S_3. Ciò si verifica subito pensando che, se una tangente generica interseca ulteriormente la superficie fuori del punto di contatto, ogni piano tangente alla F la interseca in una curva; esistono dunque ∞^3 sezioni iperpiane spezzate e la superficie deve essere rigata o proiezione della superficie di Veronese. Ma per la superficie di Veronese il fatto non si verifica; resta solo da discutere il caso che la superficie sia rigata. Si abbia dunque una rigata, e si supponga che ogni piano tangente intersechi la superficie nella generatrice per il punto di contatto e in una curva residua. Se la superficie non è sviluppabile, in modo che per una generatrice passino infiniti piani tangenti, proiettando da un punto della superficie su un S_3, la proiezione F' è

un cono (multiplo) avente il vertice nella traccia della generatrice sull'S_3 di proiezione; ma su questo cono vi sono le proiezioni delle generatrici della rigata, che non passano per il vertice; si deve quindi ridurre ad un piano, e la F giace nell'S_3 individuato da questo piano e dal centro di proiezione. Se la superficie fosse sviluppabile (caso che d'altra parte noi escludiamo), per ogni punto, l'ulteriore intersezione potrebbe essere una generatrice o una curva diversa; in entrambi i casi si vede immediatamente che la superficie giace in un S_3.

Quindi se, nell'ipotesi II), uno dei punti B, C cade infinitamente vicino ad A, anche l'altro punto è infinitamente vicino, ossia ogni tangente ha un contatto tripunto con la superficie, ciò che evidentemente non può accadere per una superficie che non sia un piano.

Resta ora da escludere che nell'ipotesi I) il punto B cada infinitamente vicino ad A. Si proietti da un punto P generico, e si supponga che la retta PA sia sempre tangente alla superficie; la superficie proiezione F' possiede nel punto A' corrispondente ad A un tacnodo, perchè in esso s'incrociano i due rami della curva doppia corrispondenti a C_1 e C_2. Il piano tacnodale di F' in A' e il punto P determinano un S_3. Esaminiamo la molteplicità che la curva d'intersezione della F e di questo S_3 presenta nel punto A.

Tutti i piani passanti per la retta PA segano la superficie in 4 punti coincidenti nel punto A. Siccome la retta PA è soltanto tangente alla superficie, perchè la proiezione è dotata in corrispondenza solo di un punto doppio, la curva sezione sarà dotata in A di un tacnodo nella direzione della retta PA; o di un punto triplo in A e un punto semplice infinitamente vicino nella direzione PA; o infine di un punto quadruplo in A.

Quest'ultima ipotesi si scarta subito, perchè, se si verificasse, in ogni punto della superficie si avrebbe un iperpiano tangente la cui sezione con la superficie presenterebbe un punto quadruplo nel punto di contatto. Considerando allora una sezione iperpiana generica della superficie, si otterrebbe una curva per la quale in ogni punto esisterebbe un piano (intersezione dell'iperpiano con cui s'interseca e dell'iperpiano di cui si parlava) che avrebbe un contatto quadripunto con la curva. La curva deve essere quindi piana, e la superficie appartenere ad un S_3.

Resta da esaminare il caso del tacnodo; un ragionamento analogo a quello che serve in questo caso vale anche ad escludere l'ipotesi del punto triplo.

Infatti nel caso del tacnodo, facendo variare il centro di proiezione su un determinato piano tangente, l'iperpiano determinato dal piano tacnodale della proiezione non può restare sempre il medesimo, ma varierà al variare della retta PA tangente alla superficie; in questo caso dunque, tutti gli iperpiani tangenti alla superficie segherebbero secondo una curva dotata di tacnodo, e ciò basta a concludere che la superficie deve essere sviluppabile.

Infatti proiettiamo su un S_3 da un punto generico. Si ottiene una superficie per la quale tutti i piani tangenti segherebbero secondo una curva dotata di tacnodo. Basta invece che tutti i punti della superficie siano parabolici per concludere che essa è sviluppabile. Ciò si vede nel modo più semplice pensando una falda della superficie rappresentata dall'equazione

$$z = f(x, y).$$

L'ipotesi porta che l'Hessiano della funzione $f(x, y)$ si annulli identicamente sulla superficie; ma l'Hessiano della funzione è il Jacobiano delle sue derivate prime; queste sarebbero dunque dipendenti; esisterebbero infiniti piani tangenti aventi la stessa giacitura, il che è assurdo. Resta soltanto la possibilità che quei piani aventi la stessa giacitura si riducano ad uno solo; ma allora la superficie è sviluppabile.

4. Ciò posto è evidente che non può verificarsi l'ipotesi I) del n. 2. Infatti in questo caso, in corrispondenza alla corda $P\,A\,B$ non trisecante, la curva Δ avrebbe un punto doppio in A e uno in B; tali corde sarebbero ∞^3 e nel n. 1 si è visto che ciò può accadere soltanto per la superficie di Veronese e per le rigate. Ma si sa d'altra parte che per la superficie di Veronese la circostanza detta non si presenta; e nemmeno per le rigate, perchè in una rigata i piani tangenti secanti uno dato secondo una retta passano per una generatrice, che coincide con la retta AB; mentre questa, nelle nostre ipotesi, non giace certo sulla superficie.

Supponiamo invece verificata l'ipotesi II). Allora si potrebbero avere tre componenti $C_1\,C_2\,C_3$ passanti rispettivamente per BC, AC, AB. Variando il punto P sulla retta, le curve $C_1\,C_2\,C_3$ non possono variare. Infatti se C_3 variasse riempirebbe la superficie e vi sarebbe una posizione P_0 di P per cui la C_3 corrispondente verrebbe a passare per A. La molteplicità della curva corrispondente a P in A verrebbe ad essere superiore a 2, e poichè ciò dovrebbe accadere per ogni trisecante, si cade in assurdo per il n. 1, *c*). Si esclude come sopra il caso delle rigate, e si sa che la circostanza non si presenta per la superficie di Veronese.

Con una semplice considerazione di limite si dimostra che la conclusione è valida anche quando P_0 venga a coincidere con A. Infatti la proiezione F', quando P tende ad A, tende a spezzarsi nella superficie proiezione di F da A e nel piano π traccia dell'S_3 individuato dal piano tangente alla superficie in A e dalla direzione secondo cui P si avvicina ad A.

La maggiore molteplicità della curva Δ in A corrispondentemente a P_0 significherebbe che una delle due falde di F' proiezione da A delle falde di F che hanno origine in B e C, sarebbe tangente al piano π; e ciò porterebbe di nuovo che il piano tangente ad F in A sarebbe contenuto in un

medesimo S_3 col piano tangente in uno dei punti B, C, dopo di che si applicherebbe l'osservazione del n. 1, *a*), come nel caso precedente.

Supponiamo invece, sempre nell'ipotesi II), che la curva C_1 passi doppiamente per B e semplicemente per A e C; la curva C_2 passi semplicemente per A e C. Allora con un ragionamento analogo al precedente si vede che la curva C_2 non può variare al variare del punto sulla retta.

Resta dunque stabilito in ogni caso che una delle componenti della curva Δ non varia al variare del punto P sulla retta r; ma allora questa componente è piana, ed è anzi una conica, dovendo proiettarsi in una curva doppia. Sulla superficie esistono ∞^2 coniche (poichè i loro piani riempiono tutto lo spazio) e la superficie è proiezione della superficie di VERONESE.

Matematica. — *Sulle serie intersezioni complete sopra una superficie algebrica.* Nota di Ugo Morin, presentata (1) dall'Accademico Francesco Severi.

Dicesi *serie intersezione completa* (2) di due sistemi lineari di curve $|C_1|$ e $|C_2|$ d'una superficie algebrica (irriducibile) F, l'insieme dei gruppi di punti G della F sezioni di una curva di $|C_1|$ con una curva di $|C_2|$; dove, se le due curve hanno una componente in comune, questa si sostituisca con la sua *equivalenza funzionale* (3), e si escludano, se si vuole, dei punti fissi.

Poichè l'insieme di tutti i gruppi di n punti del piano è una serie intersezione completa (4), per una superficie razionale vale la proprietà che la somma di due serie intersezioni complete è contenuta totalmente in una serie intersezione completa. Se per una superficie algebrica F si verifica questa proprietà, un gruppo di punti G della F appartiene ad una determinata serie intersezione completa; e viceversa (5).

Il Severi ha proposto di indicare la classe delle superficie sulle quali sussitono le predette proprietà (nella previsione che questa non sia quella di tutte le superficie algebriche (6)). Nella presente Nota verifico che questa classe è quella delle *superficie riferibili a rigate.*

1. Si consideri una superficie irriducibile rigata R. Assumiamo come suo modello un cono dello spazio lineare S_3, di vertice O e curva-direttrice Γ. Ad una serie lineare di gruppi di n punti della Γ corrisponde su R (per proiezione da O) un sistema lineare di curve $|C_1|$, spezzate in n

(1) Nell'Adunanza del 23 novembre 1940-XIX.

(2) F. Severi, *Serie, sistemi di equivalenza e corrispondenze algebriche sulle varietà algebriche.* [Pubblicazioni dell'Istituto Matematico della R. Università di Roma, 1938-40], n. 23.

(3) F. Severi, *Significato funzionale del gruppo virtuale di punti uniti nelle corrispondenze a valenza sopra una superficie* [« Rendiconti della R. Acc. dei Lincei », to. 17 (*6*), 1933] e loc. cit. (2), n. 12.

(4) F. Severi, loc. cit. (2), n. 28.

(5) F. Severi, loc. cit. (2), n. 26.

(6) F. Severi, loc. cit., (5).

generatrici. Verifichiamo che *l'insieme E di tutti i gruppi di $m.n$ punti di R, distribuiti ad m ad m sulle n componenti d'una curva variabile di $|C_1|$, formano una serie intersezione completa.*

Infatti essa è ottenuta come sezione di $|C_1|$ col sistema di curve segato sulla R dalle superficie φ dello spazio S_3, d'ordine ν e il punto base O multiplo dell'ordine $\nu - m$, con ν sufficientemente alto (tale che la dimensione del sistema φ sia maggiore di $m \cdot n$).

2. Ora vogliamo provare che *ogni serie unirazionale Σ_μ di gruppi di μ punti, G_μ, della R* (quindi in particolare ogni serie somma di serie intersezioni complete [7]) *è contenuta totalmente in una serie intersezione completa E* (n. 1).

Per trattare il caso più generale, supponiamo che i punti di un gruppo generico G_μ della Σ_μ si distribuiscano ad m ad m lungo n generatrici della $R \left(n = \frac{\mu}{m} \right)$.

Consideriamo lo spazio lineare S_d i cui punti sono in corrispondenza unirazionale coi gruppi della Σ_μ. A due punti generici, P^* e P^{**}, dell'S_d corrispondono due gruppi generici, G_μ^* e G_μ^{**}, della Σ_μ; alla retta l che congiunge questi due punti corrisponde una curva algebrica C della rigata R, ed ai punti P della retta l corrispondono sulla C ∞^1 gruppi G_μ (dei quali fanno parte G_μ^* e G_μ^{**}). A questi ∞^1 gruppi G_μ della C corrispondono, per proiezione da O, ∞^1 gruppi di n punti, G_n, della curva Γ (dei quali fanno parte i gruppi G_n^* e G_n^{**} proiezioni di G_μ^* e G_μ^{**}).

Se uno generico di questi G_n proviene per proiezione da uno solo degli $\infty^1 G_\mu$ della C, gli $\infty^1 G_n$ della Γ sono in corrispondenza biunivoca coi punti P della retta l [8]; se invece quel G_n generico proviene da $\sigma > 1$ degli $\infty^1 G_\mu$ della C, gli $\infty^1 G_n$ di Γ sono in corrispondenza biunivoca coi gruppi di un'involuzione lineare g_σ^1 della retta l: cioè in ambedue i casi gli ∞^1 gruppi G_n della Γ formano una *serie razionale*, quindi sono *linearmente equivalenti* sulla Γ [9].

I gruppi generici G_μ^* e G_μ^{**} di Σ_μ, che dànno dunque per proiezione da O due gruppi, G_n^* e G_n^{**}, linearmente equivalenti di Γ, appartengono a due gruppi di generatrici del medesimo sistema $|C_1|$, cioè Σ_μ è contenuta nella serie intersezione completa E associata a $|C_1|$.

---

(7) F. Severi, loc. cit. (1), n. 20.

(8) Poichè l è una retta generica dell'S_d, essa non è composta coll'involuzione subordinata nell'S_d dal riferimento unirazionale a Σ_μ.

(9) Corollario del teorema d'Abel posto in rilievo da F. Enriques. Cfr. F. Severi, *Trattato di Geometria algebrica* [Bologna, Zanichelli] vol. I (1), pagg. 205, 241.

3. Vogliamo infine constatare che *sopra una superficie F, non riferibile ad una rigata, esistono serie intersezioni complete, tali che la loro somma non è contenuta totalmente in una serie intersezione completa.*

Allo scopo sfrutteremo la proprietà caratteristica delle superficie *non* riferibili a rigate, che per ogni sistema lineare di curve $|C|$ di queste superficie (di grado n, genere π e dimensione r), vale la disuguaglianza $n \leq 2\pi - 2$, [10]; quindi per la dimensione

[1] $$r \leq \pi .$$

4. Sopra un modello proiettivo della superficie algebrica F (non riducibile ad una rigata) privo di punti multipli e di curve eccezionali [11], consideriamo un sistema lineare completo di curve $|C|$, irriducibile, semplice, non speciale, regolare e privo di punti-base [12]. Il teorema di RIEMANN-ROCH dà allora

[2] $$r = n - \pi + 1 + p_a ,$$

dove p_a è il genere aritmetico della F.

Possiamo supporre

[3] $$\pi > 4 , \; r > p_a ;$$

quindi dalla [1] segue $\pi > p_a$, e dalla [2]

[4] $$n = \pi - 1 + j , \; (j > 0) .$$

5. Consideriamo sulla F la serie Σ_m, d'ordine $m = 3(\pi - 1) + j$, intersezione completa del sistema $|C|$ e del sistema $|C + C'|$. Di questa Σ_m fa parte la serie lineare *completa* [13] g_m^s staccata su una C generica dal sistema $|C + C'|$. Sarà quindi

[5] $$s = m - \pi_s = 2\pi - 3 + j .$$

L'ipotesi che la serie di equivalenza Σ_{3m}, *tripla* [14] della serie Σ_m, sia contenuta totalmente in una serie intersezione completa si rivela assurda.

Siano $|C_1|$ e $|C_2|$ due sistemi lineari completi di curve della F, che diano come mutue intersezioni complete (eventualmente con l'esclu-

---

[10] G. CASTELNUOVO-F. ENRIQUES, *Sopra alcune questioni fondamentali nella teoria delle superficie algebriche* [« Annali di Matematica », to. 6 (3), (1901)].

[11] Loc. cit. [10].

[12] Loc. cit. [10].

[13] In base al classico teorema di PICARD-SEVERI-CASTELNUOVO.

[14] L'assurdo si poteva constatare anche per la *doppia*, con maggiore complicazione in alcuni dettagli.

sione di punti fissi) gruppi di Σ_{3m}. I sistemi $|C_1|$ e $|C_2|$ potrebbero presentare in relazione alle curve del sistema $|C|$ soltanto una delle seguenti tre circostanze *a*), *b*), *c*), che si riveleranno tutte e tre assurde.

a) Una curva di $|C_i|$, (sia per $i = 1$ che per $i = 2$), la quale contenga tre gruppi generici di Σ_m, contiene di conseguenza le tre curve di $|C|$ che passano per questi tre gruppi. Ma ciò è impossibile, perchè due terne generiche di curve di $|C|$, pensate rispettivamente come appartenenti ad una curva di $|C_1|$ e ad una curva di $|C_2|$, hanno in comune un gruppo di

$$[6] \qquad 3^2 n = 9(\pi - 1) + 9j = 3m + 6j > 3m$$

punti variabili.

b) Le curve di uno solo dei due sistemi, ad esempio $|C_1|$, che contengano tre gruppi generici di Σ_m, contengono di conseguenza le tre curve di C che passano per quei tre gruppi. Una curva di $|C_2|$ stacca allora su una terna generica di curve C_1 (interpretata come appartenente ad una curva di $|C_1|$) rispettivamente tre gruppi di Σ_m, cioè il sistema $|C_2|$ sega su una C la serie lineare g^3_m.

Allora il sistema $|C_2|$ è, in base ad un criterio di equivalenza del Severi [15], contenuto totalmente nel sistema $|C + C'|$. Ma ciò è impossibile, perchè la dimensione r^* di $|C + C'|$ è, come ora verificheremo, inferiore alla dimensione r_2 di $|C_2|$.

Infatti, indicata con r' la dimensione di $|C'|$ si ha $r^* = s + r' + 1$; e poichè $r' = \pi - 1 - \delta + p_g = \pi - 1 + p_a$, segue

$$[7] \qquad r^* = (2\pi - 3 + j) + (\pi - 1 + p_a) + 1 = 3(\pi - 1) + j + p_a;$$

mentre la dimensione r_2 del sistema $|C_2|$, le cui curve segano su tre curve generiche di C_1 gruppi *arbitrari* delle relative serie g^3_m (senza contenere di conseguenza le curve C) è (tenuto conto anche della [3])

$$[8] \qquad r_2 \geq 3s = 3(2\pi - 3 + j) = r^* + 2(\pi - 3 + j) + (\pi - p_a) > r^*.$$

c) In quest'ultima ipotesi nè le curve di $|C_1|$, nè le curve di $|C_2|$, che contengono tre gruppi generici di Σ_m, contengano di conseguenza le tre curve di $|C|$ relative a questi tre gruppi. Si avrà allora per le dimensioni r_1 ed r_2 di questi sistemi, analogamente alla [8],

$$[9] \qquad r_i \geq 3(2\pi - 3 + j), \qquad (i = 1, 2).$$

---

[15] F. Severi, loc. cit. [2], nn. 97, 98, 99.

[16] Il sistema $|C_1|$ si può anche supporre privo di componenti fisse, poichè i gruppi di Σ_m non hanno componenti semifisse (cioè punti distribuiti lungo una curva fissa).

Supponiamo che ad esempio il sistema $|C_2|$ non contenga parzialmente $|C_1|$; ed osserviamo che il sistema $|C_1|$ è *irriducibile.*

Infatti se $|C_1|$ è composto con le curve D_1 d'un fascio Φ, i $3m$ punti d'un gruppo generico di Σ_{3m}, e quindi gli m punti d'un gruppo di Σ_m si distribuiscono σ a σ lungo curve di questo fascio. Se è $\sigma = 1$, un fascio lineare di C_2 segna sopra una D_1 generica una g_1^1: quindi la F è trasformabile in una rigata, contro l'ipotesi. Se è $\sigma > 1$, i gruppi di punti di Σ_m che contengono un punto generico P della F, devono avere $\sigma - 1$ punti P_i sulla curva D_1, del fascio Φ, passante per P. Considerata una curva C passante per i punti P e P_i, le curve del sistema $|C + C'$ passanti per P (dovendo segare sulla C gruppi di Σ_m aventi σ punti sulla D_1) passano di conseguenza per i punti P_i. Il sistema $|C + C'|$ sarebbe allora composto con un'involuzione di punti, mentre esso è semplice (tale essendo ad esempio il sistema C in esso contenuto), [16].

Il sistema $|C_2|$ determina su una curva generica (irriducibile) del sistema $|C_1|$ una serie lineare g_q^t, d'ordine $q = 3m = 9(\pi - 1) + 3j$ e di dimensione $t \geq r_2 - 1 = 6\pi - 10 + 3j$. Poichè $\pi > 4$, $j > 0$ (n. 4), quindi $2t > q$, questa serie non è speciale. Il genere π_1 della C_1 sarà quindi

$$\pi_1 \leq q - t = 3\pi + 1; \qquad [10]$$

in contrasto con $\pi_1 \geq 3(2\pi - 3 + j) = (3\pi + 1) + (3\pi - 10 + 3j) > 3\pi + 1$ che segue dalle [1] e [9].

---

[16] Il sistema $|C_1|$ si può supporre privo di componenti fisse, poichè i gruppi di Σ_m non hanno componenti semifisse (cioè punti distribuiti lungo una curva fissa.

Meccanica. — *Sistemi continui conservativi.* Nota (1) di UMBERTO CISOTTI, Aggregato alla Reale Accademia d'Italia.

Collegandomi a un precedente lavoro (2) chiamo *conservativi* quei sistemi continui di masse materiali per i quali il tensore degli sforzi è potenziale, di prima o di seconda specie; nel primo caso (potenziale di prima specie) qualunque sia la funzione potenziale e nel secondo (potenziale di seconda specie) quando la funzione potenziale è armonica, le azioni molecolari interne sono *conservative*, da ciò la denominazione che ho attribuita ai sistemi continui in discorso. Per tali sistemi le equazioni indefinite, sia statiche che dinamiche, si riducono a quelle della meccanica dei mezzi fluidi. Sono interessanti due applicazioni: in una gli sforzi potenziali di prima specie dànno luogo ad azioni interne di carattere newtoniano, nell'altra si trovano, nel modo più naturale, gli sforzi maxwelliani relativi alle azioni elettriche a distanza.

1. RICHIAMO DELLE EQUAZIONI DELLA MECCANICA DEI SISTEMI CONTINUI. — Sieno $\Phi_{ik} = \Phi_{ki}$ le componenti cartesiane del tensore degli sforzi $\boldsymbol{\Phi}$ di un sistema continuo, in condizioni di equilibrio oppure di movimento (3). È noto che, se il sistema è in equilibrio ed S è lo spazio che esso occupa, in ogni punto di S devono essere soddisfatte le equazioni indefinite

$$[1] \qquad \rho F_i = \sum_1^3{}_k \frac{\partial \Phi_{ik}}{\partial y_k},$$

che si possono conglobare nella relazione vettoriale

$$[1'] \qquad \rho \boldsymbol{F} = \operatorname{div} \boldsymbol{\Phi},$$

(1) Presentata nell'Adunanza del 23 novembre 1940-XIX.

(2) *Campi tensoriali potenziali.* Questi « Rendiconti », vol. II, (1940), pag. 129.

(3) CISOTTI, *Meccanica razionale*, Terza ediz., Libreria Editrice Politecnica, Milano (1939-XVII), pag. 376.

designando ρ la densità di distribuzione della massa e F_i le componenti cartesiane della forza di massa unitaria $\boldsymbol{F}$, mentre nei punti appartenenti al contorno σ di S devono essere soddisfatte le equazioni

$$[2] \qquad f_i = \sum_1^3{}_k \Phi_{ik}\, n_k\,,$$

essendo f_i le componenti cartesiane della forza di superficie unitaria $\boldsymbol{f}$ agente sul contorno σ e n_k le componenti del versore $\boldsymbol{n}$ normale a σ nel generico punto, volto verso S.

Se il sistema continuo è in movimento, e a vincoli lisci, ed S rappresenta la sua configurazione attuale, cioè corrispondente all'istante t che si considera, continuano a sussistere le equazioni [1] e [2] purchè al posto di $\boldsymbol{F}$ si sostituiscano le forze perdute $\boldsymbol{F}^* = -\boldsymbol{F} - \boldsymbol{a}$ e quindi a F_i le corrispondenti componenti cartesiane

$$[3] \qquad F_i^* = F_i - a_i\,,$$

designando $\boldsymbol{a}$ l'accelerazione all'istante t nel punto P (y_i) e a_i le corrispondenti componenti cartesiane.

Come scende dalla [1'], e del resto è ben noto, — div $\boldsymbol{\Phi}$ definisce la forza *interna specifica* di volume.

2. SFORZI POTENZIALI DI PRIMA SPECIE. — Sieno gli sforzi interni *potenziali di prima specie*; indicando con Ψ la funzione potenziale è [1]

$$[4] \qquad \Phi_{ik} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y_i\, \partial y_k} \qquad , \qquad \boldsymbol{\Phi} = \operatorname{grad}_2 \Psi\,;$$

e la corrispondente divergenza [2]

$$[5] \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{\Phi} = \operatorname{grad} \Delta_2 \Psi\,,$$

per cui l'equazione [1'] diviene

$$[1''] \qquad \boxed{\rho \boldsymbol{F} = \operatorname{grad} \Delta_2 \Psi}\,.$$

Dalla relazione [5] risulta che *le forze interne specifiche di volume sono conservative e la corrispondente energia potenziale è il laplaciano della funzione potenziale del tensore degli sforzi.*

---

[1] Loco primo citato, formule [7] e [8].

[2] Ibidem, formula [18].

Chiamando *conservativo* un sistema materiale continuo quando le forze interne ammettono una funzione potenziale, cioè sono conservative, potremo dire: *i sistemi continui i cui sforzi sono potenziali di prima specie sono conservativi.*

Anche le condizioni al contorno [2] subiscono semplificazioni in virtù di [4]; diventano infatti:

$$[2'] \qquad f_i = \sum_1^3{}_k \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y_i \partial y_k} n_k = \frac{\partial}{\partial y_i} \sum_1^3{}_k \frac{\partial \Psi}{\partial y_k} \frac{dy_k}{dn} = \frac{\partial}{\partial y_i} \frac{\partial \Psi}{\partial n},$$

equivalenti alla relazione vettoriale

$$[2''] \qquad \boldsymbol{f} = \operatorname{grad} \frac{\partial \Psi}{\partial n}.$$

Come si vede questa relazione esprime che *le azioni superficiali devono essere conservative*, come già la [1''] esprime che, in condizioni statiche, anche le forze di volume devono essere conservative.

In condizioni dinamiche nella [1''] al posto di $\boldsymbol{F}$ va posto $\boldsymbol{F}^*$ per cui, per [3], si ottiene l'equazione dinamica indefinita vettoriale

$$[6] \qquad \rho \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \rho \boldsymbol{F} - \operatorname{grad} \Delta_2 \Psi.$$

Rientra in quest'equazione indefinita quella relativa ai fluidi perfetti; basta porre

$$[7] \qquad \Delta_2 \Psi = p,$$

rappresentando p la *pressione specifica.*

Considerando il moto del sistema continuo sotto il punto di vista euleriano, cioè ritenendo la velocità $\boldsymbol{v}$ funzione dell'istante e della posizione attuale, corrispondente all'istante stesso, si ha [1]

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\operatorname{rot} \boldsymbol{v}) \wedge \boldsymbol{v} + \frac{1}{2} \operatorname{grad} v^2,$$

per cui la [6] si può scrivere:

$$\rho \left\{ \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\operatorname{rot} \boldsymbol{v}) \wedge \boldsymbol{v} + \frac{1}{2} \operatorname{grad} v^2 \right\} = \rho \boldsymbol{F} - \operatorname{grad} \Delta_2 \Psi.$$

Se il moto è *irrotazionale* risulta

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = 0 \quad , \quad \boldsymbol{v} = \operatorname{grad} \varphi,$$

---

[1] Loco cit., *Meccanica razionale*, pag. 397, formula [2].

indicando φ il potenziale di velocità, per cui essendo

$$v^2 = (\text{grad}\,\varphi)^2 = (\Delta_1\varphi)^2\,,$$

la precedente relazione si semplifica nella seguente:

$$\rho\,\text{grad}\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\Delta_1\varphi)^2\right\} = \rho F - \text{grad}\,\Delta_2\Psi\,.$$

Infine se il sistema continuo è omogeneo, con che la densità è la stessa per tutti i punti, e le forze di massa sono conservative

$$F = \text{grad}\,U\,,$$

la precedente relazione vettoriale si semplifica ulteriormente dando luogo alla seguente relazione scalare:

[8] $$\Delta_2\Psi = \rho\left\{U - \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{1}{2}(\Delta_1\varphi)^2\right\} + C\,(t)\,.$$

Questa relazione definisce il $\Delta_2\Psi$ a meno di una arbitraria funzione $C\,(t)$ del tempo; essa costituisce una estensione ai sistemi continui conservativi, con sforzi potenziali di prima specie, del noto teorema di BERNOULLI [1] sui moti potenziali di un fluido perfetto incomprimibile sottoposto a forze di massa conservative.

3. SFORZI POTENZIALI DI SECONDA SPECIE. — Gli sforzi potenziali sieno ora di seconda specie; indicando con χ la funzione potenziale [2] risulta

[9] $$\Phi_{ik} = \frac{\partial\chi}{\partial y_i}\cdot\frac{\partial\chi}{\partial y_k}\,,$$

e la corrispondente divergenza [3]

[10] $$\text{div}\,\boldsymbol{\Phi} = \text{div}\,\text{Grad}_2\,\chi = \frac{1}{2}\,\text{grad}\,(\Delta_1\chi)^2 + \Delta_2\chi\cdot\text{grad}\,\chi\ [4],$$

---

[1] Loco cit., *Meccanica razionale*, pag. 398, 400.

[2] Loco cit., *Campi tensoriali potenziali*, formula [15].

[3] Loco ultimo citato, formula [21].

[4] Si rilevi che [9] e [10] conservano un significato nel campo reale anche se la funzione potenziale è puramente immaginaria: infatti lo scambio di χ in $\chi\sqrt{-1}$ porta semplicemente al cambiamento di segno di Φ_{ik} e div $\boldsymbol{\Phi}$.

per cui l'equazione [1'] diviene

$$[1'''] \qquad \boxed{\rho \boldsymbol{F} = \frac{1}{2} \operatorname{grad} (\Delta_1 \chi)^2 + \Delta_2 \chi \cdot \operatorname{grad} \chi} \,.$$

Le condizioni al contorno [2], per [9] diventano

$$f_i = \sum_1^3{}_k \frac{\partial \chi}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial y_k} n_k = \frac{\partial \chi}{\partial y_i} \sum_1^3{}_k \frac{\partial \chi}{\partial y_k} \frac{dy_k}{dn} = \frac{\partial \chi}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial n} \,,$$

equivalenti alla seguente relazione vettoriale

$$[2'''] \qquad \boxed{\boldsymbol{f} = \frac{\partial \chi}{\partial n} \operatorname{grad} \chi} \,.$$

Dalla [1'''] risulta che, nel caso attuale, le forze interne in generale non sono conservative e quindi il sistema continuo non è conservativo; lo è nel caso particolare notevole in cui la funzione potenziale χ è armonica. Infatti, essendo in tal caso

$$[11] \qquad \Delta_2 \chi = 0 \,,$$

la [1'''] diviene

$$\rho \boldsymbol{F} = \frac{1}{2} \operatorname{grad} (\Delta_1 \chi)^2 \,.$$

In condizioni statiche si esige che le forze specifiche di volume sieno conservative. In condizioni dinamiche, in modo analogo a quello che si è visto trattando degli sforzi potenziali di prima specie, si ottiene la seguente equazione indefinita:

$$[12] \qquad \rho \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \rho \boldsymbol{F} - \frac{1}{2} \operatorname{grad} (\Delta_1 \chi)^2 - \Delta_2 \chi \cdot \operatorname{grad} \chi \,,$$

e, se il potenziale χ è funzione armonica,

$$[12'] \qquad \rho \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \rho \boldsymbol{F} - \frac{1}{2} \operatorname{grad} (\Delta_1 \chi)^2 \,.$$

Se il moto del sistema continuo è irrotazionale e φ ne è il potenziale di velocità e le forze di massa sono conservative di potenziale U e la densità ρ è costante, si ottiene come nel n. 2 che l'equazione vettoriale indefinita [12'] dà luogo alla relazione scalare

$$[13] \qquad (\Delta_1 \chi)^2 = 2\rho \left\{ - \frac{\partial \varphi}{\partial t} + U - \frac{1}{2} (\Delta_1 \varphi)^2 \right\} + C(t) \,,$$

che anche in tal caso, come la [8] per gli sforzi potenziali di prima specie, costituisce una estensione ai sistemi continui conservativi, con sforzi potenziali di seconda specie, del già citato teorema di BERNOULLI.

4. *Sforzi potenziali newtoniani di prima specie.* — Sia O un punto, comunque prescelto, dello spazio e P un altro punto variabile; consideriamo la funzione

$$[14] \qquad \Psi(P) = \frac{1}{2}\nu\,|P-O| = \frac{1}{2}\nu\sqrt{\sum_1^3{}_\lambda\, y_\lambda^2},$$

designando ν una costante e y_λ le coordinate cartesiane di P, essendo O l'origine. Si ha

$$\frac{\partial\Psi}{\partial y_i} = \frac{\nu}{2}\,\frac{y_i}{|P-O|},$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial y_i\partial y_k} = \frac{\nu}{2}\left\{\frac{1}{|P-O|}\,\frac{\partial y_i}{\partial y_k} - \frac{y_i y_k}{|P-O|^3}\right\} = \frac{\nu}{2\,|P-O|}\left\{\delta_{ik} - \frac{y_i y_k}{(P-O)^2}\right\}.$$

In tal caso il tensore doppio potenziale degli sforzi, di prima specie, ha le seguenti componenti cartesiane

$$[15] \qquad \Phi_{ik} = \frac{\nu}{2\,|P-O|}\left\{\delta_{ik} - \frac{y_i y_k}{(P-O)^2}\right\}.$$

L'invariante lineare è

$$\sum_1^3{}_k\,\Phi_{kk} = \Delta_2\Psi = \frac{\nu}{|P-O|},$$

e la divergenza [1]

$$[16] \qquad \operatorname{div}\boldsymbol{\Phi} = \operatorname{grad}\Delta_2\Psi = \operatorname{grad}\frac{\nu}{|P-O|}.$$

Se f è la costante di gravitazione

$$\frac{f\nu}{|P-O|}$$

è il potenziale newtoniano di attrazione, sopra una massa unitaria collocata in P, di una massa ν ubicata in O e la corrispondente forza è

$$[17] \qquad \frac{f}{4\pi}\operatorname{grad}\frac{\nu}{|P-O|};$$

[1] Loco primo citato, formula [18].

ne segue che [15] *definisce la distribuzione degli sforzi corrispondente a uno stato interno di tensione del sistema continuo in cui le forze interne sono* [17].

Sia ora S lo spazio occupato dal sistema continuo e O e P due qualsivogliano dei suoi punti; poniamo:

$$[18] \qquad \Psi(P) = \frac{f}{8\pi} \int_S \mu(O)\, |P - O|\, dS,$$

dove $\mu(O)$ è una funzione regolare, insieme alle sue derivate fino al quarto ordine, e dS designa l'elemento di campo attiguo al punto O. Chiamiamo x_i le coordinate cartesiane di O e continuiamo a indicare con y_i quelle di P; avendosi

$$|P - O| = \sqrt{\sum_1^3 \lambda (y_\lambda - x_\lambda)^2},$$

da cui

$$\frac{\partial |P - O|}{\partial y_i} = \frac{y_i - x_i}{|P - O|},$$

$$\frac{\partial^2 |P - O|}{\partial y_i \partial y_k} = \frac{1}{|P - O|} \left\{ \delta_{ik} - \frac{(y_i - x_i)(y_k - x_k)}{(P - O)^2} \right\},$$

risulta

$$[19] \qquad \Phi_{ik} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y_i \partial y_k} = \frac{f}{8\pi} \int_S \frac{\mu(O)}{|P - O|} \left\{ \delta_{ik} - \frac{(y_i - x_i)(y_k - x_k)}{(P - O)^2} \right\} dS.$$

Facendo in questa $i = k$ si ottengono gli sforzi normali

$$\Phi_{kk} = \frac{f}{8\pi} \int_S \frac{\mu(O)}{|P - O|} \left\{ 1 - \frac{(y_k - x_k)^2}{(P - O)^2} \right\} dS,$$

e l'invariante lineare

$$[20] \qquad \sum_1^3 k \Phi_{kk} = \frac{f}{8\pi} \int_S \frac{\mu(O)\, dS}{|P - O|} = V(P)$$

risulta il potenziale newtoniano corrispondente a una distribuzione continua della massa

$$\int_S \mu(O)\, dS$$

fatta nello spazio S con una legge di distribuzione definita dalla funzione $\mu(O)$. Essendo

$$\operatorname{div} \Phi = \operatorname{grad} V,$$

da [19] *risulta definito lo stato di tensione del sistema continuo che corrisponde al caso in cui le forze interne sono di origine newtoniana.*

5. *Sforzi maxwelliani.* — Riferiamoci alla equazione vettoriale indefinita [1'''] relativa alla statica dei sistemi continui per i quali il tensore degli sforzi è potenziale di seconda specie. Si è già rilevato che se la funzione potenziale è armonica, cioè soddisfa alla [11], si ha:

$$\rho \boldsymbol{F} = \frac{1}{2} \operatorname{grad} (\Delta_1 \chi)^2 ;$$

questa relazione risulta identicamente soddisfatta se le forze specifiche di volume sono conservative

$$\rho \boldsymbol{F} = \operatorname{grad} U , \quad \text{con} \quad U = \frac{1}{2} (\Delta_1 \chi)^2 .$$

Si ha dunque: *se* χ *è una funzione armonica, l'equazione indefinita della statica dei sistemi continui è identicamente soddisfatta assumendo il tensore degli sforzi potenziali di seconda specie* [9] *se le forze di volume sono conservative e di potenziale unitario* $\frac{1}{2} (\Delta_1 \chi)^2$. In questo teorema rientra la distribuzione degli sforzi escogitata da MAXWELL per dare forma matematica alle idee di FARADAY per spiegare la propagazione delle azioni elettriche a distanza [1].

---

[1] Veramente la distribuzione maxwelliana è la seguente (BELTRAMI, *Sulla rappresentazione delle forze newtoniane per mezzo di forze elastiche. Opere*, to. IV, pag. 100):

$$\Phi_{k+1\,k+2} = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial V}{\partial y_{k+1}} \cdot \frac{\partial V}{\partial y_{k+2}} , \quad \Phi_{kk} = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial V}{\partial y_k} \right)^2 + \frac{1}{8\pi} (\Delta_1 V)^2 .$$

Assumendo (cfr. la nota [4] a pag. 297)

$$\chi = \frac{\sqrt{-1}}{2\sqrt{\pi}} V ,$$

le precedenti divengono

$$\Phi_{k+1\,k+2} = \frac{\partial \chi}{\partial y_{k+1}} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial y_{k+2}} , \quad \Phi_{kk} = \left(\frac{\partial \chi}{\partial y_k} \right)^2 - U .$$

In tal modo gli sforzi maxwelliani soddisfano alla condizione div $\boldsymbol{\Phi} = 0$, che corrisponde a forze di volume nulle.

Astronomia. — *I problemi fondamentali della Cosmogonia e la legge di Newton.* Nota VIII [1] di GIUSEPPE ARMELLINI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

1. L'EVOLUZIONE DEI SISTEMI PLANETARI. — Nella nostra precedente Nota [2] sopra l'evoluzione dei Sistemi Stellari, abbiamo dimostrato che, introducendo nella legge di attrazione di NEWTON il nostro *termine cosmogonico*, l'energia totale newtoniana H (somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale newtoniana) di un sistema di punti che si attraggono, è funzione decrescente del tempo; onde – quando il tempo cresce all'infinito – H tenderà a $-\infty$, oppure ad un limite determinato λ.

Escludendo il primo caso, in cui avvengono urti, e considerando solo il secondo, è evidente che se tendendo t all'infinito H tende verso il limite fisso λ, la derivata $\frac{dH}{dt}$ deve tendere a zero. E da ciò segue – come vedemmo nella ultima Nota – che tutte le distanze reciproche tra i vari punti del sistema debbono tendere a valori costanti. In altre parole, come abbiamo dimostrato, *l'unico moto di regime possibile è il movimento rigido*; teorema trovato per altra via anche dal prof. C. AGOSTINELLI [3] e che può considerarsi come un caso particolare di proprietà delle forze dissipative dimostrate dal prof. G. KRALL.

Nell'ultima Nota, ci siamo serviti appunto di un tale teorema per studiare l'evoluzione, e cioè indagare lo stato finale, di *Sistemi Stellari*; vale a dire di aggregati di un gran numero di stelle considerate come puntiformi ed in media di eguale massa. Passiamo ora ad applicare le stesse considerazioni ai *Sistemi Planetari*, supponendo un sistema planetario schematico, composto di un *Sole S esteso* e ruotante (avente forma quasi sferica e distribuzione interna di masse simmetrica rispetto al centro) e di un *unico pianeta P*, che considereremo come *puntiforme*. Siano M ed m le due masse ed f il coefficiente attrattivo.

---

[1] Presentata nell'Adunanza del 23 novembre 1940-XIX.

[2] Le precedenti Note sono pubblicate in « Rend. Lincei », 1937, sem. I, 1938; sem. I, 1938; sem. II, 1939; sem. I e « Rend. Acc. d'Italia », vol. I (1940) fasc. 6; vol. I, fasc. 12; vol. II, fasc. 3 e « Contr. Scient. del R. Osservatorio Astronomico di Roma » (Nuova Serie), nn. 66, 71, 73, 78, 81, 86, 88.

[3] Cfr. « Rend. Acc. d'Italia », vol. II, fasc. 3.

2. Per iniziare il nostro studio, cominciamo ad osservare che, essendo il Sistema sottomesso soltanto a forze interne, il momento della quantità di moto rispetto al baricentro G rimane costante in grandezza, direzione e senso. Rappresenteremo tale momento col vettore $\hat{K}_g$ e, per averlo, calcoleremo anzitutto il momento della quantità di moto eliocentrico (e cioè il momento della quantità di moto rispetto al centro O del Sole) che rappresenteremo col vettore $\hat{K}_e$.

Ora $\hat{K}_e$ è evidentemente eguale alla somma di due vettori, e cioè:

1° Del vettore $\hat{K}_1$ dovuto al moto di rotazione del Sole ed ovviamente eguale ad $I\hat{\omega}$, dove I indica il momento d'inerzia del Sole rispetto all'asse di rotazione ed $\hat{\omega}$ un vettore di grandezza eguale alla velocità angolare di rotazione del Sole e diretto secondo lo stesso asse di rotazione.

2° Del vettore $\hat{L}$, rappresentante il momento della quantità di moto dovuto alla rivoluzione del pianeta P intorno al Sole. Per cose note, tale vettore è eguale ad $mc\cdot\hat{n} = m\sqrt{(M+m)fp}\cdot\hat{n}$ dove c indica la velocità areale del pianeta ed $\hat{n}$ un vettore unitario normale al piano dell'orbita, mentre p è il parametro dell'ellisse instantanea descritta dal pianeta intorno al Sole stesso.

Ora, secondo noti teoremi di Meccanica, il momento della quantità di moto di un sistema rispetto ad un punto O è eguale a quello baricentrico, aumentato del momento della quantità di moto che avrebbe il sistema rispetto ad O se esso fosse tutto condensato nel baricentro G. D'altra parte, nel nostro caso, O, G e P sono sempre allineati, onde – preso per centro di riferimento O – ovviamente G ruoterà intorno ad O con velocità angolare $\frac{d\vartheta}{dt}$ eguale a quella del pianeta nel suo moto eliocentrico. Avremo quindi:

$$[1] \qquad \hat{K}_e = \hat{K}_g + (M+m)\, r_s^2 \frac{d\vartheta}{dt}\cdot\hat{n}$$

dove r_s^2 indica la distanza OG, data ovviamente dalla formola:

$$[2] \qquad r_s = \frac{rm}{M+m}$$

indicando con r la distanza eliocentrica del pianeta e cioè il segmento OP. Ne risulta subito:

$$[3] \qquad r_s^2 \frac{d\vartheta}{dt} = \left(\frac{m}{M+m}\right)^2 r^2 \frac{d\vartheta}{dt} = \left(\frac{m}{M+m}\right)^2 c$$

e quindi da [1], [2] e [3]:

$$[4] \qquad \hat{K}_g = \hat{K}_e - \frac{m^2}{M+m} c\cdot\hat{n} = \hat{K}_1 + \hat{K}_2$$

dove i due vettori $\hat{K}_1$ e $\hat{K}_2$ sono dati dalle espressioni:

[5] $$\hat{K}_1 = I\hat{\omega}$$

[6] $$\hat{K}_2 = \hat{L} - \frac{m^2}{M+m} c \cdot \hat{n} = mc\left[1 - \frac{m}{M+m}\right] \cdot \hat{n} = Mm\sqrt{\frac{fp}{M+m}} \cdot \hat{n}\,.$$

3. Vediamo ora che cosa avvenga quando il tempo cresce all'infinito. Come dicemmo, l'unico stato di regime possibile è quello del *moto rigido*, in cui cioè le distanze tra il pianeta puntiforme P e tutti i punti del globo solare S rimangono costanti. In conseguenza, il pianeta dovrà allora muoversi lungo un'orbita circolare situata nel piano dell'equatore solare compiendo la sua rivoluzione nello stesso senso ed in un tempo eguale a quello della rotazione solare; in modo cioè che il Sole rivolga al pianeta sempre la *stessa faccia*. Ovviamente il piano del moto risulterà perpendicolare al vettore invariabile $\hat{K}_g$; prendendo quindi tale piano come piano XY e proiettando sull'asse Z la [4], avremo, tenendo conto della [5] e della [6]:

[7] $$K = I\Omega + Mm\sqrt{\frac{fA}{M+m}}$$

dove Ω indica la velocità angolare di rotazione del Sole nel movimento di regime, A il raggio dell'orbita circolare descritta dal pianeta P intorno al Sole e K il modulo del vettore invariabile $\hat{K}_g$.

Ma, nel moto di regime ora esaminato, la velocità angolare di rivoluzione del pianeta è eguale a quella di rotazione del Sole, onde avremo da una formola notissima di Meccanica:

[8] $$n^2 A^3 = \Omega^2 A^3 = (M+m) f$$

Ponendo per semplicità:

[9] $$A = x^2$$

da [7], [8] e [9], abbiamo l'equazione:

[10] $$x^4 - q_1 x^3 + q_2 = 0$$

dove q_1 e q_2 sono due quantità note positive e date dalle formole:

[11] $$q_1 = \frac{K}{Mm}\sqrt{\frac{M+m}{f}}$$

[12] $$q_2 = \frac{I}{Mm}(M+m)\,.$$

La [10] è l'*equazione fondamentale dell'evoluzione planetaria*, che dovremo ora discutere.

4. A tal fine, osserviamo anzi tutto che nel caso ideale di un Sole puntiforme, avendosi $I = q_2 = 0$, la [10] ammette tre radici eguali a zero (che non interessano nel nostro caso) ed una radice positiva eguale a q_1; in altre parole, nel caso di un Sole puntiforme, il problema evolutivo planetario ha *una sola* soluzione.

Passiamo invece al caso reale di un Sole esteso e quindi avente un momento d'inerzia I positivo e diverso da zero. Si trova allora, con facili calcoli, che il discriminante Δ della [10] è dato da:

$$[13] \qquad \Delta = q_2^2 [27\, q_1^4 - 256\, q_2]$$

onde, in casi analoghi a quello del nostro sistema planetario, in cui come ora vedremo, q_1 è estremamente maggiore di q_2, il discriminante Δ risulta certamente positivo; vale a dire la [10] ammette *due soluzioni* reali positive e due immaginarie coniugate. Scrivendo la [10] sotto la forma:

$$[14] \qquad x^3 (x - q_1) + q_2 = 0$$

si vede subito che ambedue le radici reali sono minori di q_1. Inoltre ponendo $x = \frac{3}{4} q_1$, si trova che il primo membro della [10] diviene eguale a $-\frac{27}{256} q_1^4 + q_2$ ed è quindi certamente negativo essendo il discriminante Δ positivo. Le due radici reali sono dunque comprese l'una tra 0 e $\frac{3}{4} q_1$, l'altra tra $\frac{3}{4} q_1$ e q_1. In pratica, essendo q_2 piccolissimo di fronte a q_1, una radice è assai prossima a zero e l'altra molto prossima a q_1.

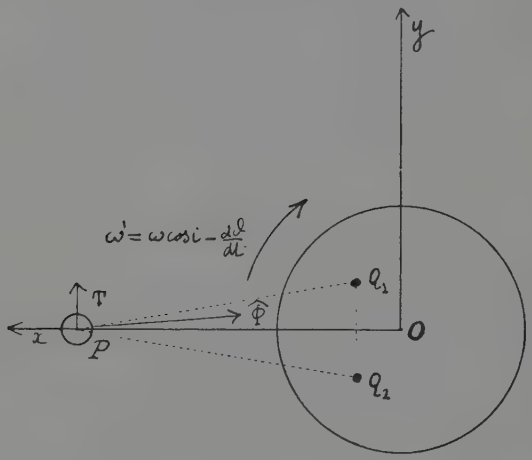
5. La soluzione della [10] non offre difficoltà, adoperando i noti metodi dati dall'algebra. Ma ciò che interessa il problema cosmogonico, è il conoscere quale delle due radici corrisponda all'orbita circolare a cui realmente si approssima l'orbita del pianeta P quando il tempo cresce all'infinito.

A tale scopo, dobbiamo ora dimostrare un teorema di fondamentale importanza e cioè che il *parametro p dell'orbita planetaria è funzione sempre crescente del tempo*, in ogni istante in cui si abbia $\omega \cos i - \frac{d\vartheta}{dt} > 0$, essendo i l'inclinazione dell'orbita stessa sul piano dell'equatore solare. Per maggiore rigore, dimostreremo questo teorema valendoci unicamente di considerazioni sintetiche, astraendo quindi da sviluppi in serie che sono necessariamente approssimati.

6. In proposito, cominciamo a considerare che, a causa del termine cosmogonico s'introduce sul pianeta una forza perturbatrice, che noi

decomporremo in tre componenti: la prima R radiale e cioè diretta lungo il raggio vettore, la seconda T trasversale e cioè perpendicolare al raggio vettore e giacente sul piano dell'orbita, la terza W normale al piano orbitale. Come si sa dalla Meccanica Celeste, la variazione del parametro p è dovuta *unicamente* alla forza T, onde dovremo ricercare soltanto questa ultima.

A tal fine prendiamo nel piano dell'orbita planetaria una terna di assi mobili xyz, avente per origine il centro solare O ed in modo tale che l'asse x sia sempre diretto verso il pianeta P e l'asse y sia situato a 90° da esso nel senso del moto di rivoluzione del pianeta. Decomponiamo la



velocità angolare di rotazione del Sole, espressa dal vettore $\hat{\omega}$, in tre componenti ω_x, ω_y, ω_z lungo i tre assi. Notiamo subito che la componente ω_z per un sistema di assi fissi che, nell'istante considerato coincidesse con la terna mobile xyz, sarebbe eguale ad $\omega \cos i$; in conseguenza la velocità angolare ω' di rotazione del Sole intorno all'asse z stimata da un osservatore collegato con gli assi mobili sarà eguale ad $\omega \cos i - \frac{d\vartheta}{dt}$, dove ω indica sempre la grandezza del vettore $\hat{\omega}$ e $\frac{d\vartheta}{dt}$ è la velocità angolare istantanea di rivoluzione del pianeta situato sempre sull'asse x.

Ora, evidentemente (cfr. figura), la rotazione ω_x non altera la velocità relativa dei vari elementi del globo solare rispetto a P, onde non produce forze perturbatrici secondo la nostra legge di attrazione; inoltre è facile vedere che la rotazione ω_y produce una forza perturbatrice giacente nel piano xz e quindi non dà origine a nessuna forza trasversale T. Conside-

riamo ora la terza componente ω_x e supponiamo che il binomio $\omega \cos i - \frac{d\vartheta}{dt}$ sia positivo.

In questo caso, rispetto ad un osservatore collegato con gli assi mobili, il Sole ruoterà intorno a z in senso positivo e cioè dalla parte positiva dell'asse x alla parte positiva dell'asse y. In conseguenza, presi nel globo solare due elementi materiali Q_1 e Q_2 simmetrici rispetto al piano xz, è evidente che l'elemento Q_1, avente ordinata y positiva, avrà rispetto a P velocità radiale maggiore di quello Q_2 avente la y negativa. Ne segue, per la nostra legge, che l'attrazione di Q_1 sarà maggiore di quella di Q_2. E, poichè ciò può ripetersi per tutte le coppie di elementi, ne segue che, a causa di ω_z, la forza attrattiva $\hat{\Phi}$ che il Sole esercita sul pianeta P, non è diretta verso il centro solare O, ma verso un punto del piano yz, avente ordinata y positiva. Decomponendo tale forza come sopra si è detto, ne segue che P è sottomesso ad una forza perturbatrice trasversale T diretta nel senso del moto del pianeta. In conseguenza, aumenta in ogni istante la sua velocità areale e quindi il parametro p. Ovviamente il contrario avverrebbe se si avesse $\omega \cos i - \frac{d\vartheta}{dt} < 0$, e così pure se il pianeta avesse moto retrogrado giacchè allora T si opporrebbe al moto stesso.

In pratica, poichè per il nostro scopo basta solo occuparci delle perturbazioni secolari, possiamo sostituire $\frac{d\vartheta}{dt}$ col moto medio n, onde possiamo concludere che p è funzione crescente del tempo quando la quantità $\omega \cos i - n$ è positiva.

Ora, supponendo che i pianeti siano stati per esempio prodotti da esplosioni del globo solare e che quindi la loro distanza iniziale dal Sole sia stata piccola (per esempio dell'ordine del ventesimo di unità astronomica, pari circa alla decima parte della distanza attuale di Mercurio dal Sole, come abbiamo supposto per semplicità nella nostra Nota VI), vedemmo che il valore di ω risultava circa quattro volte maggiore di n. In conseguenza, il parametro dei nostri pianeti dovette crescere col tempo, anche se si suppone che l'inclinazione originaria dell'orbita planetaria sia stata molto forte.

7. Notiamo subito che il teorema ora dimostrato risponde ad alcune difficoltà, mosse dal prof. F. Zagar, e provenienti dall'aver egli creduto che il parametro p si mantenesse sempre costante. In particolare nella Nota III sopra [1] la nostra ipotesi, egli riconosce giustamente ciò che noi avevamo già dimostrato e cioè che i è funzione decrescente del

[1] Cfr. F. Zagar, *Ancora sul moto di un punto attratto da un corpo esteso e ruotante* in « Pubbl. Oss. Bologna », III, 12 e « Mem. Soc. Astr. », vol. XIII, n. 4.

tempo e ritira la difficoltà da lui stesso avanzata nella prima Nota, secondo cui $\frac{di}{dt}$ dovrebbe essere necessariamente eguale a 0 per $i = 90°$; difficoltà che nella nostra Nota V mostrammo insussistente. E così pure sono corrette altre sviste di calcolo, da noi segnalate in detta Nota. Ma egli insiste nel ritenere il parametro costante; cosa che non può essere ammessa nemmeno in prima approssimazione, giacchè, come vedremo tra breve, esso può divenire anche *centinaia di volte* maggiore del valore primitivo. Inutile aggiungere che le conclusioni che egli ne trae sopra la debole variazione totale dell'inclinazione i e della velocità di rotazione del Sole, debbono ovviamente rigettarsi.

È strano però come egli non si accorga che alcune asserzioni contenute nella sua Nota III e cioè, i decrescente col tempo, ω crescente e p costante, sono inconciliabili tra loro secondo la Meccanica Razionale.

Infatti egli ammette (ciò che non è) che il piano dell'equatore solare sia invariabile e cioè ammette che il vettore $\hat{K}_1$ abbia direzione costante; analogamente, ammettendo la costanza del parametro, egli ritiene che il vettore $\hat{K}_2$ sia di grandezza costante. Inoltre la risultante $\hat{K}$ dei due vettori, secondo la Meccanica Razionale, è costante in grandezza, senso e direzione.

Ma se due vettori, l'uno di grandezza costante e l'altro di direzione costante, ammettono una risultante costante in grandezza, direzione e senso, ambedue i vettori sono pure costanti in grandezza, direzione e senso. Dunque $\hat{K}_1$ sarà di grandezza costante e quindi ω non varierà; analogamente $\hat{K}_2$ sarà di direzione costante e quindi anche l'angolo i sarà invariabile.

Lo Zagar trova come variazione totale Δi dell'inclinazione dell'orbita di Saturno, dalle sue origini ad oggi, dapprima $-0'',6$ e poi $-2'',2$; se il calcolo fosse stato rigoroso, avrebbe trovato $\Delta i = 0'',0$ e ciò lo avrebbe avvertito della contraddizione in cui era caduto. Altrettanto si dica per il $\Delta\omega$.

8. Ma, per togliere altre obbiezioni avanzate dallo stesso autore, dobbiamo ancora aggiungere una parola in proposito.

Infatti, in una recentissima Nota pubblicata sui « Rendiconti dell'Accademia delle Scienze di Bologna » [1], lo Zagar dimostra (pag. 11) che se inizialmente si ha $n > \omega$, il pianeta cade sul Sole. Tale teorema è esatto, ma esso era stato dimostrato da noi fin dal 1937 (Cfr. Armellini, « Rend.

---

[1] Cfr. F. Zagar, *Sui problemi fondamentali della Cosmogonia Planetaria*, in « Pubbl. Oss. Bologna », III, 13 e « Rend. R. Acc. di Bologna ». Serie IX, to. VIII.

Lincei », 1937, sem. II, pag. 215, lettera B). Ora lo ZAGAR, non solo non cita il nostro nome, ma scrive testualmente che in questo caso « il pianeta cade sul Sole, mentre secondo il prof. ARMELLINI dovrebbe allontanarsi ». Secondo la semplice obbiettività scientifica, egli avrebbe dovuto invece scrivere che « il pianeta cade sul Sole, come appunto ha dimostrato il prof. ARMELLINI fin dal 1937 »; ciò in omaggio alla verità.

Più strano è ancora il fatto che egli voglia dedurre, da tale nostro teorema, un argomento contrario alla nostra ipotesi. Infatti, come abbiamo già esplicitamente fatto notare (« Rend. Acc. d'Italia », 1940, vol. I, pag. 698), per tutti i pianeti oggi esistenti si ha sempre fin dall'inizio, non già $n > \omega$, ma $n < \omega$ ed anzi $n < \omega \cos i$. La conclusione quindi a cui lo ZAGAR vuole arrivare nella sua Nota – conclusione contraria alla nostra teoria – deve dunque essere *esattamente rovesciata*, e ciò in forza del suo stesso ragionamento.

L'unica possibile obbiezione, che fin ad ora sia stata elevata contro la nostra teoria, e che per imparzialità scientifica dobbiamo riportare, è quella dello CHAZY (cfr. « Comptes Rendus », 1940, to. CCX, n. 21), secondo cui per il moto di Mercurio occorrerebbe che il coefficiente ε fosse dell'ordine di 10^{-17} anzichè dell'ordine di 10^{-14}. Ne segue che l'età minima della Terra, anzichè dell'ordine di $4{,}5.10^{8}$ anni, sarebbe dello ordine di $4{,}5.10^{11}$ anni, mentre quella dei pianeti superiori crescerebbe in proporzione, giungendo all'ordine di 10^{14} anni per i più lontani.

Ma tale obbiezione può essere superata senza difficoltà.

Infatti – a parte il fatto che ogni valutazione dell'età cosmogoniche è ancora estremamente dubbia e che l'unica cosa, che sappiamo con relativa certezza, è che l'età della crosta terrestre è superiore a 10^{9} anni – si deve osservare: 1° che sul moto di Mercurio – come già dicemmo nella Nota VI – esistono ancora moltissimi dubbi; 2° che noi abbiamo supposto che i pianeti fossero generati da esplosioni solari (Nota VI) e posti inizialmente ad una distanza dal Sole di appena 1/20 di unità astronomica. Tale distanza invece può essere stata maggiore, onde i tempi necessari per raggiungere le orbite attuali restano diminuiti; 3° che anche i tempi necessari per rendere le orbite planetarie quasi complanari restano assai diminuiti, se si considera che tale fenomeno è prodotto non solo dalla rotazione solare – come noi abbiamo calcolato per metterci nella peggiore ipotesi – ma anche dalla mutua attrazione dei pianeti, secondo il *teorema di complanarità delle orbite* dato nella nostra Nota VII. Quanto alla riduzione dell'eccentricità – anche per ε dell'ordine di 10^{-17} – bastano pochi miliardi di anni (cfr. Nota VI).

In complesso dunque, tale obbiezione – l'unica che meriti discussione – può essere superata senza difficoltà, mentre, come è stato chiaramente dimostrato nelle nostre Note, tutte le altre provengono da sviste o confusioni in cui è innegabilmente caduto lo ZAGAR.

9. Torniamo ora all'equazione fondamentale [10]. Poichè $A = x^2$ è il valore a cui tende il parametro quando t tende all'infinito e poichè p è funzione crescente del tempo, è chiaro che la radice da scegliersi deve necessariamente soddisfare all'ineguaglianza $x > \sqrt{p_0}$, essendo p_0 il valore iniziale di p.

Ciò posto, applichiamo il calcolo ad un Sistema Planetario composto di un Sole eguale al nostro e di un unico pianeta di massa eguale a quella di Giove, supponendo che il momento della quantità di moto sia quello stesso del nostro Sistema Planetario.

Secondo i calcoli del prof. L. Gialanella, si ha [1] allora $K = 3{,}234 \cdot 10^{50}$ in unità C. G. S.; onde, se prendiamo come unità di massa quella del Sole, come unità di lunghezza l'unità astronomica (distanza media attuale della Terra dal Sole) e come unità di tempo l'anno sidereo, risulta con facili calcoli, $K = 0{,}02303$. Supponendo inoltre per semplicità il Sole omogeneo, si ha dalla Meccanica $I = \frac{2}{5} r^2$.

In conseguenza, essendo la massa di Giove eguale ad 1/1047 ed il raggio solare r eguale a 695000 km. e cioè a 0,00465 unità astronomiche, la [10] diviene:

$$[15] \qquad x^4 - 3{,}837\, x^3 + 0{,}009066 = 0$$

la quale ha due radici reali positive eguali rispettivamente a 0,15 ed a 3,83. Ne segue che i due valori possibili per il raggio dell'orbita di Giove, dopo un tempo infinitamente grande, saranno

$$A_1 = 0{,}022 \quad \text{ed} \quad A_2 = 14{,}7.$$

Immaginando dunque, come supponemmo nella Nota VI che la distanza iniziale di Giove fosse stata di 1 20 di unità astronomica e cioè circa la decima parte di quella attuale di Mercurio e che esso fosse l'unico pianeta del Sole, dopo un tempo immensamente grande Giove dovrebbe muoversi intorno al Sole lungo una grande orbita circolare di raggio eguale a 14,7 unità astronomiche e cioè compresa tra quelle attuali di Saturno e di Urano. Il parametro p aumenterebbe quindi circa nel rapporto di 1 a 300: ciò che mostra praticamente come la costanza del parametro invocata dalla Zagar non possa ammettersi nemmeno con grossolana approssimazione.

Riepilogando, ammessa la nostra legge di attrazione, segue dal calcolo che se un Sole genera un pianeta, possono avvenire due casi e cioè:

---

[1] Cfr. L. Gialanella, *Il momento della quantità di moto del Sistema Planetario*, in « Rend. Lincei », 1936, sem. I e « Contr. R. Oss. di Roma », n. 59.

1° Il pianeta generatore si muove in senso retrogrado, oppure è tanto vicino al Sole generatore da compiere una rivoluzione in un tempo minore in quello impiegato dal Sole a compiere una rotazione. Allora, il parametro diminuisce fino a che il pianeta viene ad urtare il globo solare ricadendo quindi sul Sole stesso.

2° Il pianeta si muove in senso diretto e la sua distanza iniziale, pure essendo piccolissima, è però tale che esso compie una rivoluzione in un tempo alquanto maggiore di quello di una rotazione solare, in modo cioè che $\omega \cos i - n$ risulti positivo. Il pianeta si allontana allora continuamente dal Sole e la sua eccentricità ed inclinazione diminuiscono, fino a muoversi lungo un orbita circolare, giacente nel piano equatoriale del Sole stesso.

10. Dobbiamo ancora notare che, se la massa planetaria m tende a zero, q_1 e q_2 secondo [11] e [12] tendono entrambe all'infinito, mentre il rapporto $q_2 : q_1$ rimane finito e tende verso $s = \frac{J}{K^2} : Mf$. Si vede subito allora che la prima radice della [10] tende verso $s^{1/3}$ e quindi il valore A tende ad $s^{2/3}$ cioè, nel caso di un Sole analogo al nostro, verso 0,02 unità astronomiche; l'altra radice x_2, dovendo essere maggiore di $\frac{3}{4} q_1$, tende invece ad ∞ e quindi anche A_2 tende ad ∞.

Ne segue che se un Sole analogo al nostro, dotato di un momento di quantità di moto eguale a quella K del nostro Sistema Planetario (ciò che importerebbe per il Sole stesso una rotazione di circa un giorno) fosse accompagnato da un unico pianeta di massa infinitesima, la cui orbita abbia un parametro maggiore di 0,02 unità astronomiche, il pianetino stesso dovrebbe col tempo allontanarsi all'infinito.

Nel caso di un Sole accompagnato da due pianeti di massa finita, poichè nel moto rigido la nostra legge coincide con quella di Newton, le uniche configurazioni di regime possibili sono: 1° quella euleriana, in cui i due pianeti si trovano allineati da bande opposte ed a distanza costante dal Sole; 2° quella lagrangiana in cui il Sole ed i due pianeti occupano i tre vertici di un triangolo equilatero di dimensioni costanti. Ovviamente, essendo il moto rigido, nell'un caso e nell'altro il tempo di rivoluzione dovrà essere eguale a quello della rotazione solare. Ma, come abbiamo visto nella Nota VII, affinchè tali configurazioni possano verificarsi, occorre che i dati iniziali soddisfino ad alcune condizioni. A maggior ragione ciò deve dirsi [1] nel caso di più pianeti.

Dobbiamo quindi concludere che, in generale, con la nostra legge, i sistemi planetari composti di più pianeti non possono mantenersi per un tempo infinito.

---

[1] Per maggiori dettagli su tali condizioni, cfr. P. Pizzetti, *Casi particolari del problema dei tre corpi*, in « Rend. Lincei », 1904, sem. I.

Astronomia. — *Indici di colore di ammassi globulari e nebulose, e ricerche sull'assorbimento della luce nello spazio interstellare.* Nota di Lucio Gialanella, presentata (1) da Giuseppe Armellini, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

1. – Introduzione e generalità. — Lo studio fotometrico degli ammassi globulari porta un interessante contributo alla misura della trasparenza dello spazio galattico, di cui l'assorbimento selettivo può essere messo in evidenza da determinazioni di indici di colore degli ammassi stessi, in quanto questi si possono osservare a distanze maggiori delle singole stelle.

Ricerche notevoli di questo genere sono state fatte da A. N. Vyssotsky e Emma T. R. Williams (2) all'osservatorio Leander Mc Cormick dell'Università di Virginia, i quali – a mezzo di fotografie con due camere a cortissimo foco e metodo extra-focale – hanno determinato gli indici di colore di 15 ammassi globulari, deducendone plausibili valori per l'assorbimento selettivo della luce nello spazio galattico. In modo più ampio e con metodi differenti (fotometro fotoelettrico) il problema è stato considerato da Stebbins e Whitford (3) a Madison e Monte Wilson, i quali hanno determinato le grandezze integrali e gli indici di colore di 68 ammassi globulari, deducendone un ben distinto arrossamento (*reddening*) degli ammassi stessi alle basse latitudini galattiche. Gli ammassi alle alte latitudini presentano un colore uniforme, corrispondente all'incirca alla classe spettrale *F* 6, mentre *l'eccesso di colore* (differenza tra l'indice di colore osservato e l'indice di colore « normale » nella scala assunta come riferimento, cioè corrispondente alla classe spettrale) aumenta man mano che ci si avvicina all'equatore galattico, raggiungendo un massimo di + $0^m.82$ (nella scala adoperata), a cui equivarrebbe un assorbimento

(1) Nell'Adunanza del 23 novembre 1940-XIX.

(2) A. N. Vyssotsky e Emma T. R. Williams, *Color indices and integrated magnitudes of 15 brillant clusters.* « Astrophysical Journal », vol. XXVII, n. 5, 1933. Si veda anche utilmente: *Handbuch der Astrophysik*, bd. VII, pag. 574.

(3) J. Stebbins e A. E. Whitford, *Absorption and space reddening in the galaxy from the colors of globular clusters.* « Astrophysical Journal », vol. LXXIV, n. 2, 1936.

fotografico nello spazio di non meno che *tre* grandezze stellari. Lo spessore ottico (fotografico) dello strato assorbente da polo a polo della galassia risulta allora di $0^m.32$, il quale – paragonato con i precedenti valori: 0,50 di Hubble e 0,80 di van de Kamp (ricavati dai conti di nebule) – mostrerebbe che soltanto una parte dell'assorbimento nello spazio sarebbe dovuto alla diffusione molecolare della luce (diffusione di Rayleygh), e porterebbe a circa 10 kiloparsec la distanza del centro del sistema degli ammassi globulari. È da notare che questo valore tornerebbe in accordo con quello già trovato da Shapley, il quale, nel tentativo di migliorare le dimensioni del suo primitivo sistema generale degli ammassi globulari (che dava circa 16 kiloparsec per la distanza del centro, senza ammettere alcun mezzo assorbente nella galassia), introducendo l'ipotesi di un sottile uniforme strato di materia assorbente nelle vicinanze dell'equatore galattico (che ridurrebbe la luce degli oggetti secondo la « legge della cosecante ») arrivò appunto al valore di 10 kiloparsec. Ed allora, una volta corrette le dimensioni del sistema per l'assorbimento della luce nello spazio, il diametro reale della galassia diventerebbe (secondo Stebbins; nota citata) non maggiore di 30 kiloparsec, ossia dello stesso ordine della nebulosa di Andromeda.

2. – Gli strumenti e le osservazioni. — In vista di così interessanti risultati, proseguendo le ricerche di fotometria eterocromatica visuale e di determinazione di indici di colore di oggetti celesti, già da qualche tempo da me iniziata presso il R. Osservatorio Astronomico di Roma (su Monte Mario), ho voluto nella scorsa estate 1940 tentare un saggio di determinazione visuale di indici di colore di ammassi globulari (e anche di qualche nebulosa). Lo stato di guerra, però, mi ha impedito di poter utilizzare il grande equatoriale di Steinheil–Cavignato (cm. 40 di apertura) – col quale l'indagine si sarebbe potuta estendere ad oggetti celesti più numerosi – essendo questo strumento smontato per la protezione antiaerea (4). Ho così fatto le osservazioni, di cui quelle contenute in questa Nota costituiscono il primo saggio, coll'equatoriale medio Cauchoix–Cavignato (mm. 155 di apertura e 2240 di distanza focale), già adoperato

(4) Vi è però un vantaggio nell'aver adoperato uno strumento meno potente (e quindi con la possibilità di un minore ingrandimento), e consiste nel fatto che gli oggetti celesti che si son potuti osservare e ben misurare, presentavano nel campo del cannocchiale un diametro apparente assai piccolo e un aspetto quasi di stella sfocata, onde la misura stessa poteva farsi con sicurezza. L'impiego dello strumento maggiore sarà utile per estendere il campo dell'indagine a oggetti meno luminosi – come *M* 9, *M* 14, *M* 72 ecc. – che con lo strumento attualmente adoperato apparivano al limite della visibilità, e quindi non misurabili. Questa estensione contiamo di fare appena possibile.

precedentemente (5), a cui era applicato un fotometro a cuneo di Toepfer, corredato di filtri di luce (giallo, violetto, rosso) rapidamente intercambiabili, forniti dalla medesima casa costruttrice. Avevo già determinato l'equazione di colore del sistema cannocchiale–fotometro–filtri mediante osservazione di stelle di indice di colore noto. Inoltre l'assorbimento dei tre filtri era stato anche determinato sperimentalmente presso l'Istituto Fisico della R. Università di Roma mediante confronto con lo spettro del ferro, trovando per la trasparenza dei due filtri – poi sempre adoperati – le lunghezze d'onda intorno a 6000 A. per il *giallo* e 4000 A. per il *violetto*.

La taratura astronomica di questi filtri era stata basata sopra stelle scelte nel catalogo colorimetrico di Oepik (6). Il sistema degli indici di questo catalogo è definito dalla formula:

$$c = m_L - \frac{m_P + m_H}{2}$$

dove m_L denotano le grandezze fotografiche del catalogo di E. Hertzsprung a Leida (7), m_P le grandezze visuali di Potsdam, m_H quelle di Harvard. Il sistema così definito differisce un po' da quello della *scala di* Harvard o *internazionale*, e cioè quello definito dalla differenza delle grandezze fotografiche del catalogo di E. King (8) e quelle visuali di Harvard. Com'è noto, l'equazione di colore del sistema internazionale è:

$$gK_0 - A_0 = 1^m.30 \qquad \text{(per le stelle giganti) (9)},$$

mentre gl'*indici di colore normale* sono espressi dalla tabella I seguente (10).

---

(5) L. Gialanella, *Fotometria eterocromatica e indice di colore dei pianeti Nettuno e Vesta*. « Rend. Lincei », vol. XXVIII, 1938; Id., *Indice di colore del pianeta Urano. Osservazioni fotometriche e indice di colore del nucleo della cometa Kozik–Peltier* (1939 *a*). Id. id., vol. XXIX, 1939.

(6) E. Oepik, « Pubb. Tartu », to. XXVII, n. 1, 1929.

(7) « Bull. Astron. Inst. Netherland », I, 35.

(8) « Harvard Annals », vol. 76.

(9) Recentemente, Seares da varie determinazioni eseguite in regioni del cielo, prive di ogni eventuale strato assorbente (*unobscured regions*), ha concluso per l'equazione di colore della scala internazionale l'espressione: $gK_0 - A_0 = 1^m.12$ (« Astroph. Journal », vol. LXXXVII, 1938, pag. 276; e id. vol. XCI, 1940). Ma noi abbiamo conservato il primitivo valore, avendo adoperato come indici di colore di confronto per la taratura dei filtri quelle del suddetto catalogo di Oepik, a cui la tab. II di conversione si riferisce.

(10) V. anche: « Handbuch Astroph. », bd. V_1, pag. 548.

Tabella I.

Colori normali.

Classe spettrale	C	Classe spettrale	C	Classe spettrale	C
$B\,0$	$-0^{m}.24$	$A\,2$	$+0^{m}.11$	$G\,0$	$+0^{m}.96$
$B\,2$	$-0\ .31$	$A\,3$	$+0\ .14$	$G\,5$	$+1\ .14$
$B\,3$	$-0\ .27$	$A\,5$	$+0\ .18$	$K\,0$	$+1\ .28$
$B\,5$	$-0\ .16$	$F\,0$	$+0\ .34$	K 2	$+1\ .62$
$B\,8$	$-0\ .11$	$F\,5$	$+0\ .62$	$K\,5$	$+1\ .72$
$A\,0$	$-0\ .02$	$F\,8$	$+0\ .84$	M	$+1\ .86$

La variazione $\frac{\Delta c}{\Delta s}$ ammonta a $+0^{m}.437$.

La conversione dalla scala di Oepik a quella internazionale può essere fatta facilmente mediante la seguente:

Tabella II.

Conversione degli indici di colore della scala di Oepik *in quelli della scala di* Harvard.

Oepik	— 0.44	— 0.32	— 0.17	0.04	0.25	0.47	0.69	0.93	1.18	1.42	1.71	2.04
Harvard . .	— 0.40	— 0.20	0.00	0.20	0.40	0.60	0.80	1.00	1.20	1.40	1.60	1.80

Tenendo conto di essa, i risultati delle osservazioni astronomiche, già da me eseguite (5) per la taratura dei filtri *giallo* e *violetto* e trasformate nella scala di Harvard, possono essere raccolti nella Tabella III.

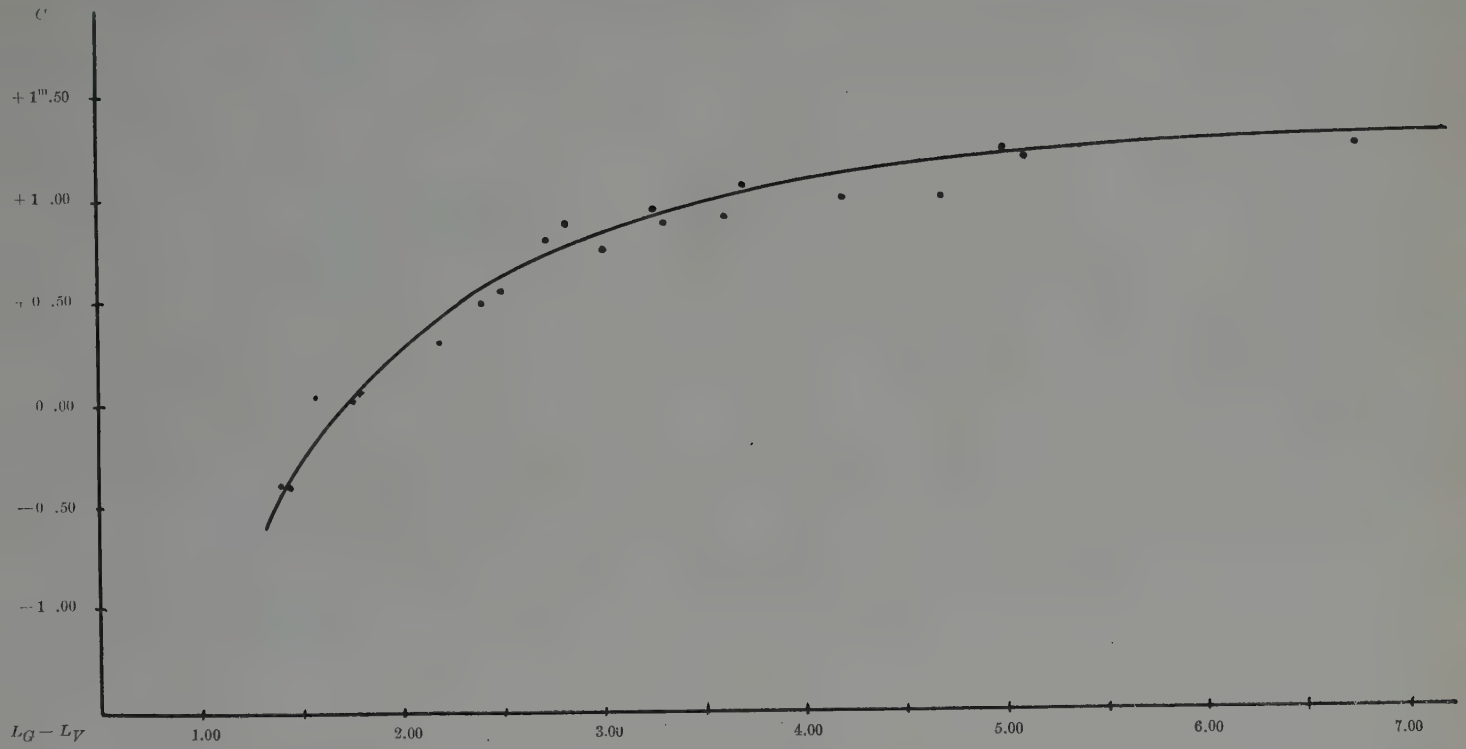
In questa tabella c denotano gli indici di colore delle stelle campione dedotti dal catalogo di Oepik e trasformati nella scala di Harvard; $L_G - L_V$ le differenze delle letture al fotometro con i filtri *giallo* e *violetto*; K il rapporto $\frac{c}{L_G - L_V}$ che servirà poi per le successive determinazioni di

indici di colore di oggetti celesti. Con questi dati è stato costruito il diagramma rappresentato in figura: in ascissa sono riportate le differenze $L_G - L_V$ e in ordinata gli indici di colore c. Per i confronti, però, anzichè il diagramma ho preferito adoperare direttamente i valori della tabella, scegliendo opportunamente – per ogni singolo oggetto celeste – un gruppetto di stelle, nel cui breve intervallo il diagramma di taratura poteva sensibilmente assumersi rettilineo.

TABELLA III.

Taratura dei filtri « giallo » e « violetto » nella scala di HARVARD.

N	Stella	C	$L_G - L_V$	K
1	ε Orionis	— 0m.40	1.43	— 0m.279
2	σ Leonis	— 0 .05	1.81	— 0 .027
3	τ Virginis	+ 0 .02	1.75	+ 0 .011
4	ρ Leonis	+ 0 .02	1.58	+ 0 .013
5	ρ Coronae borealis	+ 0 .31	2.21	+ 0 .140
6	τ Bootis	+ 0 .48	2.40	+ 0 .200
7	η Bootis	+ 0 .56	2.52	+ 0. 222
8	γ Persei	+ 0 .74	3.00	+ 0 .247
9	β Aquarii	+ 0 .79	2.72	+ 0 .290
10	ε Leonis	+ 0 .87	2.82	+ 0 .308
11	γ Piscium	+ 0 .87	3.30	+ 0 .264
12	η Pegasi	+ 0 .89	3.60	+ 0 .247
13	α Aquarii	+ 0 .96	3.26	+ 0 .294
14	ε Virginis	+ 0 .98	4.17	+ 0 .235
15	ε Bootis	+ 0 .97	4.70	+ 0 .207
16	ζ Cygni	+ 1 .06	3.70	+ 0 .286
17	ε Cigni	+ 1 .07	3.91	+ 0 .274
18	α Serpentis	+ 1 .22	4.99	+ 0 .246
19	ι Draconis	+ 1 .21	5.11	+ 0 .237
20	ρ Bootis	+ 1 .27	6.77	+ 0 .187
21	μ Leonis	+ 1 .30	6.52	+ 0 .199



Taratura astronomica dei filtri di luce (giallo e violetto). Scala di HARVARD o internazionale.

TABELLA IV.

Indice di colore di ammassi globulari e nebule.

Oggetto e data 1940	L_G	L_V	$L_G - L_V$	Stelle di confronto	K	c	Medie finali
M 3-NGC 5272 – *Ammasso globulare dei Cani da caccia.*							
Luglio . . 18	38.36	36.04	2.32 *	—	—	—	
18	38.60	34.87	3.72	11–12–16–17	0^m.268	+0^m.99	
21	39.08	36.24	2.84	8–9–10	0 .282	+0 .80	
21	39.12	35.72	3.40	11–12–13–16	0 .273	+0 .93	
27	41.70	36.00	5.70 *	—	—	—	
27	41.66	36.14	5.52 *	—	—	—	
Agosto . . 2	40.94	37.72	3.22	11–13	0 .279	+0 .90	
2	41.04	36.86	3.18	8–11–13	0 .268	+0 .85	
5	40.68	37.58	3.10	8–10–13	0 .283	+0 .88	
5	42.22	38.22	4.00	14–16–17	0 .265	+1 .01	+0^m.91 ±0^m.02
M 5-NGC 5904 – *Ammasso globulare dell'Ofiuco.*							
Luglio . . 18	38.96	34.15	4.81	15–18	0^m.227	+1^m.09	
18	37.64	33.88	3.76 *	—	—	—	
21	38.74	34.74	4.00	14–16–17	0 .265	+1 .06	
21	39.48	34.88	4.60	14–15	0 .221	+1 .02	
27	42.52	38.06	4.46	14–15	0 .221	+0 .99	
27	43.38	38.90	4.48	14–15	0 .221	+0 .99	
Agosto . . 2	41.99	39.10	2.89 *	—	—	—	
2	45.02	40.32	4.70	14–15–18	0 .229	+1 .08	
5	43.82	39.20	4.62	14–15	0 .221	+1 .02	
5	43.90	39.78	4.12	14–17	0 .255	+1 .05	+1^m.04 ±0^m.01

Segue TABELLA IV.

Oggetto e data 1940	L_G	L_V	$L_G - L_V$	Stelle di confronto	K	c	Medie finali
M 15-NGC 7078 – *Ammasso globulare del Cavallino.*							
Luglio . . 23	45.98	42.10	3.88	12–16–17	0.m269	+1m.04	
23	46.80	42.24	4.56	14–15–18	0 .229	+1 .04	
25	44.78	42.08	2.70	6–7–8–9–10	0 .253	+0 .68	
25	44.92	42.56	2.36	5–6–7	0 .187	+0 .44	
Agosto . . 12	41.10	39.25	1.85 *	—	—	—	
Settembre . 6	43.00	40.94	2.06 *	—	—	—	
6	44.90	41.08	3.82 *	11–12–13–14 16–17	0 .267	+1 .02	
7	43.22	39.82	3.40	11–12–13–16	0 .273	+0 .92	
7	43.26	39.80	3.46	11–12–13–16	0 .273	+0 .94	+ 0m.87 ± 0.05
M 2-NGC 7089 – *Ammasso globulare dell'Acquario.*							
Luglio . . 25	43.58	40.90	2.68	6–7–8–9–10	0m.253	+0m.69	
25	43.57	40.50	3.07	8–10–13	0 .283	+0 .87	
Agosto . . 12	38.04	36.20	1.84 *	—	—	—	
12	39.66	36.62	3.04	8–10–13	0 .283	+0 .86	
Settembre . 6	40.38	37.82	2.56	6–7–9	0 .237	+0 .61	
6	43.06	37.96	3.10	8–10–13	0 .283	+0 .88	
7	42.42	39.58	2.84	8–9–10	0 .282	+0 .81	
7	43.42	39.72	3.70	11–12–13–14 16–17	0 .267	+0 .98	
26	45.16	41.14	4.02	14–16–17	0 .265	+1 .06	
26	45.24	41.56	3.68	11–12–13–14–16–17	0 .267	+0 .98	+ 0m.86 ± 0.40

Segue Tabella IV.

Oggetto e data 1940	L_G	L_V	$L_G - L_V$	Stelle di confronto	K	c	Medie finali
M 28-NGC 6626 – *Ammasso globulare del Sagittario.*							
Luglio . . 25	39.90	33.58	6.32	19–20–21	0^m.208	+1^m.31	
25	40.16	34.54	5.62	19–21	0 .218	+1 .23	
Agosto . . 2	35.68	31.18	4.50	14–15–18	0 .229	+1 .03	
2	36.96	32.50	4.46	14–15–18	0 .229	+1 .02	
5	38.30	31.98	6.32	19–20–21	0 .208	+1 .31	
5	38.62	32.48	6.14	19–20–21	0 .208	+1 .28	
23	30.06	27.46	2.60*	—	—	—	
23	32.46	28.10	4.36	14–15–18	0 .229	+1 .00	
Settembre . 22	33.96	28.66	5.30	19–21	0 .218	+1 .16	
22	33.86	26.78	7.08*	—	—	—	+ 1^m.17 ± 0.02
22-NGC 6656 – *Ammasso globulare del Sagittario.*							
Luglio . . 25	41.16	33.18	7.98	20–21	0^m.193	+1^m.54	
25	39.48	33.14	6.34	19–20–21	0 .208	+1 .32	
Agosto . . . 23	38.38	32.64	5.74	19–20–21	0 .208	+1 .19	
23	38.06	32.12	5.94	19–20–21	0 .208	+1 .24	
Settembre . 5	37.78	32.38	5.40	19–21	0 .218	+1 .18	
5	38.00	33.46	4.54	14–15–18	0 .229	+1 .04	
22	35.70	33.06	2.64*	—	—	—	
22	38.30	33.68	4.62	14–15–18	0 .229	+1 .06	
23	37.04	30.50	6.54	19–20–21	0 .208	+1 .36	
23	37.50	31.06	5.44	19–21	0 .218	+1 .19	+ 1^m.23 ± 0.03

Segue TABELLA IV.

Oggetto e data 1940	L_G	L_V	$L_G - L_V$	Stelle di confronto	K	c	Medie finali
M 13-NGC 6205 – *Ammasso globulare dell'Ercole.*							
Luglio . . 27	40.82	36.72	4.10	14–17	$0^m.255$	$+1^m.04$	
27	41.92	37.56	4.36	14–15–18	0 .229	+1 .00	
Settembre . 7	40.52	37.65	2.87	8–9–10	0 .282	+0 .81	
7	41.86	38.86	3.00	8–10–13	0 .283	+0 .85	
Settembre . 20	41.04	38.18	2.86	8–9–10	0 .282	+0 .81	
20	43.78	38.74	5.04 *	—	—	—	
22	44.30	41.30	3.00	8–10–13	0 .283	+0 .85	
22	42.35	38.96	3.39	11–02–13–16	0 .273	+0 .92	
25	43.32	40.30	3.02	8–10–13	0 .283	+0 .85	
25	43.92	40.78	3.14	8–10–13	0 .283	+0 .89	$+0^m.89 \pm 0.02$
M 10-NGC 6254 – *Ammasso globulare dell'Ofiuco.*							
Agosto . . 23	32.66	30.48	2.18 *	—	—	—	
23	37.36	30.68	6.68	20–21	$0^m.193$	$+1^m.29$	
Settembre . 5	33.70	29.46	4.24	14–15–18	0 .229	+0 .97	
5	34.32	30.06	4.26	14–15–18	0 .229	+0 .98	
20	33.12	26.94	6.18	19–20–21	0 .208	+1 .29	
22	31.42	26.00	5.42	19–21	0 .218	+1 .18	
23	32.72	26.22	6.50	19–20–21	0 .208	+1 .35	
23	34.00	29.82	4.18	14–15–18	0 .229	+0 .96	$+1^m.14 \pm 0.04$

Segue TABELLA IV.

Oggetto e data 1940		L_G	L_V	$L_G - L_V$	Stelle di confronto	K	c	Medie finali
M 12-NGC 6218 – *Ammasso globulare dell'Ofiuco.*								
Settembre.	5	28.90	25.78	3.12	8–10–13	0m.283	+0m.88	
	5	30.38	25.96	4.42	14–15–18	0 .229	+1 .01	
	23	29.67	27.13	2.54	6–7–9	0 .237	+0 .61	
	24	34.36	29.96	4.40	14–15–18	0 .229	+1 .00	
	24	35.10	30.80	4.30	14–15–18	0 .229	+0 .98	
	26	31.54	29.46	2.08 *	—	—	—	
	26	32.36	29.50	2.86	8–9–10	0 .282	+0 .81	
	27	33.98	29.94	4.04	14–16–17	0 .265	+1 .07	
	27	34.64	31.02	3.62	11–13–14–12–16–17	0 .267	+0 .96	+ 0m.91 ± 0.03
M 92-NGC 6391 – *Ammasso globulare dell'Ercole.*								
Settembre.	7	42.06	39.44	2.62	6–7–9	0m.237	+0m.62	
	7	44.30	40.24	4.06	14–16–17	0 .265	+1 .07	
	20	41.90	38.76	3.14	8–10–13	0 .283	+0 .89	
	20	42.64	39.06	3.58	12–16–17	0 .269	+0 .96	
	22	41.96	40.24	1.72 *	—		—	
	22	44.44	41.40	3.04	8–10–13	0 .283	+0 .86	
	24	44.60	39.16	5.44	19–21	0 .218	+1 .18	
	24	44.68	39.80	4.88	15–18–19	0 .230	+1 .12	
	25	44.46	38.60	5.86	19–21	0 .218	+1 .27	
	25	44.48	40.08	4.40	14–15–18	0 .229	+1 .00	+ 0m.98 ± 0.04

Segue TABELLA IV.

Oggetto e data 1940	L_G	L_V	$L_G - L_V$	Stelle di confronto	K	c	Medie finali
M 57-NGC 6720 – *Nebulosa anulare della Lira.*							
Settembre . 24	23.38	29.14	— 5.76				
24	25.82	32.86	— 7.04				
25	23.54	32.02	— 8.48				
25	23.92	32.84	— 8.92				
26	24.94	31.44	— 6.50				
26	24.62	30.98	— 6.36				
27	23.96	32.26	— 8.30				
27	23.54	31.74	— 8.20				
Ottobre . . 5	24.20	32.62	— 8.42				
5	24.82	33.16	— 8.34				
		Media	— 7.63				— $1^m.2$ (cfr. n. 7)
M 31-NGC 224 – *Nebulosa spirale di Andromeda.*							
Ottobre . . 5	46.12	40.60	5.52	19–21	$0^m.218$	$+1^m.20$	
5	46.10	40.30	5.80	19–20–21	0 .208	+1 .21	
6	41.82	37.49	4.33	14–15–18	0 .229	+1 .00	
6	44.36	39.54	4.82	15–18–19	0 .230	+1 .11	
6	44.42	39.98	4.54	14–15–18	0 .229	+1 .04	
7	45.10	40.05	5.05	19–21	0 .218	+1 .10	
7	45.36	40.78	4.58	14–15–18	0 .229	+1 .05	$+ 1^m.10 \pm 0.02$

Note alla TABELLA IV.

* Valori che non entrano nelle medie finali.

M 15 Osservazione difficile in qualche serata.

M 22 Ammasso molto grande. Misure di estinzione un po' difficili. A volte meglio col violetto che col giallo.

M 10 In qualche serata al limite di visibilità col filtro violetto.

M 12 Osservazioni difficili.

M 57 Osservazioni difficilissime in luce gialla (v. appresso).

M 31 Le misure di estinzione si riferiscono al nucleo centrale.

3. – Indici di colore. — Per la determinazione degli indici di colore di ammassi globulari e di qualche nebulosa, ho adoperato il medesimo metodo che per la taratura dei filtri di luce, metodo del resto già descritto ampiamente in precedenti lavori (5). In questo primo saggio mi sono limitato ad osservare una diecina di ammassi scelti accuratamente tra quelli che apparivano nel campo del cannocchiale (oculare di debole ingrandimento del fotometro Toepfer) con un aspetto compatto, quasi di stella sfocata, o meglio di piccola testa cometaria (con o senza nucleo), e che naturalmente avessero una luminosità superficiale sufficiente ad essere bene misurata con ambedue i filtri *giallo* e *violetto*. Ogni oggetto è stato generalmente osservato in cinque sere, scelte tra le più limpide e serene, in assenza di luna (solo in qualche caso eccezionale si è osservato qualche oggetto con luna bassa dalla parte opposta del cielo). Di ogni oggetto, per ogni serata, sono state fatte 2 serie di osservazioni di almeno 10 puntate per ognuno dei 2 filtri (10 g. 10 v. – 10 g. 10 v.), a distanza di tempo l'una serie dall'altra, onde evitare eventuali imponderabili variazioni della trasparenza atmosferica. Di ogni serie è stata fatta la media. Le osservazioni non tengono conto – per adesso almeno – dell'assorbimento atmosferico selettivo differenziale. Onde renderne il minore possibile l'effetto sugli indici di colore dedotti, ho cercato di osservare gli oggetti celesti alti sull'orizzonte, e generalmente nelle vicinanze del meridiano. La sua influenza, in ogni modo, può ritenersi trascurabile, come del resto conclude anche Stebbins (11).

La Tabella IV dà conto dei risultati delle osservazioni. Il significato delle colonne è generalmente chiaro; basterà aggiungere che nella 5ª colonna sono indicati rispettivamente i numeri delle stelle della Tabella III che hanno servito a determinare il valore del rapporto K adoperato (6ª colonna). L'ultima riporta poi il valore concluso per l'indice di colore di ogni oggetto celeste. Per eventuali possibili miglioramenti delle riduzioni, ho trascritto anche quei valori delle singole osservazioni che per evidenti ragioni, non ho poi introdotto nelle medie finali. In fondo alla tabella sono riportate le eventuali note. Gli errori probabili degli indici di colore conclusi sono sufficientemente piccoli, distribuendosi normalmente da $\pm$ 0^m.01 a $\pm$ 0^m.04, e cioè dello stesso ordine di grandezza di quelli

(11) A Monte Wilson Stebbins ha adottato (v. « Astroph. Journal », volume LXXXIV, 1936, pag. 137) nelle osservazioni (fotoelettriche) con filtri di luce giallo e violetto una correzione per l'estinzione atmosferica selettiva data da: 0,^{m}06 sec z (z distanza zenitale); e ha concluso: « Misure fatte in varie notti e il confronto con altri filtri mostrano che il coefficiente dell'estinzione selettiva oscilla tra 0,05 e 0,06. In ogni caso, l'*effetto dell'estinzione selettiva dell'atmosfera terrestre è assai piccolo in confronto della apparente dispersione in colore degli stessi ammassi globulari* ».

ottenuti da altri autori che hanno eseguito delle analoghe determinazioni di indici di colore di ammassi globulari, ma con metodi del tutto differenti; così Vyssotsky e Williams (2), che hanno operato con metodo fotografico extrafocale, hanno trovato errori probabili di $\pm 0^m04$; Stebbins e Whitford (3), che hanno operato con un fotometro fotoelettrico di grande precisione, hanno trovato errori probabili da $\pm 0^m.01$ a $\pm 0^m.04$.

Tabella V.

Ammassi globulari.

Catalogo di Messier (1)	*NGC.* (2)	Latitudine galattica (3)	Classe di concentraz. (4)	Classe spettrale (5)	Indice di colore (6)	Classe di colore (7)	Eccesso di colore (8)
M 3	5272	+ 78°.2	VI	*G*	+ 0m.91	*f* 8	+ 0m.31
M 5	5904	+ 46 .2	V	*G*:	+ 1 .04	*f* 8	+ 0 .44
M 13	6205	+ 40 .0	V	*G* 0	+ 0 .89	*f* 9	+ 0 .25
M 92	6341	+ 33 .9	IV	*G* 5:	+ 0 .98	*f* 5	+ 0 .38
M 12	6218	+ 26 .1	IX	—	+ 0 .91	*g* 1	+ 0 .31
M 10	6254	+ 23 .0	VII	(*)	+ 1 .14	*g* 2	+ 0 .54
M 28	6626	— 5 .6	IV	*G* 5	+ 1 .17	*g* 6	+ 0 .57
M 22	6656	— 7 .6	VII	—	+ 1 .23	*g* 2	+ 0 .63
M 15	7078	— 28 .2	IV	*F*	+ 0 .87	*f* 6	+ 0 .27
M 2	7089	— 36 .6	II	*F* 5	+ 0 .86	*f* 7	+ 0 .26

(*) Righe oscure nel violetto, sembra H, K, H_ζ.

4. – Ammassi globulari. — La Tabella V riassume tutti i dati riguardanti i dieci ammassi globulari da me osservati, ordinati secondo le latitudini galattiche dal Polo Nord al Polo Sud. I significati delle singole colonne sono i seguenti:

Colonna 1: Numero del *Catalogo di Messier.*

2: Numero del *New General Catalogue.*

3: *Latitudine galattica b*, ricavata dalle tavole della Specola Vaticana, basate sul valore di Newcomb del polo galattico: $\alpha = 12^h44^m,4$; $\delta = + 26°,8$ (1900,0).

4: *Classe* dell'ammasso nella classificazione di SHAPLEY ([12]), che tien conto della sua « concentrazione » (I rappresenta la più alta concentrazione intorno al centro, XII la minima).

5: *Classe spettrale* secondo la classificazione di Miss CANNON (HARVARD) ([13]).

6: *Indice di colore* osservato.

7: *Classe di colore* secondo SEARES ([14]) [le *classi di colore* *b*, *a*, *f* $\cdots$, corrispondenti agli intervalli degli indici di colore da $-0{,}4$ a $0{,}0$; $0{,}0$ a $+0{,}4$; $+0{,}4$ a $+0{,}8$, $\cdots$ sono del tutto analoghe alle classi spettrali *B*, *A*, *F*, $\cdots$].

8: *Eccesso di colore E*, differenza tra i colori direttamente osservati (colonna 5) e i colori normali degli ammassi globulari (meglio specificati in seguito).

Un sommario esame dei valori degli indici di colore osservati [colonna 6] mostra immediatamente che i colori degli ammassi globulari *si arrossano* col decrescere (in valore assoluto) della latitudine galattica, arrossamento che è massimo proprio nella fascia della galassia. Tale incremento di colore potrebbe attribuirsi a un progressivo cambiamento della classe spettrale. E in effetti sembra esservi una leggera correlazione fra gli indici di colore dati nella colonna [6] e le classi spettrali date nella colonna [5]. Tuttavia, ricerche di FATH ([15]) e più recenti di STEBBINS e WHITFORD ([2]) permettono di assumere come definitivamente accertata la conclusione che la classe spettrale predominante tra gli ammassi globulari è *F*6 [con stelle giganti ([16])]; onde possiamo assumere come indice di colore medio di un ammasso globulare presso il polo della galassia (ed esente quindi da ogni assorbimento della luce) $c = +0^{m},60$ (nella scala dei nostri colori normali). Se ne deve concludere allora che l'arrossamento osservato degli ammassi nelle prossimità del piano galattico è dovuto ad un *assorbimento selettivo della luce in uno strato di spessore limitato e simmetrico rispetto all'equatore galattico. L'eccesso di colore E* viene pertanto ad essere definito dall'equazione seguente:

$$E = c - 0^{m}.60$$

([12]) « Handbuch Astroph. », V/2, pag. 705.

([13]) « Harvard Bullet. », n. 868 (1929); v. anche « Hand. Astroph. », V/2, pag. 711.

([14]) « M. Wilson Comm. », n. 16 (1915); « Hand. Astroph. », V/2, pag. 712.

([15]) E. A. FATH, *The spectra of spiral nebulae and globular star clusters* «Astrophysical Journal », vol. XXXIII (1911), pag. 58 e vol. XXXVII (1913), pag. 198.

([16]) « Handbuch Astrophys. », V/2, pag. 712.

mediante la quale sono stati calcolati i valori dell'ultima colonna della Tabella V. Notiamo ancora che i colori normali della Tabella I si intendono per le *stelle giganti* (a partire dalla classe spettrale F 5); in essi la differenza di colore tra le classi A_0 e K_0 è uguale a $1^m.30$, mentre per una mescolanza di giganti e nane tale differenza ammonterebbe a $1^m.15$. D'altra parte secondo le ricerche spettroscopiche di Lindblad, Petersen, Schalén [17] in diverse latitudini galattiche tra 0° e 50°, è stato sufficientemente provato che, per le stelle più brillanti della 10ª grandezza apparente, il rapporto tra le giganti e le nane nelle classi spettrali $G8 - K2$ è praticamente sempre maggiore che sei a uno. Quindi l'effetto di una debole mescolanza di nane (com'è negli ammassi globulari) è del tutto trascurabile [18].

5. – Assorbimento selettivo della luce nello spazio galattico. — Assumendo adunque che l'arrossamento degli ammassi globulari nella prossimità del piano galattico sia dovuto ad un assorbimento selettivo della luce da parte di uno strato di limitato spessore avente per piano di simmetria la galassia, possiamo scrivere l'equazione:

ind. colore *osservato* = *i. c. intrinseco* dell'ammasso + D cosec $|b|$

ossia:

$$[I] \qquad C_0 = C_i + D \operatorname{cosec} |b|$$

dove b e la latitudine galattica (colonna 3, tabella V), e $2D$ è l'assorbimento selettivo, espresso in grandezze stellari, subìto dalla luce attraversando normalmente il sistema galattico; oppure, in altre parole, $2D$ è la differenza fra lo spessore ottico visuale dello strato assorbente galattico in corrispondenza della luce gialla e in corrispondenza di quella violetta. Da quanto si è detto, risulta poi:

$$C_0 - C_i = E \qquad (E, \textit{eccesso di colore:} \text{ colonna 8, tab. V})$$

onde la [1] si può scrivere

$$[II] \qquad D \operatorname{cosec} |b| = E,$$

la quale, per i dieci ammassi osservati, prende i valori seguenti:

---

[17] « Nova acta regiae scient. Upsaliensis », ser. IV, vol. 6, n. 5 (1925); «Medd. Från Astron. Observatorium Upsala », n. 11 (1926); Id. n. 29 (1927); Id., n. 55 (1931).

[18] Cfr. anche utilmente: Vyssotsky–Williams, op. cit., nota [1], pag. 307 e « Hand. Astroph. », V/2, pag. 712.

$$
\begin{aligned}
D \cdot\ 1{,}021 &= 0^{m},31 \\
D \cdot\ 1{,}372 &= 0\ ,44 \\
D \cdot\ 1{,}556 &= 0\ ,25 \\
D \cdot\ 1{,}790 &= 0\ ,38 \\
D \cdot\ 2{,}270 &= 0\ ,31 \\
D \cdot\ 2{,}559 &= 0\ ,54 \\
D \cdot 10{,}302 &= 0\ ,57 \\
D \cdot\ 7{,}587 &= 0\ ,63 \\
D \cdot\ 2{,}110 &= 0\ ,27 \\
D \cdot\ 1{,}680 &= 0\ ,26.
\end{aligned}
$$

Risolvendo questo sistema col metodo dei minimi quadrati, si perviene all'equazione normale:

[III] $$191{,}15\, D - 15{,}74 = 0$$

da cui si ricava:

[IV] $$D = 0^{m},082$$

e quindi:

[V] $$\boxed{2\, D = 0^{m},16}$$

che esprime l'*assorbimento totale selettivo della luce nel sistema galattico.* Si noti che questo valore è circa metà dell'assorbimento selettivo della luce attraversante perpendicolarmente l'atmosfera terrestre.

Gli errori medî e probabili della soluzione (IV) sono stati calcolati colla formula:

$$e_m = \sqrt{Q_1} \cdot \sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{m - n}} \quad \text{(errore medio)}$$

dove Q_1 (invece del peso) è la soluzione dell'equazione del peso:

$$191{,}15\, Q_1 - 1 = 0,$$

che dà $Q_1 = 0{,}0050$; $[\Delta\Delta]$ esprime la somma dei quadrati dei *residui* ottenuti sostituendo nelle 10 equazioni il valore più probabile di D ; m è il numero delle equazioni, n quello delle incognite. Risulta:

$$e_m = \pm\ 0^{m},016$$

quindi:

$$e_p = \pm\ 0{,}011 \qquad \text{(errore probabile).}$$

Per la [V] si ha infine:

[VI] $$2\,D = 0^{m},16 \pm 0,02 \quad .$$

6. – CONFRONTO CON I RISULTATI DI ALTRI AUTORI. — È interessante confrontare questo risultato con quelli analoghi ottenuti da STEBBINS ([19]), da VYSSOTSKY e WILLIAMS ([2]) e da STEBBINS e WHITFORD ([3]), con metodi di osservazione differenti (fotoelettrico e fotografico extrafocale) e lavorando su gruppi di ammassi globulari di differente composizione. STEBBINS ha trovato per l'assorbimento selettivo totale (per le luci gialla e violetta) $0^{m}.18 \pm 0,01$, VYSSOTSKY $0^{m}.11 \pm 0,02$, STEBBINS–WHITFORD $0^{m}.08 \pm 0.01$; bisogna osservare che questi valori sono fondati su sistemi di indici di colore differenti dal nostro. Per STEBBINS l'equazione di colore del sistema di riferimento dava: $gK_0 - A_0 = 1^{m}.48$, per VYSSOTSKY: $gK_0 - A_0 = 1^{m},15$, per STEBBINS–WHITFORD: $gK_0 - A_0 = 0^{m}.74$, mentre quella del presente lavoro è: $gK_0 - A_0 = 1^{m}.30$. Per poter quindi fare i confronti in modo corretto bisogna ridurre tutti questi diversi sistemi ad uno solo. Per ridurre le altre determinazioni alla nostra (basata sul sistema di HARVARD o internazionale) occorre, allora, moltiplicarle rispettivamente per i rapporti $\frac{1,30}{1,48}$, $\frac{1,30}{1,15}$, $\frac{1,30}{0,74}$ ossia per 0,88, 1,13 e 1,76. Si ottengono così i valori seguenti, del tutto paragonabili:

TABELLA VI.

Assorbimento selettivo da polo a polo della galassia.

Anno	Autore	$2\,D$	Metodo
1933	STEBBINS	$0^{m},16 \pm 0,01$	Fotoelettrico
1933	WYSSOTSKY–WILLIAMS	$0\ ,13 \pm 0,02$	Fotografico extra locale
1936	STEBBINS–WHITFORD	$0\ ,14 \pm 0,01$	Fotoelettrico
1940	GIALANELLA	$0\ ,16 \pm 0,02$	Visuale

7. – NEBULOSE. — Oltre alle osservazioni di ammassi globulari ora esposte, ho tentato anche un saggio di determinazione di indici di colore di *nebulose*. Numerosi sono stati gli oggetti di cui ho sperimentato la misura fotometrica integrale nella luce gialla e violetta dei miei filtri. Di due

([19]) « Proceedings National Academy of Sciences », vol. 19 (1923), pag. 222.

sole, però, ho potuto esprimere con sicurezza in numeri i risultati delle osservazioni: esse sono la *nebulosa anulare della Lira* (*M* 57; *NGC.* 6720) e la grande *spirale di Andromeda* (*M* 31; *NGC.* 224).

Della spirale di Andromeda, che, pur col debole ingrandimento del fotometro, appariva di notevoli dimensioni, ho misurato la grandezza monocromatica (nel giallo e nel violetto) della parte centrale o nucleo che con i filtri appariva come un punto luminoso sfocato, simile a un nucleo cometario. Le misure sono state sufficientemente sicure; il risultato ($c = +1^m.10 \pm 0.02$) – che mi sembra nuovo e importante, per lo meno per la precisione della misura stessa – è innanzi tutto in buon accordo con le determinazioni di indice di colore *medio* di nebule extragalattiche eseguite con metodo extrafocale, e indicato da Hubble e Humason [20] in $+1^m,1$ per le nebule in generale. Recentemente Stebbins e Whitford [21] hanno determinato con metodo fotoelettrico l'indice di colore di parecchie nebule extragalattiche; per quella di Andromeda in questione hanno trovato $c_2 = +0^m.12$, valore espresso naturalmente nella loro scala dei colori normali caratterizzata dall'equazione di colore: $dK_0 - A_0 = 0^m.34$ (per le *nane*), mentre l'equazione del nostro sistema di confronto è : $dK_0 - A_0 = +0^m.99$ (per le *nane*). Per la riduzione dei valori di Stebbins al nostro sistema (internazionale) si ha quindi l'espressione:

$$c = 2{,}94\, c_2 + \text{cost.} \qquad \text{(la costante dipende dallo zero delle scale);}$$

e quindi il valore dell'indice di colore della nebula di Andromeda trovato da Stebbins e ridotto al sistema internazionale è: $c = +0^m.35 + \text{cost.}$, dove per la costante bisogna prendere la differenza dei valori nelle due scale in corrispondenza della classe spettrale *F 5* di diramazione fra le giganti e le nane (nella scala di Stebbins: *F* 5 $\cdots$ $-0^m.09$; nell'internazionale: *F* 5 $\cdots$ $+0^m.62$). Risulta per la costante il valore $+0^m73$, e quindi l'indice di colore di Stebbins $c = +1^m.08$ (nella nostra scala).

Notiamo ancora che il tipo spettrale della nebula di Andromeda è dato generalmente come *dG* 5 (scala delle nane) [22]; la temperatura dal colore derivata da misure spettrofotometriche di Greenstein, sarebbe di 4200°, apparentemente più bassa di quella competente alla sua classe spettrale. Il valore dell'indice di colore da me trovato – in ottimo accordo,

---

[20] E. Hubble-M. L. Humason, *The velocity-distance relation among extra-galactic nebulae.* « Astrophysical Journal », vol. LXXIV (1931), pag. 65; v. anche « Handbuch Astroph. », V/2, pag. 871.

[21] J. Stebbins-A. E. Whitford, *Photoelectric magnitudes and colors of extragalactic nebulae.* « Astroph. Journal », vol. LXXXVI (1937), pag. 255.

[22] J. L. Greenstein, *The temperatures of the extragalactic nebulae and the red-shift correction.* « Astroph. Journal », vol. LXXXVIII (1938), pag. 608.

come abbiamo visto, dopo le necessarie riduzioni di scala, con le misure fotoelettriche di Stebbins e Whitford – confermerebbe questa temperatura, in quanto che esso corrisponderebbe al colore di stelle di tipo spettrale $dK2$ (all'incirca: extrapolato) o $gG7$, stelle che hanno una temperatura effettiva di circa 4500° [23]. Poichè la nebula è a bassa latitudine galattica (— 20°) è probabile che l'arrossamento dentro la nostra Galassia possa spiegare gran parte del notevole eccesso di colore osservato. Ad ogni modo le nostre osservazioni confermano che la *nebulosa di Andromeda* (*M.* 31) *è intrinsecamente una delle più rosse nebule extragalattiche.*

Per quanto riguarda, infine, *la nebulosa anulare della Lira* (*M* 57, *NCC* 6720) la discussione del materiale di osservazione è oltremodo difficile. Innanzi tutto la differenza tra le letture al fotometro con i due filtri è *negativa* [$L_G - L_V = -7{,}63$]; anzi dalle note del registro delle osservazioni serali risulta che, mentre la nebulosa si vedeva distintamente al fotometro in luce normale (senza filtri) distinguendosi anche bene la stellina centrale (nucleo), con i filtri di luce le cose cambiavano notevolmente. In luce *violetta*, la nebula – benchè affievolita, come pure tutte le altre stelline del campo – continuava a vedersi bene e a ben misurarsi; in luce *gialla*, invece, essa quasi si « cancellava » dal cielo, restando appena appena visibile, onde le relative misure sono state difficilissime e presentano qualche oscillazione tra i diversi valori serali. È noto che lo spettro della nebulosa anulare della Lira è uno spettro continuo che presenta la massima intensità intorno a $\lambda = 3700$ e nelle righe N_1 e N_2 del nebulio ($\lambda = 4959$ e $\lambda = 5007$) [24], e questo spiegherebbe abbastanza bene i fatti osservati. Per quanto riguarda, poi, la conclusione dell'indice di colore, esso è senza dubbio *fortemente negativo*. Non vi sono stelle di riferimento; extrapolando dal grafico della taratura dei filtri di luce si ricaverebbe un valore di — $1^m{,}2$ circa. Nè mi risulta – nonostante le molte ricerche bibliografiche eseguite – che vi siano state altre determinazioni precise dell'indice di colore integrale della nebulosa. Esistono sì determinazioni delle grandezze *integrali* visuali e fotografiche; la *grandezza fotografica* secondo le misure di Vorontsov–Parenago [25] sarebbe $9^m.3$; della grandezza *visuale*, la deter-

---

[23] G. P. Kuiper, *On the hydrogen content of cluster.* « Astroph. Journal. », vol. LXXXVI (1937), si veda anche utilmente per tutte queste questioni: G. Armellini, *Astronomia siderale*, vol. III, pag. 176, Bologna, 1936.

[24] Ved. G. Armellini, *Astronomia siderale*, op. cit.

[25] B. Vorontsov–Velyaminov–P. Parenago, *Catalogue of integrated photographic magnitudes of planetary nebulae.* « Russian Astronomical Journal », vol. VIII (1931), pag. 206; id. id., *General Catalogue of planetary nebulae with a statistical discussion on the subject*, Id. id., vol. XI (1934), pag. 40; v. anche: B. Vorontsov–Velyaminov, *Photometric and spacial structure of the ring nebula in Lyra*, id. id., vol. XIV (1937), pag. 194.

minazione di J. Holetschek [26] darebbe $8^m,4$, la revisione di Hopmann [27] $8^m,8$; onde l'indice di colore dedotto da questi valori sarebbe $-0^m,9$ (oppure $-0^m,5$). Ma esso non potrebbe assumersi con la sicurezza voluta delle ricerche moderne senza una preventiva discussione circa le scale (visuale e fotografica) adoperate.

Per finire, notiamo che tra gli altri oggetti osservati c'è stata anche la nebulosa della *Campana silenziosa* (*Dumb bell*, *M* 27, *NGC*. 6853), la quale ha presentato un fenomeno assai interessante. Col filtro azzurro essa si vedeva chiaramente delineata, onde la misura – benchè l'oggetto fosse esteso – è riuscita sufficientemente sicura; messo il filtro giallo, la nebulosa si *cancellava completamente*, assumendo del tutto il colore del cielo, mentre le stelline del fondo, visibilmente meno luminose (in luce normale), si continuavano a vedere bene. L'effetto era molto più netto che nella anulare della Lira. Del suo spettro non mi pare si sappia molto; Reynolds [28] aveva notato che visualmente era visibile la solo riga verde N_1 di O_{III}, e fotograficamente si discerneva il doppietto di O_{II} (λ 3727–3729). E queste sono le uniche osservazioni spettrali. Per la grandezza fotografica integrale si ha il valore $7^m,6$ (Vorontsov), e per la visuale i valori $6^m,80$ (Holetschek), $7^m,0$ (Wirtz [29]) $7^m,30$ (Hopmann); onde l'indice di colore sarebbe dell'ordine di $-0^m.6$. Valgono però tutte le riserve di cui sopra.

Questo fenomeno si è presentato ancora nella grande nebulosa *planetaria dell'Acquario* (*NGC* 7293), per quanto con un effetto meno appariscente, data la sua tenue luminosità superficiale, per cui appariva molto debole anche in luce normale. Non si è verificato invece per nessun altro degli oggetti osservati, come la *M* 101 (spirale dell'Orsa Maggiore), *M* 33 (spirale del Triangolo) ecc. Da rilevare che esso è stato osservato soltanto in nebulose *planetarie*.

Si tratta senza dubbio di una questione assai importante; per questo conto di riprenderla presto in esame, adoperando per le osservazioni filtri di luce differenti da quelli impiegati attualmente.

([26]) « Annalen den Wiener Sternwarte » (1907).

([27]) J. Hopmann, *Photometrische Untersuchungen von Nebelflecken*. « Astronom. Nachr. », bd. 214 (1921), pag. 425.

([28]) « Montly Notices », vol. 80, pag. 200 (1919). Cfr. anche: B. Vorontsov-Velyaminov and O. Cramer, *Photometric Study of Planetary nebula NGC 6853* (*Dumbbell*), « Russian Astron. Journal », vol XIV, pag. 301 (1937).

([29]) C. Wirtz, *Beobachtungen von Nebelflecken am 40 cm. Refraktor*. « Ann. Sternwarte Strassburg », bd. IV (1911); e Armellini, op. cit., pag. 51.

Geodesia. — *Sul passaggio da uno a un altro degli ellissoidi locali relativi a una data regione del geoide e sulle conseguenti variazioni delle coordinate ellissoidiche dei vertici della rete geodetica.* Nota (1) di Corradino Mineo, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

In un recente articolo, ho esaminato se e quando sia possibile sostituire un unico ellissoide a due o più altri ellissoidi di riferimento, e, nel caso di possibilità, ho dato le formole che permettono di passare dalle deviazioni del geoide rispetto a uno a quelle rispetto a un altro degli ellissoidi considerati. Rientra in questo problema il caso particolarissimo in cui si voglia passare da un ellissoide locale a un altro ellissoide locale, l'uno e l'altro relativi a una stessa regione del geoide (*cambiamento dell'ellissoide locale* o del *punto di riferimento*, come anche si suol dire). I due ellissoidi risultano allora tangenti alla superficie geoidica in due punti, che sono precisamente i punti di riferimento su ciascuno degli ellissoidi stessi. Posto che la rete di triangoli geodetici determinata sulla superficie geoidica si sia distesa e calcolata su uno dei due ellissoidi, si tratta di trasportarla sul secondo ellissoide: date, cioè, le coordinate ellissoidiche dei vertici della rete geoidica proiettati sul primo ellissoide, si tratta di passare alle coordinate ellissoidiche delle proiezioni dei vertici della stessa rete sul secondo ellissoide. Pervengo a formole assai semplici, che dànno le variazioni delle coordinate nel passaggio dall'uno all'altro ellissoide in funzione delle deviazioni (angolari e lineare) del secondo punto di riferimento rispetto al primitivo ellissoide: formole utili in pratica, (particolarmente in una questione odierna) (2).

---

(1) Presentata nell'Adunanza del 23 novembre 1940-XIX.

Vedi Corradino Mineo, *Sulla possibilità di sostituire un unico ellissoide a due o più ellissoidi di riferimento e sulla determinazione del geoide*, in « Pubblicazioni dell'Osservatorio Astronomico di Palermo », vol. IX, num. 3, Palermo, 1940-XIX.

(2) Nel problema di ridurre eventualmente la nostra triangolazione geodetica dall'ellissoide locale relativo a Genova a quello relativo a Monte Mario. Vedi: *Elementi della rete geodetica fondamentale a sud del parallelo di Roma*, « Reale Commissione Geodetica Italiana », Firenze, Barbera, 1919.

1. Suppongo che gli elementi misurati (latitudine, longitudine, azimut astronomici ecc.) siano stati già ridotti al geoide. Denoto generalmente con l e λ la latitudine e la longitudine astronomiche d'un punto del geoide; con φ e ω la latitudine e la longitudine ellissoidiche del punto corrispondente sul considerato ellissoide di riferimento (in una corrispondenza *per normali geodiche*). Si ha quindi

$$[1] \qquad \xi = l - \varphi \quad , \quad \eta = (\lambda - \omega)\cos l \, ,$$

dove ξ, η denotano le deviazioni della verticale, verso nord e verso est, nel punto considerato. Le quantità ξ, η si considerano come *piccole del 1° ordine*, e, come si suole, si trascurano i termini di grado superiore al primo rispetto alla coppia ξ, η; ma, per semplicità, si trascureranno anche, in questo studio, i termini contenenti i prodotti $e^2\xi$, $e^2\eta$, essendo e l'eccentricità dell'ellissoide (di rotazione e schiacciato) di riferimento [1]. Per le coordinate cartesiane del punto ellissoidico considerato, si ha dunque:

$$[2] \quad \begin{cases} x = \dfrac{a\cos\varphi\cos\omega}{\sqrt{1-e^2\operatorname{sen}^2\varphi}} \cong \dfrac{a\cos l\cos\lambda}{\sqrt{1-e^2\operatorname{sen}^2 l}} + a\xi\operatorname{sen} l\cos\lambda + a\eta\operatorname{sen}\lambda \, , \\ y = \dfrac{a\cos\varphi\operatorname{sen}\omega}{\sqrt{1-e^2\operatorname{sen}^2\varphi}} \cong \dfrac{a\cos l\operatorname{sen}\lambda}{\sqrt{1-e^2\operatorname{sen}^2 l}} + a\xi\operatorname{sen} l\operatorname{sen}\lambda - a\eta\cos\lambda \, , \\ z = \dfrac{a(1-e^2)\operatorname{sen}\varphi}{\sqrt{1-e^2\operatorname{sen}^2\varphi}} \cong \dfrac{a(1-e^2)\operatorname{sen} l}{\sqrt{1-e^2\operatorname{sen} l}} - a\xi\cos l \, ; \end{cases}$$

dove a indica il semiasse maggiore dell'ellissoide.

Ciò posto, si abbiano due ellissoidi di riferimento, E_1 ed E_2 *contigui, tali cioè che almeno un punto M del geoide sia comune ai campi d'osservazione relativi agli ellissoidi stessi*. Supponiamoli riferiti ai loro centri O_1, O_2 e ad essi ortogonali rispettivamente paralleli, essendo gli assi delle z coincidenti con i rispettivi assi di rotazione e paralleli all'asse del mondo. Supponiamo ancora, per amor di brevità, che i due ellissoidi abbiano le stesse dimensioni (nessuna difficoltà essenziale, del resto, a supporre le dimensioni variabili da ellissoide a ellissoide). Chiamiamo: l_M, λ_M la latitudine e la longitudine astronomiche del punto M, $\varphi_M^{(1)}$, $\omega_M^{(1)}$ la latitudine e la longitudine ellissoidiche del punto M_1 in cui la verticale per M (cioè la normale al geoide in M) incontra l'ellissoide E_1; $\varphi_M^{(2)}$, $\omega_M^{(2)}$ le analoghe

[1] Queste quantità non sono sempre trascurabili e se ne terrà conto in lavori successivi. Vedi in proposito C. Mineo, *Sulla geometria d'una superficie poco differente da un ellissoide con applicazione al caso della Terra*. « Annali di Matematica pura e applicata », ser. IV, to. XIV, 1935–36, Bologna, pagg. 255–273.

quantità per il punto M_2 in cui la stessa verticale incontra l'ellissoide E_2; α, β, γ le coordinate cartesiane di O_2 rispetto al triedro di origine O_1; dalle formole di trasformazione delle coordinate cartesiane, nel caso di assi paralleli e dello stesso verso, segue facilmente:

$$[3]\quad \begin{cases} \alpha = (h_1 - h_2)\cos l_M \cos\lambda_M + a\left(\xi_M^{(1)} - \xi_M^{(2)}\right)\operatorname{sen} l_M \cos\lambda_M + \\ \qquad\qquad + a\left(\eta_M^{(1)} - \eta_M^{(2)}\right)\operatorname{sen}\lambda_M , \\ \beta = (h_1 - h_2)\cos l_M \operatorname{sen}\lambda_M + a\left(\xi_M^{(1)} - \xi_M^{(2)}\right)\operatorname{sen} l_M \operatorname{sen}\lambda_M - \\ \qquad\qquad - a\left(\eta_M^{(1)} - \eta_M^{(2)}\right)\cos\lambda_M , \\ \gamma = (h_1 - h_2)\operatorname{sen} l_M - a\left(\xi_M^{(1)} - \xi_M^{(2)}\right)\cos l_M , \end{cases}$$

essendo

$$[4]\quad h_1 = \overline{M_1 M}\quad , \quad h_2 = \overline{M_2 M}\quad , \quad \xi_M^{(i)} = l_M - \varphi_M^{(i)} ,$$
$$\eta_M^{(i)} = \left(l_M - \omega_M^{(i)}\right)\cos l_M , \qquad (i = 1, 2) .$$

Queste relazioni sono state date nel mio articolo citato (formole [5]) e servono a collegare due ellissoidi locali contigui, posto che il punto M appartenga all'uno e all'altro campo d'osservazione relativi ai due ellissoidi.

Se più punti sono comuni ai due campi d'osservazione, α, β, γ si potranno ottenere in più modi e se ne potranno avere i valori più convenienti ecc. Ma qui io voglio semplicemente supporre che si abbia soltanto un unico ellissoide di riferimento, per esempio E_1, sul quale sia stata distesa e calcolata la triangolazione geodetica, a partire da un punto di riferimento P (punto di contatto di E_1 con il geoide), per il quale dunque si ha

$$[5]\quad \xi_P^{(1)} = \eta_P^{(1)} = h_P^{(1)} = 0 ,$$

epperò

$$[6]\quad l_P = \varphi_P^{(1)}\quad , \quad \lambda_P = \omega_P^{(1)} .$$

Sia poi $\overline{P}$ un altro vertice della rete geoidica, quindi un punto del geoide, e si voglia sostituire all'ellissoide locale E_1 relativo al punto P l'ellissoide locale relativo al punto $\overline{P}$. Si continui a chiamare E_2 questo secondo ellissoide. Per far ciò, bisogna naturalmente determinare le coordinate astronomiche $\bar{l}$ e $\bar{\lambda}$ del punto $\overline{P}$, e si avrà:

$$[7]\quad \bar{l} = l_{\overline{P}} = \varphi_{\overline{P}}^{(2)}\quad , \quad \bar{\lambda} = \lambda_{\overline{P}} = \omega_{\overline{P}}^{(2)}\quad , \quad h_{\overline{P}}^{(2)} = 0 .$$

Lo scostamento

$$[8]\quad \bar{h} = h_{\overline{P}}^{(1)}$$

del punto $\overline{P}$, rispetto al primitivo ellissoide E_1, si deve pure ritenere determinato (con il solito metodo classico delle quadrature meccaniche, adoperando i dati astronomici e le determinazioni ellissoidiche fatte su E_1). Applicando le [3] al punto $\overline{P}$, *che viene a essere un punto comune ai campi di osservazione relativi a* E_1 *ed* E_2, si ha:

$$[9] \qquad \begin{cases} \alpha = h \cos \bar{l} \cos \bar{\lambda} + a\,\bar{\xi} \operatorname{sen} \bar{l} \cos \bar{\lambda} + a\,\bar{\eta} \operatorname{sen} \bar{\lambda}\,, \\ \beta = h \cos \bar{l} \operatorname{sen} \bar{\lambda} + a\,\bar{\xi} \operatorname{sen} \bar{l} \operatorname{sen} \bar{\lambda} - a\,\bar{\eta} \cos \bar{\lambda}\,, \\ \gamma = h \operatorname{sen} \bar{l} - a\,\bar{\xi} \cos \bar{l}\,, \end{cases}$$

essendo

$$[10] \qquad \bar{\xi} = \bar{l} - \varphi_{\overline{P}}^{(1)} \quad , \quad \bar{\eta} = \left(\bar{\lambda} - \omega_{\overline{P}}^{(1)}\right) \cos \bar{l}\,.$$

E con le [9] le quantità α, β, γ restano determinate in funzione di quantità note. Le [3] si possono allora considerare come un sistema lineare nelle incognite $h_1 - h_2$, $\xi_M^{(1)} - \xi_M^{(2)}$, $\eta_M^{(1)} - \eta_M^{(2)}$: se ne deduce:

$$[11] \qquad \begin{cases} \xi_M^{(2)} = \xi_M^{(1)} - \dfrac{1}{a} (\alpha \operatorname{sen} l_M \cos \lambda_M + \beta \operatorname{sen} l_M \operatorname{sen} \lambda_M - \gamma \cos l_M)\,, \\ \eta_M^{(2)} = \eta_M^{(1)} - \dfrac{1}{a} (\alpha \operatorname{sen} \lambda_M - \beta \cos \lambda_M)\,, \\ h_2 = h_1 - \alpha \cos l_M \cos \lambda_M - \beta \cos l_M \operatorname{sen} \lambda_M - \gamma \operatorname{sen} l_M\,. \end{cases}$$

Dalle quali, eliminando α, β, γ per mezzo delle [9]:

$$[12] \qquad \begin{cases} \xi_M^{(2)} = \xi_M^{(1)} - \dfrac{h}{a} (\cos \bar{l} \operatorname{sen} l_M \cos (\bar{\lambda} - \lambda_M) - \operatorname{sen} \bar{l} \cos l_M) - \\ \qquad - \bar{\xi} (\operatorname{sen} \bar{l} \operatorname{sen} l_M \cos (\bar{\lambda} - \lambda_M) + \cos \bar{l} \cos l_M) + \\ \qquad - \bar{\eta} \operatorname{sen} l_M \operatorname{sen} (\bar{\lambda} - \lambda_M)\,, \\ \eta_M^{(2)} = \eta_M^{(1)} + \dfrac{\bar{h}}{a} \cos \bar{l} \operatorname{sen} (\bar{\lambda} - \lambda_M) + \bar{\xi} \operatorname{sen} \bar{l} \operatorname{sen} (\bar{\lambda} - \lambda_M) - \bar{\eta} \cos (\bar{\lambda} - \lambda_M)\,, \\ h_2 = h_1 - \bar{h} (\cos \bar{l} \cos l_M \cos (\bar{\lambda} - \lambda_M) + \operatorname{sen} \bar{l} \operatorname{sen} l_M) - \\ \qquad - a\,\bar{\xi} (\operatorname{sen} \bar{l} \cos l_M \cos (\bar{\lambda} - \lambda_M) - \cos \bar{l} \operatorname{sen} l_M) - \\ \qquad - a\bar{\eta} \cos l_M \operatorname{sen} (\bar{\lambda} - \lambda_M)\,. \end{cases}$$

Le [12] risolvono non soltanto il problema di trasportare la rete geodetica dall'ellissoide E_1, all'ellissoide E_2, ma anco quello di assumere questo secondo ellissoide, in vece del primitivo, come superficie di partenza per costruire una porzione del geoide.

Se si mira soltanto al primo scopo, bastano le prime due delle [12], che si possono scrivere in modo più opportuno. Si noti anzitutto che le quantità come $\bar{h}/a$ sono da considerare come piccole del 1° ordine e che quindi, salvo quantità piccole del 2° ordine, qui trascurate, nei secondi membri delle [12] è lecito sostituire l_M e λ_M con $\varphi_M^{(1)}$ e $\omega_M^{(1)}$. Tenendo poi conto delle generiche [1], le prime due delle [12] si possono scrivere

$$[13]\quad \begin{cases} \varphi_M^{(2)} = \varphi_M^{(1)} + \dfrac{\bar{h}}{a}\left(\cos\bar{l}\,\operatorname{sen}\varphi_M^{(1)}\cos\left(\bar{\lambda}-\omega_M^{(1)}\right) - \operatorname{sen}\bar{l}\,\cos\varphi_M^{(1)}\right) + \\ \qquad + \bar{\xi}\left(\operatorname{sen}\bar{l}\,\operatorname{sen}\varphi_M^{(1)}\cos\left(\bar{\lambda}-\omega_M^{(1)}\right) + \cos\bar{l}\,\cos\varphi_M^{(1)}\right) + \\ \qquad + \bar{\eta}\,\operatorname{sen}\varphi_M^{(1)}\operatorname{sen}\left(\bar{\lambda}-\omega_M^{(1)}\right), \\ \omega_M^{(2)} = \omega_M^{(1)} - \left\{\operatorname{sen}\left(\bar{\lambda}-\omega_M^{(1)}\right)\left(\dfrac{\bar{h}}{a}\cos\bar{l} + \bar{\xi}\operatorname{sen}\bar{l}\right) - \bar{\eta}\cos\left(\bar{\lambda}-\omega_M^{(1)}\right)\right\}\sec\varphi_M^{(1)}. \end{cases}$$

Come si vede, tutto il problema, dovendo naturalmente supporre determinate le coordinate astronomiche $\bar{l}$ e $\bar{\lambda}$ del nuovo punto $\overline{P}$ di riferimento, si riduce alla determinazione d'un solo scostamento lineare rispetto al primitivo ellissoide E_1: quello, $\bar{h}$, del nuovo punto di riferimento $\overline{P}$. A questo scopo, non occorrono determinazioni astronomiche in tutta la regione considerata, ma soltanto lungo uno o più cammini geoidici rileganti P a $\overline{P}$. Poichè una rete ellissoidica è pienamente determinata dalle coordinate ellissoidiche dei suoi vertici, le [13] risolvono interamente il problema.

Fisica. — *Sulla distribuzione angolare dei neutroni emessi nella disintegrazione di elementi leggeri.* Nota di Mario Ageno, Edoardo Amaldi, Daria Bocciarelli e Giulio Cesare Trabacchi, presentata (1) da Giulio Cesare Trabacchi, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

1. Sulla distribuzione angolare dei prodotti di disintegrazione degli elementi leggeri sono stati raccolti finora pochi dati. Da questi risulta che nel caso più semplice del deuterio bombardato con deutoni la distribuzione angolare, sia dei protoni come dei neutroni emessi, rispettivamente nelle reazioni

$$D^2 + D^2 \rightarrow H^3 + H^1$$

$$D^2 + D^2 \rightarrow He^3 + n^1$$

è, in ogni piano passante per il fascio di deutoni, simmetrica rispetto alla normale al fascio stesso, riferendo naturalmente i dati di misura a un sistema di coordinate in cui il baricentro è fermo (2).

In altri casi, e precisamente nella disintegrazione del Li^6 e del B^{11}, bombardati rispettivamente con deutoni e con protoni, si sono trovate, per i protoni e le particelle α emesse, distribuzioni angolari diverse e che variano con l'energia delle particelle che producono la disintegrazione.

La difficoltà di eseguire tali esperienze consiste nel fatto che le particelle emesse nelle varie direzioni hanno un'energia che dipende dalla direzione secondo la quale esse escono dal nucleo composto, ed è quindi necessario che il metodo adottato per rivelarle non abbia diversa sensibilità a seconda dell'energia delle particelle che devono essere registrate, altrimenti bisogna ricorrere ad opportune correzioni dei dati ottenuti.

D'altra parte i dati sulla distribuzione angolare dei prodotti di distintegrazione nei processi di risonanza hanno interesse, in particolare nel

(1) Nell'Adunanza del 23 novembre 1940-XIX.

(2) A. E. Kempton, B. C. Browne, R. Maarsdorp, « Proc. Roy. Soc. », A 157, 386 (1936).

Neuert, « Physik. Zeits. », *38*, 122, 618 (1937), « Naturwiss. », *26*, 429 (1938).

R. O. Haxby, J. S. Allen, J. H. Williams, « Phys. Rev. », *55*, 140 (1939).

caso di elementi leggeri, in quanto attraverso ad essi si ricavano informazioni sul tipo del livello di risonanza del nucleo composto, quando si ammetta che tale livello sia unico, come è probabile nel caso dei nuclei leggeri.

Abbiamo mostrato in una nota precedente [3] che la sezione d'urto per scissione dell'U^{238} è sensibilmente costante per neutroni di energia compresa tra 0,2 e $\sim$ 10 MV. Il fenomeno di scissione dell'uranio offre perciò un metodo di rivelazione dei neutroni del tutto indipendente dalla loro energia entro un intervallo di energia assai esteso. Abbiamo usato quindi l'uranio come rivelatore dei neutroni, allo scopo di determinare la distribuzione angolare dei neutroni emessi nelle seguenti reazioni

$$D^2 + D^2 \rightarrow He^3 + n^1$$

$$D^2 + Be^9 \rightarrow B^{10} + n^1$$

$$D^2 + Li^7 \rightarrow Be^8 + n^1$$

$$\rightarrow 2\,He^4 + n^1$$

Abbiamo anche con lo stesso metodo determinato la distribuzione angolare dei neutroni emessi nella reazione D + B. Questi però costituiscono uno spettro assai esteso le cui righe sono da attribuirsi a tre processi diversi

$$D^2 + B^{11} \rightarrow C^{12} + n^1$$

$$D^2 + B^{11} \rightarrow 3\,He^4 + n^1$$

$$D^2 + B^{10} \rightarrow C^{11} + n^1$$

e per ricavare dati utili dalle distribuzioni trovate sperimentalmente bisognerebbe distinguere i vari gruppi di neutroni aventi diverse energie e trovare di ciascuno la distribuzione angolare.

Il fascio di deutoni usato era accelerato con una tensione di 850 Kv.

Il Be e il Li venivano usati sotto forma di dischetti metallici, il boro sotto forma di un disco di B_2O_3.

2. Il rivelatore di neutroni era la stessa camera di ionizzazione usata nelle esperienze sulla scissione dell'uranio, avente come elettrodi due dischi paralleli di 5 cm. di diametro e alla distanza di 3 cm., uno dei quali era ricoperto di uno strato spesso di U_3O_8, l'altro connesso a un amplificatore che registrava gli impulsi dovuti alla scissione dell'uranio a mezzo di una scala di otto Philips 4686.

[3] M. Ageno, E. Amaldi, D. Bocciarelli, N. B. Cacciapuoti, G. C. Trabacchi, « R. Acc. Italia », *10*, VII, 525, (1940).

La camera di ionizzazione era montata su di un braccio che le permetteva di fare i desiderati spostamenti angolari, mantenendola su di una circonferenza avente il centro nel punto medio della piastrina colpita dal fascio dei deutoni (fig. 1). La distanza fra la piastrina bombardata e la camera di ionizzazione era 12 cm.

Per evitare errori dovuti alla non perfetta centratura del sistema, le misure venivano eseguite in ambedue i semipiani separati dalla direzione del fascio di deutoni, e veniva presa come intensità registrata per ogni angolo ϑ la media dei dati ottenuti per quell'angolo nei due semipiani.

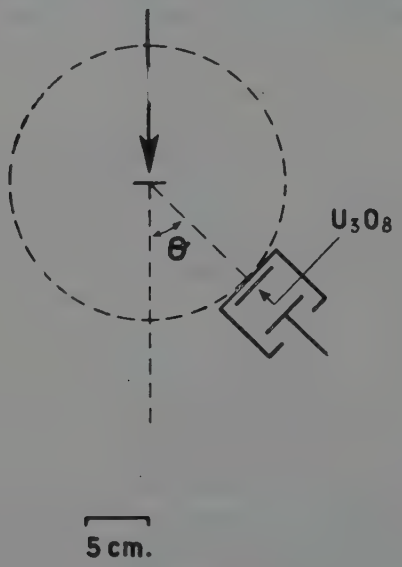


Fig. 1.

Per compensare eventuali variazioni di intensità dovute per esempio ad alterazioni della superficie della sostanza bombardata o a variazioni di intensità del fascio di deutoni, venivano eseguite serie complete di misure, per angoli crescenti e decrescenti, nei due semipiani distinti dalla direzione del fascio di deutoni, alternativamente.

Le condizioni della sorgente di ioni e la tensione al tubo acceleratore erano mantenute molto costanti, e gli eventuali disturbi elettrici venivano accusati mediante un oscillografo. Inoltre per essere certi dell'assenza di questi ultimi, periodicamente si sostituiva all'elettrodo ricoperto di uranio della camera di ionizzazione un elettrodo nudo, e con l'impianto in funzione, si verificava l'effetto di zero.

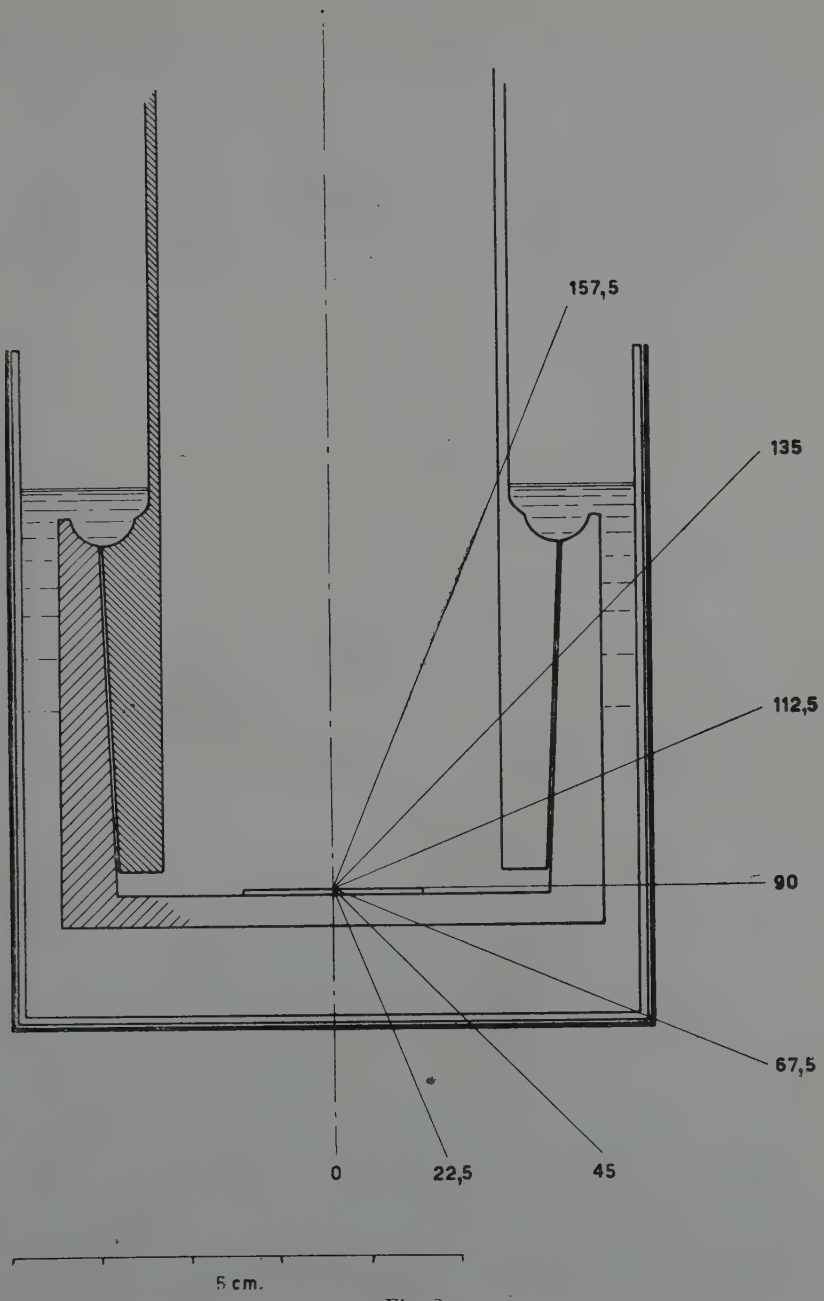


Fig. 2.

Dato che il processo di scissione dell'uranio avviene anche, per l'isotopo 235 per neutroni lenti, si è avuta particolare cura di eliminare il più possibile la presenza di neutroni comunque diffusi e si è anche ricoperta la parete esterna della camera con uno strato di cadmio di 0,52 gr/cm² di spessore per eliminare eventuali neutroni di energia termica.

Per esser certi delle buone condizioni dell'esperienza abbiamo poi eseguito delle misure per controllare se l'intensità dei neutroni raccolti dalla camera di ionizzazione variava effettivamente, nelle diverse direzioni, in ragione inversa del quadrato della distanza tra la camera e l'elemento bombardato.

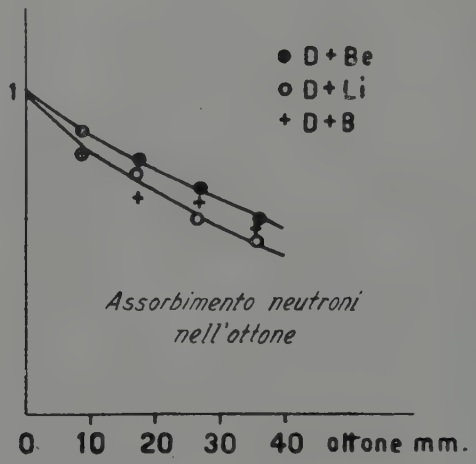


Fig. 3.

Si è poi dovuto tener conto dell'assorbimento che i neutroni subiscono nell'attraversare il materiale che costituisce la coda, cioè l'estremità inferiore del tubo, nella quale è contenuto l'elemento bombardato.

Essendo la coda del tubo cilindrica, lo spessore di parete che i neutroni devono attraversare per raggiungere la camera di ionizzazione è infatti diverso a seconda della direzione secondo la quale i neutroni escono dalla piastrina bombardata. Di più, oltre al metallo, i neutroni devono attraversare anche lo strato d'acqua o di aria liquida che avvolge l'estremità inferiore del tubo per refrigerarla (fig. 2 e fig. 5).

Le correzioni relative all'assorbimento sono assai sensibili e variano con l'energia dei neutroni. Abbiamo quindi, per i neutroni emessi in ciascuna delle reazioni studiate, determinato la curva di assorbimento sia nel materiale che costituiva la coda sia nell'acqua o nell'aria liquida. A questo scopo vennero fatte alcune serie di misure usando la camera di ioniz-

zazione in posizione fissa, e precisamente nella direzione $\vartheta = 0^0$ come rivelatore di neutroni, e introducendo a ridosso del fondo della coda spessori crescenti del materiale assorbente sul cammino del fascio di neutroni raccolto nella camera.

Nel caso delle reazioni D + Be, D + Li, D + B, la coda usata era in ottone, e il raffreddamento era fatto a mezzo di uno strato di acqua corrente (fig. 2) contenuto in un recipiente di ottone rivestito di uno strato di cadmio di 0,52 gr cm^2 perchè non arrivassero alla camera neutroni diffusi dall'acqua.

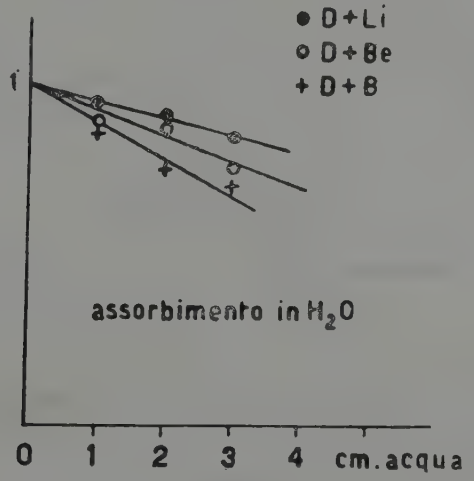


Fig. 4.

Nelle figg. 3 e 4 sono riportate rispettivamente le curve di assorbimento nell'ottone e nell'acqua per i neutroni emessi in queste reazioni. Si osserva che nel caso del boro l'assorbimento nell'acqua è più forte che nel caso del berillio, benchè lo spettro dei neutroni del boro si estenda a energie assai maggiori di quelle del berillio, evidentemente a causa della presenza della parte molle assai intensa nello spettro dei neutroni del boro.

Nel caso della reazione D + D, l'esperienza veniva eseguita bombardando del ghiaccio pesante, per mantenere il quale l'estremità inferiore della coda del tubo veniva tenuta nell'aria liquida (fig. 5). A questo scopo veniva usata una coda in ferro a parete sottile (1 mm.) e uniforme: le correzioni dovute all'assorbimento dei neutroni in essa sono perciò trascurabili.

Le misure di assorbimento in aria liquida sono state fatte per i neutroni della D + Be (fig. 6) anzichè della D + D, per comodità di

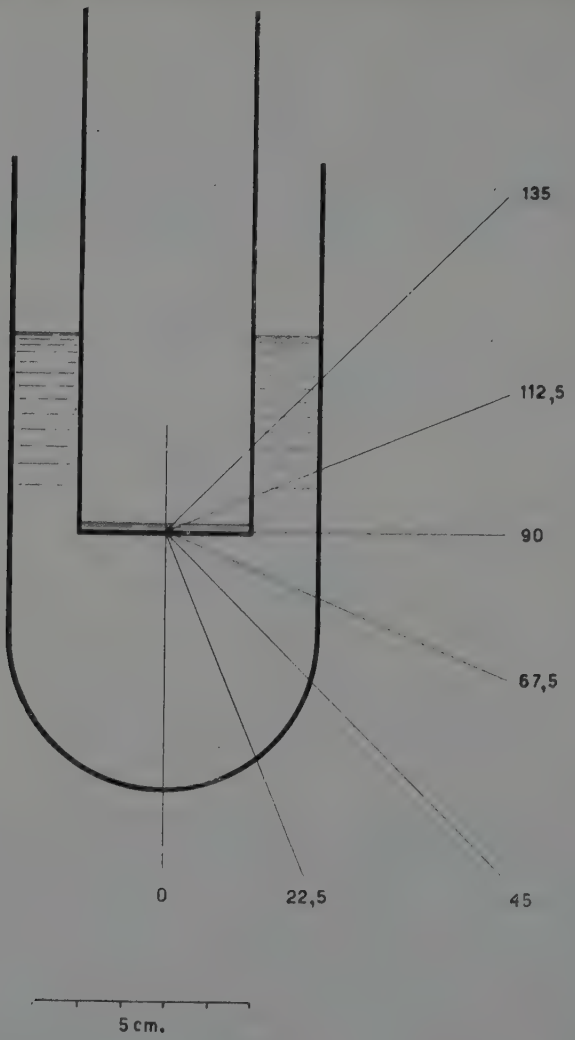


Fig. 5.

lavoro, ritenendo di non commettere con questo un errore apprezzabile, dato che l'energia media dei neutroni emessi nella reazione D + Be è all'incirca eguale a quella dei neutroni emessi nella D + D. Abbiamo contato senza aria liquida 72,6 ± 0,2 impulsi al minuto e con uno strato

di 3 cm. di spessore di aria liquida posto sul cammino dei neutroni 64,1 ± 0,2 impulsi al minuto (4).

3. I risultati delle misure di distribuzione angolare dei neutroni emessi nelle reazioni D + Be, D + Li, D + B sono riportati nelle Tabelle I, II e III con le correzioni relative. In queste sono indicati nella colonna ϑ gli angoli tra la direzione di incidenza del fascio dei deutoni e quella di osservazione; nella I_s (ϑ) gli impulsi al minuto registrati

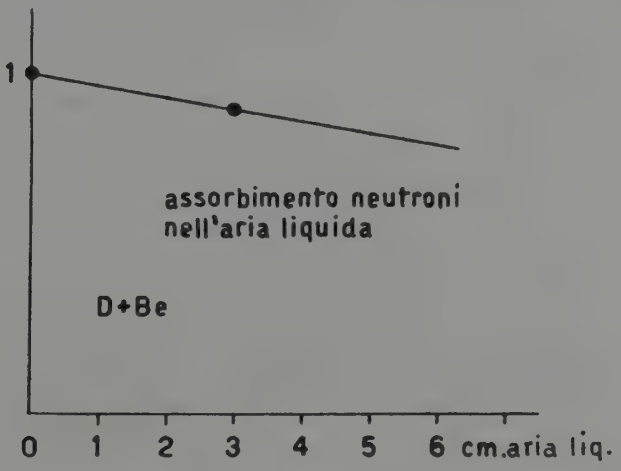


Fig. 6.

dalla camera e i relativi errori; nelle σ_1 e σ_2 rispettivamente gli spessori di acqua e di ottone in millimetri attraversati dai neutroni, e nelle $\left(\frac{I}{I_0}\right)_1$ e $\left(\frac{I}{I_0}\right)_2$ i corrispondenti coefficienti di riduzione dell'intensità dedotti dalle curve di assorbimento. La colonna I (ϑ) dà infine le intensità corrette, nelle varie direzioni, prendendo eguale a 100 l'intensità per $\vartheta = 0°$.

Nelle figg. 7, 8 e 9 sono tracciati i grafici corrispondenti nel sistema di riferimento del laboratorio.

---

(4) Diamo, qui come nelle tabelle, l'errore probabile, calcolato cioè secondo l'espressione $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{\Sigma\varepsilon^2}{n(n-1)}}$.

TABELLA I (D + Be).

ϑ	$I_s(\vartheta)$	σ_1	$(I/I_0)_1$	σ_2	$(I/I_0)_2$	$I(\vartheta)$
0	111,7 ± 0,3	10	0,92	6	0,91	100
22,5	110,4 ± 0,01	11	0,91	7,3	0,89	102
45	104,5 ± 0,1	14	0,89	8	0,88	100
67,5	94 ± 0,1	25	0,80	15	0,80	100,5
90	104,2 ± 0,1	4	0,97	11,5	0,84	96
112,5	116 ± 0,1	4	0,97	14	0,81	111
135	119 ± 0,1	5,5	0,95	17,2	0,78	122

TABELLA II (D + Li).

ϑ	$I_s(\vartheta)$	σ_1	$(I/I_0)_1$	σ_2	$(I/I_0)_2$	$I(\vartheta)$
0	590 ± 11	10	0,95	6	0,88	100
22,5	590 ± 9	11	0,94	7,3	0,86	105
45	527 ± 7	14	0,92	8	0,84	96,7
67,5	434 ± 7	25	0,87	15	0,75	94
90	437 ± 7	4	0,98	11,5	0,80	78,2
112,5	408 ± 6	4	0,98	14	0,76	77,5
135	342 ± 4	5,5	0,97	17,2	0,72	69,4

TABELLA III (D + B).

ϑ	$I_s(\vartheta)$	σ_1	$(I/I_0)_1$	σ_2	$(I/I_0)_2$	$I(\vartheta)$
0	84 ± 3	10	0,88	6	0,87	100
45	66 ± 2	14	0,84	8	0,84	84
90	42 ± 2	4	0,95	11,5	0,77	52,2
135	40 ± 1	5,5	0,94	17,2	0,70	56

Nel caso della D — Be è stata fatta una esperienza di controllo delle correzioni fatte per gli assorbimenti in acqua e nell'ottone. Precisamente

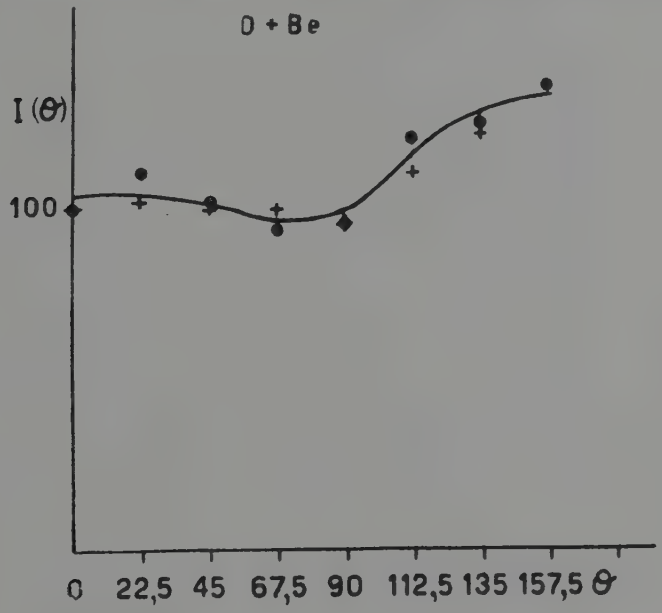


Fig. 7.

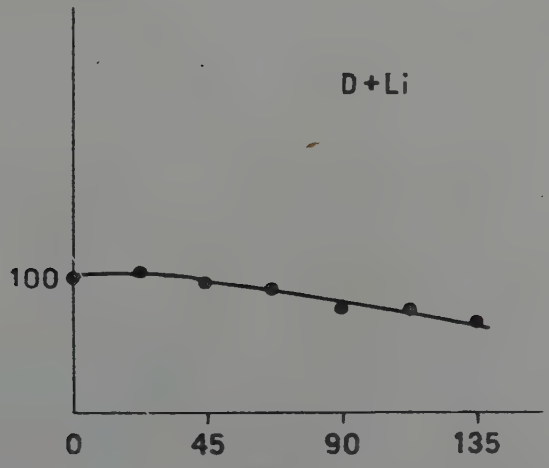


Fig. 8.

sono state ripetute le misure tenendo la lastrina di berillio in una coda a pareti di 1 mm. di ferro, raffreddata per mezzo di un anello di rame per-

corso da acqua, saldato attorno alla coda a 26 cm. dal fondo e ricoperto di cadmio. Nella fig. 7 le crocette rappresentano i dati delle misure cor-

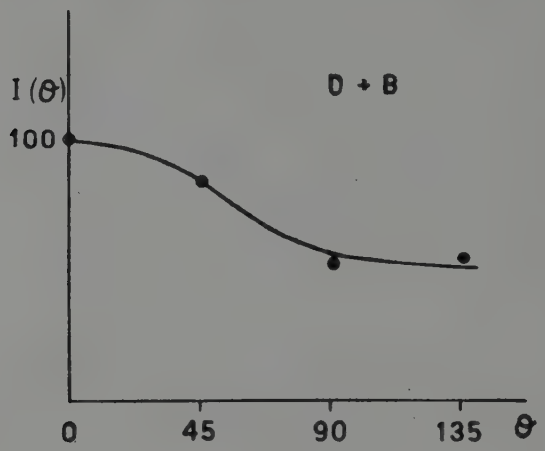


Fig. 9.

rette per gli assorbimenti, e i punti i dati ottenuti in quest'ultima esperienza di controllo (Tabella IV).

TABELLA IV (D + Be).

ϑ	$I_s(\vartheta)$	$I(\vartheta)$
0	83 ± 3	100
22,5	92 ± 3	111
45	86 ± 4	103
67,5	78 ± 3	94
90	79 ± 3	96
112,5	101 ± 3	122
135	112 ± 5	125
157,5	113 ± 4	137

La distribuzione dei neutroni della D + D è riportata nella Tabella V e nella fig. 10. Nella tabella V sono nella prima colonna gli angoli ϑ di

Tabella V (D + D).

ϑ	$I_s(\vartheta)$	σ_1	I/I_0	$I(\vartheta)$	$I(\bar{\vartheta})$	$\bar{\vartheta}$
0	532 ± 48	60	0,79	674	512	0
22,5	436 ± 6	57	0,70	624	485	25,45
43	296 ± 5	48	0,83	357	297	50,53
65	211 ± 5	38	0,86	245	234	75,46
90	182 ± 4	25	0,91	200	210	98,27
110	237 ± 6	12	0,96	247	286	120,20
132,5	290 ± 7	22	0,92	315	297	141,0

osservazione, nella seconda le intensità osservate, nella terza gli spessori in mm. di aria liquida attraversati dai neutroni prima di raggiungere la camera, nella quarta i corrispondenti coefficienti di riduzione dedotti dalla fig. 6. Nella quinta sono le intensità corrette per questo assorbi-

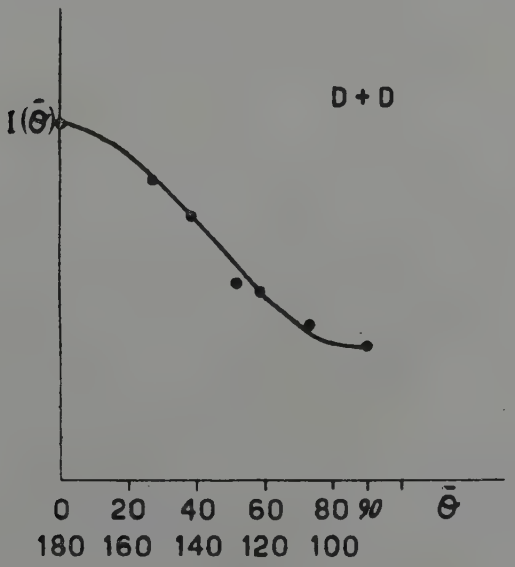


Fig. 10.

mento e infine nelle ultime due colonne sono le intensità e gli angoli relativi riportati a un sistema di coordinate che si muove col baricentro delle masse D + D.

Dalla fig. 10 risulta, in accordo con le misure degli altri Autori, che la distribuzione è simmetrica rispetto alla direzione normale a quella di incidenza dei deutoni. La curva tracciata sul grafico e che meglio si adatta ai punti trovati sperimentalmente, rappresenta la funzione $1 + 1{,}6 \cos^2 \vartheta$. Confrontando questo risultato con le misure di KEMPTON, BROWN e MAARSDORP, si trova che la distribuzione angolare dei neutroni emessi varia con la tensione in modo del tutto simile a quanto hanno trovato recentemente altri Autori [5] per i protoni emessi nella reazione $D^2 + D^2 \rightarrow H^3 + H^1$.

I risultati sperimentali non sono invece in pieno accordo con quelli di MYERS [6] il quale ammettendo che lo stato del nucleo composto sia ${}^3_1P$ deduce che la distribuzione angolare dovrebbe avvenire secondo la funzione $1 + \cos^2 \vartheta$ indipendentemente dall'energia dei deutoni incidenti. Ciò non sorprende in quanto MYERS stesso osserva che questo resultato non deve essere considerato che come un tentativo in quanto il processo non è di risonanza.

---

[5] R. D. HUNTOON, A. ELLET, D. S. BAYLEY, J. A. VAN ALLEN, «Phys. Rev.», 58, 97, 1940.

[6] R. D. MYERS, «Phys. Rev.», 54, 361 (1938).

Fisica. — *Contributo allo studio degli spettri* γ *e X molli dei prodotti di disintegrazione del radon.* Nota di MANUEL VALADARES, presentata (1) da GIULIO CESARE TRABACCHI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

1. Lo studio, per diffrazione cristallina, della radiazione γ ed X emessa da una ampolla contenente radon, nella regione spettrale da 700 a 1400 U. X., è stato oggetto di pochissime ricerche. In un vecchio lavoro, che è stato la prima applicazione della spettrografia cristallina allo studio della radiazione γ, RUTHERFORD e ANDRADE hanno dato le lunghezze d'onda di diverse righe osservate in questa regione; questi valori numerici sono stati più tardi corretti in seguito alla constatazione di un piccolo errore sistematico messo in evidenza da RUTHERFORD e WOOSTER. La conclusione più importante di questi lavori era che le righe più intense osservate corrispondevano alle righe dello spettro caratteristico L di raggi X degli elementi di numero atomico 83 (trasmutazione $RaB \rightarrow RaC$) ed 84 (trasmutazione $RaC \rightarrow RaC'$).

Nel 1939 HULUBEI e CAUCHOIS hanno pubblicato i primi risultati (gli Autori non hanno ancora dato una lista completa delle righe osservate) di uno studio simile. Dalle righe osservate gli Autori concludono per l'esistenza di uno spettro molto intenso corrispondente a 83, di uno debole corrispondente a 84 e di uno debolissimo corrispondente a 82 (2).

Inoltre, avendo osservato nello spettro l'esistenza di due righe, la cui lunghezza d'onda era quella (calcolata applicando la legge di MOSELEY) di $L\alpha_1$ e $L\beta_1$ di un elemento di numero atomico 85, hanno avanzato l'ipotesi dell'esistenza di questo elemento fra i prodotti di disintegrazione del radio.

Avendo in corso una ricerca in questo campo, riferisco in questa Nota alcuni risultati già acquisiti, riguardanti un'aspetto del problema che non è stato preso in considerazione dagli altri Autori: quello del rapporto fra le intensità delle diverse righe spettrali.

---

(1) Nell'Adunanza del 23 novembre 1940–XIX.

(2) Secondo gli Autori questo spettro 82 potrebbe essere dovuto, almeno in parte, al piombo che canalizzava la radiazione.

2. Il metodo spettrografico che io impiego è, come nelle esperienze di Rutherford e collaboratori, quello di Bragg. Lo spettrografo di Bragg possiede, in via generale, una luminosità molto inferiore a quella dello spettrografo a focalizzazione adoperato da Hulubei e Cauchois; tuttavia questa mancanza di luminosità è in certa misura compensata dal fatto che io adopero come cristallo il salgemma, il cui potere riflettente è superiore a quello della mica utilizzata dai predetti autori. Osserviamo inoltre che nello spettrografo di Bragg non si presenta, come nello spettrografo a cristallo curvo, l'assorbimento dovuto al fatto che la radiazione deve traversare il cristallo; mentre questo assorbimento, trascurabile per la radiazione di 700 U. X., è molto importante già per quella di 1200 U. X.

Il cristallo di salgemma (superficie 4 × 4 cm.) possiede un movimento di rotazione prodotto da un motore elettrico, mentre diversi eccentrici permettono di dare all'angolo di rotazione del cristallo il valore desiderato. Quando si tratta di studiare delle righe molto deboli, il cristallo viene mantenuto fermo, e ciò, a causa della divergenza del fascio e delle altre condizioni geometriche dell'apparato, permette lo studio di una zona spettrale della larghezza di 100 U. X. (corrispondente, per il salgemma, ad una variazione d'angolo di 1°). L'eccentrico più piccolo dà una variazione angolare di 2° e quello più grande di 5°.

La sorgente, che si trova al centro di un cubo di piombo (di 50 cm. di lato), è costituita da un tubo di vetro a parete molto sottile, contenente emanazione; la radiazione è canalizzata mediante del piombo ricoperto di alluminio.

La distanza sorgente–cristallo è stata, nella maggior parte delle prove, 33 cm., corrispondenti ad una dispersione dell'ordine di 8 U. X/mm.

La registrazione dello spettro è fatta su una pellicola radiografica a doppia emulsione, sul cui lato posteriore è posto un rinforzatore. Notiamo che se non si adopera il rinforzatore si ha un contrasto più grande tra il velo del fondo dovuto alla radiazione diffusa, e le righe; ciò sarebbe interessante per lo studio delle righe deboli, ma purtroppo il tempo di posa diventa troppo grande.

Nelle condizioni indicate una sorgente di 600 millicurie dà in un quarto d'ora le righe più intense dello spettro. Secondo Hulubei e Cauchois, una sorgente di 100 mc. dà *dopo qualche ore*, lo spettro delle righe più intense. Si può pertanto concludere che la luminosità è presso a poco la stessa nei due spettrografi.

La misura della posizione di ciascuna riga è fatta mediante il microfotometro Zeiss.

3. Il problema dell'intensità relativa delle righe può essere affrontato da due diversi punti di vista; o si confrontano le intensità delle righe dello

spettro di un solo elemento, oppure si studia il rapporto di intensità fra certe righe degli spettri di diversi elementi. Dato che, a quel che mi consta, non è stata mai fatta dettagliatamente l'analisi dei due aspetti di questo problema, mi soffermo a trattarlo nei suoi particolari.

Cominciamo col caso del rapporto di intensità fra le righe spettrali di un elemento eccitato mediante la conversione interna della radiazione γ. Distinguerò ancora in questo processo due possibilità che portano a conclusioni completamente differenti.

Prendiamo dapprima il caso in cui i quanti γ emessi hanno un'energia sufficiente per espellere degli elettroni dallo strato L, ma inferiore al lavoro di estrazione dal livello K. In queste condizioni gli elettroni saranno espulsi per unità di tempo dai differenti sotto–livelli L nelle proporzioni seguenti: 17 (per L_I); 5 (per L_{II}), 1 per L_{III}) [1]. Allora se alla espulsione foto–elettrica segue il passaggio di elettroni dagli strati esterni al livello L, si avrà uno spettro tale che l'intensità totale delle righe a livello finale L_I sarà tre volte e mezzo più grande dell'intensità totale delle righe a livello finale L_{II}, e questa cinque volte più grande di quella di L_{III}. Nello spettro L dei raggi X le righe a livello finale L_I sono $\beta_3, \beta_4, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ quelle che corrispondono a delle transizioni verso L_{II} sono $\beta_1, \gamma_1, \gamma_5$, e quelle verso $L_{III}, \alpha_1, \alpha_2, \beta_2, \beta_5, \beta_6, \beta_7, l$. Si potrà per conseguenza scrivere:

$$I_I = 3{,}5\ I_{II} = 17\ I_{III} \qquad \begin{aligned} I_I &= \beta_3 + \beta_4 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 \\ I_{II} &= \beta_1 + \gamma_1 + \gamma_5 + \eta \\ I_{III} &= \alpha_1 + \alpha_2 + \beta_2 + \beta_5 + \beta_6 + \beta_7 + l \end{aligned}$$

indicando con I_I, I_{II}, I_{III} le intensità totali di ciascuno di questi gruppi.

Ora nello spettro dei raggi X eccitati per bombardamento catodico, le intensità sono nelle proporzioni seguenti.

$$I_I = 11\,; \quad I_{II} = 48\,; \quad I_{III} = 100$$

Si vede, per conseguenza, che lo spettro di fluorescenza emesso a causa del fenomeno di conversione interna, pur avendo le medesime righe dello spettro eccitato in una ampolla a raggi X, presenta queste righe con delle intensità molto diverse. Bisogna tuttavia fare un'osservazione; i passaggi $L_{II} \rightarrow L_I$ e $L_{III} \rightarrow L_I$ non sono dei passaggi proibiti, e se essi avvengono, evidentemente il rapporto precedente cambia in favore di L_{II} e L_{III}. Nella teoria delle righe satelliti di COSTER e KRONIG si ammettono questi passaggi; tuttavia non si possiedono dati quantitativi al riguardo.

In ogni modo noi abbiamo per il controllo di questo ragionamento un dato di ordine sperimentale. La trasmutazione $RaD \rightarrow RaE$ è l'esempio

[1] Ho preso come esempio delle righe dello spettro β emesso dalla radiazione γ di 54 *ekV* nella trasmutazione $RaB \rightarrow RaC$, valore sperimentale di ELLIS e ASTON.

di una trasmutazione in cui si ha emissione solamente di radiazioni γ di energia compresa fra E_K e E_L. Ora, analizzando col metodo di assorbimento la radiazione emessa dal *RaD*, Amaldi e Rasetti hanno verificato che per una radiazione $L\beta$ abbastanza intensa non si poteva rivelare alcuna emissione $L\alpha$; se si nota che nello spettro naturale l'intensità totale $L\beta$ è 96 per una intensità $L\alpha$ eguale a 112, si conclude che vi è un netto indebolimento della radiazione corrispondente a L_{III}. In conseguenza, benchè possano accadere dei passaggi $L_{II} \rightarrow L_I$ ed $L_{III} \rightarrow L_I$, questi passaggi non avvengono in quantità tale da diminuire il valore del nostro ragionamento.

Passo ora all'analisi del caso in cui si ha emissione di quanti aventi tutti una energia superiore ad E_K. In queste condizioni le intensità delle righe dello spettro β emesso sono nel rapporto seguente:

$$100 \text{ fotoelettroni } K : 17 \text{ fotoelettroni } L_I.$$

L'intensità delle righe corrispondenti ai fotoelettroni L_{II} e L_{III} è in questo caso trascurabile [1]. Gli elettroni del livello K verranno sostituiti da elettroni di L_{III}, L_{II}, M_{III}, M_{II}, N_{III} (righe $Ka_1, \alpha_2, \beta_{1,3}, \beta_2$ dello spettro di raggi X) nelle proporzioni seguenti:

$$100\ (\alpha_1) : 50\ (\alpha_2) : 35\ (\beta_{1,3}) : 15\ (\beta_2)\ [2].$$

Cioè, di 100 elettroni K emessi la metà è sostituita da elettroni di L_{III} e la quarta parte da elettroni di L_{II}. Vi saranno per conseguenza per unità di tempo e nei tre livelli L_I, L_{II}, L_{III} i seguenti posti vuoti:

$$17\ L_I \quad 25\ L_{II} \quad 50\ L_{III}$$

Per conseguenza in questo caso il rapporto tra le intensità totali delle righe $\rightarrow L_{II}$ e $\rightarrow L_{III}$ resta lo stesso che nello spettro naturale e le righe $\rightarrow L_I$ hanno una intensità tre volte più grande.

Nessuno studio è stato fatto fino ad ora, per controllare questo ragionamento e questo controllo è appunto .lo scopo di questa ricerca.

Si potrebbe ora passare al caso di corpi emettenti dei raggi γ di energia superiore e inferiore a E_K, ma in base a quanto ho detto sembra non necessario, tanto più che allora bisognerà tener conto caso per caso delle intensità relative di queste due categorie di radiazioni.

4. L'altro problema, al quale abbiamo già accennato è quello del rapporto di intensità tra le righe degli spettri dei differenti elementi. Consi-

---

[1] Ho preso come esempio la radiazione di 354 *ekV* emessa nella trasmutazione $RaB \rightarrow RaC$.

[2] I lavori di Frilley (famiglie del radio e dell'attinio) e miei (famiglie del radio e del torio) hanno mostrato che nello spettro di fluorescenza K degli elementi radioattivi, il rapporto di intensità fra le diverse righe è il medesimo dello spettro di raggi X ottenuto per bombardamento catodico.

deriamo le trasmutazioni $A \rightarrow B$, e $B \rightarrow C$, trasmutazioni accompagnate da emissione γ e in conseguenza dagli spettri di raggi X caratteristici dei numeri atomici rispettivamente B e C.

L'intensità totale delle righe dello spettro dei raggi X emesso da ogni elemento e per ogni unità di tempo sarà proporzionale al numero di atomi che si distintegra per unità di tempo, al numero di quanti emessi per ogni atomo, al coefficiente di conversione interna dei quanti emessi. Il prodotto di questi tre fattori è a sua volta uguale al numero dei fotoelettroni emessi per unità di tempo. A questo numero bisogna evidentemente sottrarre tutti i fotoelettroni degli strati esteriori a L e inoltre tutti i quanti $\rightarrow L$ che producono effetto AUGER. Finalmente occorrerà per i fotoelettroni K prendere solamente, come abbiamo visto prima, tre quarti del numero emesso.

Pertanto bisogna osservare che la determinazione dell'intensità totale dello spettro L è, per delle ragioni di ordine sperimentale, estremamente difficile. Bisogna contentarsi di fare il paragone tra certe righe di uno spettro e dell'altro.

Proviamo allora a stabilire il rapporto di intensità tra le due righe $L\alpha_1$ (transizione $\rightarrow L_{III}$) dei due spettri. Ammettiamo per esempio (è questo il caso che a noi interessa) che nelle due trasmutazioni l'azione fotoelettrica sullo stato L_{III} sia nulla o trascurabile. In questo caso, tutti i posti vuoti di L_{III} proverranno dai passaggi di $L_{III} \rightarrow K$ (sempre trascurando la possibilità $L_{III} \rightarrow L_I$) e per conseguenza il rapporto tra le intensità delle due righe $L\alpha_1$ sarà il rapporto tra i numeri dei fotoelettroni K espulsi per unità di tempo nelle due trasmutazioni. Non è necessario far intervenire l'effetto AUGER poichè per due elementi a numero atomico vicino il coefficiente AUGER è, come si può ammettere, il medesimo. Di conseguenza si avrà:

$$\frac{\text{intensità } L\alpha_1 \text{ (trasm. } A \rightarrow B)}{\text{intensità } L\alpha_1 \text{ (trasm. } B \rightarrow C)} = \frac{\text{numero di fotoelettroni } K \text{ (trasm. } A \rightarrow B)}{\text{numero di fotoelettroni } K \text{ (trasm. } B \rightarrow C)}.$$

5. Passiamo allora all'analisi dei risultati sperimentali tentando di controllare le previsioni che abbiamo fatto.

Nella regione da 700 a 1300 U. X. vi sono tre righe molto più intense di tutte le altre; con l'aiuto degli spettri di raggi X di confronto (serie K del tungsteno in diversi ordini e limiti di assorbimento di Ag e Br) ho potuto identificare queste tre righe come le $L\alpha_1$, β_1, γ_1 dello spettro di un elemento di numero atomico 83 (Bi). Essendo arrivato a questa conclusione, d'accordo del resto, con i risultati precedenti sia di RUTHERDORF e WOOSTER come pure di HULUBEI e CAUCHOIS, ho usato queste tre righe come righe campione per la misura, al microfotometro, della lunghezza d'onda delle altre righe. Ho adottato per lunghezza d'onda di queste tre righe i valori ottenuti da IDEI nel suo studio dello spettro L del Bi (83) isotopo del RaC: $\alpha_1 = 1141{,}5$; $\beta_1 = 950{,}0$; $\gamma_1 = 811{,}4$ U. X.

Ho così misurato un certo numero di righe che io attribuisco allo spettro d'un elemento 83 in seguito alle loro lunghezze d'onda; dò quindi nella tabella seguente sia queste righe come pure i valori di IDEI per lo spettro del bismuto.

TABELLA I.

Transizione	Riga	Lunghezze d'onda in U. X.	
		Idei spettro di Bi (83)	Valadares $RaB \rightarrow RaC$ (83)
$L_I \; M_{II}$	β_4	975,0	975
M_{III}	β_3	936,7	937
N_{II}	γ_2	794,0	793
N_{III}	γ_3	789,5	789 (1)
O_{III}	γ_4	759,3	760
$L_{II} \; M_I$	η	1056,5	1055
N_I	γ_5	837,7	838
M_{IV}	β_1	950,0	[950,0]
N_{IV}	γ_1	811,4	[811,4]
O_{IV}	γ_6	788,7	789 (1)
$L_{III} \; M_I$	l	1313,7	1315
O_I	β_6	991,3	992
N_I	β_7	933,0	933
M_{IV}	α_2	1153,0	1153
M_V	α_1	1141,5	[1141,5]
N_V	β_2	953,2	952
$O_{VI,V}$	β_5	923,6	924

(1) Nelle figure queste due righe non sono separate.

In questa tabella ho attribuito tutte le righe alla trasmutazione $RaB \rightarrow RaC$, ma è evidente che ogni trasmutazione che conduce all'elemento 83 può causare tali emissioni. Noto pertanto che la trasmutazione $RaD \rightarrow RaE$ (83) non ha alcuna parte a causa del lungo periodo del RaD.

Torniamo ora al problema delle intensità. Se si fa per la trasmutazione *RaB→RaC* il calcolo dei posti vuoti in ognuno dei sotto–livelli L per unità di tempo, si trova il rapporto:

$$100\ L_{III} : 54\ L_{II} : 43\ L_{I}$$

Di conseguenza per una medesima intensità $\rightarrow L_{III}$ le righe di transizione $\rightarrow L_I$ devono avere una intensità quattro volte più grande (1).

Se si desidera confrontare le intensità delle righe, la cui lunghezza d'onda è molto diversa si corre il rischio di commettere dei grandi errori, perchè si conoscono male o non si conoscono affatto i fattori seguenti: assorbimento dei diversi raggi nella parete di vetro dell'ago di radon, potere riflettente del salgemma per le diverse lunghezze d'onda, variazione della sensibilità della pellicola radiografica con l'energia dei quanti. Si deve quindi limitare l'analisi a dei raggi le cui lunghezze d'onde siano sufficientemente prossime perchè si possa ammettere che questi fattori abbiano, presso a poco, un valore costante. Notiamo ancora che in questa zona spettrale si trova il limite di assorbimento K del bromo (918 U. X.) e che, per conseguenza, il confronto tra le intensità delle righe situate da una parte e dall'altra di questo limite, anche per lunghezze d'onda vicine, rischia di essere molto falsato.

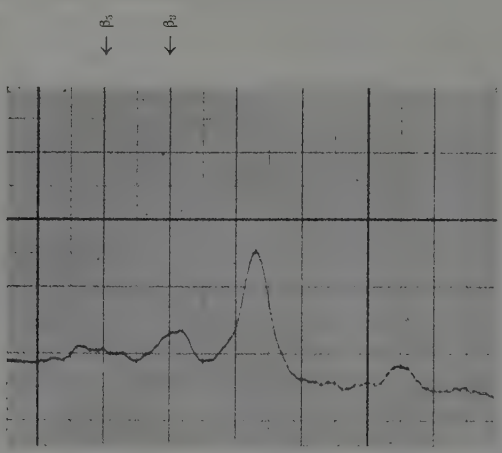
Tra i diversi rapporti che ho potuto stabilire ve n'è uno particolarmente dimostrativo. Si tratta del rapporto di intensità tra β_5 e β_3. Questi due raggi hanno, nello spettro dei raggi X eccitato per bombardamento catodico, presso a poco, la stessa intensità, pure essendo β_5 leggermente più intenso di β_3. Ora, nello spettro di fluorescenza in istudio β_5 è molto più debole di β_3; il microfotogramma 1 mette in evidenza questo fatto molto chiaramente.

Usando vari tempi di posa ho determinato che il rapporto di intensità tra la β_5 e la β_3 è uguale a 1 3. Si vede, quindi, che per una stessa intensità della β_3 (transizione $\rightarrow L_I$) la riga β_5 (transizione $\rightarrow L_{III}$) è diventata tre volte più debole il che corrisponde all'ordine di grandezza dell'indebolimento previsto. Notiamo che in questo rapporto le cause di errore di cui abbiamo parlato sono poco importanti poichè si tratta di righe molto vicine, e se, d'altra parte si dovesse fare una correzione (diverso assorbimento nelle pareti dell'ago di radon) questa correzione si dovrebbe fare nel senso di aumentare β_3.

Stabilisco ora il rapporto tra alcune altre copie di righe, ma in ogni modo l'esempio β_5, β_3 è il più significativo.

---

(1) Nel calcolo precedente non abbiamo tenuto conto dell'effetto Auger perchè questo darebbe luogo ad atomi doppiamente ionizzati e quindi a righe satelliti.



Microfotogramma 1.

6. Ho affrontato il secondo problema proposto, cioè il rapporto tra le intensità delle righe di spettri diversi, determinando il rapporto tra le intensità della $L\alpha_1$ (83) e $L\alpha_1$ (84) che corrispondono rispettivamente alle trasmutazioni $RaB \rightarrow RaC$ e $RaC \rightarrow RaC'$; poichè queste due righe hanno lunghezze d'onda vicine le cause d'errore, cui abbiamo accennato precedentemente, sono trascurabili.

Le due trasmutazioni sono del tipo presentato al paragrafo 4 e per conseguenza,

$$\frac{\text{Intensità } L\alpha_1\ (84)}{\text{Intensità } L\alpha_1\ (83)} = \frac{\text{numero di fotoelettroni } K\ (RaC \rightarrow RaC')}{\text{numero di fotoelettroni } K\ (RaB \rightarrow RaC)}.$$

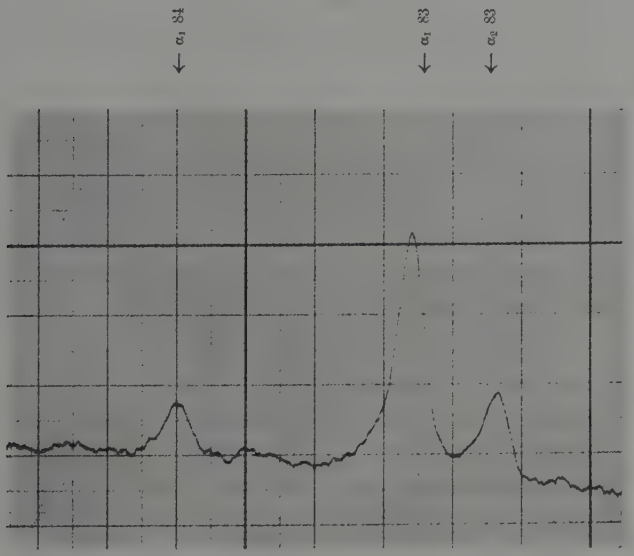
Evidentemente per determinare questo rapporto bisogna avere la intensità dello spettro beta (originato nel livello K) per unità di tempo, oppure, il che è lo stesso in questo caso di sostanze in equilibrio, per lo stesso numero di atomi disintegrati. Nei lavori di Ellis e Wooster, di Ellis e Aston vi sono le intensità dei raggi emessi nelle trasmutazioni $RaB \rightarrow RaC$ e $RaC \rightarrow RaC'$ calcolati riferendosi a una stessa unità, il che ci permette di determinare il rapporto precedente. Se si prende l'intensità totale delle righe che, in seguito all'analisi dello spettro γ, sappiamo provenire dallo strato K, si trova:

$$\frac{\text{intensità } L\alpha_1\ (84)}{\text{intensità } L\alpha_1\ (83)} = \frac{16{,}5}{275} = 6\ \%.$$

Bisogna notare che vi sono molte righe dello spettro beta sia relative al passaggio $RaB \rightarrow RaC$ sia a $RaC \rightarrow RaC'$ che non sono comprese nell'ana-

lisi dello spettro γ. Se si ammette, allora, che tutte queste righe siano dovute a fotoelettroni K, il rapporto precedente assume il valore 8 %.

Il microfotogramma 2 mostra le righe $L\alpha_1$ (84) e $L\alpha_1\,\alpha_2$ (83). Come si vede $L\alpha_1$ (84) è un po' meno intensa di $L\alpha_2$ (83), la quale a sua volta, ha un'intensità che è il 12 % di quella di $L\alpha_1$ (83). In seguito al confronto di numerose pellicole fatte con sorgenti di diverse intensità e con diversi tempi di posa ho trovato che l'intensità di $L\alpha_1$ (84) è il 9 % di quella di $L\alpha_1$ (83).



Microfotogramma 2.

L'accordo, data la precisione sia del calcolo fatto, sia della determinazione sperimentale è del tutto soddisfacente. Vi è tuttavia una differenza tra i miei risultati e quelli di HULUBEI e CAUCHOIS. Secondo questi Autori: « L'emissione L dell'84 avviene, in relazione a quella dell'83, con un'intensità molto più debole di quella che ci saremmo dovuta aspettare in seguito ai risultati conosciuti degli spettri dei raggi β o γ ».

Questo disaccordo tra il mio risultato e quello degli Autori citati mi ha spinto a studiare se il rapporto tra le intensità delle righe α_1 dell'elemento 83 e dell'84 variava con l'età della sorgente. Ho fatto la seguente esperienza: si determina lo spettro subito dopo la preparazione dell'ago di emanazione (posa di 24 ore), si prende un'altra pellicola dopo quattro giorni, e una altra ancora quando la sorgente ha otto giorni. Ho trovato sempre lo stesso rapporto; anche quando nelle due serie di misure che ho

fatto sembrava piuttosto che l'intensità della α_1 84 crescesse in rapporto alla α_1 83. In ogni caso la variazione rimane nell'ordine di grandezza degli errori possibili e d'altra parte se questo effetto esiste si oppone evidentemente a spiegare la discordanza tra i risultati di HULUBEI e CAUCHOIS e i miei.

7. Continuo ora l'analisi delle righe deboli in modo da classificarle o come raggi γ o come raggi di fluorescenza di numero atomico diverso da 83. Alcune di queste righe potrebbero essere interpretate come appartenenti allo spettro di raggi X di elementi di numero atomico 87 e 85; tuttavia solo lo studio dettagliato che sto facendo sia delle lunghezze d'onda, sia delle intensità delle righe di tutta questa regione spettrale potrà delucidare la questione.

Queste ricerche sono state fatte nel Laboratorio di Fisica dell'Istituto di Sanità Pubblica. Desidero esprimere al Direttore generale dell'Istituto, prof. D. MAROTTA e al prof. G. C. TRABACCHI, Capo del Laboratorio fisico la mia viva riconoscenza per l'interesse prestato alle mie ricerche e per aver messo a mia disposizione mezzi di lavoro così importanti.

Durante il mio soggiorno in Italia ho usufruito di mezzi forniti dallo Stato portoghese (Instituto Para a Alta Cultura).

BIBLIOGRAFIA

1. AMALDI e RASETTI, « Ric. Scient. », *10*, 111 (1939).
2. COSTER and KRONIG, « Physica », *2*, 13 (1935).
3. ELLIS and ASTON, « Proc. Roy. Soc. », A, *129*, 180 (1930).
4. ELLIS and WOOSTER, « Proc. Ray. Soc. », A, *114*, 276 (1927).
5. FRILLEY, « Thèse », Paris, 1928; « Journ. Phys. » (8), *1*, 34 (1940).
6. HULUBEI et CAUCHOIS, « C. R. », *209*, 39 (1939).
7. IDEI, « Sci. Rep. Tohoku Imp. Univ. », *19*, 559 (1930).
8. RUTHERFORD and ANDRADE, « Phil. Mag. », *27*, 854 (1914); *28*, 262 (1914).
9. RUTHERFORD and WOOSTER, « Proc. Camb. Phil. Soc. », *22*, 834 (1925).
10. VALADARES, « Thèse », Paris, 1933.

Chimica (Metallurgia). — *Sulla resilienza, a bassa temperatura, degli acciai comuni e speciali* [1]. Nota di Adolfo Antonioli, presentata [2] dall'Accademico Gian Battista Bonino.

Nella tecnica moderna le applicazioni per cui in servizio si debbano sopportare basse temperature sia occasionalmente, sia con una certa regolarità, ma con sbalzi più o meno imprevisti (aeroplani per alta quota, ferrovie nordiche, funivie di alta montagna) sia con una temperatura di regime prefissata (impianti di liquefazione di gas, di separazione di costituenti solidi da olii minerali, ecc.) vanno diventando sempre più frequenti. D'altra parte il crescente impiego, in seguito alle particolari condizioni politico-economiche, dei nuovi tipi di acciai autarchici al cromo molibdeno ed al manganese molibdeno, sulle proprietà dei quali non esiste nella letteratura internazionale una documentazione così vasta come quella dei classici tipi contenenti nichel, ha reso necessario lo studio del loro comportamento a bassa temperatura. Questo studio peraltro non ha un interesse limitato al solo lato tecnologico, ma rientra in un campo in cui la scienza dei metalli ha ancora molto da dire. Le ragioni profonde del comportamento dei metalli alle basse temperature sfuggono ancora al nostro controllo; sono però state scoperte interessanti relazioni fra la struttura reticolare ed alcune proprietà a bassa temperatura [3] e si spera che l'applicazione delle moderne teorie elettroniche possa chiarire alcuni punti sinora oscuri. La presente ricerca, nella quale mi sono preoccupato anzitutto del lato sperimentale e tecnico della questione, vuol anche essere un primo passo, cui altri debbono seguire, nella direzione accennata.

La fragilità che quasi tutti gli acciai mostrano all'atto pratico a temperatura più o meno bassa, non trova una giustificazione nei risultati

---

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto Scientifico Tecnico Ernesto Breda – Sesto S. Giovanni.

[2] Nell'Adunanza del 23 novembre 1940-XIX.

[3] P. Schoenmaker, *Zerreiss- und Schlagversuche bei tiefen Temperaturen.* « Erste Mitt. neuen intern. Verbandes Materialprüf. », pag. 224 (1930).

della prova di trazione; col diminuire della temperatura il carico di rottura aumenta, l'allungamento – a meno che si raggiungano temperature dell'ordine di grandezza di quella dell'aria liquida – diminuisce di pochissimo ed il lavoro di rottura, definito dall'area compresa nella curva carico–deformazione, cresce per la maggior parte degli acciai.

Nella prova di resilienza invece moltissimi acciai mostrano, in un campo di temperatura che va da quella ambiente a — 50°, una notevole diminuzione del lavoro di rottura.

La ragione del differente comportamento del materiale nelle due prove va cercato nel differente tipo di sollecitazione. In un campo di sollecitazione esistono componenti normali e componenti di taglio; alle prime il materiale oppone la resistenza al distacco, alle seconde quello allo scorrimento. Dai rapporti fra sollecitazioni e resistenze al distacco ed allo scorrimento dipende se il materiale si rompe nettamente o si deforma. Nel primo caso la forza agisce per un tratto brevissimo, perciò il lavoro di rottura risulta molto minore di quando si ha una deformazione plastica. Nel caso della provetta di trazione il rapporto fra la sollecitazione normale e di taglio è 2 : 1, nel caso della provetta di resilienza è molto superiore, perciò con questa il materiale si trova più vicino al limite per cui si rompe per distacco. Bastano talvolta piccoli cambiamenti delle variabili sperimentali che producano una opportuna modificazione dei rapporti fra le sollecitazioni o fra le resistenze perchè si superi la soglia oltre la quale cambia il comportamento del materiale e con esso il lavoro di rottura. Questa forte influenza, con caratteri di discontinuità, che fattori esterni geometrico–meccanici esercitano sui risultati della prova di resilienza, complica l'interpretazione dei dati sperimentali e rende necessario un esame critico per sceverare ciò che è dovuto ad essi da quello che dipende da fattori intrinseci del materiale. D'altra parte la prova di resilienza è allo stato attuale delle conoscenze, la più adatta per studiare la fragilità e ad essa ho dovuto rivolgermi, accettandone gli inconvenienti.

Fra questi primo è la grave difficoltà, per non dire l'impossibilità di calcolare come la variazione delle condizioni di prova influisca sui risultati. La vasta massa dei dati esistenti nella letteratura internazionale ottenuti in condizioni differenti da quelli normalizzati da noi, era perciò difficilmente utilizzabile ed ho dovuto estendere la ricerca anche ai tipi di acciaio che ora si vogliono sostituire, affinchè il paragone con i nuovi tipi potesse essere fatto senza preoccupazioni.

Parte sperimentale.

La composizione chimica e le proprietà meccaniche a temperatura ambiente degli acciai studiati, scelti fra i più caratteristici di quelli in uso, sono riportate nelle tabelle 1 e 2.

Tabella 1.

Composizione chimica degli acciai studiati.

Marca	Tipo	C %	Si %	Mn %	Ni %	Cr %	Mo %	Forno usato per la fabbricazione
A	Mn–Mo da bonifica	0.28	0.29	1.42	—	—	0.17	induz. a. f.
B	Cr–Ni »	0.26	0.33	0.53	2.43	0.70	—	Héroult
C	Cr–Ni–Mo »	0.31	0.43	0.63	2.43	1.02	0.23	»
I	Cr–Mo »	0.30	0.26	0.60	—	0.96	0.32	»
M	Cr–Ni »	0.30	0.26	0.60	2.79	0.81	0.11	induz. a. f.
L	al carbonio	0.35	0.20	0.54	—	—	—	Héroult
O	» »	0.30	0.15	0.69	—	—	—	Martin
E	Cr–Ni da cementazione	0.14	0.18	0.47	4.33	0.81	—	induz. a. f.
F	Cr–Ni–Mo »	0.14	0.31	0.51	3.35	0.60	0.33	Héroult
H	Cr–Mo »	0.19	0.30	0.38	—	0.86	0.34	induz. a. f.
N	Cr–Mn–Mo »	0.21	0.29	1.11	—	1.26	0.31	» » »

Tabella 2.

Proprietà meccaniche dopo trattamento termico.

Marca	Temperatura di trattamento		R	s	A %	C %	Durezza
	tempra	rinvenimento	kg/mm²	kg/mm²	(1-10·d)		Vickers
A	840°/olio	1h 600°/olio	86.6	77.0	14.3	64.5	261–258
B	830°/ »	1h 590°/ »	86.2	75.3	13.3	64.3	261–264
C	830°/ »	1h 675°/ »	89.–	70.–	14.–	64.–	272–274
I	880°/ »	1h 615°/ »	91.6	75.3	11.7	69.6	295–301
M	830°/ »	1h 640°/ »	90.8	81.2	13.4	63.8	267–267
L_b	850°/acqua	1h 600°/olio	76.8	58.5	13.9	62.8	251–257
L_r	ricotto 1h 850° raffreddam. forno		59.2	38.4	19.–	45.7	166–163
O	850°/acqua	1h 600°/ »	72.2	50.8	18.–	69.–	232–234
E	830°/olio	1h 200° in olio	137.–	—	8.5	55.5	398–400
F	850°/ »	1h 200° »	122.0	—	7.5	58.–	336–318
H	890°/ »	1h 200° »	88.–	68.9	10 –	58.3	261–261
N	860°/ »	1h 200° »	138.3	—	8.–	51.–	451–454

Le prove sono state eseguite con la provetta italiana 10 × 10 × 55 con intaglio a U profondo 2 mm con raggio di arrotondamento 1 mm e con quella internazionale che ne differisce solo per la profondità dell'intaglio, che è di 5 mm anzichè 2. È stata adoperata una macchina Amsler da 30 kgm; il peso della mazza battente era 19.5 kg, l'altezza di caduta m 1.538, a cui corrispondeva una velocità d'urto di 5.6 m/secondo. L'inclinazione delle facce del coltello era di 30°, il raggio d'arrotondamento 2 mm. Le provette venivano raffreddate in una miscela alcool–anidride carbonica, quindi portate rapidamente sotto il maglio. Con una sottile termocoppia si misurò una volta tanto il tenue riscaldamento che esse subivano nel passaggio e se ne tenne conto nel fissare la temperatura del bagno. Per ulteriori dettagli sul metodo sperimentale rimando ad un mio lavoro in corso di pubblicazione [1]. I risultati sperimentali sono riportati nelle figure da 2 a 10; ogni punto è la media di almeno 3 e fino a 9 determinazioni, secondo le dispersioni osservate; queste non superavano generalmente 1 kgm/cm² dal valore medio.

Discussione dei risultati.

Se cerchiamo di idealizzare, nel tratto in cui gioca la fragilità a freddo, la curva resilienza–temperatura di un acciaio perlitico, otteniamo la forma a flesso di fig. 1; per molti degli acciai da me studiati, le temperature a cui

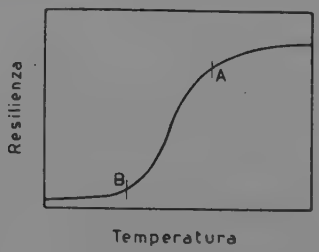


Fig. 1. – Curva ideale resilienza–temperatura per un acciaio perlitico.

ho operato corrispondevano ancora al ramo alto, perciò manca del tutto o in parte la zona di flesso.

Sui valori caratteristici di questa curva: resilienze nel ramo alto e basso, temperature A e B che li delimitano, ripidità del tratto critico intermedio influiscono, oltre a fattori intrinseci del materiale, quali la composizione chimica, il trattamento termico, la grossezza del grano, anche le condizioni di prova.

---

[1] A. Antonioli, *La prova d'urto a bassa temperatura*. « La Metallurgia Italiana », XXXIII, pag. 1 (1941).

Se si confrontano fra loro le coppie di figure 4 e 5, 7 ed 8, riguardanti risultati ottenuti sugli stessi acciai rispettivamente con le provette italiana ed internazionale, si nota che le curve hanno un andamento assai simile. Quelle ottenute con la provetta internazionale sono però più piatte, cioè con esse la resilienza diminuisce proporzionalmente di meno in funzione della temperatura. Quest'ultima provetta perciò si presta meno a mettere in evidenza le differenze fra tipo e tipo. In fig. 2 è illustrata la relazione, desunta dai miei dati sperimentali, fra la resilienza con le provette con intaglio da 2 mm. (K_2) e quelle con intaglio da 5 mm. (K_5). Nonostante le forti dispersioni che si notano a bassa temperatura, si può affermare che, per gli acciai bonificati a basso tenore di elementi alliganti,

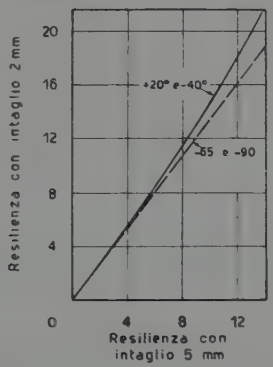


Fig. 2. – Relazione fra le resilienze determinate a varie temperature con provette con intagli ad U profondi 2 e 5 mm.

a –40° vale la stessa relazione desunta per la temperatura ambiente e rappresentata dalla curva a tratto pieno, che coincide praticamente con quelle di Steccanella e di Dupuy, Mellon e Nicolau, mentre si discosta leggermente da quella di Mailänder [1]. A temperatura più bassa invece il rapporto $\frac{K_2}{K_5}$ si abbassa, come mostra lo slittamento della curva di fig. 2 relativa alle temperature —65° e —90°.

Più complicati sono i rapporti se si tratta di acciai le cui curve resilienza–temperatura mostrino discontinuità nette o se, invece di cambiare solo la profondità dell'intaglio muta anche la forma di esso o il modo di sollecitazione (provetta Izod, sollecitata come trave incastrata, anzichè

[1] R. Mailänder, *Vergleichsversuche an kleinen Kerbschlagproben mit verschiedenen Kerbtiefen und -durchmessern*. « Archiv. f. Eisenhüttenw », X, pagg. 53–58 (1936).

come trave appoggiata). Allora cambia completamente la forma delle curve ed i rapporti fra i risultati ottenuti con le diverse provette variano molto da caso a caso e non possono essere rappresentati con una curva di validità pressochè generale (1).

Ho studiato anche l'effetto delle dimensioni del provino. In fig. 3 sono riportati i risultati ottenuti sull'acciaio al cromo–nichel–molibdeno bonificato. Il tratto critico, che con la provetta italiana ha un andamento assai dolce, assume con la provetta di dimensioni doppie un andamento quale con la prima provetta avrebbero solo acciai dolci non alligati.

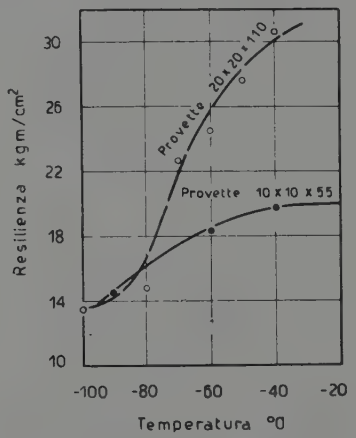


Fig. 3. – Resilienza a bassa temperatura di un acciaio al Cr–Ni–Mo con provette $10 \times 10 \times 55$ e $20 \times 20 \times 110$.

All'influenza della forma del provino da me illustrata bisogna aggiungere quella della velocità di applicazione del carico. Le curve resilienza–temperatura ottenute con velocità d'urto differenti e quelle del lavoro di rottura statico di provette uguali sono all'incirca parallele: il passaggio dagli alti ai bassi valori della resilienza avviene a temperatura tanto più bassa quanto minore è la velocità d'urto: minima per le provette rotte staticamente (2). Questo fatto ha grande valore agli effetti pratici, poichè mostra come l'importanza della prova di resilienza non è limitata ai soli casi in cui in servizio si abbiano urti o vibrazioni, in quanto la presenza

(1) Sergeson e Poole, « Proc. Amer. Soc. Test Mat. », XXXVI, I, pagg. 132–142 (1935).

(2) R. Mailänder, *Verhältnis der Ergebnisse von Kerbbiegeversuche zueinander*, « Archiv f. Eisenhüttenw », X, pagg. 109–110 (1936).

di un intaglio è sufficiente, senza il concorso dell'urto, a provocare una spiccata fragilità a bassa temperatura.

Le condizioni sperimentali influiscono fortemente sui risultati della prova d'urto. Se però noi astraiamo dal valore numerico della resilienza ad una determinata temperatura, che, per la non validità della legge di similitudine, non può servire all'ingegnere in sede di progetto e non è legata ad alcuna costante fisica, ma ci limitiamo ad eseguire confronti fra i vari materiali tenendo presenti i rapporti fra i valori nel ramo alto, la temperatura d'inizio del tratto critico, la pendenza di esso, che può esser

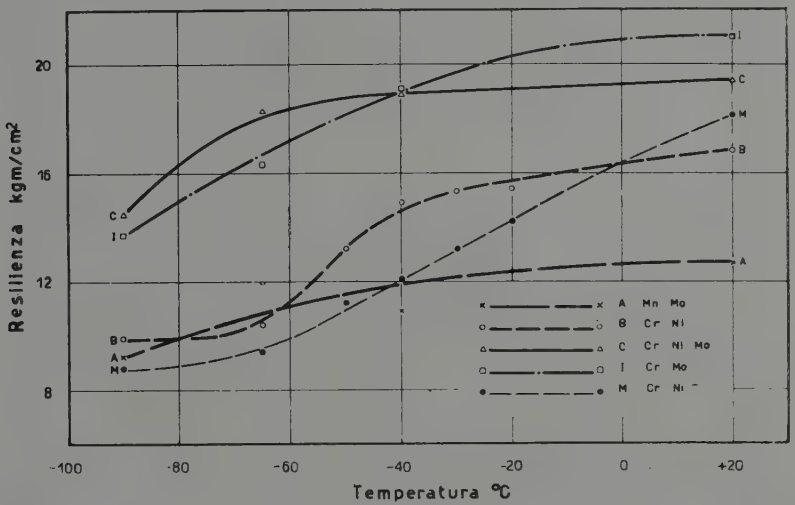


Fig. 4. – Resilienza a bassa temperatura di acciai da bonifica alligati. Provetta italiana $10 \times 10 \times 55$ con intaglio a U profondo 2 mm.

presa come indice della sensibilità del materiale ad un inasprimento delle condizioni di sollecitazione, vediamo che variazioni delle condizioni di prova provocano generalmente spostamenti paralleli ed è perciò possibile, quando il valore dei materiali non sia troppo simile, esprimere un giudizio di superiorità o inferiorità e costruire una scala di valori. L'esperienza casistica insegnerà poi quale gradino di essa è più adatto per ogni applicazione.

Stabiliti i criteri secondo i quali le curve resilienza–temperatura vanno considerate, si può passare ad illustrare l'influenza della composizione chimica. Nelle figg. 4 e 5 sono riportati i risultati ottenuti sugli acciai da bonifica alligati, i quali vennero trattati termicamente in modo da ottenere su tutti un carico di rottura di circa 90 kg/mm².

Gli acciai al cromo–nichel–molibdeno ed al cromo–molibdeno mostrano, oltre che valori più elevati a temperatura ambiente le diminuzioni

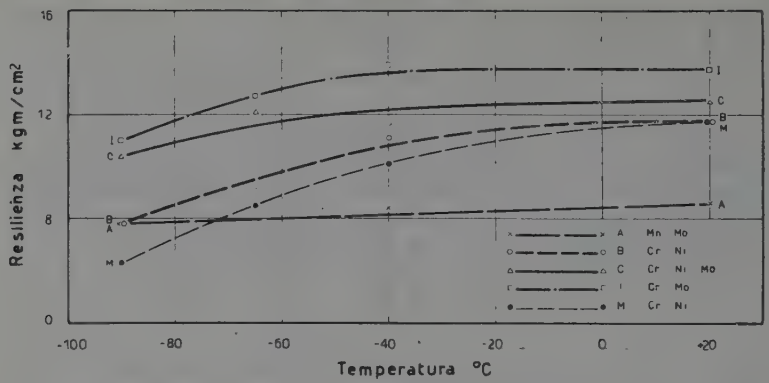


Fig. 5. – Resilienza a bassa temperatura di acciai da bonifica alligati. Provetta internazionale $10 \times 10 \times 55$ con intaglio a U profondo 5 mm.

più modeste in funzione della temperatura. Il comportamento del secondo è quasi uguale a quello del primo, perciò la sostituzione a scopi autarchici non deve generare preoccupazioni. Risultati leggermente inferiori hanno dato gli acciai al cromo–nichel; l'acciaio al manganese–molibdeno che a

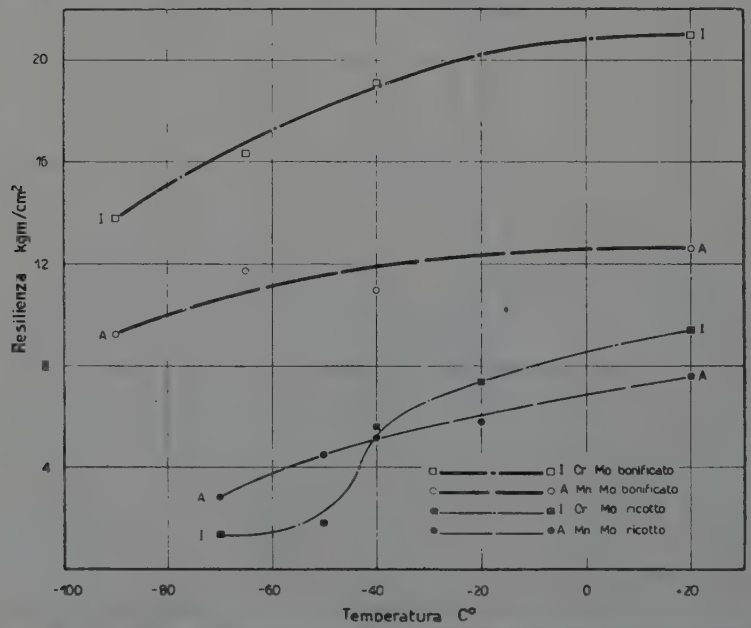


Fig. 6. – Influenza del trattamento termico sulla resilienza di acciai autarchici da bonifica.

temperatura ambiente è il più scadente. a —60° si può considerare equivalente agli acciai al cromo–nichel. Questo risultato tranquillizza sulla tenacità a bassa temperatura delle strutture d'aeroplano per le quali questo acciaio ha avuto vasta diffusione negli ultimi anni: è noto che nei voli ad altissima quota esse possono raggiungere temperature di parecchie

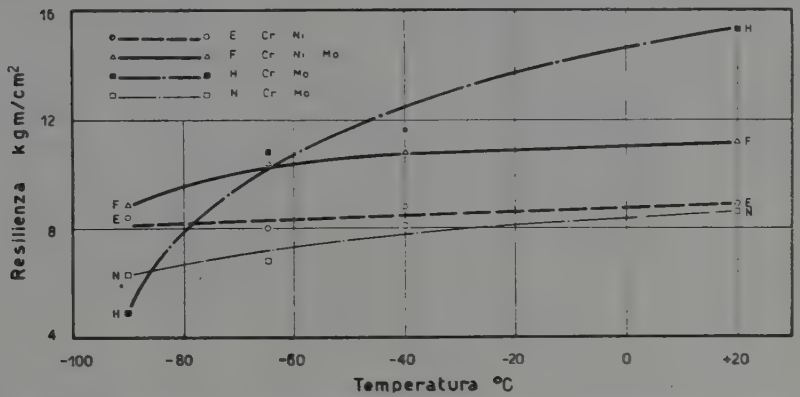


Fig. 7. – Resilienza a bassa temperatura di acciai da cementazione alligati. Provetta italiana $10 \times 10 \times 55$ con intaglio a U profondo 2 mm.

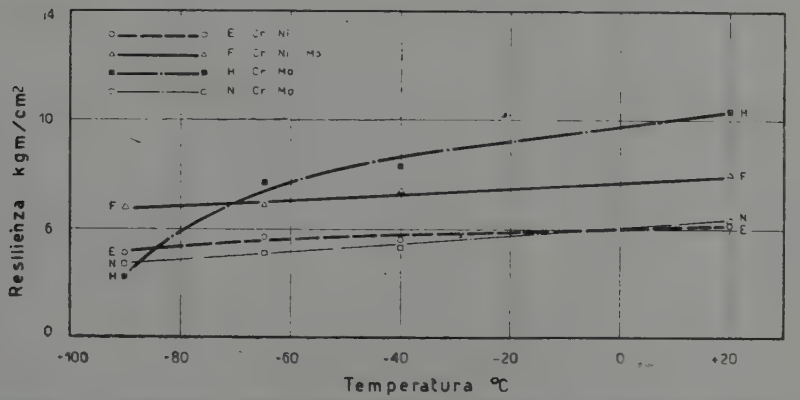


Fig. 8. – Resilienza a bassa temperatura di acciai da cementazione alligati. Provetta internazionale con intaglio a U profondo 5 mm.

decine di gradi sotto zero. Questo buon comportamento ha però come condizione indispensabile il trattamento di bonifica: lo stesso acciaio, come pure quello al cromo–molibdeno, si comporta assai male dopo ricottura, come dimostra il confronto fra le relative resilienze, eseguito in fig. 6.

Gli acciai da cementazione (figg. 7 e 8) vennero tutti temprati e rinvenuti a 200°, in modo da riprodurre le condizioni del cuore di pezzi

cementati. Le curve della resilienza hanno un andamento assai simile per tutti gli acciai ad eccezione di quello H, che ha un comportamento assai peggiore di quello N, da cui differisce solo per il minor tenore di manganese, che non ne consente la completa tempra al cuore. Ciò dimostra

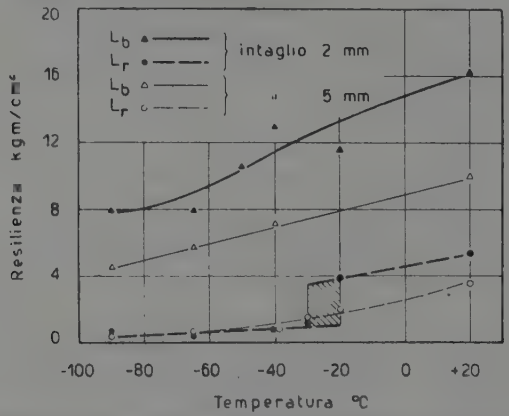


Fig. 9. – Resilienza a bassa temperatura di un acciaio con 0,35 % C fabbricato al forno Héroult. Provette italiana ed internazionale.

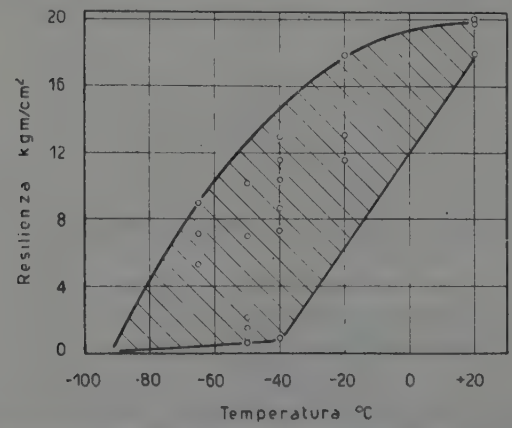


Fig. 10. – Resilienza a bassa temperatura di un acciaio con 0,30 % C fabbricato al fornò Martin. Provetta italiana.

che se si desidera una buona tenacità a freddo, è necessaria una completa affinazione della struttura per effetto del trattamento termico, quale si può ottenere predisponendo una sufficiente quantità di elementi alliganti. Quando questa condizione sia soddisfatta, gli acciai da cementazione al

cromo-molibdeno hanno a bassa temperatura un comportamento per nulla inferiore a quello di acciai con oltre 4 % di nichel.

La fig. 9 illustra l'effetto della bonifica sulla resilienza a bassa temperatura di un acciaio semiduro al carbonio fabbricato al forno Héroult e disossidato con alluminio, la fig. 10 il cattivo comportamento a bassa temperatura, nonostante l'ottima resilienza a temperatura ambiente, di un acciaio al carbonio bonificato, di composizione simile a quello di fig. 9, ma il cui trattamento metallurgico non era stato altrettanto accurato.

Le esperienze da me eseguite dimostrano che l'introduzione degli acciai da costruzione autarchici non deve destare preoccupazione per quanto riguarda la fragilità a freddo; anche gli acciai al carbonio, quando la loro fabbricazione sia molto accurata e vengano bonificati, hanno una discreta tenacità a bassa temperatura.

Esprimo i miei ringraziamenti all'Ecc. G. B. Bonino per l'interesse dimostrato a questo mio lavoro.

Chimica (Chimica analitica). — *L'analisi spettrografica quantitativa del berillio negli acciai comuni e speciali* [1]. Nota di Oscar Masi presentata [2] dall'Accademico Gian Battista Bonino.

Secondo una letteratura relativamente recente (1), (2), il berillio produce negli acciai comuni ed ancora più in alcuni tipi speciali al nichel–cromo, interessanti effetti di maturazione la cui entità varia in modo sensibile con il variare della percentuale di berillio presente.

I metodi chimici di dosaggio di questo elemento (3) specialmente se applicati agli acciai speciali, da quanto mi risulta per esperienza personale, sono assai laboriosi e non esenti da gravi incertezze: in materiali ad esempio contenenti percentuali elevate di nichel e di cromo ho riscontrato, seguendo il metodo più recente (4), anche errori del 20 %, imputabili alla natura stessa delle separazioni analitiche necessarie.

Mi è sembrato perciò utile ricercare con lo spettrografo una più rapida e precisa soluzione di questo problema analitico; e di tali ricerche vengono qui resi noti i primi risultati [3].

Lo spettrografo usato è il Qu 24 Zeiss; la scintilla veniva alimentata da un generatore di Feussner (FF), con una capacità complessiva (C) di 3000 cm. ed una induttanza (L) di 0.00077 Henry; come lastre fotografiche si sono usate le fotomeccaniche contrasto della Ferrania–Cappelli.

---

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto Scientifico Tecnico E. Breda, Sesto S. Giovanni (Milano).

[2] Nell'Adunanza del 23 novembre 1940-XIX.

[3] I risultati di questo lavoro sono anche riportati, con maggior copia di dettagli sperimentali, di diagrammi e di tabelle, in un articolo dal titolo: *La determinazione spettrografica del berillio in acciai comuni e speciali* « Spectrochimica Acta », *1*, 501, 1941.

(1) Bennek, Schafmeister, « Arch. Eisenhüttenw. », V, 615 (1932).

(2) W. Kroll, « Metals and Alloys », *7*, 24 (1936).

(3) L. Fresenius, M. Frommes, « Z. anal. Chem. », *87*, 273 (1932).

(4) M. A. Gadeau, « Rev. Mét. », XXXII, 398 (1935).

La determinazione quantitativa è stata eseguita secondo il metodo del confronto interno. Sono state analizzate soluzioni artificialmente preparate (che chiameremo convenzionalmente « sintetiche ») di ferro o di acciaio al carbonio cui venivano aggiunte quantità note di berillio. Si sono potute così determinare per varie coppie di righe spettrali di ferro e di berillio le curve di analisi, e cioè diagrammi che mettono in relazione

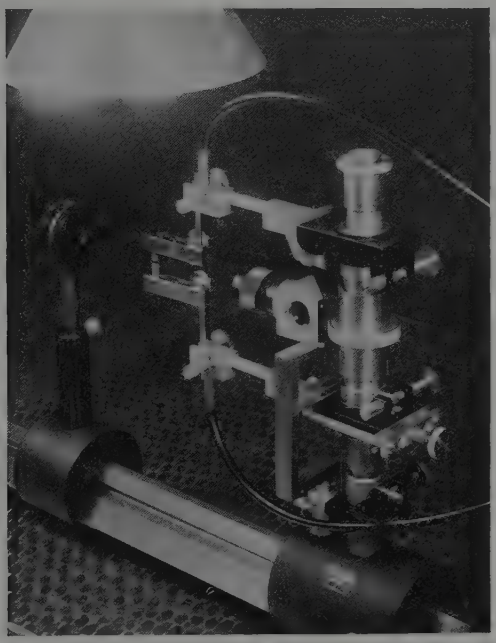


Fig. 1. – Stativo di De-Grammont-Zeiss modificato per avere lo spostamento contemporaneo dei due elettrodi sul piano orizzontale e l'immagine ingrandita della scarica (condensatore e prisma).

l'intensità relativa delle righe spettroscopiche di berillio delle diverse soluzioni (determinata con un microfotometro Zeiss non registratore) con le corrispondenti concentrazioni in berillio. Successivamente sono state analizzate soluzioni « sintetiche » di acciai al berillio con diverse percentuali di nichel e cromo. Come supporto delle soluzioni si usano dei pezzettini (mm. 8 circa) di carboncino purissimo per analisi spettrografica (della ditta Rühstrat).

Per quanto l'esame spettroanalitico di una soluzione presenti qualche inconveniente (5), ciò nondimeno in condizioni di lavoro nelle quali la determinazione analitica per via chimica è piuttosto laboriosa, il metodo è assai consigliabile, pur di tener conto nell'esecuzione degli spettri di alcune speciali particolarità. È noto invero che nei vari momenti della scarica tra gli elettrodi imbevuti di soluzione da esaminare, la concentrazione di un determinato elemento nella zona di scintilla osservata spettrograficamente non rimane costante; d'altra parte la distribuzione nei carboncini dei vari elementi presenti nella soluzione può presentare qualche disomogeneità.

Se ne hanno come conseguenza variazioni dei rapporti di annerimento delle righe spettrali nei vari tempi successivi di scarica. Tali variazioni sono dovute con ogni probabilità da una parte alla natura delle righe (6) e dall'altra ad un processo di volatilizzazione differenziale la cui intensità dipende naturalmente dalla natura degli elementi in miscela e dalle loro concentrazioni relative (7).

Va aggiunto infine che, a causa di tali processi di volatilizzazione differenziale e quindi dell'esistenza di una zona intermedia tra i due carboncini nella quale il vapore può essere, in misura notevole, più o meno ricco di un determinato componente di quanto non siano le zone più vicine agli elettrodi, è necessaria una centratura accurata della posizione dei due carboncini specialmente in senso verticale; nelle mie prove si è fatto perciò uso o di una lente messa posteriormente allo stativo portaelettrodi, e che riproduceva su uno schermo distante circa 2 m. l'immagine della scarica ingrandita 30 volte, oppure di un condensatore di un prisma a riflessione totale con uguale ingrandimento (fig. 1).

Risultati. – Ho esaminato le curve di scarica e le curve di analisi di 25 coppie di righe (vedi tabella I).

Mi sono anzitutto reso conto dell'andamento delle varie curve di scarica in soluzioni Fe/Be praticamente pure.

(5) A. Rivas, « Angew. Chem. », *50*, 903 (1937).
(6) H. Kaiser, « Spectrochimica Acta », *1*, 1 (1939).
(7) O. Masi, « Spectrochimica Acta », *1*, 462 (1940).

Tabella I.

Coppie Fe/Be *esaminate*

riga di Fe	riga di Be	no. convenzionale del rapporto
2522.86 I		1
2498.90 II	2494. 59 I	2
2497.82 II	2494. 74 II	3
2493.26 II	2494. 55 I	4
2488.15 I		10
3465.86 I		5
3443.88 I		6
3440.61 I	3321. 35 I	7
3306.35 I	3321. 09 II	8
3405,97 I	3321. 01 I	
3286.75 I		9
2368.59 II		11
2364.83 II	2348. 61 I LL	12
2359.12 II		13
2343.49 II		14
2666.81 I		15
2664.67 I		16
2628.29 I	2650. 78 I	17
2625.50 B	2650. 47 I	18
2621.67 II		19
2617.62 II		20
3100.67 I		21
3059.09 I		22
3057.45 I	3130.42 II	23
3047.61 I		24
3440.99 I		25

A g 1 di ferro Armco sciolto in HCl 1 :1 è stata aggiunta tanta soluzione cloridrica di BeO puro al 98 % da avere 5 soluzioni contenenti rispettivamente 0.1 % Be, 0.5 % Be, 1.0 % Be, 1.5 % Be, 2.0 % Be. Le curve di scarica sono state ricavate da spettrogrammi successivi con intervallo di 10″ tra l'uno e l'altro senza interrompere la scarica (diaframma rettangolare da 5 mm.; distanza tra gli elettrodi = 3 mm.; FF_4,

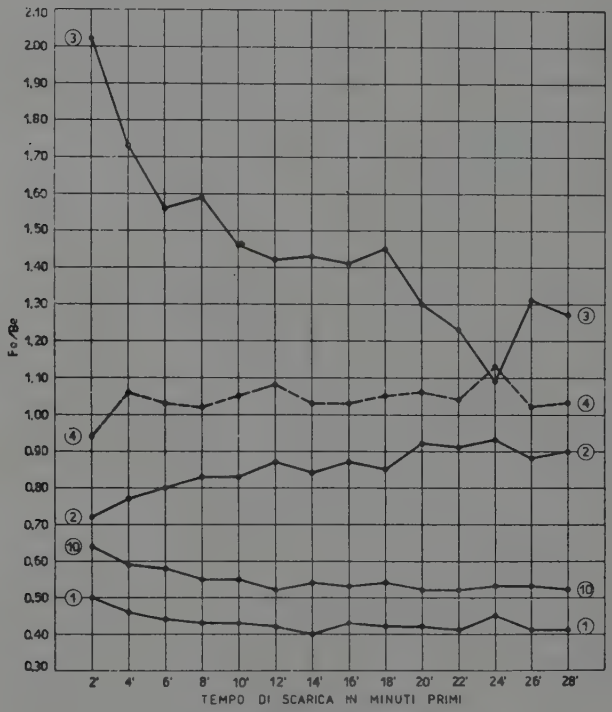


Fig. 2. – Curve di scarica delle coppie 1, 2, 3, 4 e 10.

1/1C, 1/1L); esse hanno aspetto diverso a seconda delle coppie Fe/Be; in fig. 2 e 3 se ne riportano alcune ottenute con la soluzione al 2.0 % di Be.

Note così le variazioni con il tempo successivo di scarica dei vari rapporti, le curve di analisi con le 5 soluzioni sono state determinate eseguendo sulla stessa lastra 3 spettrogrammi successivi per ognuna delle 5 soluzioni in zone alternate della lastra. Si è proceduto nel modo seguente: i carboncini sono stati dapprima sottoposti ad una scarica di ultima purificazione e di preparazione con il generatore di Feussner montato secondo lo schema assorbimento; poi su ognuno di essi si sono versati goccia a goccia 0.02 cm.^{3} di soluzione; terminato l'assorbimento, tra i due carbon-

cini – alla distanza di 3 mm. l'uno dall'altro – è stata fatta scoccare una scintilla (FF_4, 1/1C, 1/1L) per 2′ senza spettrografare; e poi sono stati presi i 3 spettrogrammi; sulla lente intermedia diaframma rettangolare da 5 mm.: sulla fenditura filtro di platino a 3 gradi. In queste condizioni per le soluzioni n. 1, 2, 3, 4, 5, si ottengono le curve medie alcune delle quali sono riportate nelle figure 4 e 5.

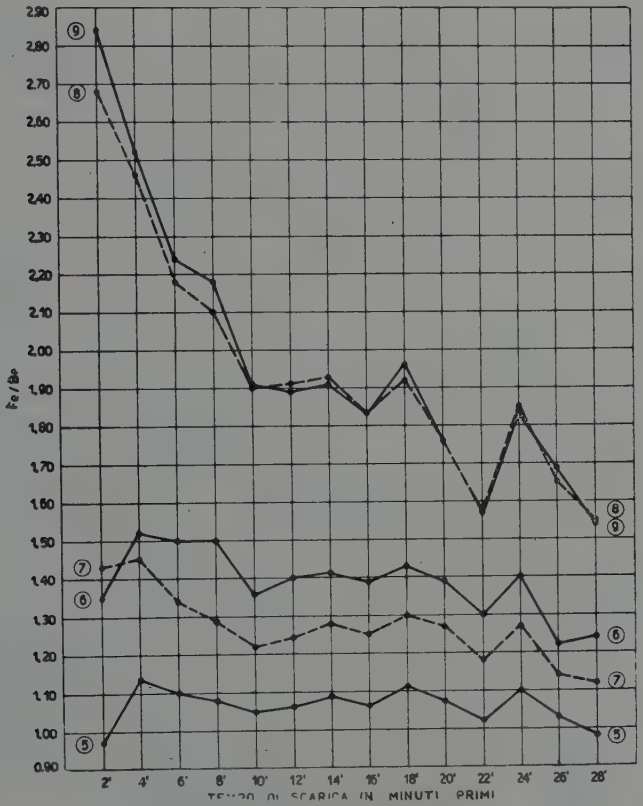


Fig. 3. – Curve di scarica delle coppie 5, 6, 7, 8 e 9.

Esaminate in tal modo le soluzioni ferro Armco + berillio, occorreva conoscere se le righe del berillio già viste si comportassero in modo analogo in presenza di concentrazioni notevoli di altri metalli e, specialmente, di nichel e di cromo, contenuti appunto negli acciai speciali da analizzare; è noto infatti che il valore del rapporto dell'intensità delle righe di due elementi presenti in una lega binaria può essere variamente modificato dall'aggiunta di un terzo elemento.

Una seconda serie di prove è stata eseguita perciò costruendo le curve di analisi con soluzioni Fe + Be contenenti il 10 % Ni + 15 % Cr con una concentrazione assoluta pari a 6 g di sostanza in 100 cc HCl 1 :1. Riporto in tabella 2 alcuni risultati ottenuti nella determinazione del Be in due soluzioni di acciai al carbonio ai quali era stato aggiunto il 10 % di Ni, il 15 % di Cr e, rispettivamente 0.5 % Be e 1.0 % di Be.

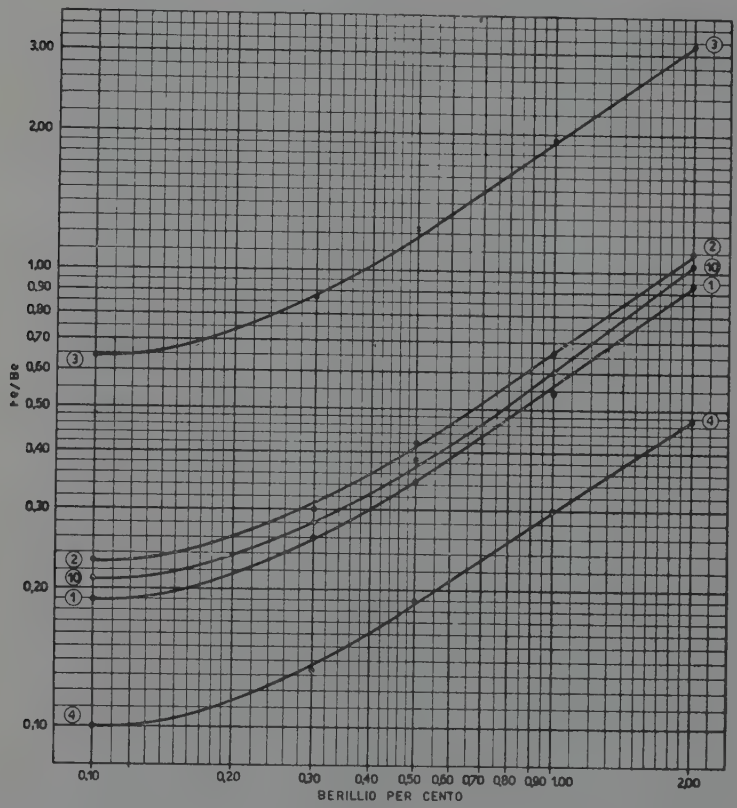


Fig. 4. – Curve di analisi delle coppie 1, 2, 3, 4 e 10 per soluzioni Ferro + Berillio

Per alcune lastre sono state variate le condizioni ottiche ed elettriche: di queste solo la capacità (lastra 250) pare influenzi tutte le coppie eccetto 1, 2, 3, 4, 10: le altre variabili non producono scarti eccezionalmente elevati rispetto all'errore medio sperimentale. Le coppie 11, 12, 13 e 14 dànno in tutti i casi variazioni assai forti rispetto al contenuto teorico: i valori ottenuti sono stati per brevità omessi.

Tabella II.

Determinazione del Be *in soluzioni di Acciaio «sintetico» + Cr-Ni-Be*

Coppia n.	Be %								Scarto % dei valori	
	teorico	trovato								
		Lastra no.						Media	Massimo	Medio
		248	249	250	251	252	253			
1	0.5	0.49	0.53	0.52	0.49	0.52	0.50	0.51	+ 6 — 2	± 4
	1.0	1.00	1.02	1.05	0.90	1.05	1.05	1.01	+ 5 — 10	± 7
2	0.5	0.37	0.55	0.59	0.56	0.50	0.62		— 26 + 24	± 25
	1.0	1.00	1.07	1.10	0.90	1.12	0.92		— 10 + 12	± 11
7	0.5	0.53	0.50	0.50	0.45	0.52	0.46	0.49	— 8 + 6	± 7
	1.0	1.00	0.97	1.05	1.05	0.97	1.10	1.02	— 3 + 10	± 6
8	0.5	0.54	0.55	0.54	0.49	0.52	0.51	0.52	— 2 + 10	± 6
	1.0	1.12	1.03	(1.25)	0.96	0.97	0.98	1.01	— 4 + 12	± 8
9	0.5	0.53	0.55	0.55	0.48	0.54	0.52	0.53	— 4 + 10	± 7
	1.0	1.08	1.05	(1.25)	0.97	0.95	1.00	1.01	— 5 + 8	± 6
15	0.5	0.50	0.60	0.55	0.54	0.51	0.58		+ 20	± 10
	1.0	1.02	1.07	1.12	0.94	1.06	0.94	1.02	— 6 + 12	± 9
16	0.5	0.48	0.60	0.56	0.55	0.52	0.59		— 4 + 20	± 12
	1.0	1.02	1.08	1.13	0.94	1.05	0.94	1.03	— 6 + 13	± 9
17	0.5	0.52	0.54	0.55	0.52	0.52	0.54	0.53	+ 10	± 5
	1.0	1.02	1.06	1.05	0.93	0.96	1.03	1.01	— 7 + 6	± 6

Dai valori della tabella II e da altri quasi analoghi, per brevità omessi, ottenuti su soluzioni contenenti una maggior percentuale di elementi speciali del tipo 20 % Ni e 25 % Cr (il maggior contenuto di tali elementi

non modifica sensibilmente l'andamento delle curve di analisi), si può dedurre come il metodo spettrografico quantitativo dia in questo caso buoni risultati.

Le coppie di righe consigliabili, visti anche i valori medi di annerimento che normalmente si ottengono, sono la 1 (2522.86 Fe/2494.6 Be),

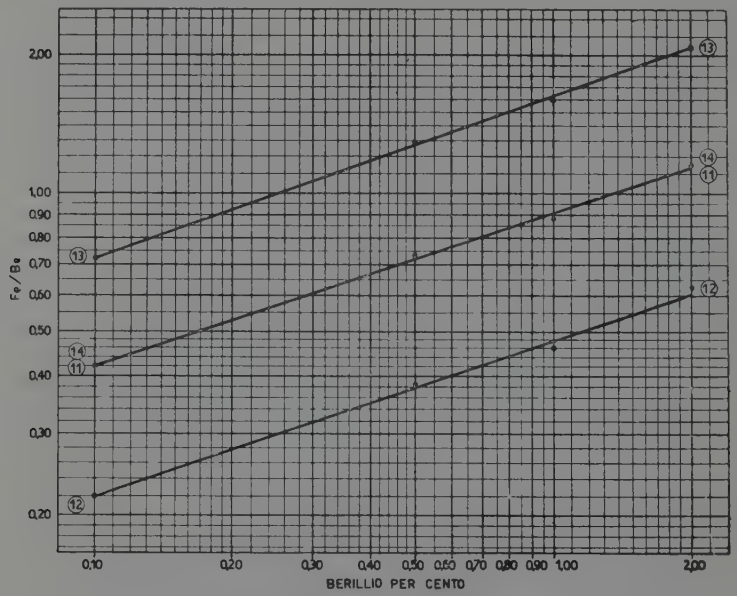


Fig. 5. – Curve di analisi delle coppie 11, 12, 13 e 14 per soluzioni Ferro + Berillio.

la 7 (3440.61 Fe/3321.1 Be), la 9 (3286.75 Fe/3321.1 Be) e la 16 (2664.67 Fe/2650.6 Be).

Ringrazio l'Ecc. prof. G. B. Bonino per l'interesse addimostrato a questo mio lavoro.

Chimica. — *Le sostanze minerali del succo pancreatico umano.* Nota di Eusebio Tria e Giuseppe Fabriani (1), presentata (2) da Sabato Visco, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

I. – Introduzione.

Gli studi sul succo pancreatico umano sono estremamente scarsi per la evidente difficoltà di procurarsi questo liquido. In ogni caso si tratta sempre di liquidi, ottenuti da pazienti operati di svariate infermità, e quindi non da considerarsi come normali.

Verso la fine del secolo scorso Herter (1) studiava il liquido che ristagnava nel pancreas per un carcinoma del dotto escretore. In seguito Wohlgemuth (2) e più tardi Chumm (3) eseguivano alcune analisi in campioni di succo. Più recentemente Gamble e Mc Iver (4) hanno studiato il succo pancreatico umano raccolto da una cisti pancreatica.

Ci è capitata questo inverno una opportunità unica per esperimenti sulla fisiologia della secrezione pancreatica. Un giovane di 21 anni, in seguito a un trauma ottuso dell'epigastrio, che gli aveva determinato rottura del corpo e della testa del pancreas veniva operato all'Ospedale di Santo Spirito, e residuava dall'atto operativo una fistola della ferita operatoria, dalla quale veniva fuori un liquido incolore, chiaro, fortemente alcalino, assolutamente esente da sangue. Dopo dieci giorni dal ricovero si iniziava la raccolta del succo, per mezzo di un tubo di gomma introdotto nella fistola, e fissato alla parete addominale, con una lamina di guttaperca, incollata all'addome per mezzo di un mastice opportuno.

Il liquido veniva raccolto in recipienti che si cambiavano ogni trequattro ore, e tenuto in ghiacciaia. In alcuni casi, il liquido veniva raccolto in tubi da saggio, sotto uno strato di olio di vaselina. La raccolta del liquido è durata venti giorni, con qualche intervallo, allo scopo di far riposare il paziente, dopo di che si è dovuta sospendere giacchè la fistola tendeva a guarire. In questo periodo il paziente era tenuto ad una dieta mista, costituita essenzialmente da minestrine, biscotti, latte, e piccole quantità di carne.

---

(1) Il lavoro spetta in parti eguali ai due autori.

(2) Nell'Adunanza del 23 novembre 1940-XIX.

Si sono potuti raccogliere, complessivamente, circa otto litri di succo pancreatico, di cui due litri sono stati utilizzati per le ricerche riportate nel presente lavoro. La quantità di liquido emessa *pro die* è variata da 800 a 1000 cc. al giorno.

Il paziente che nei primi giorni della sua degenza ospedaliera, presentava un notevole stato di abbattimento, un pallore diffuso della cute, e delle mucose, e disappetenza, effetti questi del trauma subìto, è andato piano piano rimettendosi. Questo fa pensare che non tutto il succo pancreatico venisse eliminato all'esterno, ma una parte di esso, venisse eliminato normalmente nell'intestino.

È ben noto infatti che la perdita completa di succo pancreatico, determina delle conseguenze gravi, che producono la morte, e che sono dovute a perdita di acqua e di elettroliti. Cani con fistole pancreatiche muoiono invariabilmente in breve tempo (15 a 42 giorni, negli esperimenti di Pawlow (5), 7 a 8 giorni in quelli di Elman e Mc Caughan (6).

II. – Risultati sperimentali e metodi di analisi.

Come si è detto, il succo pancreatico così raccolto è un liquido incolore, fortemente alcalino. Il Ph del liquido raccolto subito dopo il pasto, misurato col metodo elettrometrico (elettrodo a idrogeno, contro elettrodo a calomelano saturo), in campioni prelevati fuori del contatto dell'aria, sotto olio di vaselina, è di 8,6. Il valore da noi trovato non coincide con quelli di Foa (7), che trova variazioni da 9,79 a 10,21. È piuttosto dell'ordine di grandezza di quelli trovati negli animali da Auerbach e Pick (8) 7,3–8,7, da Archangelskii (9), 8,41–8,53, da Carnot e Gruzewska (10) 8,71–8,99, da Dubois e Polonovski (11), 7,8–8,7, da Still e Barlow (12), 7,85–8,30, da Ball (13) 7,65–8,12.

Il suo peso specifico, determinato con la bilancia di Westphal, è di 1,0088, dell'ordine di grandezza di quello trovato da Wohlgemuth (loc. cit.): 1,007–1,009. Contiene l'1,088 % di residuo secco (due determinazioni eseguite su due diversi campioni di succo delle 24 ore, hanno dato i seguenti valori: I° 1,0710, II° 1,1060. Wohlgemuth (loc. cit.) trova valori variabili da 1,54 a 1,27. Valori dello stesso ordine di grandezza, di quelli ottenuti da noi, si riscontrano nel succo degli animali ottenuto da fistole permanenti, o in seguito a iniezione di secretina, mentre nel secreto da fistole temporanee o da pilocarpia, si ottengono valori molto più alti, che giungono fino a 6,40 % Starling (14).

Il contenuto in acqua del succo pancreatico (98,912 %) è perciò di gran lunga più elevato del contenuto in acqua del plasma del sangue (90 %) e della linfa (95 %). È dello stesso ordine di grandezza del succo gastrico, alquanto più basso della saliva (99,42 %) e del sudore (99,5 %).

Il succo pancreatico contiene il 0,8319 % di ceneri, ottenute in capsula di platino a temperatura mai superiore a 500°, per evitare il più possibile, perdite di sali per volatilizzazione.

Le ceneri così ottenute, a due riprese, da un litro di succo pancreatico, disciolte in HCl a caldo, non lasciano un residuo evidente, il che fa escludere la presenza di cationi del 1° gruppo dell'analisi qualitativa e i componenti normali del residuo insolubile in HCl, meno SiO_2, che può trovarsi disciolta; infatti portando più volte a secco e riprendendo sempre con HCl concentrato, quest'ultima viene insolubilizzata e quindi determinata per pesata, previa essiccazione e calcinazione.

Il valore corrispondente a 100 cc. di succo pancreatico è di 5,15 mg. Una aliquota della soluzione cloridrica, trattata con H_2S a caldo, non dà alcun precipitato evidente di elementi del II gruppo dell'analisi qualitativa. Se allo stesso liquido contenente H_2S si aggiunge NH_3 concentrata in eccesso, la soluzione acquista un color giallo verdastro, senza però aversi la formazione di un precipitato evidente.

Su altre frazioni note della soluzione cloridrica, si è determinato il sodio come piroantimoniato col metodo di Kramer e Tisdall, il potassio come cobaltinitrito, il calcio come ossalato e titolazione con K MnO_4 N/50, e il magnesio, precipitato come fosfato ammonico magnesiaco, e pesato, dopo calcinazione, come pirofosfato.

Nella seguente tabella vengono riportati i valori in mgr. per 100 cc. di succo pancreatico dei quattro cationi studiati:

Tabella I.

	mgr. % di succo pancreatico.
Na	207,4
K	10,24
Ca	1,45
Mg	0,17

Un altro campione di un litro di succo pancreatico, viene trattato, a due riprese, con HNO_3 concentrato. Subito dopo l'aggiunta dell'acido, si ha un colore rosso arancione, che col riscaldamento passa al giallo. Al liquido potato a secco, si aggiunge una piccola quantità di Na_2CO_3, per neutralizzare gli acidi presenti. Si porta quindi a secchezza completa e il residuo si incenerisce in capsula di platino a temperatura non superiore ai 300°, il che è possibile data la presenza di nitrati che agevolano la combustione. Nelle ceneri viene insolubilizzata la silice, si sciolgono quindi in HCl diluito, e si portano a 100 cc. in un palloncino tarato.

In aliquote di 10 cc. (corrispondenti a 100 cc. di succo pancreatico) si è determinato il fosforo per pesata come fosfomolibdato di stricnina, e lo zolfo, sempre per pesata, come solfato di bario. I valori ottenuti sono

rispettivamente di 0,20 mgr. di fosforo e di 6,7 mgr. di zolfo, per 100 cc. di succo.

Su due campioni di 10 cc. di succo pancreatico si determina il cloro previa ossidazione con $KMnO_4$ in presenza di una quantità nota di $AgNO_3$; il valore ottenuto è di 244,8 mgr. per 100 cc. di succo.

Allo scopo di mettere in evidenza le eventuali tracce di altri elementi, non svelabili facilmente, per la loro quantità estremamente piccola, con i comuni metodi analitici, si è eseguito, su un campione delle ceneri, uno spettrogramma, che ha indicata la presenza, oltre che dei cationi da noi già trovati con metodi analitici, di tracce di Cu. Un secondo spettrogramma delle ceneri di succo pancreatico, ottenute dopo ossidazione di queste con HNO_3, ha messo in evidenza inoltre la presenza di tracce di Zn dimostrando che, collo incenerimento non preceduto da ossidazione, lo Zn era volatilizzato, probabilmente per la temperatura più elevata necessaria per la preparazione delle ceneri.

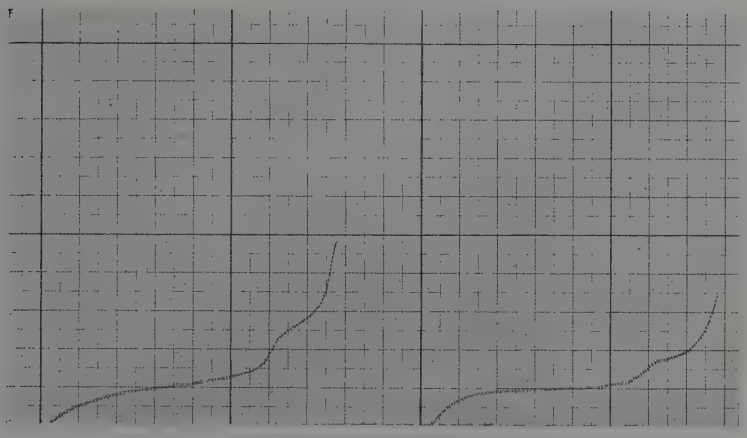
Onde poi dosare le quantità di Cu e di Zn svelate col metodo spettrografico, ci siamo serviti del metodo polarografico, grazie alla cortesia del prof. G. Sartori, che vivamente ringraziamo. Le determinazioni polarografiche sono state eseguite su di 1 cc. di soluzione di ceneri ottenute dopo ossidazione, corrispondenti a 10 cc. di succo pancreatico. La soluzione è stata esaminata tal quale previa neutralizzazione e eliminazione dell'ossigeno in corrente di idrogeno.

I polarogrammi ottenuti mostrano due onde: il punto di flesso della prima è a + 0,1 Volt, il punto di flesso della seconda a + 1,06 Volt. Questi punti di flesso stanno a indicare la presenza di ione $Cu^{\cdot\cdot}$ e di ione $Zn^{\cdot\cdot}$. L'altezza dell'onda del Cu non è determinabile, poichè l'onda ha inizio a un potenziale positivo, quella dello Zn invece è di 256 mm., se riportata a sensibilità 1 del galvanometro (media di 6 onde ottenute a sensibilità diversa).

Per la determinazione quantitativa è stato fatto un polarogramma di confronto su una soluzione contente Zn 2 volte N/1000, e Na Cl alla stessa concentrazione di Na della soluzione esaminata.

L'altezza dell'onda dello Zn ottenuta è di 397 mm. con sensibilità 1/100 del galvanometro (media di tre polarogrammi ottenuti a sensibilità diversa). Per proporzione diretta fra le altezze medie delle due onde, si calcola una concentrazione a $1{,}295 \cdot 10^{-5}$N nel succo pancreatico. Riportiamo due curve polarografiche ottenute nel liquido esaminato a sensibilità 1/20 e 1/50.

Curve polarografiche.



III. – Considerazioni e conclusioni.

Nella seguente tabella vengono riportati in forma schematica i risultati ottenuti, espressi in mgr. % cc. di succo pancreatico e in mM per litro.

Nella stessa tabella sono anche riportati, a scopo comparativo, i valori di Hübner (15) per la composizione ionico–salina del plasma.

Tabella II.

Ioni	Mgr. % di succo pancreatico	mM per litro di succo pancreatico	Mgr. % di plasma	mM per litro di plasma
Cl	244,83	69,0	355	100
SO_4.	20,07	4,2	22	5
HPO_4.	0,62	0,013	10	2
Na	207,4	90,18	300	130
K.	10,24	2,6	20	5
Ca	1.45	0,7	10	5
Mg	0,17	0,14	2,5	2
Somma . . .	Acidi 73,213			107
	Basi 93,62			142

Dall'esame della tabella risulta che gli ioni studiati si trovano nel succo pancreatico in concentrazione notevolmente inferiore che nel plasma. Particolarmente scarsi sono gli ioni HPO_4 e Ca. Le basi fisse del plasma, ammontano a 142 mM e gli acidi fissi a 107 mM per litro. Nel nostro caso invece, le basi ammontano soltanto a 93,62 mM, mentre la somma degli ioni Cl, $H PO_4$ e SO_4 è di 73,21 mM.

Noi perciò non possiamo confermare i valori di Gamble (loc. cit.), secondo cui la concentrazione delle basi fisse nel succo pancreatico, è presso a poco identica al plasma. È da notare però che i dati di Gamble sono stati ottenuti con succo pancreatico di cane, e solo in un caso di un uomo, affetto da cisti pancreatica, per cui il liquido difficilmente può essere considerato normale.

È da notare che determinazioni analitiche sul succo pancreatico possono avere valore soltanto se eseguite su una grande quantità di liquido raccolto per un tempo piuttosto lungo.

È ben noto infatti, che la composizione del succo pancreatico varia a secondo del periodo della digestione e della velocità di secrezione. Quanto più velocemente il succo pancreatico viene secreto, tanto più bassa è la secrezione dei cloruri. Negli esperimenti di Ball (loc. cit.) si hanno variazioni, per il Cl, da 47 a 108 mM a seconda della velocità di secrezione.

Oltre gli ioni finora considerati, sono presenti inoltre nel succo pancreatico Zn e Cu. La presenza del Fe non si è potuta mettere in evidenza, nè con i metodi analitici, nè con i più sensibili metodi spettrografici e polarografici. Così pure non siamo riusciti a mettere in evidenza il Co ed il Ni che erano stati visti da Bertrand e Macheboeuf (16), nel pancreas di animali di varie specie.

La presenza dello Zn nel pancreas, non è un fatto nuovo. Già Lutz (17) e Delezenne (18) lo avevano dimostrato e il fatto era stato confermato da Scott e Fisher (19). La presenza dello Zn è inoltre dimostrata dall'associazione molto stretta che esiste tra insulina e Zn, e dal fatto che i cristalli di insulina preparati con i metodi alla brucina e alla saponina, dànno reazioni positive per lo Zn.

Per quanto riguarda la presenza di Ni e Co, che come si è detto, erano stati visti da Bertrand e Macheboeuf, essa è stata negata da Scott e Fisher (loc. cit.). Nelle nostre esperienze l'esame spettrografico e polarografico, ripetute volte eseguito con lo scopo preciso di riscontrare la presenza di questi metalli, è stato sempre negativo.

Per ciò che riguarda il Cu, la sua presenza, per quanto è a nostra conoscenza, non era stata mai, prima d'ora, messa in evidenza nel pancreas e nel succo pancreatico.

Infine la SiO_2, che come si è detto, si trova nel succo pancreatico in concentrazione di 5,15 mg. per 100 cc. è dell'ordine di grandezza di circa 1/3 dei valori trovati da Kraut (20) nel sangue umano.

BIBLIOGRAFIA

(1) Herter, citato da Hammarsten, « Man. di Chimica fisiologica », 1893, pag. 203.
(2) Wohlgemuth, « Bioch. Zeit. », *39*, 202 (1912).
(3) Schumm, « Z. Physiol. Chem. », *36*, 292 (12).
(4) Gamble e Mc Iver, « Journ. Exp. Med. », *48*, 849 (1928).
(5) Pawlow, *The work of the digestive glands*, 1902.
(6) Elman e Mc Caughan, « J. Exp. Med. », *45*, 561 (1927).
(7) Foa, « Compt. Rend. Soc. Biol. », *58*, 867 (1905).
(8) Auerbach e Pick, « Chem. Abst. », *7*, 1369 (1913).
(9) Archangelskii, « Arch. Biol. », *24*, 163 (1924).
(10) Carnot e Gruzewska, « Compt. Rend. Soc. Biol. », *93*, 240 (1925).
(11) Dubois e Polonovski, « Compt. Rend. Soc. Biol. », *93*, 632 (1925).
(12) Still e Barlow, « Am. J. Physiol. », *81*, 341 (1927).
(13) Ball, « Journ. Biol. Chem. », *86*, 433 (1930).
(14) Starling, « Principles of Hum. Physiol. », 1930, pag. 573.
(15) Hübner, citato da Rondoni, *Elementi di Biochimica*, 1933, pag. 466.
(16) Bertrand e Macheboeuf, « Compt. Rend. », *182*, 1305 (1926).
(17) Lutz, « J. Ind. Hygiene », *8*, 177 (1926).
(18) Delezenne, « Ann. Ist. Pasteur », *33*, 78 (1919).
(19) Scott e Fisher, « Biochem. J. », *29*, 1048 (1935).
Id. *29*, 1055 (1935).
(20) Kraut, « Z. Physiol. Chem. », *194*, 81 (1931).

Paleontologia. — *Osservazioni su alcuni generi di Antillasterinae* (1). Nota (2) di GIUSEPPE CHECCHIA-RISPOLI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

Alcuni anni or sono il LAMBERT istituiva il genere *Pharaonaster* per il *Macropneustes Ammon* Agassiz dell'Eocene d'Egitto e per qualche altra specie cenozoica (3). Detto genere è però ancora poco noto per la sua grandissima rarità; basti dire che finora erano conosciuti quattro esemplari solamente, i quali per giunta sono per lo più incompletamente conservati. Ritengo perciò molto importante il rinvenimento, fatto di recente nell'Eocene della Somalia, di un altro esemplare di *Pharaonaster* appartenente sicuramente ad una nuova specie, che distinguo col nome di *Phar. Migliorinii* mihi. Detto esemplare fa parte di una ricca collezione di Echinidi affidatimi in istudio dalla Presidenza dell'Azienda Generale Italiana Petroli (AGIP), che qui ringrazio ancora una volta. Questo materiale è stato raccolto nella Somalia italiana, durante gli anni 1936-1939, dalla missione geologica organizzata dall'AGIP e diretta dal prof. ing. CARLO MIGLIORINI della R. Università di Roma, Capo-servizio degli studi geologici e geofisici dell'Azienda.

Gli Echinidi, il di cui studio è di già molto avanzato, provengono in parte da terreni mesozoici (Giurassico e Cretacico) ed in parte da terreni cenozoici (Eocenico, Oligocenico e Miocenico). Quelli eocenici hanno fornito il massimo numero di specie, in maggioranza nuove, fra cui il *Pharaonaster Migliorinii*.

Anche questo esemplare è tutt'altro che in perfetto stato di conservazione; tuttavia mi è stato possibile riconoscere quasi al completo i suoi caratteri, che, insieme a quelli già indicati dagli autori per le altre specie, permettono oggi una migliore conoscenza del genere un po' succintamente descritto dal Lambert.

Do intanto la descrizione della nuova specie:

---

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Geo-paleontologico della R. Università di Roma.

(2) Presentata nell'Adunanza del 23 novembre 1940-XIX.

(3) LAMBERT, *Sur quelques genres nouveaux d'Échinides*, in « Mém. d. l. Soc. Acad. de l'Aude », tom. LXXXIV, 1920.

« Guscio di grandi dimensioni, di forma ovoide, arrotondato e sensibilmente intaccato avanti, un po' ristretto indietro, col la maggiore larghezza in corrispondenza dell'apparecchio apicale, che è spostato avanti; faccia superiore alta, nell'insieme un po' conica, fortemente declive avanti e sui fianchi, con la maggiore altezza verso l'apparecchio apicale; faccia inferiore arrotondata sui bordi, depressa attorno al peristoma, sporgente ed ottusamente carenata nell'area interambulacrale impari.

Apparecchio apicale poco esteso, etmoliso; madreporite lunga e terminata indietro in punta ottusa; placche genitali piccole, granulose, con grandi pori, di cui gli anteriori più avvicinati dei posteriori. Ocellari pentagonali, bene sviluppate con poro trasverso.

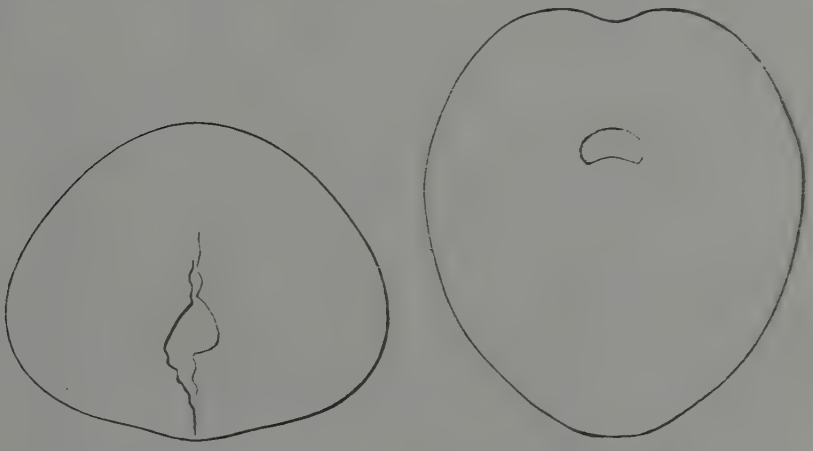


Fig. 2. Fig. 1.

Pharaonaster Migliorinii sp. nov.

Fig. 1. — Visto dalla faccia inferiore, ridotto c. ai 3/4 della grandezza naturale.
Fig. 2. — Visto dalla faccia posteriore, ridotto c. ai 3/4 della gr. nat.

Ambulacro impari diverso dai pari, situato in un solco largo, che a partire dall'apice lentissimamente si approfondisce in modo da intaccare sensibilmente il bordo anteriore, prolungandosi distintamente sino al peristoma. Area ambulacrale larga, composta di coppie di pori piccolissimi, le quali si distanziano man mano che si allontanano dall'apice.

Aree ambulacrali pari superficiali, larghe, lunghe, un pò disuguali, a zone porifere divergenti. I petali anteriori formano fra di loro un angolo quasi piatto. Le zone porifere anteriori sono diritte, le posteriori appena incurvate ed ambedue della stessa lunghezza, formate ognuna di 42 coppie di pori coniugati, subcircolari, un po' allungati quelli della serie esterna. Le coppie sono separate da costicine granulose. Spazi interzonali an-

mentanti lentamente di larghezza sino all'estremità distale del petalo, ove sono larghe circa due volte una zona porifera.

Aree posteriori avvicinate, simili alle anteriori, ma un po' più lunghe, essendo ogni zona composta di 48 coppie di pori.

Peristoma piuttosto lontano dal bordo, reniforme, con labbro poco sporgente, circondato dalle depressioni ambulacrali, di cui l'impari è la più forte, con pochi ma grossi pori peristomali.

Periprotto relativamente piccolo, longitudinale, piriforme; inframarginale, visibile dalla faccia posteriore e quasi per nulla dalla inferiore.

Tubercoli principali molto radi, largamente scrobicolati, sparsi in una granulazione irregolare: sulla faccia superiore se ne contano una dozzina appena su ogni placca interambulacrale; sul contorno i tubercoli sono un pò più numerosi; negli spazi interzonali si osserva qualche grosso tubercolo. Sul plastron non sono nè addensati, nè scriati.

Fasciola sconosciuta per il cattivo stato di conservazione del guscio.

Le dimensioni dell'unico esemplare sono: lunghezza, mm. 82; larghezza, mm. 74; altezza, mm. 64 ».

L'esemplare descritto proviene dalla « Zona costiera a levante di Ras Merere (E di Bender Cassim, Migiurtina) ».

Rapporti e differenze. – Questo spatangide per il peristoma trasverso e munito di labbro sporgente, per i petali pari relativamente lunghi ed aperti è indubbiamente un *Asterosomidae*: tra questi il suo posto è nella tribù degli *Antillasterinae*, la quale comprende forme dal guscio massiccio, ovoide, emisferico o subcilindrico, con petali superficiali più o meno larghi, lunghi ed aperti; senza fasciola, oppure con diverse fasciole. Tra i generi compresi in detta tribù i rapporti più stretti sono con *Pharaonaster* Lambert, per il guscio di grandi dimensioni, gonfio, per i petali eterogenei, di cui i pari larghi, lunghi ed aperti e per il periprocto inframarginale, longitudinale ed appuntito in alto.

Fra le specie di *Pharaonaster* i rapporti maggiori sono con *Pharaonaster Ammon* Agassiz [1], per quanto l'esemplare somalo si differisca per la forma più alta e nell'insieme più conica, per essere più ristretto nella parte posteriore e più gonfio sulla faccia inferiore, per il solco meno largo e sopratutto per i petali pari a zone porifere più divergenti e perciò più aperti.

Per quanto non sia possibile spinger oltre il confronto, perchè l'individuo egiziano e quello somalo non mostrano i caratteri al completo, pure le differenze ora rilevate sono più che sufficienti per tenerli distinti. I rap-

---

[1] De Loriol, *Monographie des Échinides fossiles contenus dans les couches nummulitiques de l'Égypte*, pag. 127, tav. X, fig. 2, 1881.

porti con *Pharaonaster Mortoni* Conrad (*Holaster*) dell'Eocene superiore americano sono più lontani: questo ha un contorno più circolare, la faccia superiore più arrotondata e più bassa, i petali più stretti con le zone porifere meno divergenti e gli spazi interzonali molto ridotti ed una ornamentazione più fitta [1]. Il *Pharaonaster japonicus* de Loriol [2] (*Macropneustes*), la di cui conservazione lascia molto a desiderare, ha anch'esso un contorno circolare, è più basso, ha i petali più larghi ed una tubercolazione ancora più fitta.

L'esemplare somalo ricorda per la forma il *Pygopatagus Salvae* Cotteau dell'Eocene di Alicante (Spagna), che appartiene anch'esso agli *Antillasterinae*; ma questo è privo del solco impari ed ha il periprotto longitudinale sì, ma non appuntito, e spostato di più verso la fascia inferiore [3].

* * *

Come ho scritto avanti, il Lambert ha istituito il genere *Pharaonaster* per il *Macropneustes Ammon* de Loriol, che il Pomel sin dal 1883 aveva distaccato dai *Macropneustes*, che sono dei veri *Brissidae*, per collocarlo nel suo genere *Hypsopatagus*, che è uno *Spatangidae* [4]. Se non che il tipo di *Hypsopatagus*, che è il *Macropneustes Meneghinii* Desor del nummulitico del Vicentino, ha i petali chiusi, mentre *Macropneustes Ammon* ha i petali aperti. Per tale carattere il Lambert ha dovuto separare quest'ultimo dal primo per farne il tipo del suo *Pharaonaster*. Gli autori dell'*Essai* hanno poi situato questo genere tra *Archaeopneustes* e *Brissomorpha* della tribù degli *Antillasterinae* [5]. Dall'esame dei caratteri delle varie specie di *Pharaonaster*, la diagnosi del genere, troppo succintamente data dal suo autore, può venir così completata:

« Echinide dal guscio di grandi dimensioni, di forma massiccia, ovoide, alta, subpianeggiante di sotto. Apparecchio apicale subcentrale, etmoliso. Petali eterogenei: l'impari situato in un solco poco profondo; i pari superficiali, lunghi, larghi, aperti. Peristoma trasverso, reniforme, spostato avanti e munito di labbro poco sporgente. Periprotto inframarginale,

---

[1] Clark and Twitchell, *The Mesozoic and Cenozoic Echinodermata of the United States*, pag. 155, tav. LXXXIV, fig. 1 *a*–1 *d*, 1915.

[2] De Loriol, *Notes pour servir a l'étude des Échinodermes*, 2 ser., fasc. I, pag. 32, tav. III, fig. 8, 1902.

[3] Cotteau, *Échinides Éocènes de la province di Alicante*, 1891.

[4] Pomel, *Classification méthodique et genera des Échinides vivants et fossiles*, pag. 31, 1883.

[5] Lambert et Thiéry, *Essai de nomenclature raisonnée des Échinides*, pag. 441, 1909–1925.

longitudinale, appuntito in alto (piriforme). Fasciola peripetala stretta. Tubercolazione piuttosto rada ».

Il genere sembra limitato all'Eocene delle regioni indopacifiche. Oltre al genotipo, comprende altre tre specie, cioè: *Phar. Mortoni* Conrad, *Phar. japonicus* de Loriol e *Phar. Migliorinii* Checchia-Rispoli.

* * *

Tra le specie riferite dagli autori dell'*Essai* al gen. *Pharaonaster* figura anche il *Macropneustes Fischeri* de Loriol dell'Eocene egiziano. Anche di questa specie non si conosce che un solo esemplare, che è quello

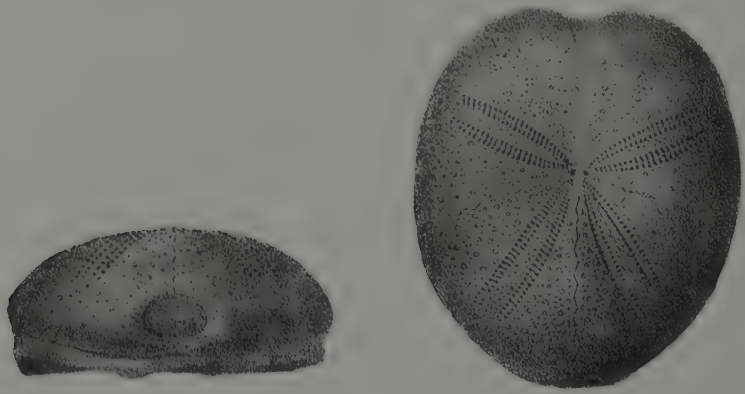


Fig. 2. Fig. 1.

Thebaster Fischeri de Loviol sp.

Fig. 1. — Visto dalla faccia abactinale, a grandezza naturale.
Fig. 2. — Visto dalla faccia posteriore, a gr. nat.
(da de Loriol, *Monogr. d. Échin. cont. d. l. conches numm. d. l'Egypte*, tav. IX, fig. 10-10a)

descritto e figurato dal DE LORIOL [1]. Da tempo il POMEL riportò questo echinide nel suo genere *Liopatagus* (olim *Leiopatagus*) [2]; nome, che il COTTEAU sostituì con quello di *Leiopneustes*, essendo *Liopatagus* di già impiegato dal MAYER per un genere differente [3]. Il COTTEAU accanto al tipo del suo genere, che è il *Brissus antiquus* Agassiz dell'Eocene delle Corbiéres, collocò il *Macropneustes Fischeri* de Loriol.

---

[1] DE LORIOL, *Monogr. d. Échin. cont. dans les conches numm. d. l'Égypte* pag. 130, tav. IX, fig. 10.

[2] POMEL, loc. cit., pag. 30.

[3] COTTEAU, *Paléontologie Française, Terrain Éocène*, pag. 123 (1889-94),

Il genere *Leiopneustes* è stato poi collocato dal Lambert e Thiéry nella sottofamiglia *Lovenidae* e precisamente nella tribù dei *Brissoidesinae*, distinta per i petali pari più o meno corti e chiusi, nonchè per la presenza di una fasciola peripetala (1). Oltre al genotipo, gli autori dell'*Essai* vi riferiscono alcune specie dell'Eocene e dell'Oligocene. Tutte queste specie hanno i petali chiusi e stretti ed inoltre il periprotto di forma ovale, longitudinale, contrariamente alla diagnosi data dal Cotteau, secondo la quale il periprotto è invece trasverso. L'errore del Cotteau è dipeso dal fatto che per quest'ultimo particolare egli si era riferito al *Macropneustes Fischeri*, essendo il *Leiopneustes antiquus*, tipo del genere, privo della parte posteriore del guscio; all'epoca poi della istituzione del genere *Leiopneustes* non si conoscevano altre specie. Per la forma del periprotto il *Macropneustes Fischeri* de Loriol non può perciò essere considerato un *Leiopneustes*, e nemmeno un *Pharaonaster*, che ha il periprotto piriforme ed un guscio ovoide, gonfio ed alto. Propongo allora per questo Echinide dell'Eocene dell'Egitto l'istituzione di un nuovo genere, che distingue col nome di *Thebaster* mihi, dalla località da cui proviene. La sua diagnosi è la seguente: « Guscio di medie dimensioni, ovalare, molto depresso, sensibilmente intaccato avanti e leggermente ristretto indietro. Apparecchio apicale spostato avanti; ambulacri eterogenei: l'impari situato in un solco leggero; i pari superficiali, larghi, lunghi, diritti ed aperti all'estremità. Periprotto marginale, grande, ovale-trasverso. Fasciola peripetala. Tubercolazione piuttosto rada. Peristoma sconosciuto ».

Il nuovo genere, che comprende finora una sola specie, *Thebaster Fischeri*, trova il suo posto fra gli *Asterosomidae*.

---

(1) Lambert et Thiery, *Essai* ecc., pag. 448.

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA

Fig. 1. — *Pharaonaster Migliorinii* Checchia–Rispoli. Visto di lato, a grand. nat.

Fig. 2. — *Pharaonaster Migliorinii* Checchia Rispoli. Visto dalla faccia abactinale, a grand. nat.

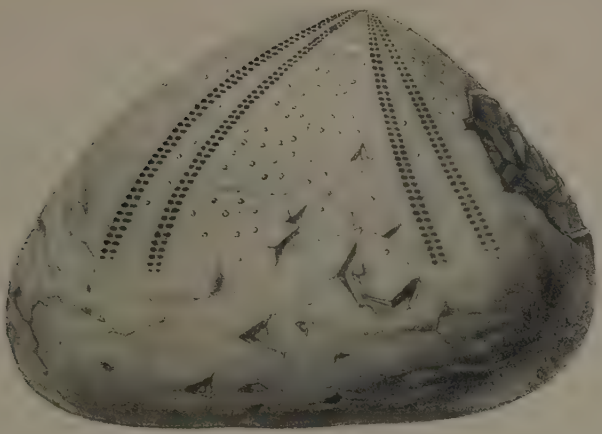


Fig. 1.

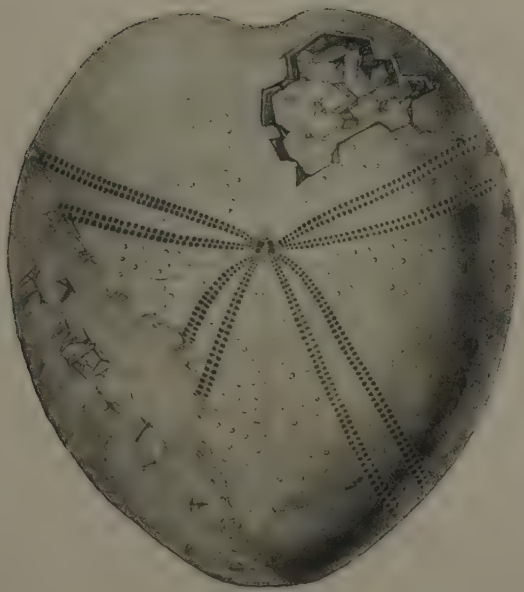


Fig. 2.

Mineralogia (Geochimica). — *Sulla presenza di terbio, disprosio, olmio, erbio ed altre terre rare in una mica biotite del granito di Alzo* (1). Nota di PAOLO GALLITELLI, presentata (2) dall'Ecc. FEDERICO MILLOSEVICH.

In una Nota, pubblicata nei « Rendiconti » di questa Accademia (3), comunicavo i risultati di una serie di ricerche spettrografiche eseguite su alcuni minerali del granito di Alzo, e mettevo in particolare evidenza l'identificazione di tracce di Sc La Yb Y nella biotite di una facies micacea del granito. Ora, dato che, per i motivi esposti nel precedente lavoro, non si era creduto opportuno eseguire una preventiva concentrazione degli elementi cercati, riprendo oggi le indagini su maggiori quantità di minerale con l'intento di accertare l'esistenza eventuale di altre terre rare oltre a quelle già segnalate.

Dallo stesso esemplare di roccia che mi aveva servito per le precedenti indagini ho separato una cospicua quantità di biotite in belle lamine idiomorfe, e a questa grossolana separazione ho fatto seguire una serie di cernite con la lente per allontanare anche i più minuti frammenti di minerali estranei, ottenendo alla fine 22 grammi di minerale puro (4). Tutta questa porzione fu attaccata ripetutamente a caldo con HF ed H_2SO_4 purissimi (5), ed il prodotto della disgregazione, dopo allontanamento dell'eccesso di H_2SO_4, trattato con acido ossalico. Lo scarso precipitato così ottenuto, privo quasi assolutamente di ferro, veniva sciolto dopo arroventamento in 0,5 cc. di HCl, e questa soluzione serviva infine per inumidire il carbone negativo dell'arco funzionante a corrente continua.

---

(1) Dall'Istituto di Mineralogia della R. Università di Modena.

(2) Nell'Adunanza del 23 novembre 1940–XIX.

(3) P. GALLITELLI, *Terre rare nel granito di Alzo: osservazioni spettrografiche*. « Rend. R. Acc. d'Italia », vol. II, pag. 87. Roma, 1940–XVIII.

(4) Nonostante la cura posta nella cernita delle lamine di biotite, non posso escludere che esse fossero ancora inquinate da minutissimi frammenti di feldispato, essendo ben noto ai mineralisti come sia difficile – e spesso impossibile – ottenere da una roccia anche pochi grammi di minerale « assolutamente puro ».

(5) I prodotti usati in queste ricerche mi furono forniti dalla casa Kalbaum, con indicazione di particolare purezza.

Le fotografie della parte dello spettro compresa fra 2840 e 4700 Å sono state per me eseguite, con i grandi spettrografi Zeiss 650/1300 e G H Steinheil [1] del Laboratorio Astrofisico della Specola Vaticana di Castelgandolfo, dal Direttore Padre prof. Alois Gatterer con una cortesia per la quale non trovo sufficienti parole di ringraziamento.

L'identificazione delle linee dei singoli elementi l'ho condotta con i metodi indicati nel precedente lavoro, servendomi come comparatore di un microscopio munito di micrometro oculare.

Le misure effettuate su numerosi spettrogrammi – che pure essendo ricchi di righe, ne presentavano questa volta solo poche e deboli del ferro – mi hanno permesso di identificare ancora una volta le linee degli elementi Sc La Yb Y, e di accertare inoltre la presenza del Ce Pr Nd Sm Gd Tb Dy Ho Er Cp (?) Nb (?), mentre hanno avuto esito negativo per Eu Tu Th Hf.

Questi nuovi risultati sono degni di nota perchè rivelano una non comune ricchezza in elementi rari nella biotite presa in esame; e sopratutto un contenuto tutt'altro che trascurabile di Tb Dy Ho Er, elementi identificati assai di rado nei minerali costituenti la crosta terrestre.

Per cercare di stabilire se questa non comune ricchezza in terre rare non fosse una particolarità della sola biotite proveniente dalle cave di Alzo, ho sottoposto ad analisi spettrografica un'altra mica biotite ricavata da una facies micacea del granito che affiora 1200 m. a NO dalle cave ricordate, e non presenta alcun rapporto di contiguità con la prima, benchè appartenga alla stessa formazione granitica. Questa seconda biotite, a differenza di quella già analizzata, contiene, invece dello zircone, microscopiche inclusioni di ortite.

L'esito delle indagini spettrografiche è stato positivo avendo dimostrato la presenza anche in questa biotite – che in seguito indicherò come mica II per distinguerla dall'altra mica I – di Sc Y La Ce Pr Nd Sm Gd (?) Tb (?) Dy Er Yb.

Le miche I e II mostrano però sensibili differenze qualitative e quantitative nei loro costituenti minori; nella mica II mancano infatti gli elementi Ho Cp Nb, e inoltre dal confronto degli spettrogrammi dei due minerali, riprodotti sulla stessa lastra e a diretto contatto, risulta che le quantità relative dei singoli elementi, dedotte in prima approssimazione dall'intensità delle corrispondenti linee spettrali, sono spesso diverse. Nella mica I si ha un maggior contenuto in La Yb Dy Gd Er.

[1] Le condizioni di funzionamento degli spettrografi corrispondono a quelle indicate nella mia precedente Nota. Per riprodurre la zona dello spettro compresa fra 2840 e 3880 Å si è usato anche lo spettrografo G. H. Steinheil equipaggiato con due prismi di Cornu. In questo caso l'arco era alimentato a corrente continua 130 V.

I risultati ora esposti provano che le terre rare sono più numerose ed abbondanti, nella massa granitica di Alzo, di quello che risultava dalle precedenti ricerche. Ora, sarebbe stato interessante stabilire con assoluta certezza se le terre rare sono contenute totalmente nella biotite, oppure anche in parte negli inclusi di zircone ed ortite, minerali che notoriamente possono contenere elementi rari. Nel precedente lavoro, per quanto non fossi riuscito a separare lo zircone dalla biotite causa l'estrema piccolezza dei cristalli, in base ai risultati ottenuti da EBERHARD GOLDSCHMIDT e PETERS sulla distribuzione delle terre rare nei minerali di zirconio, avevo avanzato l'ipotesi che Sc La Yb Y fossero contenuti nella biotite I e non nello zircone in essa incluso. Un appoggio a questo modo di vedere si ha ora nel fatto che nei nuovi spettrogrammi eseguiti sulla mica I lo zirconio risulta estremamente scarso.

Questa conferma dei risultati ottenuti, certamente interessante dal punto di vista geochimico, va però accolta con le dovute riserve, e non ha certo il valore di conclusione sicura sulla ripartizione delle terre rare fra i minerali considerati, benchè nella mica gli inclusi di zircone ed ortite siano assai poco numerosi, e costituiscano una piccolissima frazione del materiale analizzato. E questa prudenza nel concludere si rende tanto più necessaria oggi, essendo ben noto e dimostrato, che le indagini sull'associazione dei costituenti minori dei minerali possono essere influenzate, e anche falsate, da concrescimenti o inclusioni microscopiche (1).

Malgrado ciò, e indipendentemente dal fatto che le terre rare siano contenute nella biotite o nei minerali che vi sono inclusi, queste ricerche provano, che fra i costituenti minori sono da annoverare, oltre agli elementi già ricordati (2), Sc Y La Ce Pr Nd Sm Gd Tb Dy Ho Er Yb Cp (?) Nb (?).

Il granito di Alzo può così essere considerato una delle rocce granitiche qualitativamente più ricche in terre rare, benchè in esso non siano stati ancora identificati Tu ed Eu (3).

Nella tabella che segue riporto l'elenco delle principali righe che mi hanno permesso l'identificazione dello Sc del Nb e delle terre rare.

---

(1) H. SEIFERT, *Die anomalen Mischkrystalle*. « Fortschr. f. Miner. », vol. XXII, pag. 18, 1937.

(2) P. GALLITELLI, op. cit.

(3) L'Europio è stato ritrovato in tracce nell'ortose del granito di Elbogen. (J. HOFFMANN, G. MATSCHAK, *Ueber Europiumführende Mineralien in granitischen Gesteinen des westliches Sudetengaues*. « Zentralb. f. Miner », Abt. A. 1940, pag. 78).

Elemento	Lunghezza d'onda in Å delle linee osservate		Elemento	Lunghezza d'onda in Å delle linee osservate	
Sc	3907,49	4246,83	Sm	4279,70	4519,63
	11,81	4314,09		80,79	4615,69
	4023,69	4325,00		85,50	69,65
				92,18	69,40
Y	3950,35	4167,52		96,74	76,91
	51,59	74,14		4309,01	87,18
	4039,83	77,54			
	4102,38	4251,18	Gd	3894,72	4098,64
	28,31	4527,80		3902,42	4130,35
				16,58	32,28
La	3916,05	4151,98		34,79	90,78
	21,54	4275,64		45,55	4225,85
	29,22	96,05		57,69	51,76
	49,10	4333,76		4037,34	53,36
	88,51	34,96		37,90	62,09
	95,74	4522,37		49,44	96,04
	4123,23			49,90	4325,69
				53,31	27,11
Ce	3889,99	4085,23		63,45	30,58
	3895,11	4133,80		73,78	42,18
	3896,80	37,64		78,47	46,46
	3912,42	49,94		78,71	46,62
	40,34	86,60		85,60	73,83
	42,15	4222,60			
	42,75	55,79	Tb	3925,45	4005,55
	4028,41	4375,92		35,25	4338,47
	31,34	4548,89		39,60	56,83
	53,51	62,35		81,92	
Pr	3908,04	3994,82	Dy	3898,54	4103,31
	08,42	4100,74		3944,69	67,97
	18,86	79,42		68,39	4211,72
	53,53	18,48		4000,45	18,09
	64,84	4222,99		45,98	21,10
	65,27			77,97	25,15
Nd	3889,93	3958,00			
	90,58	63,12	Ho	3888,95	4103,84
	90,94	73,30		91,02	27,16
	3900,21	4007,43		4053,92	4254,43
	05,89	12,25			
	11,16	40,80	Er	3499,08	3906,34
	20,96	61,09		99,12	38,65
	41,51	4177,32			4007,95
	51,16	4303,58			
	52,20	25,77	Yb	2891,38	3464,36
				2970,56	3987,98
Sm	3885,29	4318,94		3031,11	90,89
	97,00	29,02		3289,36	4180,82
	3922,40	4334,15			
	25,22	90,86	Cp	2894,84	3077,60?
	28,28	4424,34		2900,30	4124,73
	41,87	33,89		11,39	4518,57
	71,40	34,32			
	4256,39	58,52	Nb	2875,39?	4058 93
	62,68	67,34		3145,41?	79,73?
				3225,48	4123,85?

Fisiologia (Fonetica). — *Nuovo metodo di indagine delle proprietà acustiche del capo.* Nota (1) di Silvestro Baglioni e Angelo Manfredi (2).

Il capo e le cavità interne ad esso colle loro proprietà acustiche, fisse e variabili, determinano le caratteristiche dei diversi *fonemi* (vocali e consonanti), eccitati normalmente dall'apparato laringeo.

Abbiamo escogitato un metodo che ha per scopo di accertare quali sono le frequenze per le quali il complesso sistema costituito dalle diverse cavità situate nell'interno del capo (bocca, faringe, fosse nasali ecc.) e dalle parti solide suscettibili di vibrare, che ne costituiscono le pareti, può risuonare quando venga posto in vibrazione forzata. La ricerca di tali frequenze, e uno studio del modo nel quale esse variano al mutare delle condizioni in cui si sperimenta, potranno, tra l'altro, fornire utili indicazioni per l'analisi del complesso processo inerente alla generazione dei fonemi, anche se, a stretto rigore, tali cavità non possano venir considerate come a se stanti, perchè, nel normale processo di emissione dei fonemi, le corde vocali costituiscono un generatore acustico « strettamente accoppiato » ai sistemi risonanti (cavità), sicchè le frequenze emesse in tali condizioni potranno differire, in misura non facilmente prevedibile, dalle frequenze per le quali risuona il sistema delle cavità considerato isolatamente.

È noto che l'esistenza di frequenze per le quali il complesso delle cavità potrà in condizioni opportune risuonare, può essere dimostrata grossolanamente mediante esperimenti di vario tipo. Ad esempio si possono riprodurre suoni molto simili alle vocali battendo sui denti (o anche dirigendo su essi un soffio d'aria esterna), mentre si atteggia la bocca nel modo con cui si pronunzia la vocale. Anche strofinando lievemente con le dita sulla guancia (serie di impulsi) si possono eccitare suoni simili alle vocali (Baglioni); lo stesso effetto si può avere battendo con un dito un qualsiasi punto del capo.

---

(1) Presentata nell'Adunanza del 23 novembre 1940-XIX.

(2) Le ricerche sono state eseguite nella camera assorbente dell'Istituto di Elettroacustica « O. M. Corbino » del Consiglio Nazionale delle Ricerche, ai cui Dirigenti esprimiamo anche qui i sensi di nostra viva gratitudine.

Il metodo escogitato per porre in vibrazione forzata l'aria delle cavità interne e le parti del capo è il seguente. Un vibratore meccanico viene poggiato su una piccola regione del capo e trasmette le sue vibrazioni anche alle cavità interne.

Il vibratore è costituito (fig. 1) da un elettrodiapason EAT 440 [1], disposto entro un sostegno munito di uno stelo *A* che si appoggia sulle

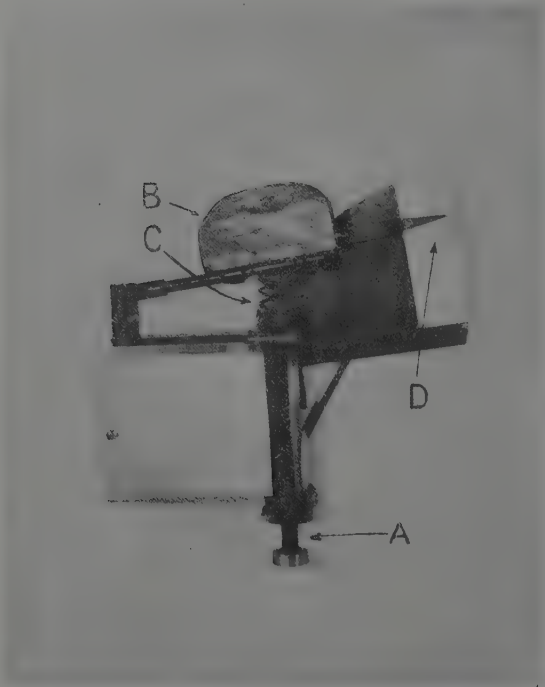


Fig. 1. – Vibratore meccanico.

diverse zone del capo in direzione ad esse. L'apparecchio si applica tenendolo per il manico *B* e comprimendo la sottostante molla *C*. L'indice *D* segna il valore della pressione costante dello stelo sul capo, cui si sovrappone la pressione alternativa. Nelle successive misure questa pressione vien mantenuta costante riportando l'indice sempre allo stesso punto della scala.

---

[1] S. Baglioni e A. Manfredi, *Elettrodiapason automatico*. « La Ricerca Scientifica », anno XI, n. 7-8, luglio-agosto 1940-XVIII, pag. 526.

Una indiretta indicazione della esistenza di oscillazioni forzate imposte all'aria delle cavità, viene ottenuta mediante un microfono piezoelettrico, raccordato con tubo di gomma e maschera alla bocca o al naso del soggetto. Il microfono è collegato ad un amplificatore di tensione, alla cui uscita è inserito un voltmetro che dà indicazioni proporzionate alle ampiezze anzidette.

Naturalmente questo modo di procedere non permette senz'altro di accertare quali sono le frequenze per le quali risuona il sistema delle

Fig. 2. – Disposizione sperimentale in camera assorbente.

cavità, data l'azione perturbatrice portata dal tubo di raccordo, che congiunge la bocca con il microfono. *Tuttavia il metodo permette di verificare, in un primo tempo, quali sono le regioni del capo che consentono di trasmettere l'energia vibratoria alle cavità in condizioni più favorevoli.*

La figura 2 mostra la disposizione sperimentale. Il microfono è contenuto in una scatola metallica *A* rivestita internamente di gomma piuma e appoggiata pure su fogli della stessa gomma piuma. *B* è l'amplificatore, *C* lo strumento indicatore. Il tutto è disposto nella camera assorbente dell'Istituto.

La figura 3 mostra i grafici che si ottengono sperimentando su vari soggetti. Si sono scelte, per meglio confrontare i risultati, due linee principali di esplorazione. La prima è quella che dal vertice delle ossa nasali procede lungo la linea mediana dell'osso frontale, segue la sutura sagittale, la linea mediana dell'osso occipitale e le apofisi spinose delle vertebre cervicali; la seconda è quella che, partendo dall'apofisi mastoide destra,

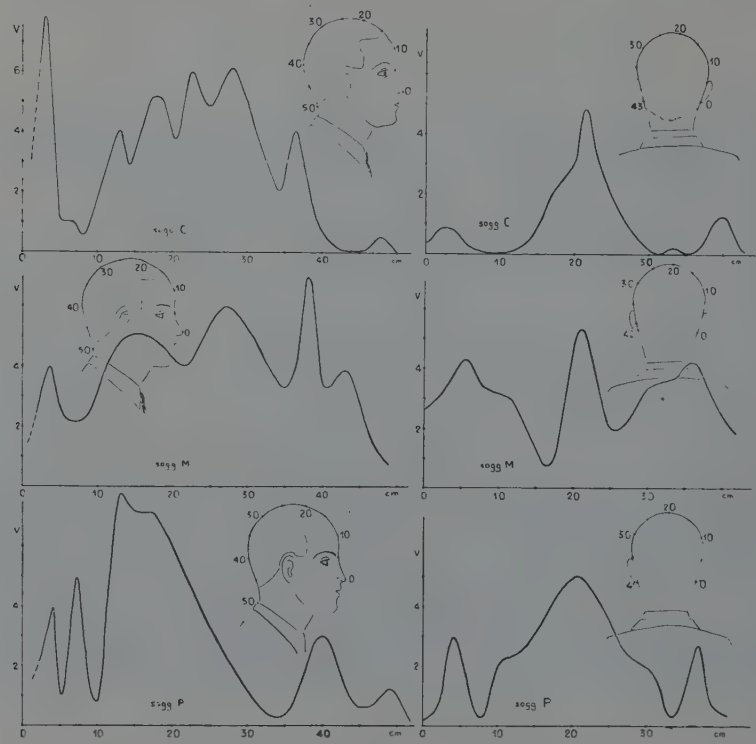


Fig. 3. – Grafici relativi a tre diversi soggetti. Maschera applicata alla bocca. Frequenza del vibratore 440 Hz (la_3).

sale attraverso le ossa temporali e parietali alla sommità del capo e scende poi simmetricamente alla mastoide sinistra.

Queste linee sono state rettificate sugli assi delle ascisse dei grafici della figura 3, riportando in centimetri le distanze dei punti di misura dal punto di inizio delle linee stesse. Nelle ordinate sono riportate senz'altro le letture al voltmetro indicatore. La frequenza del vibratore meccanico era di 440 *Hz* (la_3). Il soggetto teneva sempre la bocca in posizione di *a*, inspirando ed espirando con calma attraverso il naso.

Riserbandoci di trarre conclusioni alla fine delle nostre ricerche, possiamo fin d'ora rilevare che alcune delle zone di massimo e minimo sono caratteristiche dei singoli soggetti, mentre altre sono comuni quasi a tutti gli individui, come ad esempio il massimo nella zona superiore dell'osso frontale e il minimo nella zona media sottostante (*glabella*); il

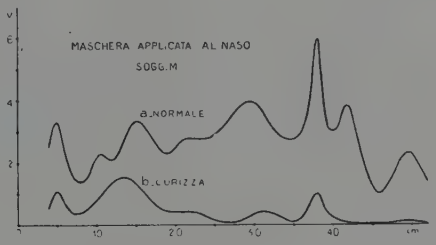


Fig. 4. – Grafici relativi al soggetto M con maschera applicata al naso (*a* – normale; *b* – malato).

forte massimo intorno alla sommità del capo e i due massimi minori nella zona retrostante agli orecchi.

Non molto diversi sono i grafici ottenuti applicando la maschera raccoglitrice del suono (tenuta in perfetta aderenza agli orli) al naso invece che alla bocca. In questo caso il soggetto respira con calma attraverso la bocca mantenuta socchiusa.

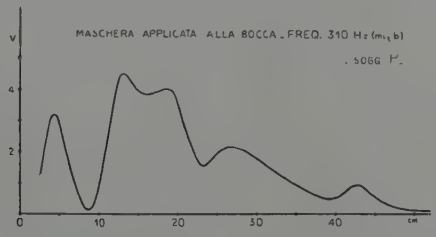


Fig. 5. – Grafico relativo al soggetto P con maschera applicata alla bocca e frequenza del vibratore 310 Hz (*mi*³ *b*).

È interessante notare a questo proposito la grande influenza che può esercitare un'affezione morbosa delle cavità nasali, modificando in uno stesso soggetto profondamente il valore, e talvolta la disposizione, dei massimi e minimi. Nella fig. 4 sono riportate due curve di uno stesso soggetto (*a*, normale; *b*, malato) in due periodi diversi, di normalità e colpito da una corizza (soggetto M di fig. 3).

È quasi superfluo aggiungere che, nel soggetto in condizioni normali, le curve si presentano uguali in diversi periodi di tempo. Anche a quattro mesi di distanza non si sono osservate apprezzabili differenze.

Nella fig. 5 è riportato a titolo di esempio un grafico ottenuto usando un vibratore meccanico avente frequenza di 310 Hz ($mi^3\,b$) (lo stesso soggetto P della fig. 3).

Le esperienze continuano usando per l'eccitazione frequenze *variabili con continuità* nella gamma acustica (mediante vibratore elettrodinamico pilotato da un oscillatore a battimenti). Con misure di confronto tra l'ampiezza dell'oscillazione meccanica impressa e l'ampiezza di vibrazione dell'aria delle cavità interne, potremo determinare frequenze alle quali risuona il sistema delle cavità, come ci proponiamo di esporre con altre Note.

Biologia (Parassitologia). — *Ricerche sul controllo biologico degli antielmintici* [1]. Nota di Vittorio Vanni, presentata [2] dall'Accademico Dante De Blasi.

Il controllo dell'azione delle preparazioni antielmintiche, richiede una serie di saggi quantitativi e qualitativi, tutt'altro che facili a realizzare. Tale argomento ha occupato numerosi farmacologi, le cui conclusioni si trovano compendiate e adottate nella conferenza di Edimburgo (1923) e nella conferenza internazionale di Ginevra (1923).

Le ricerche si sono rivolte alla ricerca di un « saggio » biologico su cui si potesse, fuori dell'organismo, controllare l'azione dei vari antielmintici. Così il Solmann ha studiato l'azione di 60 antielmintici sul comune lombrico terrestre, stabilendo per ciascuno di essi la concentrazione minima che provocava l'abolizione dei movimenti, come la dose minima mortale. Ma non si può affermare che le reazioni di tale verme fossero paragonabili a quelle dei vermi parassiti dell'uomo.

Tale saggio è stato preconizzato, confermando gli esperimenti, dallo Straub alla conferenza di Edimburgo, secondo cui il controllo biologico del felce maschio era rappresentato dai vermi terricoli (*Lombricus terrestris*, *Allolobophora foetida*); comportamento simile circa le dosi mortali avrebbero, secondo Knaffl-Lenz, alcuni pesci rossi (*Gobio*, *Carrassius*, *Scardinius*). Degli altri antielmintici noti non esiste un controllo biologico sicuro. Ciò vale per la *cosotossina*, principio attivo dei fiori di Cousso (*Hagenia abissinica*), per la *Rottlerina*, principio attivo della Kamala, (*Mallotus philippinensis*) per la *pelletierina*, principio attivo del *Punica granatum* e per la *Piretrina*, principio attivo del fiore di *Chrysanthaemun cinerariifolium*, per la *santonina*, pel *timolo*, pel *tetracloruro di carbonio* ecc.

Gli antielmintici, secondo la natura del verme su cui agiscono, vanno distinti in *tenifughi*, che agiscono contro i cestodi in genere, e in *vermifughi*,

---

[1] Lavoro eseguito nel R. Laboratorio di Parassitologia presso l'Istituto d'Igiene della R. Università di Roma.

[2] Nell'Adunanza del 23 novembre 1940-XIX.

che agiscono contro i nematodi. Ne viene di conseguenza che il « saggio » biologico da usare per lo studio dell'azione sui cestodi, non può essere lo stesso da usare per lo studio di quella sui nematodi, come è accaduto invece fin'ora. E ciò è facilmente spiegabile dalla differentissima morfologia e biologia che caratterizzano i due ordini di vermi parassiti. Per il tetracloruro di carbonio e per il timolo, vermifughi importantissimi, costituendo essi la cura specifica e la profilassi medicamentosa della anchilostomiasi, non esisteva finora un metodo di controllo biologico, e per l'olio di chenopodio si è perfino ricorso a un metodo colorimetrico, non corrispondendo allo scopo nessun « saggio » biologico.

Tale metodo è basato sul fatto che l'olio di chenopodio, scaldato in presenza di fenolftaleina, dà una reazione colorata rosso-porpora (Knaffl-Lenz e Huffmann, 1928) ed è a questa reazione che si attiene la Commissione di standardizzazione biologica della Società delle Nazioni. Quindi l'ideale del « saggio » è non solo che esso debba essere costituito da un verme, ma che appartenga allo stesso ordine del verme su cui si deve saggiare l'attività del medicamento, ossia un nematode, in linea di massima.

Ciò assume una grande importanza, non solo per il controllo della azione antielmintica « in vitro » più aderente possibile alle condizioni naturali, ma anche per lo studio e il controllo eventuale di antielmintici nuovi; ma la difficoltà maggiore degli esperimenti sui vermi, rispetto a quelli sui batteri ed in genere sugli organismi inferiori, sta nella impossibilità di averne in grande quantità e di ottenerne in coltura, su cui gli esperimenti si possano praticare ad ogni momento e su vasta scala.

Mentre la possibilità di ottenere colture appare impossibile per i cestodi, mi è riuscito invece egregiamente per i nematodi, di cui un rappresentante si può ottenere in colture rigogliosissime quanto quelle di batteri, tanto allo stato larvale che adulto. Mi sono servito ossia della *Anguillula aceti*.

Questo nematode si trova nell'aceto di vino alterato dall'azione di alcune sostanze organiche (cipolle, cetrioli, funghi conservati in aceto a scopo commestibile) ma la sua presenza è variabile in tali condizioni.

Ho potuto invece ottenere costantemente colture pure rigogliosissime nel seguente modo: a 200 gr. d'aceto di vino vengono aggiunti 20 gr. di mollica di pane, finemente suddivisa. Si agita e si lascia riposare: Dopo circa dieci giorni, alla temperatura di 18°-20°, si ottiene uno sviluppo rigogliosissimo di *Anguillula aceti*, che si può mantenere indefinitamente, trapiantando alcuni cc. del liquido di coltura in nuovo recipiente contenente aceto con mollica di pane, oppure aggiungendo acqua di fonte e un po' di farina al liquido evaporato. L'*Anguillula aceti* pullula così nelle colture, evolvendosi il suo ciclo biologico: il maschio è lungo circa 1 mm., ed è fornito posteriormente di due spicoli chitinosi uguali per la copulazione, e talora di una espansione cuticolare a campana.

La femmina è lunga circa il doppio, e presenta un ovaio doppio, con uno sbocco degli organi sessuali alla metà posteriore del corpo; lo spessore varia da 1/20 a 1/30 di mm.

È ovovivipera, nelle uova appena deposte si vede chiaramente il piccolo embrione ravvolto a gomitolo (fig. 1), animato da movimenti di circolazione intorno al guscio. Gli embrioni non tardano a nuotare liberamente e vivacemente con movimenti rapidi serpentini, e si evolvono,

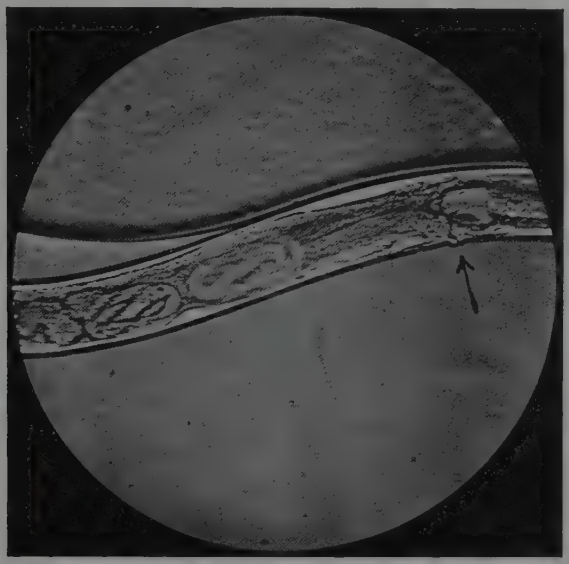


Fig. 1. – Anguillula Aceti ♀ con due embrioni maturi, prossimi ad essere espulsi dalla vulva (indicata dalla freccia) situata al terzo posteriore del corpo.

(Microfot. oc. 6 × obb. 45 × Ko.ist.ka).

attraverso uno stadio a sessi indeferenziati, fino a quello adulto a sessi distinti; e ricomincia il ciclo.

In tal modo, emettendo la femmina parecchi embrioni alla volta, il liquido di coltura in circa due mesi è talmente popolato di anguillule, da costituire una melma grigiastra, composta esclusivamente di tali nematodi. La resistenza vitale e il potere di adattamento della *Anguillula aceti* è notevole, in quanto che, come dimostrò il Pallecchi, può vivere nelle più svariate sostanze, ed anche nella bile; mentre non resiste alla siccità, resiste a temperature assai elevate rispetto a quelle abituale; a 37° vive

ottimamente, a 40°-42° gli individui adulti rallentano i movimenti, mentre le larve si mantengono vivacissime; a 45°-48° gli adulti si immobilizzano, le larve si mantengono vivaci; ma se si riportano a temperatura ambiente, si ripristina la vitalità in pieno, nello spazio di due minuti. A 60° muoiono tanto gli adulti che le larve (Penso). È interessante notare, circa l'opportunità della scelta come « saggio » biologico per il controllo degli antielmintici, la possibilità di adattamento dell'*Anguillula aceti* all'organismo umano, tanto che sono stati descritti casi di pseudo-parassitismo (Penso) e perfino di parassitismo vero e proprio (Stiles) in cui le anguillule vissero nell'organismo umano per un tempo abbastanza lungo.

Tecnica degli esperimenti.

Come si è detto, alla temperatura di laboratorio, nel liquido di coltura costituito da aceto e mollica di pane, si ha uno sviluppo rigoglioso di *Anguillula aceti*, in circa dieci giorni. Lo sviluppo raggiunge il massimo nello spazio di 30-45 giorni. Il liquido, costituito da una sospensione omogenea di anguillule maschio, femmina e larve in tutti gli stadi di sviluppo, e distribuito in provettine da sierodiagnosi nella quantità di 2-3 cc. ognuna, si presta egregiamente agli esperimenti di saggio. Anzitutto è interessante notare il comportamento rispetto ad alcuni veleni protoplasmatici, a dosi variabili, rispetto a una quantità fissa di 2 cc. di coltura.

Picrotossina	nessun effetto
Cocaina	id.
Saponina	id.
Morfina	id.
Chinina solfato	id.
Atropina	id.
Stricnina	id.
Atebrina	id.
Acido salicilico (50 ctg.)	Morte degli adulti in 6 ore
Istamina Merck all'1 ‰	Nessuno effetto
Veratrina.	id.
Nicotina (1 ctg.)	Le anguillule vengono uccise in uno due minuti, tanto allo stato adulto che a quello larvale
Escrina (5 ctg.)	Morte delle anguillule in tutti gli stadi, che si verifica nello spazio di 15-20 minuti, prima degli adulti poi delle larve.

Circa il meccanismo d'azione della eserina, essendo nota la sua proprietà di inattivare l'enzima che neutralizza l'azione tossica della acetilcolina liberata dagli ordegni nervosi motori, si sarebbe potuto pensare ad una azione indiretta della Eserina, di rendere cioè libera l'acetilcolina prodotta eventualmente dai movimenti vivacissimi dell'anguillula. Ma ho potuto concludere per una azione vermicida propria dell'eserina, poichè l'anguillula si è dimostrata completamente refrattaria all'azione dell'acetilcolina, anche a dosi forti. Infatti gr. 0,10 e gr. 0,20 di cloruro di acetilcolina « Roche », sciolti in 1 cc. di acqua bidistillata non ha avuto nessun effetto su 2 cc. di coltura d'anguillula, alla distanza di un'ora, di 6 ore e di 24 ore. Il comportamento delle anguillule veniva controllato nel seguente modo: le provettive venivano osservate a luce riflessa e rifratta con l'aiuto di una forte lente, rivolta agli strati superiori del liquido di coltura: si presta egregiamente allo scopo un oculare da microscopio usato alla rovescia, oppure un agglutinoscopio da batteriologia. In mancanza di azione antielmintica, si osserva un brulicare vivacissimo delle anguillule adulte alla superficie del liquido di coltura: in caso contrario, si osserva una specie di fenomeno d'agglutinazione, in quanto che il liquido contenuto nella provetta appare chiarificato, e al fondo si accumula uno strato più o meno spesso di anguillule immobili. L'esame va completato al microscopio, onde controllare la vitalità delle larve, invisibili a occhio nudo, e gli eventuali fenomeni degenerativi che possono osservarsi nell'adulto, sotto l'azione dei vermicidi.

A parte l'interesse tossicologico dell'esperimento, la prova di saggio sopra accennata si presta ad osservare i seguenti fatti:

1° Le larve delle anguillule sono più resistenti degli adulti

2° La nicotina, l'eserina e l'acido salicilico potranno essere eventualmente esperimentate come sostanze vermifughe, dosate e combinate in preparazioni farmaceutiche, atossiche per l'uomo.

Riportiamo ora il protocollo di esperimenti con vari antielmintici d'uso comune, sempre sulla quantità fissa di coltura d'anguillula di 2 cc.; la lettura si faceva dopo un'ora e dopo 6 ore.

TABELLA.

Antielmintico	Dose	Azione dopo un'ora	Azione dopo sei ore
Timolo crist.	gr. 0,10	nessun effetto	morte degli adulti; larve viventi
Timolo porfirizzato .	gr. 0,05	morte degli adulti larve poco mobili	morte degli adulti e delle larve
Tetracloruro di carbonio (Seretina Bayer)	gocce II	morte degli adulti e delle larve	degenerazione degli adulti–coartazione delle larve
Olio di Chenopodio (Ascaridol)	gocce IV	adulti paralizzati larve mobili	lo stesso risultato
id.	gocce VIII	adulti paralizzati e larve paralizzate	adulti morti e larve paralizzate
id.	gocce X	adulti morti, larve paralizzate	adulti morti, larve morte
Miscela di Tetracloruro di carbonio e Olio di Chenopodio (Bedermin Bayer)	gocce IV	paralisi degli adulti; larve poco mobili	morte degli adulti; larve paralizzate
id.	gocce VIII	morte degli adulti e delle larve	adulti in parte degenerati
Olio cloroformico al 20 %	gr. 0,50	paralisi degli adulti larve mobili	paralisi degli adulti e delle larve
Cloroformio puro . .	gr. 0,20	paralisi degli adulti e delle larve	lo stesso risultato
id.	gr. 0,50	paralisi degli adulti e delle larve	morte degli adulti e delle larve, nella zona di contatto tra il cloroformio e il liquido di coltura
Acqua cloroformica satura	gr. 0,50	morte degli adulti e delle larve	adulti in parte degenerati
Santonina	gr. 0,30	nessun effetto	nessun effetto
Santonato di calcio all'1 %	gr. 2 gr. 1	aumento della vivacità delle larve	aumento della vivacità delle larve e degli adulti.
id.	gr. 0,50	nessun effetto	nessun effetto

Segue Tabella.

Antielmintico	Dose	Azione dopo u'ora	Azione dopo sei ore
Pelletierina	gocce II	nessun effetto	paralisi degli adulti, larve mobili
id.	gocce III	morte degli adulti larve poco mobili	morte degli adulti e delle larve
id.	gocce VI	morte degli adulti e delle larve	id.
Kamala polvere . .	gr. 0,10	nessun effetto	nessun effetto
id.	gr. 0,20	id.	id.
id.	gr. 0,50	id.	id.
id.	gr. 1	id.	id.
Felce maschio . . . . (estratto etereo)	gr. 0,20	id.	id.
id.	gr. 0,50	id.	id.
id.	gr. 1	id.	id.
Olio di felce maschio (Filmaron)	id.	id.	id.

Osservazioni.

Timolo. — Preconizzato dal Bozzolo, nella cura dell'anemia dei minatori del Gottardo, rimane sempre anche oggi un ottimo vermicida nella cura e nella profilassi medicamentosa della Anchilostomiasi; secondariamente anche nella Ascaridiosi, Ossiurosi e Tricocefalosi. Il metodo di controllo biologico con l'*Anguillula aceti* ne controlla egregiamente l'azione, e con esso si osserva che *maggiore è l'azione quando più è finemente triturato* (ved. tabella): quindi è da raccomandare la porfirizzazione accurata di esso, prima della confezione in capsule cheratinizzate o gelatinose, in uso in terapia.

Tetracloruro di carbonio. — Costituisce, come è noto, il rimedio specifico contro l'Anchilostomiasi e la Necatoriasi. Ho potuto anche sperimentarne gli ottimi risultati, alle stesse dosi e con le stesse modalità di somministrazione, nella Ossiurosi, contro cui i comuni vermicidi sono, com'è noto, inattivi.

Fig. 2. – Azione del tetracloruro di carbonio dopo un'ora; morte e coartazione di due individui ♀.
(Microfot. c. s.).

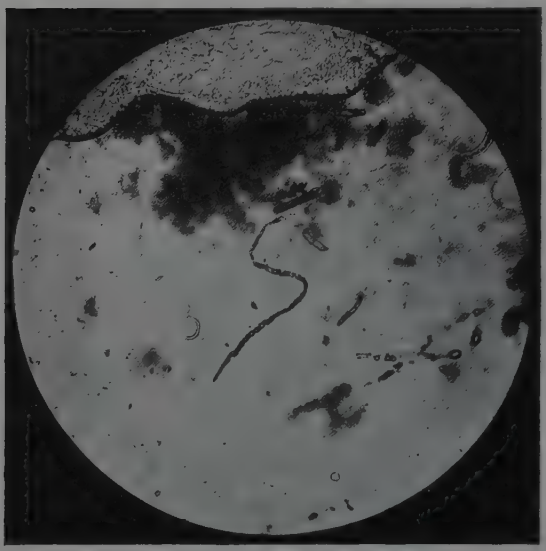


Fig. 3. – Azione del tetracloruro di carbonio dopo 6 ore: degenerazione, coartazione delle larve.
(Microfot. c. s.).

È il vermicida più attivo, anche per quanto i presenti esperimenti possono confermare; infatti, a dosi minime è capace di uccidere in mezz'ora gli adulti e le larve dall'*Anguillula aceti* con una precoce degenerazione granulare (6 ore), a fini e a grosse gocciole traslucide (figg. 3, 4, 5). Vi è da osservare che tali fenomeni degenerativi si manifestano anche, ma dopo lungo tempo, nelle vecchie colture, in seguito a morte e senescenza specialmente degli individui adulti. Ciò che avviene nelle colture non rinnovate da tre mesi almeno (fig. 6). Invece il Tetracloruro di car-

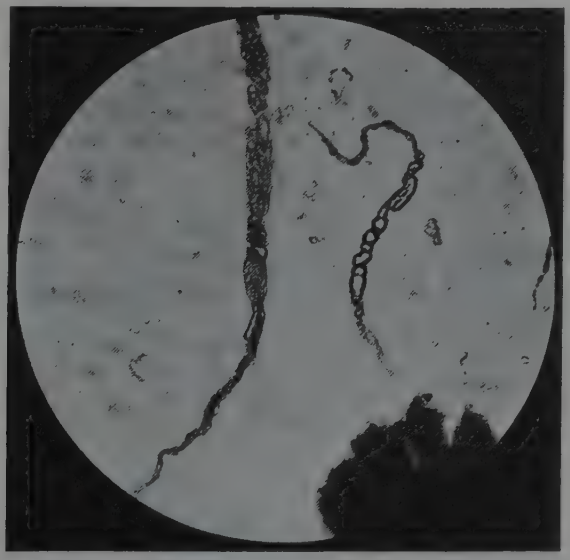


Fig. 4. – Azione del tetracloruro di carbonio, dopo 6 ore: morte, coartazione e degenerazione grassa degli adulti. (Microfot. c. s.).

bonio induce tale degenerazione assai rapidamente, in quanto che si osservano già dopo 6 ore e qualche volta solamente dopo 2 ore. Si tratta con ogni probabilità di degenerazione grassa, in quanto che tanto le sferule minute, quanto quelle più grossolane con apparenza di gocciole rifrangenti, si colorano in giallo-arancio colla soluzione alcoolica di Sudan III, e in nero col Tetrossido di osmio (fig. 7).

A titolo di saggio, ho potuto stabilire il titolo limite d'azione del Tetracloruro di carbonio, variando la quantità di coltura rispetto a una quantità fissa di gocce II di Seretina Bayer, e leggendo i risultati dopo 6 ore, come segue:

Provetta	Seretina (a gocce)	Coltura (cc.)	Risultato
1	II	1	Morte degli adulti delle larve
2	II	2	id.
3	II	3	Qualche larva mobile
4	II	4	Qualche adulto mobile, larve vivaci
5	II	5	Adulti e larve mobili
6	II	6	id.
7	II	7	id.
8	II	8	id.

Il limite d'azione era da stabilire fra le provette 2 e 3. Essendo una goccia di Tetracloruro di carbonio equivalente a cc. 0,01, il limite è fra

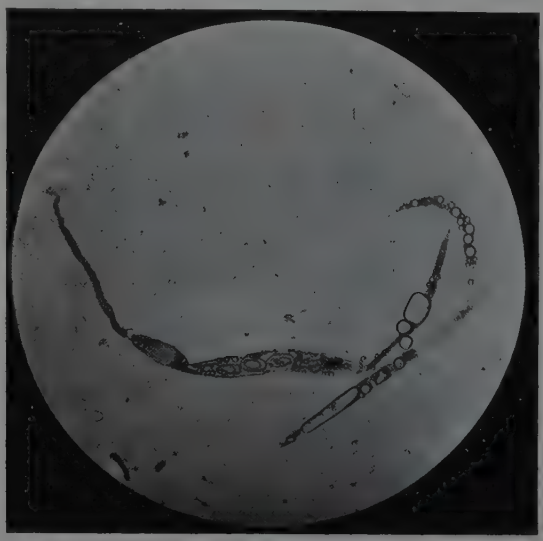


Fig. 5. – Azione del tetracloruro di carbonio. Stadio ulteriore di degenerazione.
(Mic. ofot. c. s.).

1/100 e 1/150, in 6 ore; si può analogamente titolare l'azione di tutti i vermifughi, oppure stabilendo la quantità necessaria ad uccidere in 6 ore le larve e gli adulti di una quantità fissa di coltura (ad esempio, 2 cc.).

Olio di Chenopodio. – Su tale vermifugo c'è da osservare che esso si comporta come veleno muscolare, paralizzante sulle larve e sugli adulti, (figg. 8–9), in quanto che, tolte le anguillule, con lavaggio e centrifugazione, dall'azione del vermifugo, tendono a ripristinarsi i loro movimenti, nello spazio di circa ½ ora: la morte si ha solo a concentrazioni forti (X gocce su 2 cc. di coltura), fatte agire per 6 ore. (v. tabella).

Olio cloroformico. – Si comportano similmente l'olio cloroformico al 20 % e il cloroformio puro, al limite di contatto col liquido di coltura,

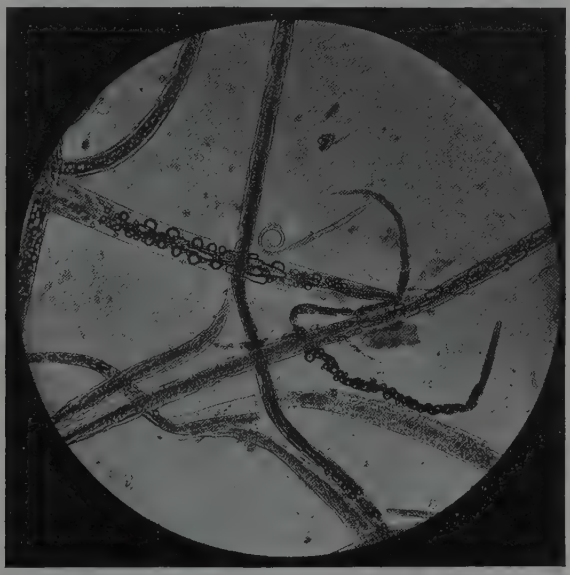


Fig. 6. – Fenomeni di senescenza nelle colture vecchie di *Anguillula aceti*. Morte, coartazione e degenerazione granulosa–grassosa degli individui adulti.

(Microfot. c. s.).

riesce mortale invece, tanto per gli adulti che per le larve, l'acqua cloroformica satura, *purchè di preparazione estemporanea* (fig. 10). Quindi il suo impiego come vermicida è da tenere in considerazione, fatto seguire da un purgante, più tosto che l'olio di ricino cloroformizzato, comunemente usato, la cui azione espulsiva, per essere simultanea a quella paralizzante, può riuscire incompleta e fugace.

Santonina. – Interessante è il suo comportamento, il cui impiego, come è noto, è specifico sugli ascaridi: il nessun effetto di 30 ctg. di essa su 2 cc. di cultura è spiegato da essere questa difficilmente solubile; si

scioglie solo infatti in presenza del succo enterico « in vivo », e « in vitro » parzialmente in alcool e completamente in cloroformio.

Ma essendo questo attivo di per sè, non poteva essere usato per gli esperimenti. Perciò mi sono servito del Santonato di calcio solubile, di cui ho ottenuto la soluzione all'1%, facendo bollire gr. 0.50 di Santonina cristallizzata, in 50 cc. di latte di calce. Dopo filtrazione, la reazione di controllo si otteneva mediante la comparsa fugace di un colore rosso-carminio, con l'aggiunta di soluzione alcoolica di potassa.

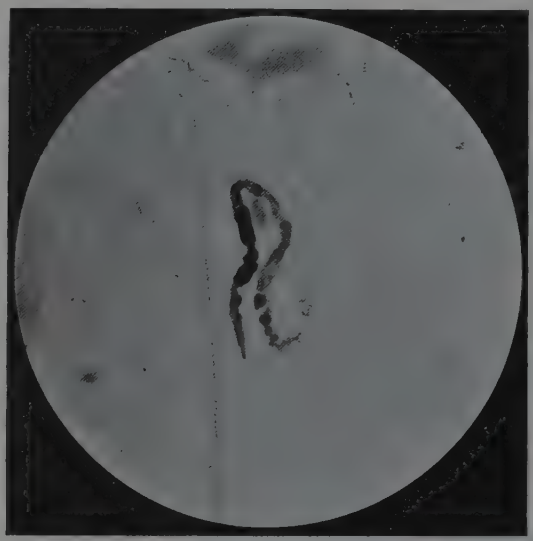


Fig. 7. – Azione del Tetracloruro di carbonio dopo 6 ore: degenerazione grassa di *Anguillula* adulta, messa in evidenza con la reazione nera all'acido Osmico

(Microfot. c. s.).

Il Santonato di calcio, alla dose di gr. 0,01, manifesta la proprietà di *accelerare sensibilmente la mobilità delle larve e degli adulti*, già dopo tre minuti; il fenomeno si accentua ed aumenta in 12 ore, per scomparire in 48 ore circa. Il fenomeno non si osserva con dosi minori (gr. 0.005). Non si riesce a provocare la morte, a dosi anche considerevoli.

Ora è interessante notare come fino dagli antichi esperimenti di Schroder (1885) e di Coppola (1887), gli ascaridi del maiale, che sono biologicamente simili a quelli dell'uomo, in presenza di Santonina aumentano la vivacità dai loro movimenti, e in base a tale osservazione si è ammesso che la Santonina, provocando sugli ascaridi una maggiore mobi-

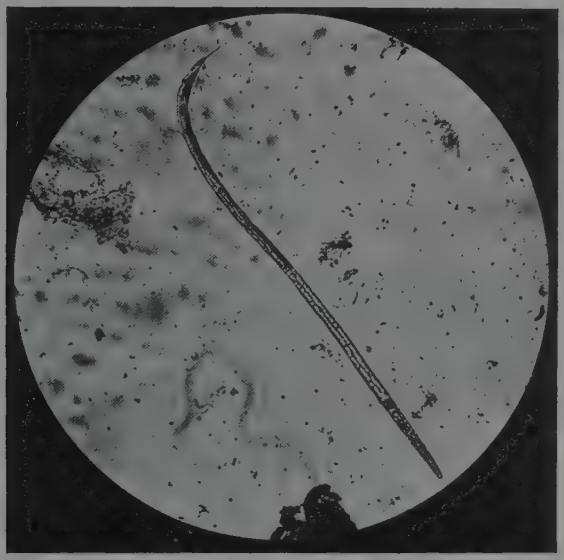


Fig. 8. – Azione dell'olio di Chenopodio sull'*Anguillula aceti*: paralisi di un individuo adulto in estensione.
(Microfot. oc. 6 × obb. 10 × Koristka).

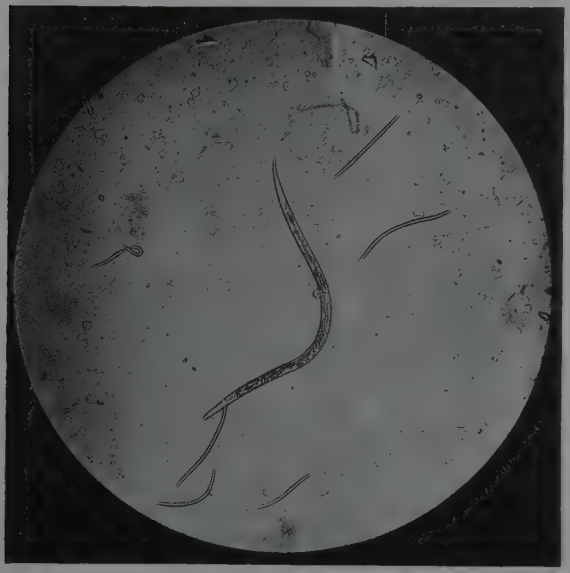


Fig. 9. – Azione dell'olio di Chenopodio: paralisi di individuo adulto e di larve
(Microfot. c. s.).

lità, possa favorire la loro espulsione, e in particolare la migrazione dall'intestino tenue, ove vivono abitualmente, nell'intestino crasso, ove rimarrebbero uccisi dai processi putrefattivi che in esso sogliono svilupparsi. Il meccanismo d'azione viene perfettamente confermato dal presente esperimento, che dimostra una aumentata mobilità dell'*Anguillula* da Santonina.

Tale proprietà caratteristica spiega l'azione sugli ascaridi, la quale, più che specifica su di essi esclusivamente, lo è in quanto che si tratta di

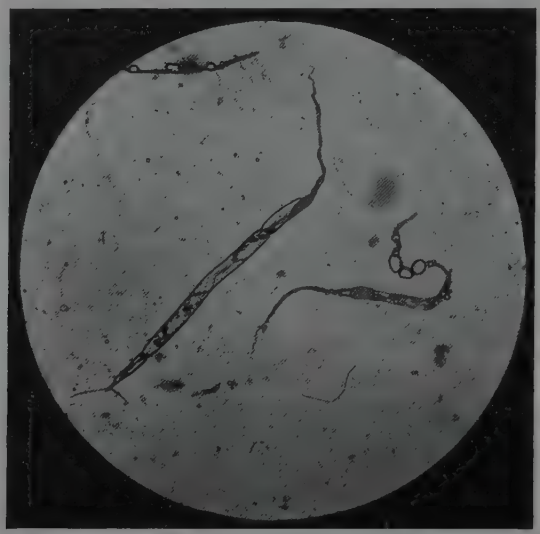


Fig. 10. – Azione dell'acqua cloroformica satura dopo 6 ore: adulti in parte degenerati.

(Microfot. c. s.).

nematodi di grossa taglia, non fissati su la mucosa intestinale, o molto lassamente. Infatti essa non agisce sull'Anchilostoma, sull'ossiuro, sul tricocefalo, in quanto che essi sono di piccola taglia e fissati tenacemente sulla mucosa, quindi l'aumentata mobilità non basta alla espulsione.

Fra gli antielmintici ad azione tenicida, la *Pelletierina* sola si dimostra attiva, ciò che condurrebbe all'impiego di essa come vermicida. La miscela di tetracloruro di carbonio e olio di chenopodio (Bedermin) dimostra sicura azione, più lenta rispetto a quella del tetracloruro di carbonio puro; l'azione sinergica paralizzante del primo con quella tossica del secondo rende indicato il farmaco nei casi in cui si manifesti il bisogno di una azione più lenta e duratura, come nelle infestazioni croniche.

Conclusione. – *L'Anguillula aceti* costituisce un ottimo saggio per il controllo biologico degli antielmintici usati contro i *nematodi* parassiti dell'uomo e degli animali: essa si può ottenere in colture pure abbondanti in terreno liquido, composto di aceto e mollica di pane, in circa dieci giorni, e le colture si mantengono indefinitamente, con trapianto mensile, alla temperatura di 15°–20°. Tali colture si prestano per qualsiasi prova « in vitro » che traduce con molta approssimazione l'azione « in vivo ».

Fra antielmintici usati in terapia, la massima attività è dimostrata dal tetracloruro di carbonio, il quale induce un rapida degenerazione delle anguillule: viene poi l'acqua cloroformica satura, il timolo, (la cui azione aumenta con la porfirizzazione) e l'olio di chenopodio, il quale risulta agire come veleno muscolare, paralizzando i movimenti del verme.

La santonina, (sotto forma di santonato di calcio solubile) accelera i movimenti del verme; ciò conferma per tanto il suo meccanismo d'azione studiato su gli ascaridi del maiale, per cui si provocherebbe la migrazione del verme dall'intestino tenue nel crasso, ove rimarrebbe ucciso dai processi putrefattivi che vi si sviluppano.

Si può stabilire agevolmente la titolazione degli antielmintici, con la determinazione del limite della loro attività rispetto alla coltura di *Anguillula aceti*. Il metodo acquista una importanza tutta particolare, in quanto che può essere utilizzato come orientamento nella ricerca di nuovi antielmintici. Fra i tenicidi si mostra attiva la sola Pelletierina, tutti gli altri rimangono senza effetto. Fra i veleni protoplasmatici si dimostrano attivissimi la nicotina, l'acido salicilico e l'eserina, la quale ultima esplica un'azione sua propria, indipendentemente da una eventuale liberazione di acetilcolina da parte degli ordegni nervosi motori del verme.

BIBLIOGRAFIA

E. Bachbach, « Comp. Ren. Soc. Biol. », *84*, 357 (1921); « Bul. Scienc. pharm. », *35*, 1928, 15.

R. Boehm, « Ann. d. Chem. », 317, 230 e 308 (1901); Idem, 329, 310 e 339 (1903).

G. Bucciardi, *Valutazione biologica dei Medicamenti*. Ed. Sansoni, Firenze, 1938.

F. Cajus, K. S. Mhaskar, « Ind. journ. Med. Res. », *7*, 429 (1917); Idem, *7*, 570 e 722 (1920); Idem, *8*, 125 (1920); Idem, *9*, 35, 55, 191 e 209 (1921); Idem, *10*, 343 e 360 (1922); Idem, *11*, 92 e 337 (1923).

Chandler, *Anthelmintics and their use*, London, 1928.

J. Chevalier, « Bull. Soc. Pharmacol. », *57*, 154 (1930).

Coppola, *Sul meccanismo di azione della Santonina come antielmintico*. « Archivio per le Scienze Mediche », vol. XI, 1887.

G. Gaglio, *Farmacologia e Terapia*. Soc. Ed. libraria, Milano, 1930.

R. Gautier, « Bull. Trim. Organis. d'Hyg. Soc. Nat. », 1935, *4*, 544.

S. F. Gomes da Costa, « Arch. Int. Pharmacol. Ther. », 41, 443 (1931); « C. R. Soc. Biol. », 103, 339 (1929).

F. Guimaraes, « C. R. Soc. Biol. », *96*, 1249 (1927).

R. St. Heathcote, « Journ. Pharmacol. exp. Ther. », *21*, 177 (1923).

H. W. Knipping; H. Seel, « Arch. Exp. Path. und Pharmakol. », *159*, 202 (1931).

J. Lévy, *Essais et dosages biologiques*, Paris, 1930.

G. Pennetti, « Arch. Intern. Pharmacol. et Ther. », *31*, 395 (1926).

G. Penso, *Osservazioni ed esperienze sulla « Anguillula aceti »*, « Ann. Med. Nav. e Col. », Roma, 1930.

Id., *Sopra un caso di pseudoparassitismo da « Anguillula aceti »*, « Boll. R. Acc. R. Acc. Medica », Roma, 1929-1930.

T. Rebello, Gomes da Costa, J. Toscano Rico, *Helmintiases et antielminticos*, Lisbona, 1928.

Ruzicka, Echenberger, « Helv. Chim. Acta », *13*, 1117 (1930).

Schroeder, « Archiv. f. Exp. Path. u. Pharmacol. », 1885.

H. Seel, « Arch. Exp. Path. Pharmacol. », *159*, 589 (1931).

Société des Nations, *Rapporto della conferenza di Edimburgo* (C. H. 147); *Rapporti delle conferenze di Ginevra* (C. H. 183 e 5517); *Rapporto della conferenza di Francoforte* (C. H. 717).

W. Straub, « Arch. für die gesamte Phys. », 379 (1900); « Arch. f. exp. Pth. u. Ph. », *48*, 1 (1902).

L. Tocco-Tocco, « Arch. Intern. Pharmacol. et Ther. », *29*, 85 (1924).

R. Wasicky, « Arch. f. exp. Pathol. u. Pharm. », *97*, 454 (1923).

E. Zuntz, *Éléments de Pharmacodynamie speciale*. Masson, Paris, 1932.

Biologia. — *Sulla sostanza colorante di natura flavonica della foglia del gelso* [1]. Nota di Carmela Manunta, presentata [2] dall'Accademico Filippo Bottazzi.

La Duce, sotto la direzione di Jucci in ricerche spettrofotometriche trovava per gli estratti di bozzoli di razza Verde Giapponese una curva di assorbimento spiccatamente diversa da quella che otteneva per gli estratti di varie razze gialle di bachi da seta. « Da queste ricerche pare si debba concludere che per la razza Verde ci sia da sospettare la presenza di un pigmento chimicamente diverso da quello che colora le razze gialle ».

In seguito numerose osservazioni e ricerche di Jucci e Manunta accertavano che realmente la sostanza colorante dei bozzoli di Verde Giapponese è chimicamente ben diversa da quella che colora i bozzoli di tutte le razze gialle tanto che già da molti anni Jucci distingue razze « a flavoni » (Verde Giapponese) ed a « carotenoidi » (Razze Gialle in generale). Da una Nota preliminare Jucci e Manunta avevano concluso:

« Stiamo cercando di isolare e di individuare chimicamente questo nostro pigmento verde per il quale proponiamo il nome di *Bombiclorina* che saremo felici di abbandonare se ricerche ulteriori giungeranno ad identificare detta sostanza con una delle sostanze già individuate dalla chimica biologica nel regno vegetale o nell'animale. Forse non è inutile che arrischiamo fin d'ora (semplicemente come ipotesi di lavoro, s'intende) la nostra impressione che la sostanza in questione abbia rapporti di affinità con sostanze coloranti di origine vegetale del tipo ossichetonico come le due gialle, solubili in acqua, estratte dal legno di una moracea; la *Maclura aurantiaca*: morina, un tetraossiflavonolo, e maclurina un pentaossibenzofenone.

« A sostanze del genere pare anche sia dovuto in buona parte l'ingiallimento autunnale delle foglie di molte piante (secondo le ricerche di Tswett). Potrebbe darsi che da sostanze analoghe presenti nelle foglie del gelso, i bachi da seta di razza Verde derivino il pigmento, e non (come è stato da parecchi autori supposto) dalla clorofilla ».

---

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Biologia e Zoologia della R. Università di Sassari.

(2) Nell'Adunanza del 23 novembre 1940–XIX.

Sin da allora avevo intrapreso varie ricerche allo scopo di isolare il pigmento dei bozzoli di verde e poterlo così individuare chimicamente.

Nel 1934, avendo avuto a disposizione qualche centinaio di gr. di cortecce seriche di Verde Giapponese ho isolato una quantità scarsissima di sostanza sulla quale potei saggiare solo le reazioni caratteristiche per le sostanze di natura flavonica. Riporto integralmente quanto già esposi nella mia Memoria: *Ricerche biochimiche su due Lepidotteri la Tignuola degli alveari « Galleria mellonella » ed il bombice del gelso « Bombyx mori »*.

« Alcune centinaia di gr. di cortecce seriche di bozzoli di Verde Giapponese vennero estratte con acetone al 30 % ad una temperatura di circa 70°. All'estratto giallo intenso fu aggiunto acetato basico di Pb solido, sino a precipitazione completa. Si ottiene un precipitato giallo arancione che viene filtrato alla pompa.

« Il precipitato ottenuto è sospeso in H_2O fredda e trattato a caldo con H_2SO_4 diluito. Si ottiene così un precipitato di solfato di Pb ed un filtrato giallo rossiccio contenente la sostanza colorante messa in libertà. Il filtrato per lunga ebullizione lascia depositare una sostanza quasi peciosa che, triturata in mortaio prima con CCl_4 poi con H_2O fredda, lascia depositare una polvere bruna. Questa è fatta seccare su cloruro di Ca ed estratta con etere. L'estratto etereo, dopo distillazione della maggior parte dell'etere ed evaporazione della piccola quantità rimasta, lascia un residuo costituito da una polvere nettamente gialla con lieve sfumatura verdastra. Sulla sostanza ricavata tutte le reazioni già eseguite sull'estratto alcoolico, acquoso ed acquoso acetonico, risultano identiche, anzi più nette; la colorazione giallo intensa con alcali e con Na_2CO_3; la colorazione verde bruno con $FeCl_3$; il precipitato arancione con acetato basico di Pb; lo scoloramento con gli acidi concentrati (e ricomparsa del colore con gli alcali). Dimostrativa più che ogni altra reazione, della pertinenza del pigmento di razza verde al gruppo dei flavoni (o flavonoli) è la riduzione con H nascente che dà origine alla formazione di « antocianine artificiali » o allocianidine. A circa cc. 20 di estratto alcoolico di bozzoli di verde si aggiungono, alcuni cc. di H_2SO_4 2 N e della polvere di zinco a freddo. Si forma dopo alcune ore un bel colore rosa magenta. Reazione analoga si ottiene per la quercetina ».

Anche Barbera su estratti da me preparati di bozzoli di verde eseguì e trovò positive le reazioni per i corpi di natura flavonica.

Eravamo dunque ben sicuri trattarsi di sostanza di natura flavonica ma non sapevamo con sicurezza nemmeno se si trattasse di un flavone o di un flavonolo o magari di un miscuglio dei due.

Avendo avuto occasione in seguito al conferimento di una borsa di studio di recarmi a lavorare per sei mesi a Zurigo all'Istituto di Karrer ed avendo messo il prof. Jucci a mia disposizione tutti i bozzoli di verde che possedeva (circa 200 gr.) pensai di isolare di nuovo il pigmento per

poter individuarlo, magari mediante la sola analisi spettroscopica, se la quantità isolata non fosse risultata sufficiente al riconoscimento per via chimica.

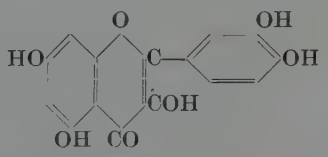
Ma anche questo tentativo, se ci dette la sicurezza (avendo ripetuto le reazioni su un po' dell'estratto), che si trattava di un flavone sotto forma di glucoside, non ci permise neppure l'individuamento per via spettroscopica, tanto grande era la scarsezza del materiale.

Pensai allora di comincire con l'isolare le sostanze di natura flavonica, in quantità abbastanza rilevante per l'individuamento chimico, dalla foglia del gelso, ricerca del resto anche questa di grandissimo interesse per lo studio del metabolismo di questo pigmento governato nella razza Verde, da uno speciale fattore mendeliano.

L'isolamento del pigmento in questione dalla foglia del gelso mi è riuscito più difficile di quanto avviene di solito in altro materiale a causa, probabilmente, della grande quantità di cera.

Dopo aver saggiato vari metodi sono finalmente riuscita ad ottenerne alcuni cristalli. Non potendo io trattenermi più a lungo. a Zurigo il materiale è stato ricristallizzato dal prof. Karrer. Ma era talmente scarso ed ancora così impuro che neanche riuscì possibile un individuamento della sostanza per via spettrofotometrica. Occorreva lavorare parecchi kgr. di foglia. Il prof. Karrer ebbe la bontà di rinviarmi circa 6 kgr. di farina di foglie di gelso all'Istituto di Sassari ove mi accinsi con fervore all'isolamento della sostanza. Isolata finalmente la sostanza, essa è stata dal prof. Karrer stesso individuata come quercetina pura.

Naturalmente la quercetina si trova nella foglia del gelso, come del resto anche nella *Quercus tinctoria*, nel luppolo, nel the ecc. sotto forma di glucoside. Dopo questo reperto pare si possa ritenere (del resto una conferma la possiamo avere anche, se in possesso di molti bozzoli, isolando ed individuando chimicamente la sostanza colorante dei bozzoli di Verde) che il pigmento da Jucci e Manunta nominato *bombiclorina* è un flavonolo e precisamente quercentina



Anche in questo caso (come per i carotenoidi) è interessantissimo il fatto che il pigmento è tratto dalla foglia del gelso e che il baco con una spiccatissima capacità di permeabilità selettiva lo estrae in forma pura dal complesso degli altri pigmenti, ma solo se nella sua costituzione genotipica sia presente un determinato fattore.

Parte sperimentale.

Fra i tanti metodi di isolamento tentati, due soltanto mi hanno dato risultati positivi di cui uno assai semplice permette, a mio parere, anche l'estrazione in grande del colorante ed apre forse la via ad un altra applicazione industriale della foglia del gelso.

1° Metodo: 20 gr. di farina di foglia di gelso vengono pestate in un mortaio con 10 cc. di H_2O e 2 cc. di acido solforico al 50 % e si aggiunge poi ancora 1 cc. di acido solforico conc. Questa massa si lascia stare tre ore per l'idrolisi dei glucosidi. Infine 100 di tali porzioni (circa 2 kgr.) sono messe in una grande pentola ed estratte con 4 litri di alcool a 95° facendo bollire su un fornello elettrico per una mezz'ora. Si filtra poi alla pompa ed il residuo viene ancora trattato ripetutamente con alcool fino ad esaurimento. Gli estratti riuniti sono distillati nel vuoto fino a circa un litro. L'estratto così concentrato, molto acido per acido solforico, viene neutralizzato (non completamente) con una soluzione di idrossido di sodio al 10 %. Poi si distilla via tutto l'alcool nel vuoto ed il residuo è estratto con H_2O bollente, poichè i flavoni vi sono solubili. La clorofilla che a freddo resta precipitata a caldo si trasforma in una specie di olio verde cupo e viene allontanata mettendo nella soluzione bollente della carta da filtro a fini pezzetti e per molte filtrazioni fino a che la soluzione ha assunto un color giallo rossastro. Per raffreddamento della soluzione i flavoni dovrebbero precipitare, poichè sono insolubili in H_2O fredda, ma non si ha alcun precipitato neanche dopo riposo in frigorifero per due giorni. Certo la precipitazione è impedita dalla grande quantità di solfato di sodio presente nella soluzione (derivante dalla neutralizzazione dell'acido solforico con l'idrossido di sodio) oltrecchè da altre sostanze estratte assieme con la sostanza flavonica, sopratutto resine. Allora la soluzione viene evaporata nel vuoto fino a secchezza ed il residuo secco è fatto estrarre a riflusso con alcool parecchie volte fino ad esaurimento (ho estratto una decina di volte con tre litri di alcool ogni volta, non si ha un dato sicuro per giudicare dell'esaurimento della sostanza colorante flavonica, per la grande quantità di resine presenti, pure solubili in alcool, che dànno l'intensificazione di colore per aggiunta di alcali).

Gli estratti riuniti sono di nuovo distillati nel vuoto fino a secchezza ed il residuo estratto con acqua bollente. Gli estratti acquosi filtrati a caldo, sono concentrati nel vuoto fino a circa 500 cc. Dopo riposo in frigorifero per circa due giorni si ottiene un deposito bruno appiccicaticcio (flavone impurissimo) di circa 2–3 dgr. Questo deposito è fatto bollire con H_2O e filtrato a caldo. L'estrazione con H_2O bollente è ripetuta fino ad esaurimento. Gli estratti acquosi sono concentrati nel vuoto. L'estratto ridotto a circa 10 cc. è lasciato in frigorifero per un giorno. Si ha un precipi-

tato giallo bruno che è separato mediante centrifugazione e che rappresenta circa uno–due cgr. di sostanza colorante flavonica ancora ben lungi dall'essere pura. Essa è disciolta in alcool bollente ed alla soluzione si aggiungono pochi cc. di H_2O e qualche cgr. di carbone animale per allontanare le sostanze brune di accompagnamento. Dopo ebollizione di qualche minuto si filtra e si lava il residuo con alcool diluito. Dalla soluzione si allontana l'eccesso di alcool e si lascia in frigorifero per più giorni fino a che la sostanza colorante flavonica cristallizza in rosette ed aghi giallo brunastri. Si eseguisce la ricristallizzazione ripetendo il trattamento col carbone nel modo anzidetto sinchè si hanno cristalli completamente gialli.

Naturalmente nel processo di purificazione le perdite sono state molto grandi sicchè si è ottenuto qualche mgr. di flavone pressocchè puro appena sufficiente per una analisi spettroscopica.

Il comportamento spettroscopico del flavone isolato non mostra alcuna curva caratteristica, presentando solo un massimo a 350 mμ Molto probalilmente la sostanza non era abbastanza pura per tale analisi.

2° Metodo: circa 5 kgr. di farina di foglia idrolizzata come nel precedente metodo sono esauriti con alcool denaturato ridistillato di recente.

L'estratto alcoolico della prima estrazione contenente la maggior quantità di H_2SO_4, ridotto a piccolo volume, è neutralizzato (non completamente) con idrosisdo di sodio al 40 %. Dopo riposo di 24 ore si deposita in forma di cristalli il solfato di sodio (formatisi per reazione dell'H_2SO_4 con NaOH).

Si filtra e il filtrato si fa evaporare nel vuoto. L'estratto totale pressochè acquoso (circa due litri e mezzo) ancor bollente è versato in 3 grandi recipienti di vetro in forma cilindrica alti circa 70 cm. pieni di acqua di fonte (5–6 litri) in sottile filetto ed agitando con una bacchetta. Si forma subito un precipitato giallo verdastro che tosto diventa bruno intenso e che dopo agitazione si raccoglie nel fondo del cilindro. Dopo riposo di 24 ore nel recipiente si nota: al fondo uno strato bruno fangoso, tutta l'acqua è di color rosso nerastro, mentre alla superficie galleggia uno strato oleoso nero. Si decanta ed il deposito si lava a più riprese con acqua fredda per decantazione. Infine si filtra; si lava con acqua fredda. Il prepitato nerastro è sospeso in H_2O e fatto bollire. Si filtra. Dopo raffreddamento il filtrato lascia precipitare una sostanza giallo bruna (flavone molto impuro). La sostanza colorante flavonica è purificata per ripetuto trattamento in H_2O bollente fino ad avere circa un gr. di sostanza giallo intensa soffusa di verdastro.

La sostanza è ricristallizzata dall'alcool diluito. Essa si identifica con la quercetina pura; dà reazione verde bruna con cloruro ferrico, ed è fortemente ridotta dalla soluzione di nitrato di argento.

È stata poi mutata nel suo acetilderivato scaldando per una mezz'ora all'ebollizione con anidride acetica ed acetato di sodio. Il pentaacetato ricristallizzato dà un punto di fusione (193°) come quello del pentaacetato di quercetina.

L'analisi dà i seguenti valori:

trovato	C	58,3	H	4,2
calcolato per il pentaacetato di quercentina	C	58,5	H	4,2

La sostanza è dunque certamente pentaacetato di quercetina.
La flavina è libera da metossile.

Biologia (Citologia). — *Ricerche sul significato istochimico e funzionale delle granulazioni interfibrillari delle fibre muscolari striate* (1). Nota di Giacinto Ciaccio, presentata (2) da Giuseppe Gola, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

Ricerche da me ampiamente riferite in lavori precedenti (3) mi hanno condotto a richiamare l'attenzione sulle differenze di costituzione biochimica delle miofibrille e dei granuli interfibrillari, due dei costituenti di maggiore importanza della fibra muscolare striata.

Nelle fibre sottoposte alle digestioni artificiali con agenti chimici, le miofibrille si dissolvono completamente, mentre i granuli interfibrillari si conservano nella loro posizione ai lati di Z. Altre mie ricerche espletate con metodi istochimici hanno precisato che le sostanze di natura lipidica sono presenti esclusivamente nei granuli interfibrillari. In questi, secondo i reperti di vari AA., sono anche presenti dei carboidrati (glicogeno). Inoltre i granuli si colorano intensamente con il bleu di metilene in relazione al manifestarsi in essi di attivi processi di ossido–riduzione.

Queste osservazioni mi avevano condotto alla conclusione che i granuli interfibrillari (J e Q) siano depositari di sostanze energetiche, in contrapposto alle miofibrille costituite da materiale proteico contrattile. In seguito ho creduto opportuno approfondire maggiormente le ricerche dirette a indagare il significato istochimico e funzionale delle suddette granulazioni.

In questa breve Nota espongo i risultati da me ottenuti mediante l'applicazione alle fibre muscolari striate di metodi basati su alcune reazioni argentiche.

Come è noto, reazioni di questo tipo hanno avuto largo impiego nella metodica istologica ed istochimica. Alcune di esse (reazione argen-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Zoologia e Anatomia comparata della R. Università di Padova.

(2) Nell'Adunanza del 23 novembre 1940–XIX.

(3) Ciaccio Giacinto, *Ricerche sulle fibre muscolari striate scheletriche soggette a processi regressivi per agenti fisiologici, patologici e chimici.* « Z. Zellforsch. », *27*, 764 (1938); Ciaccio Giacinto, *Ricerche sui costituenti granulari delle fibre striate con particolare riguardo ai granuli interfibrillari Q e J.* « Arch. It. Anat. Embr. », *40*, 301 (1938).

taffine, metodo di Giroud e Leblond per la vitamina C) sono specifiche nel senso che, avvenendo la riduzione argentica senza intervento di agenti riduttori, permettono di identificare nel tessuto sostanze riduttrici. Altre reazioni argentiche, ad esempio quelle usate per lo studio del tessuto nervoso e del connettivo, sono invece da interpretare come non specifiche poichè avvengono in presenza di agenti riduttori estranei. Esse, pur non avendo un valore istochimico specifico, dimostrano però una spiccata elettività topografica ed in questo senso possono essere prese in considerazione per lo studio di particolari processi metabolici cellulari.

Questo modo di vedere mi ha indirizzato nelle ricerche dirette a indagare se nella fibra muscolare striata fosse possibile ottenere una elettiva reazione argentica a livello di alcuno dei suoi costituenti.

Trattando le fibre muscolari sopravviventi con soluzioni argentiche, ho così potuto rilevare che i granuli interfibrillari si impregnano elettivamente, in contrapposto alle miofibrille e agli altri costituenti della fibra, che rimangono del tutto esenti dall'impregnazione metallica.

Nel corso delle indagini ho utilizzato le seguenti soluzioni argentiche: 1° liquido di Fontana preparato secondo le norme indicate da Lison per la reazione argentaffine: 2° soluzione di nitrato d'argento al 10 %; 3° liquido di Giroud e Leblond (nitrato d'argento acido) per la ricerca istochimica della vitamina C.

In tutti i casi i reperti furono netti e costanti; i granuli interfibrillari risultarono elettivamente impregnati. I quadri più caratteristici furono ottenuti nei muscoli delle gambe degli Artropodi: nelle fibre di questi i granuli J appaiono come regolari duplici file di granulazioni poste ai lati di Z.

Nella interpretazione di questi risultati occorre distinguere ciò che può essere riferito ad immagini strutturali da quello che deve essere riportato a manifestazioni di natura biochimica.

Gli aspetti strutturali da me osservati mostrano una qualche somiglianza con quelli che Cajal, Fusari, Veratti [1] Hirschler, Bowen ed altri hanno ottenuto nella fibra muscolare striata mediante l'impiego del metodo di Golgi. Questi AA. hanno messo in evidenza un sistema di reticoli trasversali connessi con filamenti longitudinali; hanno interpretato tali immagini come espressione dell'apparato reticolare interno di Golgi.

Holmgren, che ha osservato immagini analoghe, le ha interpretate invece come espressioni di un particolare sistema canalicolare da lui denominato trofospongio: attraverso questa struttura i materiali metabolici passerebbero, durante le fasi dell'attività funzionale, dai granuli alle fibrille.

---

[1] E. Veratti, *Struttura della fibra muscolare striata.* « Mem. Ist. Lombardo Sci. Lett. Cl. di Sci. Mat. e Nat. », *19*, 87 (1902–1904).

Mentre l'interpretazione di Holmgren ha trovato scarso seguito presso i citologi, la formazione scoperta da Golgi forma tuttora oggetto di indagini e di interpretazioni critiche. Nel momento attuale l'apparato reticolare interno di Golgi non viene in genere considerato più come un sistema di reticoli, ma come un aggruppamento di sostanze a aspetti morfologici vari, accumulato a seconda dell'attività funzionale in determinate zone della cellula.

Per il caso delle fibre muscolari, nelle interpretazioni degli AA. più recenti (Beams, Macdougald, Weed, Eastlick), i quadri strutturali riferibili a quelli illustrati da Cajal, Fusari, Veratti, non rappresenterebbero l'apparato di Golgi, che sarebbe localizzato esclusivamente nelle zone perinucleari. Fra le altre ricerche sono di notevole interesse quelle di Macdougald [1], che ha rilevato nelle fibre del cuore di pollo, oltre a filamenti argentofili nelle zone perinucleari, anche regolari serie di granuli pure argentofili fra le fibrille. Macdougald considera i filamenti perinucleari come rappresentanti l'apparato di Golgi, mentre di questo apparato non farebbero parte i granuli argentofili allineati in regolari file fra le fibrille. Secondo l'autore infatti questi ultimi corrisponderebbero ai granuli che Beams [2] ha rilevato a livello del tratto Q delle miofibrille e che sarebbero costituiti di sostanza cromofila. Le figure annesse alle memorie di Beams e di Macdougald fanno invece ritenere che tanto nell'un caso che nell'altro tali granuli argentofili corrispondano ai granuli interfibrillari J. [3].

Nel caso delle mie ricerche, se si limita l'indagine al solo rilievo morfologico, non è possibile definire se il sistema dei granuli interfibrillari argentofili possa essere interpretato come espressione dell'apparato reticolare di Golgi oppure di altre formazioni cellulari. Se invece si prende in considerazione una interpretazione biochimica e funzionale di tali formazioni, si può ritenere che i miei reperti possano essere riferiti a formazioni corrispondent a quelle messe in evidenza dalla tecnica usata per l'apparato di Golgi.

Secondo Hirsch [4] nel sistema di Golgi bisogna distinguere varie fasi morfologiche e biochimiche, attraverso le quali si giunge, per mezzo di mutamenti fisico-chimici, all'elaborazione di sostanze specifiche, fra

---

[1] T. J. Macdougald, *Studies on the cytology of muscle.* Part. I. *The Golgi apparatus in the fibres of cardiac muscle.* « Z. Zellforsch. », *24* (1936).

[2] H. W. Beams, *Studies on the « Golgi apparatus » of muscle.* « Anat. Rec. » *42*, 523 (1929).

[3] Anche Heringa (1930) e Boeke (1934-35) hanno rilevato l'argentaffinità dei granuli interfibrillari e hanno posto queste formazioni in rapporto con le reti nervose periterminali.

[4] G. Ch. Hirsch, *Form- und Stoffwechsel der Golgi-Körper.* « Prot. Mon. », *18*, 1-394 (1939).

le quali la vitamina C (1). Secondo l'interpretazione di Hirsch all'apparato di Golgi non va attribuito un significato morfologico, ma un significato biochimico. Opinioni analoghe sono state già prospettate da altri autori (Carmelo Ciaccio, Pensa, Levi), secondo i quali gli aspetti strutturali di queste formazioni possono essere attribuiti all'azione dei procedimenti tecnici usati. In genere viene ammessa la natura lipoproteica delle formazioni in questione. Questa interpretazione è stata sostenuta particolarmente da Carmelo Ciaccio (1926–1936), che in un recente lavoro (2) afferma: « le immagini ottenute dopo lipofanerosi e quelle che si ottengono con metodi in uso per la dimostrazione dell'apparato di Golgi presentano una suggestiva somiglianza, che mi ha indotto a ritenere che questi ultimi siano delle immagini artificiali determinate da smescolamento dell'ergoplasma omogeneo, seguito da rigonfiamento e confluenza della fase lipidica dispersa ».

I nuovi reperti da me riferiti in questa Nota ed ottenuti mediante l'impiego di diverse soluzioni argentiche possono essere considerati sulla base di questa interpretazione.

Nel caso specifico della fibra muscolare vi è infatti una precisa concordanza fra i reperti desunti dalle indagini sulla localizzazione dei lipidi e quelli ottenuti mediante l'impiego delle soluzioni argentiche. Tanto gli uni che gli altri portano alla conclusione di ritenere i granuli interfibrillari come aggruppamenti di sostanze di natura lipoproteica, in contrapposto alle miofibrille costituite esclusivamente di materiale proteico (miosina).

Resta da vedere il significato dell'elettività della riduzione argentica a livello dei granuli interfibrillari anche quando non si tratti di reazioni specifiche; la riduzione del sale d'argento dimostra in questo caso l'esplicarsi di processi di ossido–riduzione.

Nel caso della fibra muscolare tale reperto è tanto più interessante in quanto concorda con quello che si riesce a mettere in evidenza colorando le fibre muscolari col bleu di metilene. Viene per tal modo dimostrato, mediante la concordanza dei reperti ottenuti con metodi così differenti, *che nei granuli interfibrillari si manifestano fenomeni di ossido–riduzione.*

Questo nuovo risultato porta a ribadire la conclusione da me già affacciata, *che i granuli sono la sede dei materiali energetici e dei processi inerenti all'elaborazione di questi stessi materiali, in contrapposto alle miofibrille, sede specifica dell'attività contrattile muscolare.*

---

(1) A questo proposito va ricordato che Bourne (1935) nei muscoli scheletrici di volpe ha messo in evidenza granuli elettivamente impregnati con l'argento, che interpreta come rivelanti la presenza di vitamina C; le figure di questo autore mi fanno ritenere che si tratti di granuli interfibrillari.

(2) Ciaccio Carmelo. *Istolipidi ed immagini citologiche ad essi riferibili.* « Mon. Zool. Ital. », Suppl. vol. *47*, 274 (1936).

COMMEMORAZIONE DI ALBERTO PEPERE

tenuta [1] dall'Accademico Pietro Rondoni

I tristi eventi che sopraggiungono imprevisti hanno come una azione postuma: da principio l'animo nostro è sopraffatto più dalla sorpresa che dal dolore; e questo si afferma poi cocente successivamente, quando la conoscenza precisa dei fatti ha tolto ogni speranza e impone come unica risorsa la tetra rassegnazione. Sorpresa penosissima infatti fu la notizia del tragico incidente che si concluse dopo poche ore con la morte del nostro amato collega, a cui una mirabile giovanilità di spirito e di corpo facevano prevedere vita lunga e serena in mezzo ai suoi allievi, in quell'ambiente universitario e ospitaliero, che fu il centro della sua attività, in quella Milano, alla quale Egli era tanto affezionato e dove Egli era circondato di profonde ed elette simpatie. Alberto Pepere ha lasciato un vuoto incolmabile nell'animo di chi lo conobbe e lo ebbe caro (e conoscerlo voleva dire apprezzarlo ed averlo carissimo) perchè Egli rappresentava una felice combinazione di qualità umane che si trovano bensì frequenti, in ispecie nell'Italia nostra ed in particolare in quella terra partenopea che gli dette i natali, ma dissociate: ingegno versatile e brillante, grande bontà e quasi feminea dolcezza di sentimento unite alla decisa volontà di affermazione di ogni nobile idea, maniere estremamente cortesi e suadenti, non disgiunte da finissima arguzia, amore per la scienza ma anche apprezzamento della vita e delle sue gioie più sane e più pure: nell'insieme una personalità psichica mirabilmente equilibrata ed armonica, che direi quasi corrispondeva all'aspetto esteriore di uomo simpatico, elegante, di grande e signorile buon gusto, parco nel gesto ma di parola estremamente espressiva, se anche misurata e corretta.

Nei sedici anni di colleganza milanese ho avuto occasione di valutare a pieno Alberto Pepere in circostanze le più svariate, liete e tristi, della non sempre facile e serena vita universitaria: la sua condotta sempre era dettata da una profonda comprensione per tutti e per tutto, non disgiunta talora da una punta di bonario scetticismo, la sua reazione non era mai

[1] Nell'Adunanza del 23 novembre 1940-XIX.

impulsiva e passionale, il suo consiglio era sempre conciliante e suggerito da un profondo buon senso, tanto che finiva quasi sempre col trionfare.

Alberto Pepere nacque a Napoli nel 1873 da famiglia partenopea benemerita della scienza e della Patria; trasferitosi dopo i primi anni del corso di medicina a Pisa, ivi Egli si laureò e restò come assistente e come aiuto di grandi Maestri succedutisi sulla cattedra di Anatomia patologica dell'Ateneo pisano, il Maffucci prima, poi il Carbone (che morì quasi subito dopo la nomina per una infezione contratta in laboratorio) ed infine il Cesaris-Demel, fino a tutto il 1910. Ai primi del 1911 il giovane Pepere, vinto il concorso per la cattedra di Anatomia patologica di Cagliari, abbandonò Pisa ove aveva trascorso quindici anni di intensa formazione spirituale ed ove aveva incontrato la gentile compagna della sua vita. Pepere passò poi per le Università di Catania e di Palermo e nel 1924 fu chiamato alla cattedra di Anatomia patologica del nascente Ateneo milanese dalla fiducia di Luigi Mangiagalli e dei suoi fedeli collaboratori, in particolare del Livini, il primo Preside della nuova Facoltà medica. Prima di allora però c'era stato il glorioso episodio della guerra 1915-18, alla quale il Pepere aveva partecipato come volontario, dirigendo importanti servizi sanitari dell'Esercito.

Nella trentennale carriera di professore il Pepere ha fatto numerosi allievi, alcuni dei quali hanno pur raggiunto il traguardo della cattedra, altri sono passati alle carriere cliniche e professionali ma tutti hanno conservato per Lui un affetto che ha avuto non solo le solite pubbliche manifestazioni in occasioni solenni, feste giubilari o riconoscimenti ufficiali del Maestro, ma traluceva sopratutto dalle espressioni usate nel ricordarlo, dall'attaccamento di tutti, anche dei più modesti, perdurante per anni, da una specie di venerazione un po' confidenziale verso di Lui, che era per gli allievi forse più un fratello maggiore, saggio e tollerante, che un padre necessariamente severo ed esigente.

A Milano, Pepere occupava una posizione eminente non solo nel campo universitario: colla simpatia personale che ispirava, colla grande praticità di ogni suo suggerimento, colla fama acquisita ormai di settore accuratissimo e di maestro affascinante, Egli aveva saputo riunire sotto la sua direzione si può dire tutti i centri di studio anatomo-patologico della città. Infatti era Settore-capo dell'Istituto anatomo-patologico ospitaliero. Era Direttore della sezione anatomo-patologica dell'Istituto Vittorio Emanuele III per lo studio e la cura dei tumori, nonchè Vicedirettore dello stesso Istituto dalla fondazione (1928): e metteva così a disposizione nostra la sua grande esperienza istopatologica per la diagnosi delle forme neoplastiche. Dirigeva l'Istituto anatomo-patologico dell'Ospedale sanatoriale di Garbagnate; nonchè l'Istituto anatomo-biologico dell'Ospedale psichiatrico provinciale di Mombello. Dal 1935 fu Rettore solerte dell'Ateneo milanese, dopo avere retto per alcuni anni la Facoltà medica

come Preside abile e corretto. Membro di numerose Società scientifiche italiane e di alcune straniere, membro effettivo dell'Istituto lombardo di scienze e lettere, membro del Consiglio Nazionale dell'educazione, delle scienze e delle arti, Colonnello medico di complemento della Sanità militare, Pepere nel giugno 1939 ebbe l'alto onore della nomina a Senatore, premio meritato e degno dalla sua attività di studioso e di cittadino.

L'opera scientifica di Alberto Pepere si può dividere in due periodi con caratteri diversi, sebbene naturalmente strettamente interdipendenti e con molte affinità fondamentali: il periodo pisano, quello del laborioso e fecondo assistentato, coll'aggiunta dei primi anni di insegnamento ufficiale, durante cui la ricerca originale domina a pieno e frutta una serie di belle Memorie, che or ora ricorderò; ed il periodo che comprende gli ultimi venti anni, principalmente dunque il periodo di vita milanese, nel quale il maestro sostanzialmente utilizza il larghissimo materiale anatomo-patologico a sua disposizione per arricchire l'esperienza anatomo-diagnostica sua e degli allievi, svolge e riassume in forma sintetica, in riviste ed in trattati, alcuni argomenti a lui cari, attende con scrupolo e fervore all'insegnamento, non solo nel senso strettamente universitario, secondo gli orari della Facoltà, ma di fronte ad un più vasto cerchio di discenti, medici ospitalieri, assistenti clinici, giovani comunque vogliosi di imparare, i quali seguono la sua attività settoria ed apprendono dalle sue precise, sicure epicrisi a riconoscere, valutare e temere le difficoltà delle diagnosi cliniche.

La produzione scientifica originale del Pepere è oltremodo accurata nelle tecniche, coscienziosa ed obiettiva nella esposizione, prudente nelle conclusioni. Non può essere molto abbondante, perchè traduce la situazione di Istituti anatomo-patologici gloriosi, come quello pisano, ma di limitate risorse; ed è anzi ammirevole come il giovane Pepere fra il 1900 ed il 1914, a Pisa ed a Cagliari, abbia potuto sviscerare così a fondo alcuni argomenti complessi ed, allora specialmente, oscuri. Sono tre i gruppi fondamentali di argomenti studiati in quegli anni: anzitutto meritano menzione i lavori, i più noti, in realtà i più completi ed organici, sulle paratiroidi. Questi organi a secrezione interna sono stati studiati da tutti i punti di vista; e una poderosa monografia del 1906 espone la mole di ricerche sperimentali ed istologiche relative: struttura e sedi della paratiroidi in svariate specie animali, effetti della estirpazione parziale e totale negli animali, innesti e loro destino, rapporti fra paratiroidi ed infezioni, fra gravidanza e paratiroidi, lesioni anatomiche delle paratiroidi in malattie diverse. Attorno a questa monografia si raccolgono Note antecedenti e successive, che toccano punti determinati della patologia, anatomia comparata ed embriologia di questo sistema endocrino non raccolto tutto in ben definite formazioni, ma largamente diffuso, contraente spesso rapporti con altri organi del collo, così colle ghiandole salivari come col timo e con

altri derivati branchiogeni, secondo Pepere illustra ancora in base a larga casistica studiata con esemplare profondità. Un altro gruppo di lavori riguarda lo studio dei tumori: sono ricerche, queste, esclusivamente istopatologiche, poichè allora si può dire era in embrione la patologia sperimentale dei tumori. Ma pure vi è uno spunto sperimentale originale ed interessante: nel 1899 il Pepere, appena laureato, pubblicava una Memoria sulle cisti dell'ovaia, nella quale sono riportate esperienze sulla cauticazione di ovaie di cagne e coniglie col nitrato d'argento, alla quale sussegue una enorme risposta proliferativa delle cellule della granulosa e delle cellule dei canalicoli dell'ipoophoron. Come ho fatto notare nel necrologio che del compianto collega ho scritto per «Tumori», queste esperienze meritano grande attenzione ed andrebbero riprese alla luce delle moderne acquisizioni sugli stimoli proliferativi e sulla istogenesi dei componenti ovarici. La monografia del 1902 sui tumori del fegato, con illustrazione di larga casistica originale, non può neppure oggi essere trascurata da chi voglia affrontare quella questione; osservazioni su un caso di tumore primitivo del fegato da germi surrenali aberranti, su un endotelioma dell'utero, sui teratomi testicolari, quelle molto estese sulle cisti multiple del polmone, ravvicinate a processi disontogenetici e non neoplastici, eppoi, durante il periodo cagliaritano, la Memoria sul linfangioma della milza e quella sulle cisti sierose di questo organo, pure con buoni spunti sperimentali, dimostrano la profonda conoscenza che il Pepere aveva della morfologia dei tumori e di alcuni problemi istogenetici relativi.

Un terzo gruppo di lavori riguarda argomenti microbiologici: il Pepere era un eccellente cultore di quell'indirizzo della batteriologia che ha attinenza alla clinica umana. Egli ha illustrato dei casi di micetoma del piede da monosporum, sostenendo la autonomia di questa forma rispetto alla actinomicosi; si è occupato della anatomia patologica e della batteriologia del paratifo; sopratutto ha proseguito e concluso con una bella relazione alla Facoltà medica pisana le ricerche del suo Maestro Maffucci sulla immunizzazione dei bovini mediante bacilli vivi della tubercolosi umana, analizzando il comportamento dei germi del tipo umano nell'organismo del bovino e la resistenza da questo acquisita rispetto alla inoculazione successiva del bacillo bovino virulento. Un lavoro del 1909 studia l'azione dei veleni tubercolari sul cuore isolato dei mammiferi: spunto fisiopatologico degno di rilievo in un cultore di studi essenzialmente morfologici. Oltre ai lavori che formano questi tre motivi preferiti nell'opera di Pepere, l'endocrinologico, l'oncologico ed il microbiologico, non mancano, naturalmente, ricerche in capitoli diversissimi della anatomia patologica: malformazioni ureteriche e dei genitali femminili, l'iperplasia muscolare del polmone come esito di flogosi cronica, gli edemi delle valvole cardiache, sono altrettanti chiari, istruttivi contributi casistici ed istologici.

Raggiunte le grandi sedi universitarie ed in ispecie quella milanese, Pepere attende a vasti còmpiti organizzativi e didattici; e le sue pubblicazioni hanno carattere di sintesi e di revisioni critiche, sempre acute, ben proporzionate ed oneste; e rappresentano in certa guisa l'allargamento e la valorizzazione per tutto il mondo medico italiano della sua funzione di professore e di settore. Voglio ricordare la sua collaborazione con due studiosi eminenti, pure dispersi dalla morte o dagli eventi della vita, ad un bel libro sulla fisiologia e patologia della vecchiaia; eppoi articoli su vari punti dell'argomento a Lui caro, la patologia delle ghiandole endocrine, su questioni di patologia della tubercolosi, sulla gotta viscerale e sulla artrite urica, sulla classificazione delle epatopatie croniche sclerosanti, sulla appendicite cronica. Si può dire che Pepere fu uno dei nostri migliori rappresentanti dell'indirizzo anatomo-clinico, non puramente ed aridamente morfologico, della anatomia patologica, di quell'indirizzo che fu proprio, prima di Lui, di Banti e di Marchiafava, i quali veramente furono anche clinici eminenti e completi. Pepere, più giovane assai e formatosi in epoca di maggiore differenziazione e complicazione delle discipline mediche, clinico non poteva essere; ma considerò la sua disciplina come della clinica necessaria integrazione, vide nel problema patologico più il problema medico che il puro problema biologico. In questo Egli dimostrò anche una notevole autonomia spirituale rispetto ai suoi maestri, pur da Lui venerati, i quali furono sopratutto sperimentatori, videro dell'anatomia patologica più i raccordi colla patologia generale e sperimentale che colla clinica, seguendo in ciò piuttosto l'esempio della Scuola tedesca di allora. Pepere, pur avendo nei suoi anni formativi allenato mente e mano alla ricerca sperimentale, portando anzi quei contributi originali che ho ricordato, volle poi ravvicinarsi alla tradizione italiana, che mette la clinica, ossia lo studio dell'uomo ammalato, al centro dell'educazione medica, tradizione ancor più accentuata allora e forse esagerata nella Scuola francese, ove l'anatomia patologica la facevano ed ancora oggi la fanno in parte i clinici stessi. I due indirizzi, l'anatomo-clinico e lo sperimentale-biologico, hanno ambedue la loro ragione di essere, forse il primo più corrispondendo ai bisogni dell'insegnamento e della formazione professionale, il secondo più all'altra funzione universitaria, quella di promuovere l'avanzamento della scienza. Il primo indirizzo è per l'anatomia patologica tanto più opportuno e logico in Italia, ove la fortunata separazione delle due cattedre, di patologia generale e di anatomia patologica, ereditata dalla eccellente organizzazione delle antiche Università austro-ungariche, assegna, pur senza rigidezza di confini, còmpiti precisi e diversi ai patologi delle due branche, l'una appunto fisiologica e sperimentale, l'altra morfologica, ma anche più ravvicinata alla clinica. Ora Pepere seppe in sè e nei suoi allievi unire gli scopi didattici e quelli scientifici in una sintesi felice, frutto di quell'equilibrio spirituale che lo caratterizzava

e che gli conferiva tanta attrattiva su uomini di condizione ed età diverse e pareva anzi abbellire, chiarire e semplificare le questioni cui Egli si dedicava. Con Pepere è scomparsa una simpatica, eletta figura di uomo, di studioso, di fascista, la quale ci ha insegnato come si possa essere cultore di una scienza severa che aiuta a scoprire i misteri della vita nella dischiusa nudità della morte ed al tempo stesso uomo di società, piacevole e sereno, amare la famiglia teneramente e servire in fede devota la patria, istruire ed educare i giovani e confortare colla propria profonda esperienza della vita amici, colleghi, enti pubblici. Alberto Pepere ebbe la sapienza che deriva dal cuore e la bontà che sgorga dall'intelligenza.

BIBLIOGRAFIA DEL PROF. ALBERTO PEPERE

Pubblicazioni principali.

Le cisti dell'ovaia. Ricerche d'istologia normale e patologica e saggi sperimentali. (« Il Policlinico », VI, C, 1899 e in « Arch. Ital. di Ginecologia », III, n. 1, 1900).

I tumori maligni primarii del fegato. Ricerche anatomo-patologiche e considerazioni critiche. Appendice: *Sui tumori delle grandi vie biliari.* (Tip. Pasquale, Napoli, 1902).

Contribution à la connaissance des localisations rares et des tumeurs des capsules surrénales surnuméraires. Tumeur primitive du foie originaire des germes aberrantes de la capsule surrénale. (« Arch. de Médécine expér. et d'Anat. pathol. », XIV, 1902).

Sull'endotelioma dell'utero. Note anatomo-patologiche. (« Arch. It. di Ginecologia », VI, 1903).

Sui teratomi del testicolo. (Comunicazione al II Congresso della Società Patologica, Firenze, 1903. « La Clinica moderna », IX, 1903).

Sulla degenerazione cistica del polmone. (Comunicazione al III Congresso Società di Patologia, Roma, aprile 1905. « Lo Sperimentale », LIX, 1905).

Sulla vaccinazione antitubercolare nei bovini. Ricerche sperimentali sui bacilli della tubercolosi umana, bovina e aviaria. (« Annali d'Igiene sperimentale », XV, 1905).

Eclampsia gravidica e insufficienza paratiroidea. (Comunicazione al III Congresso della Società di Palotogia, aprile 1905. « Lo Sperimentale », LIX, 1905).

Dell'iperplasia muscolare del polmone come esito raro d'infiammazioni croniche. (« Gazz. Med. Ital. », LVII, n. 32, 1906).

Le ghiandole paratiroidee. Ricerche anatomiche sperimentali. (U. T. E. T., Torino, 1906 e in « Archives Ital, de Biol. », a. XLVIII, n. 1, 1907).

Di un sistema paratiroideo accessorio (timico) costante in alcuni mammiferi. Nota preventiva. (« Giorn. R. Accad. di Medicina di Torino », LXX, fasc. 7-8, 1907 e in « Archives Ital. de Biol. », a. XLIX, n. 3, 1908).

Della cosidetta sostanza colloidale paratiroidea. (« La Clinica Moderna », XIII, fasc. 16, 1907).

Della gastro-enterite infettiva alimentare con decorso tifoide. Ricerche anatomiche batteriologiche e sperimentali in contributo allo studio della Salmonellosi e delle infezioni e intossicazioni alimentari (paratifo). (« Ann. d'Igiene sperim. » fasc. III, 1908).

Insufficienza paratiroidea acuta mortale nell'uomo determinata da un raro vizio di sviluppo del sistema tiro-paratiroideo-timico. (« Pathologica », n. 5, 1909).

Azione dei veleni tubercolari sul cuore isolato di mammifero. Prima Nota riassuntiva (*Estratti acquosi di B. della tubercolosi umana, bovina e aviaria sul cuore isolato di coniglio sano*). « La Tubercolosi », II, 1909.

Sul fungo parassita di un « Micetoma a grani neri » del piede (Carter) nostrano (« Monosporium apiospermun », Sacc.) (M. Sclerotiale). Ricerche micologiche, sperimentali ed anatomiche. « Sperimentale », LXVIII, fasc. V, settembre-ottobre 1914).

I reperti anatomo-patologici generali nei processi di difesa e di guarigione nelle malattie infettive. (Conferenza del 20 aprile 1927. Nel volume: *Fattori di guarigione spontanea delle malattie infettive*, edito a cura dell'Istituto Sieroterapico Milanese, 1927).

Le ghiandole a secrezione interna. (Nel volume VIII del *Trattato di Anatomia patologica* di Pio Foà, U. T. E. T., Torino, 1922).

Anatomia patologica generale e patogenesi della tubercolosi polmonare (con dimostrazione di pezzi anatomici e di preparati istologici). (Lezioni tenute al Corso sulla Tubercolosi per i medici condotti indetto dal Consorzio Antitubercolare provinciale e dal Sindacato Provinciale Fascista dei Medici di Milano. S. A. Coop. Poligraf. Operai, Milano, 1932).

Fisiopatologia della vecchiaia: Cenni anatomici e fisiopatologici su la senilità. Cenni generali su la patologia senile. Quadri anatomo-patologici e anatomo-clinici della senilità. (Edito a cura dell'Istituto Sieroterapico Milanese, 1934) in collaborazione con Levi e Viale.

Considerazioni anatomiche sulla patogenesi della tubercolosi polmonare nei rapporti con la prima infezione e con la diagnosi precoce. (In *Lezioni di Tisiologia*, vol. II, a cura di G. Pirani, ed. L. Cappelli, Bologna).

Le miocarditi croniche. (Parte anatomo-patologica). Parte prima (Relazione al Gruppo Cardiologico Italiano, Milano 25 aprile 1937 in collaborazione con M. Chiovenda.

Botanica. — *Documenti relativi a James Bruce e Luigi Balugani che visitarono l'Etiopia nel 1769–1772* (1). Comunicazione (2) di Emilio Chiovenda, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

Noto è il nome di Luigi Balugani: di lui si ha notizia in un breve scritto del Panzacchi, il fine poeta, del quale si celebra in questi giorni il secolare genetliaco: *Un Architetto bolognese in Abissinia nel secolo passato*, pubblicato in *Vita Italiana*, Nuova serie, vol. III, fasc. 1 (1897), pagg. 295–298 e nell'*Enciclopedia Treccani* mercè un articolo del Tarchiani. Sono poche notizie interessanti e il Panzacchi accenna a sospetti che serpeggiarono tra i Bolognesi circa la causa della morte di lui avvenuta in Gondar. Ciò mi spronò a ricercare in primo luogo se nella pubblicazione del Bruce (3) relativa al suo viaggio in Etiopia si avevano indicazioni circa il soggiorno e la disgraziata fine prematura del Balugani e poi a ricercare se era possibile trovare in Bologna qualche testimonianza relativa al Balugani stesso e al Bruce.

L'articolo del Panzacchi apriva la strada alle mie indagini, dandomi l'indicazione per la ricerca di parte dei documenti che a lui servivano per stendere la sua Memoria.

---

(1) Questo lavoro chiude la lunga serie delle svariate e pregevoli pubblicazioni di Emilio Chiovenda, Professore Ordinario di Botanica e Direttore dell'Orto Botanico della R. Università di Bologna.

Egli stava dando l'ultima occhiata alle bozze allorchè improvvisamente fu colpito da malore che purtroppo doveva condurlo alla tomba.

Conobbi Emilio Chiovenda quando ci trovammo insieme studenti nell'Università di Roma. La nostra amicizia è durata ininterrotta ed affettuosa per circa mezzo secolo. Si può perciò arguire con quale emozione io abbia riveduto l'ultima fatica del carissimo amico. – Biagio Longo.

(2) Letta nell'Adunanza del 20 dicembre 1940–XIX.

(3) *Travels to discover the Source of the Nile in the Years 1768, 1769, 1770, 1771, 1772 and 1773.* In five Volumes. By James Bruce of Kinnaird Esq. F. R. S. Edinburgh, Printed by J. Ruthven, for G. G. J. and J. Robinson, Paternoster Row, London M.DCC.XC, in-4°.

In primo luogo riproduco integralmente gli Atti del Concorso di disegno architettonico tenuto in Parma nel 1759 del quale fu vincitore il Balugani, colla trascrizione esatta che fu fatta dal prof. Giovanni Copertini consegnatario dell'Archivio della R. Accademia di Belle Arti di Parma e segretario del Collegio e che ottenni per mezzo del prof. Francesco Lanzoni insegnante botanica in quella Università, ai quali porgo i più sentiti ringraziamenti.

Dallo stesso articolo trassi l'indicazione di due documenti esistenti presso l'Accademia di Belle Arti di Bologna.

Molte informazioni trassi dalla vita del Bruce di Alexander Murray, che egli premise alla seconda edizione del viaggio del Bruce [1] in Etiopia che fu edita in formato in-8° nel 1805, della quale io però mi servii di una seconda edizione [2] in formato in-4°, che egli eseguì nel 1808 per comodità dei possessori della 1ª edizione stampata nel 1790 in-4°, nella quale l'autore fece delle modificazioni. Qui appresi l'amicizia che il Bruce ebbe con Girolamo Ranuzzi conte della Porretta, alle Terme del quale soggiornò per circa un mese, e compresi che presso l'archivio della Casa Ranuzzi molto probabilmente dovevano trovarsi carte relative al Bruce ed al Balugani.

Il conte Cesare Ranuzzi Segni e il fratello Ferdinando comproprietari dell'Archivio della Casa Ranuzzi, interpellati da me al riguardo, furono oltremodo gentili, in quanto mi permisero non solo di esaminare i carteggi del conte Girolamo II Ranuzzi degli anni 1760–1775; ma estrarre copia integrale di tutte quelle lettere che stimavo utili al mio assunto.

A entrambi i fratelli conti Ranuzzi vadano i miei sentiti ringraziamenti per la loro generosità e per la loro gentilezza con cui mi aiutarono nelle mie ricerche dandomi spesso preziose indicazioni e spiegazioni.

Il Vice-direttore della Biblioteca Comunale dell'Archiginnasio di Bologna prof. Barbieri mise a mia disposizione il volume X delle *Notizie*

---

(1) *Travels to Discover the Source of the Nile in the Years 1768, 1769, 1770, 1771, 1772 and 1773.* By James Bruce of Kinnaird. The second Edition corrected and enlarged. Edinburgh, Printed by James Ballantyne 1805. 7 vol, in-8° e atlante in-4°. Erroneamente il Fumagalli, *Bibliografia Etiopica*, Milano, Ulrico Hoepli, 1893, in-8°, pag. 16, n. 113, scrive che questa edizione fu curata da H. Salt, essa fu curata da Alexander Murray.

(2) Alexander Murray, *Account of the Life and Writings of James Bruce of Kinnaird author of Travels to discover the Source of Nile in the Years 1768, 1769, 1770, 1771, 1772 and 1773.* Edinburgh, Printed by George Ramsay and Company, 1808, in-4°.

È una seconda edizione della *Vita del Bruce* prefissa alla 2ª edizione dei *Travels* con considerevoli aggiunte ed emendamenti.

dei Professori del Disegno dell'Oretti che servì al Panzacchi per le notizie biografiche del Balugani, e un nucleo di lettere del Balugani e del Bruce provenienti dall'Archivio dei marchesi Casali, che erano state indirizzate al marchese Gregorio Casali [1]. Anche al prof. Barbieri rivolgo i vivi sensi della mia gratitudine.

Il documento n. 1 si riferisce alla nascita, il n. 2 alla carriera artistica del Balugani.

I nn. 3–8 si riferiscono al concorso di disegno architettonico bandito dalla R. Accademia di Parma nel 1759. Da questi documenti risulta il valore del Balugani nel disegno architettonico; tanto più se si tien conto di quanto è detto nel documento n. 7 che il concorrente Feneuill Luigi era favorito dal ministro Du Tillot, al punto che non essendo egli riuscito vincitore, questi avrebbe voluto sopprimere l'Accademia stessa.

L'abilità del Balugani nel disegno nel 1765 quando cominciò ad aiutare il Bruce deve certamente essere considerata grande; poichè egli dopo il concorso di Parma, che riconosceva i suoi meriti artistici eccezionali, passò a Roma per perfezionarsi.

I documenti 9 e 10 sono due lettere da Roma di Andrew Lumisden al Bruce del quale era amico e come lui era entusiasta delle ricerche archeologiche e artistiche sulle rovine delle antiche città. A lui si era rivolto il Bruce, perchè gli cercasse un artista che volesse seguirlo nei suoi viaggi per fare i disegni delle antichità.

Nella 1ª del 9 febbraio è la proposta del Balugani con le condizioni relative; dalla seconda si apprende che il Bruce era rimasto soddisfatto del Balugani quantunque nelle figure e negli ornamenti non fosse quale egli lo desiderava; ma insiste che sotto la sua direzione avrebbe raggiunto quella perfezione nei disegni da lui voluta.

Il documento 11 è la trascrizione dagli Atti dell'Accademia Clementina di Belle Arti di Bologna del verbale della seduta del 25 dicembre 1765 nella quale per sollecitazione del Balugani (leggasi doc. 23) fu proposta la candidatura per accademico del Bruce, che vi fu acclamato senz'altro.

Il documento 12 è l'indicazione della lettera che il Bruce scrisse nel 1766 per ringraziare l'Accademia della sua nomina ad accademico, quale risulta dall'indice delle lettere ricevute tra il 1710 e il 1795: lettera che però non trovandosi al suo posto, non mi è stato possibile trascrivere; cenni di essa però si trovano nella Memoria del Panzacchi.

Il documento 13 contiene il verbale della seduta del 31 ottobre 1773 nella quale si diede lettura di una lettera che il Bruce scrisse al

---

[1] *Gregorio IX marchese senatore Casali*, n. 1732, m. 31, VII, 1802.

marchese Gerolamo Casali, con la quale gli comunica la notizia della morte del Balugani avvenuta in Gondar. Questa lettera del Bruce che non potè essere veduta dal Panzacchi è riportata nel documento n. 28.

I documenti 14-27 sono 14 lettere datate da Roma del Balugani indirizzate al Casali, contenenti notizie varie e ringraziamenti. Nel n. 14 si indica la data dell'andata del nostro a Roma.

I nn. 15, 16, 17 si riferiscono a *proposte di nomine ad accademici*; 18 e 19 a *interessi personali*; 20 e 21 sono di *auguri natalizi*, 22 e 23 proposta di accademico e ringraziamento. Tutte queste lettere sono datate da Roma.

Il documento 14: Algieri, 17 luglio 1765 contiene la proposta di nominare accademico il Bruce. Il n. 25: Tunisi 3 luglio 1766 è il ringraziamento del Balugani per la nomina del Bruce, dando notizie del suo gradimento e dei lavori che eseguisce per lui e s'impegna a raccogliere medaglie per l'Istituto. Il documento 26 da Seida (Sidone) 13 novembre 1767 contiene ringraziamenti per favori ricevuti [1]. Il documento 27 è un frammento di lettera del nostro al fratello Filippo del 15 marzo 1769 e da questo trascritto, senza località indicata, nella quale dà notizia dell'intenzione di intraprendere il viaggio di Etiopia per disegnare tutto il corso del Nilo dalle sue sorgenti; e dice di aver scritto al marchese Casali, perchè assuma l'impegno di far fare dai professori di astronomia osservazioni corrispondenti colle loro a tutte le eclissi dei satelliti di Giove visibili da Bologna, per farne confronti affine di accertare la situazione dei luoghi con maggiore certezza.

Il documento 28 è, come già s'è detto, la lettera che il Bruce scrisse in francese da Marsiglia subito dopo il suo ritorno in Europa il 12 luglio 1773 al Casali, per comunicargli con « dispiacere sensibile » la morte del Balugani avvenuta a Gondar per una dissenteria ribelle a tutti i medicinali e della sua inumazione nel cimitero di S. Raffaele fra i cattolici morti anticamente in quella città. Dopo aver data tale notizia in forma molto laconica, il Bruce ha creduto di aggiungere subito delle osservazioni circa l'abilità come disegnatore del Balugani, che secondo lui sarebbe stato quasi assolutamente inabile al disegno prospettico; così da affermare, che quasi tutte le vedute dovevano essere disegnate da lui stesso, e fa quest'osservazione parlando del salario che giudicava forte [35 scudi romani mensili] che gli aveva assegnato. Parla di accordi col Balugani per far terminare per conto di lui i disegni dipinti, al loro ritorno in Italia. Ma essendo egli morto e non conoscendo nessuno della sua famiglia, prega il marchese di comunicare ai membri di quella che vogliano scegliere, o continuare essi l'obbligazione del Balugani per far

[1] Vedi in fondo copia dell'autografo n. I.

ultimare i dipinti, ovvero li farebbe ultimare lui stesso in Francia, servendosi per il pagamento della somma che teneva presso di sè appartenente al Balugani per gli stipendi che durante il loro soggiorno in Etiopia non gli aveva pagati. E termina coll'indicare a titolo informativo dell'importanza del suo viaggio, di essere arrivato alle celebri sorgenti del Nilo nel novembre 1770, determinandone la latitudine 10.56.45; e annunciava la prossima sua visita a Bologna.

È facile comprendere come rimanesse l'Accademia alla lettura di una tale lettera.

Seguono i documenti estratti dall'Archivio di Casa Ranuzzi. Il n. 29 contiene gl'indirizzi del Balugani, Lumisden e Bruce quali figurano in apposito registro.

Il n. 30 è una lettera del Balugani da Algieri 30 aprile 1765 con la quale dà notizia del suo arrivo colà, e parla di un suo debito verso il conte e di altre cose.

Nel documento 31 da Tunisi 4 agosto 1766 annunciava al conte la loro partenza nel giorno dopo per Tripoli donde avrebbero proseguito per Bengasi.

Il n. 32 è una lettera datata Seida (Sidone) 12 luglio 1767 in cui il Balugani si protesta sempre obbligatissimo per i beneficî che ha ricevuto.

La lettera 33 pure da Seida 13 novembre 1767 contiene particolari su un viaggio fatto a Balbec e Palmira ove sfuggirono a malapena l'assalto dei predoni arabi e accenna ad un viaggio del Bruce ad Aleppo.

Nel documento 34 annuncia la partenza per Alessandria d'Egitto.

La lettera 35 è datata dal Cairo 16 luglio 1768. Dopo parlato di suoi affari personali, dà notizia della peste che affligge l'Egitto. Questa è l'ultima lettera del Balugani che si conserva nell'Archivio Ranuzzi.

Nel documento 36 è una lettera del conte Ranuzzi al Governatore di Porretta datata dal Sasso 31 agosto 1773 colla quale avverte che attende forestieri; e nel successivo n. 37 di Bologna 8 settembre 1773 insieme con ordini e suggerimenti lo avverte che « nella ventura settimana verrà alli Bagni, alloggiato nel mio Casino dove sono li Bagni, un Signore Inglese non Cattolico... per acquistare colle docciature la forza in un braccio scavezzo, e nell'altro già un tempo fà ferito da una freccia dei Mori coi quali si è trovato più volte alla battaglia in Affrica, in Etiopia ». Gli raccomanda la massima premura per il suo trattamento, di farlo assistere dal medico, di procurargli una spinetta perchè possa divertirsi sonando e che siano approntate due o tre Commedie da recitarsi nel Teatro Nuovo per divertire l'Inglese.

La lettera 38 è del Governatore Pagliarini in data 12 settembre 1773 colla quale assicura il conte « che potrà essere persuaso avrà per la persona dell'Inglese » le maggiori premure.

Il 14 settembre nel n. 39 il conte rinnova al Pagliarini le raccomandazioni per il Bruce; e per allietargli il soggiorno pensa anche a procurargli una gentile compagnia, invitandolo a pregare il dott. Bartoli che permetta alla sua sposa di farne la conoscenza, assicurandolo che è un cavaliere pieno di distinto merito ecc.

La lettera n. 40 del 15 settembre avverte il Pagliarini, che nel domani arriverà il noto Inglese e rinnova le raccomandazioni che gli si procuri compagnia.

Il documento 41 datato Bagni 17 settembre 1773 è una letterina del Bruce al conte che lo avverte del suo arrivo a Porretta ove ha trovato un gran freddo che gl'impedisce di fare il bagno, e lo avverte che si faccia dare da Filippo Balugani un libretto di figure per consegnarlo al pittore Manfredi (1).

La lettera 42 datata Porretta 18 settembre 1773 è del Pagliarini che dà al conte ragguagli sul soggiorno del Bruce e del concetto che questi ha delle signore alle quali fu presentato.

Nella lettera 43 del Bruce nel solito suo francese datata Porretta 19 settembre 1773 ritorna a lungo sulla questione della rifinitura dei disegni, ch'egli intende fare eseguire con la somma del Balugani che tiene nelle sue mani. Evidentemente questa lettera va messa in relazione con il documento 28 scritto dal Bruce da Marsiglia il 12 luglio 1773 al marchese Casali.

Il n. 44 è una lettera di Pietro Lorenzini uomo d'affari del conte in Porretta datata 19 settembre colla quale chiede d'urgenza un abito perchè per il freddo il Bruce è raffreddato e obbligato a letto ed è irritato non avendo ricevuto l'abito richiesto.

Col n. 45 il conte scrive al Pagliarini lieto che il Soggetto Inglese sia contento del soggiorno della Porretta e lo raccomanda ancora.

Nel documento 46 datato Bagni della Porretta 24 settembre 1773, il Bruce nel suo italiano solito parla della vertenza con Filippo Balugani e coi pittori ai quali si era rivolto per ultimare i dipinti e accenna al miglioramento del ginocchio e del braccio avuto per mezzo dei bagni, dei quali assicura che sarà un difensore; e in un *postscriptum* accenna che già ha fatto un elogio magnifico dei bagni della Porretta a un veneziano ferito nei piedi.

Il documento 48 del governatore Pagliarini del 3 ottobre 1773 accenna alla partenza del Bruce dai Bagni.

Nell'ultimo documento presento l'albero genealogico della famiglia Balugani coi discendenti di Filippo fratello del nostro, secondo appunti procuratimi dal prof. Barbieri.

---

(1) Vedi in fondo copia dell'autografo n. 2.

La morte del Balugani.

Le notizie che si hanno intorno alla morte del Balugani, si possono avere solo dalla relazione di mr. Bruce del suo viaggio alle sorgenti del Nilo, dalla vita sua scritta dal Murray e dalla Memoria del Panzacchi. Il Bruce nell'introduzione dopo aver detto come riuscì a procurarsi come assistente ai suoi lavori durante il viaggio l'architetto Balugani, così ne scrive: « Egli contrasse un morbo incurabile in Palestina e morì dopo una lunga malattia, non molto dopo che io penetrai nell'Etiopia, dopo aver sofferto costantemente cattiva salute dal momento che egli lasciò Sidone » (1).

In un punto della sua relazione, quando nel dicembre 1770 si trova in mezzo alle lotte del Re abissino e del Ras del Tigrè contro i ribelli ed è testimone delle crudelissime vendette di essi contro i loro nemici, pensa ad abbandonare l'Abissinia per ritornare in patria e scrive: « Venti volte decisi di ritornare dal Tigrè, al che ero propenso, avendo perduto il giovine che mi accompagnava dalla Barberia, che mi assisteva nei disegni di Architettura che io facevo per il Re, quando una dissenteria, che lo aveva colpito nell'Arabia Felice, mise termine alla sua vita in Gondar. Una grande inquietudine era sorta per il seppellimento nel recinto di una Chiesa. Abba Salama fece il suo massimo sforzo per eccitare la plebaglia e impadronirsi di lui fuori della sua tomba; ma il potere del Ras acquetò tanto Abba Salama che i tumulti » (2).

Come ognuno vede mr. Bruce ci dà due versioni diverse della morte del Balugani: prima dice che morì per malattia incurabile contratta in Palestina; poi dice che si trattava di dissenteria contratta nell'Arabia Felice. Ma ancora un'altra contraddizione abbiamo nella seconda versione, dicendo che Abba Salama voleva impedire il seppellimento nel recinto della Chiesa, mentre egli era stato fatto impiccare dal Ras Michael Sehul del Tigrè il 24 agosto 1770 (3) e il Balugani morì più tardi.

Il Murray nella vita del Bruce fra i documenti che pubblica, pone il brano di una lettera scritta dal Balugani subito dopo l'escursione, che fece insieme col Bruce alle Sorgenti del Nilo. A questa lettera egli aggiunse questa nota: « Qui non vi è data aggiunta a questa lettera, ma essa fu scritta probabilmente nel novembre o dicembre 1770 subito dopo visitato l'Agaumeder. Rincresce che Balugani non abbia potuto finire questa relazione dei costumi pagani degli Agau, così che avrebbe

(1) J. Bruce, *Travels*, I (1790), pag. xii.
(2) Ibidem, III, 241.
(3) J. Bruce, ibid., IV, 77.

confermato l'informazione data dal suo principale. Balugani morì a Gondar circa la metà di febbraio 1771. Avvi un anacronismo nella relazione della sua morte nei *Travels*, vol. IV, pag. 426 (ed. II[a]), nel quale mr. Bruce sembra sia stato indotto per disattenzione o per dimenticanza ! » (1).

Questa lettera pubblicata nel testo italiano con la traduzione inglese, è solo la parte mediana di una lunga lettera. L'editore vi aggiunge la nota: « Questa lettera è la copia di una lettera di L. Balugani assistente di Mr. Bruce, a qualche persona di rango in Italia (forse il conte Ranuzzi). Non è finita, senza alcun indirizzo; tutta scritta di pugno del Balugani, e curioso, essa fu scritta dopo il viaggio alle sorgenti » (2). Certamente essa fu scritta a Gondar, come è indicato nel brano pubblicato, ove il Bruce e Balugani erano arrivati il 18 novembre 1770.

La lettera mi fa l'effetto che sia stata scritta su tre foglietti di carta e che di essi siano andati perduti il primo e il terzo. Leggendo il brano pubblicato dal Murray la prima constatazione importantissima che vi si può fare, è che in essa non vi è il minimo accenno alla salute dello scrivente, mentre essendo egli così prossimo alla sua fine, sembra naturale che vi dovesse essere. Anzi dalla frase « si conduce [il Ras] di giorno in giorno finchè verrà il tempo che noi partiremmo senza che ha restituito nulla di quanto abbiamo perduto » potrebbe indicare forse che egli non aveva alcuna preoccupazione della sua salute. Credo che la frase: « siamo rientrati a Gondar di ritorno dal suddetto viaggio » alluda alla prima parte della lettera; mentre allude evidentemente alla terza la frase: « io mi ristringerò a raccontare un costume usato da quei popoli vicini alle fontane del Nilo . . . ». È ben vero però che le notizie dettagliate della sua salute forse stavano in una delle due parti della lettera mancanti.

Per data di morte del Balugani il Murray dà come si è visto circa la metà di febbraio. Egli infatti dando la nota dei manoscritti di viaggio del Bruce scrive: « 2° Il giornale del tempo come in parte è pubblicato nei *Travels* incominciato circa quando mr. Bruce sbarcò a Massaua (settembre 1769), è continuato con lievissime interruzioni fino al dicembre del 1771, nel qual mese egli lasciò Gondar. Esso è tutto in italiano scritto da Luigi Balugani fino al giorno 14 febbraio del 1771, quando compare la mano di mr. Bruce » (3). In questo giorno è probabile che la salute del Balugani si sia aggravata così da non essere più in grado di eseguire

(1) A. Murray, *Account* (1808) 232. Questa relazione è quella del vol. III che s'è visto in contrasto con l'introduzione all'opera.

(2) A. Murray, loc. cit., pagg. 230-232. Appendice nn. XXIX.

(3) A. Murray, loc. cit., pagg. 292-293. Append. n. XLII.

le annotazioni meteorologiche sul suo giornale, e che la morte sia avvenuta più tardi, salvo l'intervento di un improvviso accidente. Ciò però pare si possa escludere per il modo di esprimersi del Bruce nell'indicare la morte, che sembrerebbe avvenuta lentamente, come esito letale di un lungo stato cronico dissenterico.

Il Panzacchi narrando come fu appresa a Bologna la notizia della morte del Balugani scrive che « sette anni dopo [la sua ascrizione alla Accademia, doc. n. 11] sotto la data del 31 ottobre 1773 nel volume dei verbali della Clementina [doc. n. 13] il segretario Domenico Piò scrive che qualche mese addietro il Cavaliere Bruce aveva spedita al marchese Casali una *confusa notizia* [doc. 28, Marsiglia 12 luglio 1773] della morte del Balugani « successa in Gondar capitale dell'Etiopia ». In che proprio consistesse la confusione del racconto contenuto nella lettera del Casali, noi non possiamo sapere (dice il Panzacchi); ma (causa forse anche il solito italiano del Bruce) doveva essere stata tale e tanta che il prudente segretario credette di ritardare a mettere la notizia negli Atti insieme al cenno biografico ed all'elogio del morto. Ma intanto lo stesso cavaliere Bruce tornato dai lunghi e meravigliosi viaggi era venuto a Bologna; e dalla sua bocca si ebbe la conferma della triste notizia. « Luigi Balugani aveva incominciato in Palestina a soffrire delle fatiche del viaggio e del clima; dopo la partenza da Sidone il suo male s'era andato sempre più aggravandosi ed era morto a Gondar il 3 maggio 1770 » (1). Anche in questa relazione orale fatta a Bologna nel settembre 1773, il Bruce ha equivocato l'anno della morte anticipandola di un anno. È molto probabile che egli abbia errato l'anno ma che sia stato esatto nell'indicazione del giorno e del mese; per cui si debba ritenere che la morte del Balugani sia avvenuta il 3 maggio 1771, cioè 78 giorni dopo il dì nel quale egli sospese la stesura del giornale meteorologico, che come si disse avvenne il 14 febbraio 1771. Secondo l'indicazione data dal Bruce (doc. 28) il Balugani sarebbe stato inumato nel recinto della chiesa di S. Raffaele in Gondar (2) dove venivano seppelliti i cattolici morti anticamente. Per la data della morte del Nostro facilmente siamo giunti a fissarla con molta probabilità, se non con tutta, nel 3 maggio 1771. Ma per la soluzione dei sospetti intorno al modo come essa avvenne, purtroppo siamo sempre allo stesso punto quale ci è stato affermato dal Bruce, che la morte sia avvenuta per dissenteria incurabile cronica.

(1) E. Panzacchi, loc. cit., pag. 297. Questa data il Panzacchi certo l'ha tratta da qualche diarista bolognese dell'epoca. Il segretario Piò scrive 15 maggio 1770; ma mi sembra che sia più probabile la prima.

(2) A. A. Monti della Croce, *I Castelli di Gondar*. Roma, Società Italiana Arti Grafiche, 1938, in-8° a pag. 101 indica al n. 33 una chiesa Cuddus Rufael fondata dall'Imperatore Bakafà, la quale presentemente non è più officiata.

L'opera del Balugani come assistente del Bruce.

Il Murray nella biografia del Bruce ci dà parecchi particolari circa l'attività che il Balugani esplicava presso di lui, e che è bene ricordare; egli scrive: « È noto, senza alcun dubbio, che il Bruce ebbe un solo assistente nel corso del suo viaggio: il Balugani. Ora è necessario ricordare che il Sig. Luigi prese a redigere il giornale in Barberia, Egitto e Abissinia, ed assistette il suo principale nel fare e calcolare le osservazioni astronomiche, inserendole poi nel libro. Egli disegnò molte delle architetture e molti degli articoli di Storia Naturale, come è evidente dagli schizzi originali tuttora esistenti. Il giornale riferentesi all'Egitto e alla Abissinia comincia in questa maniera: Luigi segna lo stato del termometro, i venti, il tempo ecc. nei momenti particolari del giorno su pezzi separati di carta e dopo li trascrive in un grande libro in-folio preso per questo scopo. Le osservazioni terrestri sono pure ricordate in questo libro; ma non le osservazioni sulle contrade. Mr. Bruce si procurò una dozzina di piccoli libri del formato in-dodicesimo tascabili, uno dei quali egli sempre porta con sè e vi registra le sue osservazioni come gli occorrono. Egli incominciò queste osservazioni in Egitto e le continuò su successivi libretti fino a che lasciò Gondar . . .

« Alla loro partenza da Kosseir nel Mar Rosso, Luigi cominciò una parte separata del giornale in lingua italiana, per ordine del suo principale il quale desiderava avere la misura esatta della loro strada mercè il tempo: il numero di conteggio delle miglia; le osservazioni eventuali ed altre circostanze: riservando a sè la parte storica libera dai minuti dettagli e cosparsa di riflessioni generali. Questo giornale di Luigi era scritto su carta di color crema, sulla quale gli Arabi scrivono i loro libri. I fogli erano talora più grandi della comune carta da lettere, la superficie era molto liscia come se fosse stata pressata a caldo: essa probabilmente era fatta di cotone, essendo la sua tessitura simile ad essa: era insomma la *carta bambacina* usata nei manoscritti orientali.

« Il giornale scritto da ambedue è costituito di quattro parti distinte:

« 1° Il volume grande in-folio che conteneva: 1° le osservazioni di latitudine e di longitudine fatte dal Bruce. 2° Il Giornale del tempo come in parte è pubblicato nei *Travels* . . . (1). Il resto del libro contiene appunti sulla storia di Yasus Tellach presi da un manoscritto etiopico, la continuazione della Storia di Abissinia, e altri appunti sulle rendite e la geografia delle provincie, scritti questi a Coscam poco prima del ritorno del Bruce.

---

(1) Questo periodo è già stato da me trascritto poco sopra.

« 2° Il giornale di Luigi sopra ricordato, in un volume in-4° contenente: 1° il viaggio da Cosseir a Imbo e a Gidda; 2° il viaggio da Gidda a Loheia; 3° il viaggio da Loheia a Massaua; 4° il viaggio da Massaua a Gondar; 5° il viaggio da Gondar a Emfras; 6° il viaggio alle Sorgenti del Nilo fatto nell'ottobre 1770. Quest'ultimo contiene un ragguaglio completo del tempo e dei giorni nei quali esso fu fatto, dei villaggi, dei fiumi, montagne, e in breve, ogni cosa rimarchevole a vedersi dalla loro partenza da Gondar nella domenica 28 ottobre 1770 alle ore 9 ½ antimeridiane, fino al loro ritorno nel sabato 18 novembre all'una pomeridiana dello stesso anno (sulla terza pagina di questo viaggio vi sono le parole: Viaggio alle fontane del Nilo, in Lingua Abessica si chiamano *Rass l'Abaj* – capo dell'Abaj). I giornali da Cosseir a Gondar sono egualmente minuziosi come il giornale alle sorgenti. Essi sono tutti in italiano molto fittamente scritti su numerosi fogli della carta liscia color crema sopra ricordata.

« 3° Come supplemento a questo si deve menzionare, il taccuino nel quale Mr. Bruce incominciò una relazione storica separata del viaggio, inserendovi le proprie osservazioni. N. 1...; N. 3 il viaggio Loheia–Massaua, isole Dahlac, col giornale da Massaua a Gondar per Archico, Taranta, Dixon, Adua, Fremona, Axum, Sciré, Mai Lumi, Lumalmon, Gondar, con numerose note e osservazioni d'ogni genere. N. 4 il giornale del viaggio alle Sorgenti dell'Abaj e il ritorno a Gondar, a controllo di quello del Balugani sopra ricordato.

« 4° Il giornale redatto dal Bruce del ritorno dall'Abissinia » (1).

Questi diari non furono pubblicati, però alcuni brani di quello del Balugani furono dati dal Murray: quello relativo ad un assalto di ladroni (2); la relazione della escursione alla sorgente del Nilo (3); ed altri.

I trecento disegni circa sia architettonici che di soggetti naturali, furono unanimamente da quelli che li esaminarono, giudicati bellissimi, e tali si vede che sono anche semplicemente osservando la riproduzione di essi a stampa. Circa la loro esecuzione il Bruce stesso se ne attribuì tutto il merito nella lettera al marchese Casali da Marsiglia (doc. 28). Il Murray in un capitolo introduttivo alla pubblicazione di un supplemento di articoli di storia naturale da aggiungersi a quelli pubblicati nel volume V dei *Travels* del 1790, ne dà pure tutto il merito al Bruce (4). In genere da tutti si parla esclusivamente del Bruce, mentre il Balugani è stato sempre lasciato nell'ombra perfettamente ignorato; invece sembra che oltre al merito indiscutibile nella esecuzione dei disegni, anche

(1) Murray, *Account*, pag. 291. Appendice n. XLII.
(2) Murray, *Account*, pag. 373; Bruce, *Travels*, ed. 2ª, vol. V, pag. 430.
(3) Murray, loc. cit., pag. 379; Bruce, loc. cit., pag. 431.
(4) Murray, loc. cit., pag. 448, Append. n. XLIII.

le descrizioni delle piante e degli animali si debbano considerare opera del nostro. Infatti parlandoci del *Nuck* il Murray scrisse: « È pure spiacevole che si sia recuperato solo un frammento della descrizione del Balugani » (1).

Ciò evidentemente non è giusto. Certo il Bruce era disegnatore: il Murray scrive che prima del 1754 aveva coltivato specialmente quella parte di disegno, che è in relazione colla scienza delle fortificazioni, per servirsene nel caso dovesse fare il militare; in seguito si indusse a coltivare tutto il disegno in generale per formarsi un gusto artistico corretto in pittura (2). Però il fatto che il Bruce si era procurato prima della sua partenza dall'Inghilterra insieme con molti altri strumenti di misurazione ed astronomici, anche una grande camera oscura per disegnare, l'idea della quale aveva avuta dallo *Spectacle de la Nature* dell'Abbate Vertot, ed una ne fece costruire espressamente per sè, facendone fare le lenti ai signori Nairne e Blunt fabbricanti strumenti di matematica (3); e molto più il fatto che egli prima di partire volle procurarsi un abile disegnatore: dimostrano che egli non aveva nell'arte del disegno quella sicurezza e sveltezza, che sono necessari a coloro che vogliono servirsi di quell'arte per fissare tutto quanto di interessante cade sotto i loro occhi viaggiando in paesi lontani. Come risulta anche dalla lettera di mr. Lumisden (doc. 9 e 10) e anche da dichiarazioni del Murray, il Balugani all'inizio eseguiva il disegno sotto la sorveglianza del Bruce, che eventualmente gli indicava le modificazioni da farsi, cosicchè certamente in seguito egli si deve essere considerevolmente impratichito alla esecuzione dei disegni di storia naturale. Qualche dettaglio, come i cieli, i paesaggi può essere che non gli riuscisse come il suo principale desiderava, e per questi dettagli egli si impegnò a farli eseguire da pittori speciali al loro ritorno a Bologna, come risulta dai documenti 28, 41, 43, 46 relativi a tale impegno e ai contratti che ne derivarono con Filippo Balugani e altri pittori. Ma se non si vuole attribuire il merito principale nella esecuzione di quei disegni al Balugani, bisogna almeno riconoscere pari merito ad entrambi. Dei disegni architettonici e di oggetti vari eseguiti per il Bruce se ne ha un'idea da quelli pubblicati nei volumi 1-2 dei *Travels* (4); e per il conte Ranuzzi eseguì e impresse un lavoro che

---

(1) Murray, pag. 461.

(2) Murray, loc. cit., pag. 16.

(3) Bruce, *Travels*, 1790, I, pag. viii-ix e li.

(4) Tali disegni sono collocati nel vol. I, pag. 43, una Canja o barca del Nilo; pag. 44 la sua sezione con dettagli e di questa nella 2ª edizione è aggiunta la descrizione tratta dal manoscritto del Balugani (vol. II, pag. 257, Append. to Book I, n. 1); a pag. 128 e 130 due riproduzioni di affreschi delle tombe di Tebe; a pag. 256 il ritratto di uno Scech arabo della tribù dei Beni Koreisc e

mostra la sua abilità: piante, facciata e spaccati del palazzo Senatorio Ranuzzi di Bologna disegnate e incise da Luigi Balugani 10 tavole in foglio massimo.

Nel volume V, Appendice dei *Travels* della prima edizione, il Bruce fece eseguire 43 tavole in rame delle quali 24 di piante rappresentanti 18 specie differenti e 19 di animali rappresentanti 22 specie, e nella seconda edizione il Murray ne aggiunse altre 20 delle quali 11 di piante rappresentanti dieci specie diverse, 2 di animali e 1 etnografica, 1 con ritratto del Bruce, 2 con ritratti di personaggi abissini e 3 di saggi linguistici.

Ecco l'elenco delle piante e degli animali figurati nelle due prime edizioni del *Travels* con la loro nomenclatura abissina e coi nomi scientifici attuali relativi:

Piante.

1.	Papyrus in Egitto Berdi in Siria Babeer	Cyperus Papyrus L. var. Antiquorum.
2, 3.	Balessan	Commiphora Opobalsamum.
4, 5.	Sassa	Albizzia Sassa.
6.	Ergett Dimmo	Dichrostachys glomerata.
7.	Ergett el Chrone	Mimosa asperata.
8, 9.	Ensete	Musa Ensete.
10, 11.	Kol Qual	Euphorbia abyssinica.
12.	Rack	Avicennia marina.
13.	Geshe el Aube	Ischaemum brachyatherum.
14.	Kantuffa	Kantuffa stellata.
15, 16.	Gaguedi	Protea Gaguedi.
17.	Wanzey	Cordia abyssinica.
18.	Fareck	Bauhinia Farek.
19.	Kuara	Erythrina Brucei.
20.	Walkuffa	Dombeya Brucei.
21.	Wooginoos	Brucea antidysenterica.
22, 23.	Cusso	Hagenia abyssinica.
24.	Teff	il testo Eragrostis Teff; la tavola Panicum maximum.

a pag. 304 quello di un'araba di Loheja della stessa tribù; a pag. 400 saggi linguistici; a pag. 417 e 418 due tavole rappresentanti pietre con iscrizioni geroglifiche trovate ad Axum nel 1771. – Nel vol. II a pag. 1, si dà la planimetria del porto di Massaua; a pag. 130 è riprodotto un obelisco di Axum; a pag. 264 arredi vari guerreschi e ornamentali degli Abissini; la riproduzione in prospetto e in piano della Mikeas o Nilometro del Cairo. (Nel vol. IV, le planimetrie delle tre battaglie di Serbraxos alle pag. 138, 162 e 199, sono lavoro esclusivo del Bruce essendo queste battaglie state combattute dopo la morte del Balugani).

ANIMALI:

25.	Rinoceros of Africa	Rhinoceros bicornis v. Brucei.
26.	Hyaena	Hyaena striata.
27.	Yerboa	Dipus aegyptius.
28.	Fennec	Fenecus Brucei.
29.	Ashkoko	Hyrax abyssinicus.
30.	Lynx	Lynx sp.
31.	Nisser Work	Aquila sp.
32.	Nisser Tokoor	Spizaetus occipitalis.
33.	Rachamah	Neophron percnopterus.
34.	Abba Gumba	Tmetoceros abyssinicus.
35.	Abou Hannes	Tantalus ibis.
36.	Bee Cuckoo	Melittophagus indicator.
37.	Sheregrig	Coracias abyssinicus.
38.	Waalia	Vinago Waalia.
39.	Tsaltralya	Dittero.
	El Adda	Scincus sp.
40.	Cerastes	Cerastes cornutus.
41.	Binny	Barbus Bynni.
42.	Tortoise	Thalassochelis Caretta.
43.	Pearls . . . con 3 figure	(Pinna Ostrea ? Mytilus)

Aggiunte nella seconda edizione.

PIANTE.

44.	Cassia	Cassia Fistula.
45.	Taberne montana (sic)	Landolphia florida.
46, 47.	Krihaha	Arundinaria alpina.
48.	Anguah n. 1	Boswellia papyrifera
49.	Anguah n. 2	Sterculia cinerea.
50.	Geshe	Rhamnus Prinoides.
51.	Merjombey	Solanum indicum var.
52.	Nuk	Guizotia abyssinica.
53.	Umfar	Buddleia polystachya.
54.	Kummel.	Mimusops Kummel.

ANIMALI.

55.	Houbarra	Hubara Macqueni.
56.	Madoqua	Antilope dorcas.
57.	Kafla Abay Prete del Nilo.	

Nella introduzione agli articoli di storia naturale aggiunti nella seconda edizione curata dal Murray e che si trova anche con le stesse tavole nella *Vita del Bruce*, edizione in-4°, questi dà un lungo elenco delle specie, disegnate generalmente a colori, vegetali e animali, indicando di molte anche la località e la data in cui furono ritratte, indicandole col nome usato dai nativi per distinguerle, il quale si trova scritto sotto ciascun ritratto. Ciò fa maggiormente rincrescere che quelle figure non siano state pubblicate assai prima d'ora, essendo figure che come si rivela da quelle riprodotte a stampa sono facilmente identificabili; tanto che si può anche rilevare qualche errore commesso dai disegnatori nell'attribuzione del nome indigeno. Così per esempio il nome *Leham* assegnato alla *Landolphia* nel testo della tavola 45 è erroneo, i Tigrini con quel nome intendono il *Syzygium guineense* (W.) DC.; probabilmente a quella tavola doveva essere apposto il nome *Semec* pianta che trovarono a Emfras. Anche nella tavola 24 col nome *Teff* è rappresentato il *Panicum maximum* Jacq., la descrizione però e le osservazioni relative sono del vero *Teff*, *Eragrostis Teff* (Zuccagni) Trotter. Ciò però non costituisce un grave difetto nell'opera, che rimane sempre, come è noto, anche tenuto conto delle mende che gli esploratori successivi vi hanno trovato, una fonte della più alta importanza per la conoscenza dell'Etiopia.

Luigi Balugani certamente fa parte del lungo elenco dei pionieri italiani che sacrificarono la loro vita per ideali artistici e scientifici. Egli nato dal popolo, come tanti altri seppe tener alta la bandiera italiana anche al servizio dello straniero in terre selvagge, in mezzo a guerre, ribellioni, crudeltà inaudite e soccombendo all'insidie del clima e delle malattie tropicali.

Sia gloria al nome suo.

DOCUMENTI

Documento n. 1.

Luigi Antonio Melchiorre figlio di Luca Balugani e di Eleonora Ceccani sua moglie di nazione Padovana, nacque in Bologna li 14 del mese di gennaio dell'anno 1737, e fu battezzato nella Chiesa Metropolitana di Bologna il giorno 15 del d.° mese fu compare il sig. Tommaso Negri e la Comare sig.ra Angela Negri Meloni (1).

Documento n. 2.

Luigi Balugani.

Figlio di Luca bravo in ogni corpo di lavori meccanici, nacque in Bologna il giorno 14 del mese Gen.° nell'Anno 1737. Incominciò da sè a disegnare gli ornamenti e invogliatosi della Architettura pregò il padre di procurargli un buon Maestro in quella facoltà ed infatti lo contentò con raccomandarlo al famoso Giuseppe Cinoli uno dei migliori dissegnatori di questa nostra fiorentissima Scuola, e certamente tanto amore li prese che tutto ciò che sapea li insegnò con quali insegnamenti, e divenuto un bravissimo dissegnatore d'Architettura, ha sempre dimostrato un gran valore nella professione per il quale riportò il Premio per il suo bel disegno, della nostra Accademia dello Istituto, ed ancora la prima volta che si dispensarono li Premii dell'Accademia di Parma fu premiato per essere stato giudicato il suo disegno il miliore delli altri concorenti dalle primarie Scuole di Italia, indi voglioso di fare altri studii nella sua professione si portò a Roma il giorno 17 novembre del 1761, dove fu sempre amato da primarii signori di sua Nazione, e specialmente dal Mons. Vincenzo Ranuzzi presso del quale ha sempre dimorato sino

(1) M. Oretti, *Notizie de' professori del disegno*, X, pagg. 256-259. Notizie De' Professori del Disegno cioè Pittori, Scultori et Architetti Bolognesi e de' Forestieri di sua Scuola. Raccolte ed in più Tomi divise da Marcello Oretti Acc. d'Onore dell'Ist. delle Scienze di Bologna. Tomo X.

alli 9 febbraio del 1765, nel qual giorno partì da Roma per Livorno, nel qual porto eravi ad aspettarlo un Vascello Inglese per trasportarlo ad Algieri al serviggio di Monsieur Bruce Ministro straordinario del Re d'Inghilterra con provisione di 35 scudi al mese viaggi, e spese pagate, quale carico è di Disegnatore per rilevare li avanzi di antichità di Fabbriche che vi si ritrovano in Algieri, Tunisi e disegnare ancora li frammenti di Cartagine che in piccola distanza di lì si ritrovano, e indi passare a Malta, indi in Sicilia e poi nella Corsica, e Sardegna, sempre col fine di fare in copia di disegno li avanzi delle antiche Fabriche che in que' paesi si ritrovano. Io intanto auguro salute a questo buon disegnatore a fine possi eseguire le sue incombense e per li vantaggi che ne riporterà e per li rari disegni che ne ricaverà nei suoi viaggi, e lo spero per le sue ottime qualità che lo adornano mentre non è dissimile dal Fratello scultore anch'esso di rarissimi pregi fornito per li quali tutti professano un particolare amore e per genio, e per la virtù di loro; di questo Luigi ho veduto rarissimi disegni di sua mano presso il Sig. Giuseppe Borgia fatti con peña ad aquarello quali rappresentano la famosa Capella dove riposa il Corpo di S. Domenico nella sua chiesa, e cioè la pianta, spaccato, facciate, e l'Ara del med.° Santo quali sono in tutti n. 6. Diede ancora il disegno dell'altare di S. Francesco di Paola in S. Benedetto.

Andò dunque Luigi Balugani col d.° Cavaliere Inglese nell'Affrica e la girò quasi tutta, ed una gran parte dell'Asia impiegandovi varii anni, ma non potendo soffrire li patimenti e mutazioni di que' lidi morì [spazio lasciato in bianco]

e lasciò tutti li Disegni suoi in mano del Cav. Inglese che in Bologna capitò l'anno 1773 portando seco tutti li Disegni fatti dal Balugani quali furono ammirati con istupore da Professori e dall'Autore del presente Libro; e fu compianta la sua morte del Balugani creduta procuratagli per malignità da chi non voleva che ritornasse in Italia. Il Cavgl.e Bruce è di gran stattura Dotto sì ma torbido ed inquieto capace d'intraprendere qualunque disaggio, e lasciò morti tutti di suo equipaggio a riserva di un cameriero; visitò lo studio dello scrivente il dì [lasciato in bianco] e ne dimostrò aggradimento. Si trattenne in Bologna qualche tempo ove fece terminare li disegni del Balugani mancandovi li piani, le aeri, li albori, e le figure, questi lavori furono eseguiti per l'Architettura e paesi, da David Zannotti, Vincenzo Martinelli e per le figure Emilio Manfredi, e il Zampa Forliuese, che a perfezione li terminarono. Li disegni di Architettura dunque erano copie di Fabbriche Romane erette nell'Imperio di Hadriano persino a Settimio Severo; cioè le rovine di Balbeck e di Palmira, Archi Tempii, Acquedotti, ed altri insigni Edificii che non erano cogniti alla Storia antica. – erano in tanti fogli volanti una parte, ed altri in quattro gran Libri, vi erano anche le monete e medaglie di Cartagine e di altre Città; poi opera di Artefice Inglese che in compagnia

del Balugani fece lo stesso viaggio, e vi lasciò la vita [ciò non è vero], erano libri con minniature da Monarca in uno dei quali erano pesci, in altri due Uccelli, in altri Fiere e Quadrupedi, Un altro con Frutti, altri due con Piante ad uso di Medicina – tutti superbamente coloriti con colori della China di una vaghezza sorprendente, ed estrema diligenza; Partì per Roma d° Cavagliere e portò seco una così famosa Raccolta quale vedrassi col tempo alla luce. È letterato questo ragguardevole Soggetto erudito in vari linguaggi orientali, studioso dell'Antichità e Medaglie, amatore della Storia Naturale del qual genere vantasi avere copiosa Raccolta come ancora gran Colezione di rare Medaglie. Io pure sono nel numero di quelli che hanno osservate le sue rarità con ammirazione stupenda ed anche del suo merito; ma molto più sarebbe stato aggradito se ci avesse ricondotto il nostro Luigi Balugani perdita penosa per la nostra ragguardevole Città ricca per altro di numero di altri insigni Uomini in tale Arte.

Chiesa della Maddalena Conf.za e suo disegno etc.

In casa di Gioseffo Borgia vi sono suoi meravigliosi disegni li quali rappresentano la Capella magnifica dove riposa il corpo di S. Domenico, cioè pianta spaccata due interni e in faccia, e facciate laterali, ed in faccia esteriori fatti in carta bianca àquerello, e penna mirabilmente.

Si vede alle Stampe il Magnifico Palaggio Ranuzzi Senatorio in Bologna, tutto di sua mano disegnato cioè quattro piante spaccate del palazzo, spaccate del Cortile, Scala, e Facciata esterna di detto Palazzo, questi rami sono stati intagliati in Roma da un certo Francesco Barbazza [1] e dicesi che la Scala sia intaglio di Luigi Balugani [2].

Documento n. 3.

Ill.^{mo} Sig. Sig. P^{ron} Col.^{mo}

Non perchè io creda di meritar tanto, da presentarmi a V. S. Ill.^{ma}, ed alla Reale Accademia, e da mettermi al confronto di sì gran numero di valorosi Concorrenti, ma si per mostrare il mio rispetto ad un Corpo così illustre, ed al suo dottissimo Secretario, indirizzo a V. S. Ill.^{ma} un mio disegno sopra un bellissimo Argomento proposto. Il mio disegno

---

[1] Si deve forse leggere Antonio Barbazza, del quale vedasi nei documenti nn. 16, 17 e 22.

[2] M. Oretti, *Notizie de' professori del disegno*, vol. X, pagg. 256-259.

sarà indicato col motto *Vita brevis, ars longa*. Prego V. S. Ill.ma: e la Reale Accademia a proteggermi; e V. S. Ill.ma: prego a credermi quale con sommo mio onor mi protesto di V. S. Ill.ma (1).

Umill.mo e Devot.mo Ser.e
Luigi Balugani.

Bologna, allo 19 di Marzo 1759.

Estratto dalla Cartella n. 1 dell'Armadio A dell'Archiginnasio Parmense di Belle Arti.

Documento n. 4.

Ill.mo Sig.re Sig.re Pron Col.mo

Ringrazio V. S. Ill.ma delle generose espressioni, con cui onora il mio disegno, ma io non posso in verità sperar troppo ch'egli sia il fortunato, dovendo compettere (*sic*) con troppe e troppo gran cose. Avrei io voluto far anche la prova ingiunta dalla Real Accademia ai Concorrenti, ma io sono stato distratto da qualche facenda di mia professione; e poi essendo principalmente occupato nel disegno, per mezzo di cui volevo io mostrare il mio profondo rispetto alla veneratissima Accademia, non ho avuto tempo per fare la prova. Ma spero sulla graziosa condiscendenza della Reale Accademia, che anche questa prova vorrà degnarsi di ricevere, e riconoscere per mio il disegno. Del che se bisognasse alcuna testimonianza, spero che mi potrà valer quella dei due degnissimi Accademici deputati il Sig. Conte Gregorio Casali e il Sig. Gian Pietro Zanotti. Tocca a V. S. Ill.ma ad ottenermi questa grazia dalla Reale Accademia. Che quando questa per altro non potesse ottenersi, sappia pure che son disposto a fare tutte le prove sotto SS.ri Accademici deputati, ed anche sarei disposto, bisognando venirle a fare in Parma sotto chiunque volesse la venerata Accademia. Tutta via riceverò io per un segnalato favore, se V. S. Ill.ma; me ne ottiene dalla benignissima Accademia la dispensa. Io passo con la più profonda stima a protestarmi

Di V. S. Ill.ma

Umilissimo e Devt.mo Serv.re
Luigi Balugani.

Di Bologna, alli 29 di Marzo 1759.

N. B. — Senza indicazione di recapito, ma la lettera si può come la precedente credere inviata a C. Innocenzo Frugoni.

Estratto dalla Cartella n. 1 dell'Armadio A dell'Archivio della R. Acc. di Belle Arti di Parma.

(1) La lettera è certamente indirizzata al Frugoni, Segretario perpetuo dell'Acc. Parmense. Però essa è priva di recapito.

Documento n. 5.

Lettera del 2 Aprile 1759 del conte Gregorio Casali al Frugoni per dichiarare in nome anche di Gian Pietro Zanotti che il Balugani è l'autore del progetto inviato e che egli non ha potuto fare la prova particolare che la R. Accademia avrebbe potuto esigere perchè « . . . distratto da parecchi lavori anche in servigio dell'Istituto delle Scienze e impiegato specialmente nella formazione del disegno » inviato al Concorso.

Documento n. 6.

Lettera del 6 maggio 1759 del conte Gregorio Casali al Frugoni per esprimergli il piacere del premio accordato al Balugani. Fra l'altro scrive: « . . . mi derivava codesto piacere da troppe cause. Dall'affetto verso il mio scolare, dalla compiacenza di veder un sì bel frutto dello studio del disegno, che nell'Istituto delle Scienze e dell'Arti fra gli altri studi coltivasi; dall'onore che io vedo tornare alla mia Patria veramente sommo. Poteva desiderarsi cosa più gloriosa? La prima volta che la R. Accademia, che vale a dire un'Assemblea d'Uomini dottissimi e famosissimi, cerca di coronare di un ricco premio il più valente dei disegnatori, che da ogni paese le si presentano, elegge a più alta fortuna un giovine bolognese ».

Dalla Cartella n. 1 dell'Armadio A. dell'Archivio dell'Accademia di B. A. di Parma.

Documento n. 7.

Da appunti risulta che il 19 aprile 1759 gli Accademici hanno tenuto l'Adunanza per l'assegnazione dei premi, che i presenti votanti furono tredici, essendosi il Petitot astenuto dal voto come maestro del concorrente Feneuill Luigi.

I voti favorevoli al Balugani furono sette, e sei quelli in favore del Feneuill.

Quest'ultimo favorito dal potente ministro Du Tillot deve aver reagito energicamente, perchè pare che il Du Tillot, come risulta dall'affermazione del pittore accademico Antonio Bresciani fatta al De Lama (nel principio dell'Ottocento) manifestò l'intenzione di sopprimere per dispetto l'Accademia. La lettera di ringraziamento del Balugani per il premio avuto è del 7 maggio 1759.

Il bando di concorso era: *Una magnifica Rotonda.*
Il premio consisteva in una grande medaglia d'oro.

Atti della R. Accademia Parmense di Belle Arti, vol IX, Armadio B della R. Acc. Parm. di Belle Arti.

Documenti gentilmente ottenuti dal prof. Giovanni Copertini consegnatario dell'Archivio della R. Accademia di Parma, per interessamento del prof. Francesco Lanzoni della R. Università Parmense.

Documento n. 8.

(Foglio a stampa).

Distribuzione del premio dell'anno 1759.

La Reale Accademia Parmense delle Belle Arti esattamente fedele a dare mai sempre quanto ella promette al Pubblico, non tralascia di far noto, e presente agli Esteri l'esito del solenne concorso di quest'anno al Premio del Disegno del Nudo, a quello dell'Architettura.

Fra i concorrenti di quest'anno nel Disegno del Nudo. . . fra i Disegni dei concorrenti al Premio di Architettura, quattro principalmente si sono contemplati dalla Regia Accademia.

Il Disegno K. con la Divisa: *Ars longa vita brevis.* Il disegno P: con la Divisa: *Dii, coeptis aspirate meis.*

Il Disegno G con la Divisa: *Omnes homines, non solum architecti, quod est bonum possunt approbare.*

Il Disegno A con la Divisa: *Non erubescam.*

Il primo di questi, segnato con la lettera K opera del Sig. Luigi Balugani Bolognese è stato preferito, e coronato dalla pluralità dei voti nel secreto scrutinio. Si è in esso ammirata l'eccellenza delle parti disegnate, il buon gusto nei generi degli ornamenti, e quella precisione in ben molte cose, la qual fa conoscere in un Architetto capacità, ed attenzione portata all'esecuzione dell'opere sue. Si sono tuttavolta fatte alcune osservazioni, le quali hanno lungamente bilanciato, e sospeso i voti.

È paruto che l'Autore siasi allontanato dall'intenzione dell'Accademia, che da tutti i concorrenti voleva esattamente ne i loro Disegni una Rotonda; e che inoltre non vi abbia egli messo quell'ampiezza e magnificenza di sito la qual erasi proposta nel soggetto, potendosi ancora dire, che la ricchezza esteriore della facciata prometteva forse meno di semplicità nel di dentro. Tuttavia l'intenzione del suo piano ingegnoso, e semplice ha meritato il favore dei più; e la preferenza nel Concorso. L'urna antica, che l'Autore ha elevato sul grande Altare, per collocarvi la Reliquia, mostra il gusto, ch'Egli à per la nobile semplicità della bella Architettura; e la R. Accademia gli saprà distinto grado, s'egli continuerà a concorrere.

. . . . . .

I nomi dei valorosi Autori di questi tre distinti Disegni restano occulti per adempiere fedelmente quanto « è dalla R. Accademia nei suoi pubblicati antecedenti avvisi promesso ».

Biblioteca Comunale senza Indic. Colloc.

Documento n. 9.

Mr. Lumisden a Mr. Bruce.

Roma, 9 Febbraio 1775.

Mio caro Signore,

Io ebbi il piacere di scrivervi il 2 da Livorno, e il 6 da Marsiglia. Io ora ho il piacere di comunicarvi che io ho or ora impegnato per voi il Sig. Luigi Balugani « Maestro dell'Accademia Clementina dell'Istituto della Scienza in Bologna ». Questo giovine, io stesso ho lusingato, è capace di servirvi nella presente vostra impresa. Egli è certamente il più adatto di quanto io ho potuto trovare qui. Egli ha vissuto parecchi anni in Roma, nella Casa del Conte Ranuzzi di Bologna. Questo gentiluomo ha il migliore carattere riguardo alla vita privata, come pure per la diligenza. Egli ancora sta incidendo in rame i disegni di una veduta dell'interno di S. Pietro per la *Camera*, che in pochi giorni vuol finire; e il 20 corrente egli andrà a Firenze col Corriere Francese, d'onde andrà direttamente a Livorno, ad imbarcarsi per Algieri. Io, in questa occasione, ho consultato i Signori Walker e Byres. Noi abbiamo fatto il nostro meglio per servirvi; e in verità vi sono poche persone al mondo per cui io voglio incaricarmi di una tale commissione, e per ciò io vi do una prova reale della mia amicizia. Forse voi potete credere ch'io esageri, ma in verità non è possibile servirvi più sobriamente. Per alcuna persona di reputazione lascierebbe il suo affare (per quanto piccolo) e il suo paese per un anno, per una minore ricompensa. Voi vedrete, dal foglio accluso, le condizioni convenute che voi senza dubbio ratificherete. Balugani si impegna di servirvi un anno al prezzo di 35 scudi romani (Roman crowns) per mese, con vitto, e la spesa del suo dispendio giornaliero. Avendo egli ora alcuni debiti, e altre spese da fare, egli non vuole impegnarsi senza avere tre mesi anticipati; in conseguenza, per ciò, per non ritardare il suo viaggio, e conseguentemente la vostra impresa, io gli darò anticipati 105 scudi romani, pei quali, con vostro agio, voi potrete farmi un credito su Livorno, od ovunque altrove. Io scriverò un rigo a Lefroy e Charron, perchè al giovine, gli paghino le spese del suo viaggio e lo provvedano del suo necessario durante il suo soggiorno a Livorno. Io sono certo che voi troverete sufficiente il suo impiego per un anno. Inoltre facendo

egli fuori le figure irreprensibili per voi, egli è capace di tracciarne sul rame, essendo pratico di inciderle in tale maniera. Se qualche cosa vi sembrerà difettoso nelle sue figure, in esse voi stesso potrete assisterlo e potrà necessariamente ritoccarle. In breve, è impossibile che troviate alcun artista che sia completamente in ogni parte secondo il vostro desiderio. Io sarò infinitamente ansioso di sentire del suo arrivo e di avere la vostra approvazione di ciò che io ho fatto per voi. Intanto vi abbraccio molto affezionatamente, e sono sempre con la massima amicizia e stima mio caro Signore.

Il vostro obbediente e più umile servo
Andrew Lumisden.

A. Murray, Acc. App. XX, pag. 179 (*Travels*, Ed. 2, I, pagg. ccxxix–ccxlii).

Documento n. 10.

Mr. Lumisden a Mr. Bruce.

Roma, 13 Luglio 1766.

Caro Signore,

Mi ha dato grande piacere ricevere la vostra gentile lettera del 26 aprile e di apprendere che il Signore de Balugani vi ha felicemente raggiunto, imperfetto come egli è nelle figure ed ornamenti, egli era nell'opinione di tutte le mie conoscenze, la persona più indicata, che volesse intraprendere a servirvi. Poche persone, che abbiano un qualche affare, vorrebbe abbandonarli per il tempo di un viaggio in Affrica per, forse, doppio salario, elevato che esso sia, che date a Balugani. In verità, io mi lusingo, che sotto la vostra direzione, e con la vostra assistenza, egli possa eseguire il vostro progetto in modo tale, che vi possa procurare riputazione e soddisfare il pubblico. Voi mi darete uno speciale piacere a scrivermi spesso, l'avanzamento che voi fate e i luoghi che voi visitate. Il Signor Belli, ecc. mi ha rimborsato i 105 scudi che io ho anticipato a Balugani, del che potete trovare la ricevuta acclusa.

La lettera segue a parlare degli acquisti librari fatti per conto del Bruce a Roma, che considera come « un cattivo mercato per libri di belle lettere e di erudizione profana; ma se voi desiderate scolastica divina e leggi economiche, voi potrete essere provveduto ».

A. Murray, Acc. Append. n. XXI, pag. 181 (*Travels*, ed. 2ª, I, pagg. ccxlii–ccxliii).

Documento n. 11.

Alli 21 Dicembre 1765.

« Per Lettera del Sig. Luigi Balugani, inviataci dall'Algieri fu proposto per Accademico d'onore il Sig. Giacomo Bruce Kinard, ed in riguardo di chi lo presentava fu senza dificultà acclamata ».

Atti dell'Accademia Clementina di Bologna dall'anno 1764 a tutto l'anno 1772, n. 2, pag. 32.

Documento n. 12.

Scatola « Lettere di personaggi | e di Chiari Uomini Letterati ed Artisti | Lettere di ringraziamento | per Uomini e Soci dell'Accademia.

Nell'indice delle lettere contenute 1710–1795 è così indicata la lettera di ringraziamento del Bruce all'Accademia :

« 1766. Bruce James (62) che dal 1768 al 1772 col Bolognese Luigi Balugani, accad. Clem. della categoria degli Architetti, andò per l'Affrica a ritrarre gli antichi monumenti, e dentro l'Abissinia fino alle sorgenti del fiume Azzurro che a lui parvero le sorgenti del Nilo ». Vedi Atti dell'Accad. scritta da Pio a pag. 186.

Non mi è stato possibile averne visione.

Documento n. 13.

Alli 31 ottobre 1773.

Il Cavalier Bruce Inglese, diede, mesi sono, con Lettera [doc. 28] una confusa notizia al Sig. Sena e Casali, della morte successa in Gondar, capitale dell'Etiopia, del Sig. Luigi Balugani Bolognese, e nostro Accademico della categoria degli Architetti. Il predetto Casali ne avanzò la funesta nova al sig. Filippo Balugani di lui Fratello, anch'esso nostro accademico. Non mancò questo di rendermene avvisato, acciò ne divulgassi l'avvenimento e ne procurassi li sufragi, mandando agli Accademici le solite polize avvisanti la detta morte. Ciò feci, ma non ne scrissi la memoria, volendo aspettare accertata notizia del come, e del quando ciò succedesse. Ora, con la venuta in Bologna del sudetto Cavalier Bruce ho ricavato che egli morì oppresso da dissenteria il giorno 15 maggio 1770; dopo di aver fatto tutto il viaggio dell'Affrica, per vedere, e disegnare d'ordine dello stesso Bruce, che seco sel conducea, tutti li più insigni avvanzi delle antiche Fabbriche, che collà si ritrovano. Si dice, e lo afferma lo stesso Bruce, che uniti, corraggiosamente rintraciassero, e scoprissero le fonti originali del Nilo, che in vano da tanti viaggiatori erano ricercate; cosa, se vera, da rendergli onore imortale. Ho qui descritto solamente i

di lui ultimi avvanzamenti, ma non voglio ommetter la memoria de suoi fortunati principi. Sotto la direzione del celebre sig. Giuseppe Civoli, studiò l'Architettura, ed in poco tempo si avanzò talmente che ottenne i Premi della nostra Accademia, si diede poi la prospera combinazione, che a que' giorni si instituì, e s'aperse la Reale Accademia d'Italia, che proggettò soggetti per l'acquisto di un vistosissimo Premio tanto per la Figura, quanto per l'Architettura, a quest'ultima si appigliò questo valoroso giovine, ed a competenza di molti altri bravi conoscenti, e di diverse nazioni, l'ottenne. Non si può dire quanta fama per questo acquistasse, e quanto piacere a noi dasse, che lo consideravamo per cosa nostra, onde ne venne che ci movessimo a dichiarlo (*sic*) accademico con privilegio, giacchè non aveva l'età bastevole per esserlo. Poco però potemmo averlo fra noi, perchè desideroso egli di sempre più avvanzarsi si volle portare a Roma a proseguire i suoi studi, e là fu dove fatta amicizia col sunnominato Bruce, ebbe occasione d'intraprendere con lui quei lunghissimi viaggi che sono stati, forse, la ragione dell'amara perdita che ne abbiam fatto.

Atti dell'Accademia Clementina di Bologna dall'anno 1764 a tutto l'anno 1782, n. 2, pagg. 186–187.

DOCUMENTI DELLA BIBLIOTECA COMUNALE DELL'ARCHIGINNASIO DI BOLOGNA

Cart. II. 32. Let. 13

Documento n. 14.

Eccellenza,

Sempre memore dell'infinita Bontà che ha sempre avuto l'Ecc.za Vostra per la mia persona, mi fa prendere il coraggio d'inviarle questo mio foglio per significarle il mio felice arrivo in Roma, ed insieme, molto più per l'obbligo che mi corre di ringraziare la Bontà di V. E.za della Memoria avuta per la mia persona; perlochè gliene professo mille obbligazioni. Perdoni per tanto incomodo e mi onori de suoi pregiatissimi Comandamenti, che io fra tanto qual sono con mio onore passo a sottoscrivermi

Dell'Ecc.za V.ra

Roma, lì 9 Decbre 1771.

Umiliss.mo Dev.mo et Obmo Serv.re
Luigi Balugani.

Soprascritta dell'involucro:

A S. Eccellenza
il Sig. C.o. Gregorio Casali Bologna.

Documento n. 15.

Eccellenza,

Per verun conto io non conosco di meritare i Favori Gentilissimi compartitemi dall'Ec. Vostra ed'à altro da me non può venire ascritto che a quel sincero affetto con cui io sono sempre mai stato graziato dall'E. V. Era mia intenzione di satisfare ai miei doveri con maggior solecitudine, ed a ciò fare già avevo scritto un foglio alcuni ordinari sono: Ma sapendo quanto sia la bontà dell'E. V. così da le prove come dalle gentilissime espressioni; e dall'occasione insieme che mi si è presentata, Vengo non a titolo di Comando, ma supplichevole all'E. V., affinchè mi grazii di quanto desidero.

Il Signor Domenico Corbellini Architetto Bresciano ansioso di essere ascritto al numero de nostri Accademici d'Onore, diede incombenza al Sig. Carlo Bollani, che (nel passaggio che doveva fare per Bologna nel trasferirsi alla gran Capitale di Roma), perorasse con quest'Ill.e Corpo affinchè si degnasse ammetterlo all'onore desiderato. Le pruove del suo valore, del sud.o Architetto son molte; ma particolarmente la Chiesa di S. Geremia di Venezia: S. Lorenzo di Brescia, per il merito della quale fu stampato in Opera in Commendazione della Fabbrica, ed insieme dell'Architetto medesimo. Nel principio d'Ottobre il Sud.o Sig. Bollani passò per Bologna con animo di trattenersi qualche poco ed in quel tempo venire ad ossequiare V. Ec.za, siccome anche l'E. V., egli riconobbe per protettore allorchè le fu Compertito dall'Accademia l'onore medesimo: ma per non so qual accidente partì improvviso dopo tre o quattro giorni di permanenza senza poter ciò fare. È d'avvertire che in questo fratempo andando a riverire il Sig. Ercole Lelli discorse di quest'affare; ma da Egli ne fu sugerito che vi conveniva una lettera ostensibile diretta al Secretario dell'Accademia, scritta da quel Architetto in cui venisse esposto il suo Desiderio. Passato domani il Sig. Bollani parte dalla Città di Roma, per qui trasferirsi, e dall'E. V., egli si porterà per chiederle la grazia deliberata senza ricorrere alla Lettera del Sig. Ercole accennata. Due raggioni egli ha, cioè che egli avendo diretta comissione da quell'Architetto di esporre le sue premure, così non pare necessario altra precauzione, massime che il D.o Architetto, e Uomo di moglia (*sic*, invece di molta Vaglia), ed è tenuto in gran considerazione. Poi perchè egli desiderarebbe, questo Onore, cioè di avere con la sua perorazione coadiuvato al suo desiderio; io poi infine Amico intrinseco del Sig. Bollani, ed ansioso di acquistarmi qualche merito col medesimo, supplico l'E.za V.: a volere procurare che le sia spedita la Patente, se non nel tempo che il Signor Bollani si tratterà qui in Bologna, atteso l'angustia della sua dimora, almeno

senza ulteriore incomodo: tanto più che l'istanza viene fatto da uno già Cognito all'Accademia, e che a Lui Medesimo le à compartito lo stesso onore. Mi perdoni V. E.za di tanto incomodo e mi dia l'onore de suoi pregiatissimi Comandamenti, che io senza più col maggior ossequio passo a Dichiararmi.

Dell'Ec.za V.ra

P. S. Mi riposo nella Prudenza dell'E.za V.ra affinchè al Sig. Ercole non dovesse dispiacere questo passo mio.

Umiliss.mo et Obb.mo Serv.re
Luigi Balugani.

Nel retro:
Ricevuta in Febbraio 1762.
Soprascritta dell' involucro:
A Sua Eccellenza
il Sig. C.o Gregorio Casali Bologna.

Documento n. 16.

Eccellenza

Un altra occasione mi si presenta per cui mi veggo forzato a rinovare l'incomodo a V. Ecc.za; ma ne l'istesso tempo prendo moltissima confidenza nella Benignità dell'Ecc.za V.ra che sarà disposta ad ascoltarmi e favorirmi dove le mie domande non siano contrarie al suo giusto discernimento: Primieramente ritrovandomi l'altro giorno da Monsignore Bajardi Parmiggiano mi domandò come fosse difficile, a poter essere ascritto al numero de Professori delle nostre Accademie dell'Instituto; adducendo in seguito che egli era ascritto alle Reali Accademie di Londra e di Parigi, e di altre diverse ancora e che però restavagli il desiderio di venire ascritto alle nostre di Bologna. Io a tale dimanda Le risposi che non ero ben informato, se l'Accademia delle Scienze ametteva nissuno Accademico (fuori del numero) col titolo di Accademici d'Onore come faceva la nostra de Pittori; ma che se me l'avesse comandato ne avrei ricercato V.ra Ec.za siccome dell'una e dell'altra Accademia; acciochè colla sua solita Bontà si volesse degnare di qualche risposta per indi comunicarla al D.o Monsignore: E dal medesimo mi fu detto che scrivessi pure che le avrei fatto piacere: Se però l'Ec.za V.ra conoscesse opportuno una lettera di qualche persona Nobile, oppure del Medesimo Monsig.e in cui venisse significato questo suo desiderio non crederei che egli ne potesse aver difficoltà nessuna; se in questa vece non potesse bastare il merito suo, massime in genere di Antiquario, e l'essere ancora ornato di molte dignità Ecclesiastiche, ed in speccie oltre essere Vescovo, di una

Città che ben non mi ricordo; pochi giorni sono che S. Santità lo fece Vescovo assistente al Soglio; lo lascio giudicare all'Ecc.za V.ra.

L'altra grazia che io desidero dall'Ec.za V.ra ella è che in Roma si ritrova un giovine nominato Sig. Antonio Barbazza il quale è bravo Pittore, ed è molto eccellente ancora intagliatore in Rame il quale è moltissimo tempo che desiderebbe l'onore pure di essere ammesso al numero dei nostri Accademici d'Onore: Egl'ha alcune opere esposte al Pubblico le quali all'asserzione dei Professori sono di molto Valore; anzi egli tiene un'attestato fattole per non so qual occasione, da alcuni de meglio Pittori di Roma, nei quali viene specificato il suo Valore, ed ha destinato di farne fare autentica Copia, per informarne sinceramente l'Accademia Clementina: Dambe due li sopraccennati soggetti io ne ho qualche premura; onde esaminato il merito Loro, desiderarei se possibil fia il che non difido (massime per l'ultimo) di essere cortesemente graziato: Restami solo che tanto per l'uno quanto per l'altro V. Ecc.za si degni d'additarmi la strada che si deve tenere, che da me pontualmente verrà eseguita; poi aggiungerò nel numero delle molte obligazioni che professo alla Ec.za V.ra ancor questa col desiderio solo di essere rinumerato nel numero da suoi più fedelissimi servitori, nel mentre che con ogni più vivo rispetto passo a Dichiararmi

Dell'Ec.za. V.ra.

Roma, 31 Marzo 1762.

Um.o Dev.mo ed Ob.mo Servitore
Luigi Balugani.

Soprascritta dell'involucro:
A Sua Eccellenza
il Sig. C.e Gregorio Casali
Bologna.

Documento n. 17.

Eccellenza,

Tropo tardi in Verità io mi presento a V.ra Ec.za per porgerle li miei vivi ringraziamenti, ma il sapere che V. Ecc.za si portava fuori di Città, e l'esser io pressato di qualche briga, ha fatto che io ritardi li miei doveri: Fu accetata dal Sig. Barbazza la Patente di Accademico con molto piacere, e già supongo da quel che concertassimo assieme che il Sig. Domenico Piò avrà ricevuto una Lettera di ringraziamento, siccome Vice Secretario acciò la partecipi alla Accademia: ed il predetto Sig.r Barbazzi si riposò in me affine che Umiliassi li suoi più vivi Complimenti a V. Ec.za riconoscendola, stante quel che io le dissi, l'autore dell'onore

che l'Accademia le ha compartito, alla quale pure umilio anche io li miei ringraziamenti, anche per l'altra Patente spedita al Sig.r Cortelini da me desiderata. Perciò che riguarda poi l'affare di Monsig.re Bajardi La devo ringraziare tanto per parte sua, e pregarla all'occorrenza della sua assistenza, e che intanto penserà quello che deve fare. Io per tutto le sono infinitamente obbligato, e desidero l'occasione, ed il merito, di qualche suo pregiatissimo Comandamento, che sarà mia ambizione farmeli conoscere quale con mio sommo onore pregio sottoscrivermi.

Dell'Ec.za V.ra

Roma, li 19 Maggio 1762.

Umilissimo, Devotissimo, Obbligatissimo Servitore
Luigi Balugani.

Soprascritta dall' involucro:

A Sua Eccellenza
Il Sig.e Co: Gregorio Casali
Bologna

Documento n. 18.

Eccellenza,

Tante sono le prove che ho della Bontà di V. Ecc.za, che io mi voglio far coraggio di supplicarla di una grazia, colla speranza di essere benignamente favorito. Prima che io mi portassi a Roma fui impegnato a far certa spesa per cui dovetti pregare (siccome a mio Amico) il Sig.r Giovanni Regazzi, a volermi fare il favore di prestarmi Quattro Zecchini; il che puntualmente per grazia sua Egli fece: Era mio impegno di restituirli nel mese passato di Giugno, o nel presente mese di Luglio; ma siccome egli ha desiderato di esser sattisfatto in una sol volta, io non l'ho per ora potuto fare attese le piccole somme che sono andato riscottendo dalle mie fatiche; tanto più che sono due mesi, e più, che servo in qualità di Maestro di Disegno il Sig. Marchesino Doria, ed il Sig. C.e Savorgnani, e fin'ora non mi hanno neppure sattisfatto: sicchè per tale motivo supplicherei V. Ecc.za a volermi far sapere se si compiacerebbe di pagare li sud.i Quattro Zecchini al Sig.r Regazzi, per indi riscuoterli da me nel venturo Natale giacchè allora mi giova sperare che questi Sig.ri vorranno appareggiare li miei conti. Tutto questo io desiderarei da V. Ecc.za: ma di più la vorrei supplicare a non ne fare moto con nessuno, e specialmente con mio Fratello poichè ne egli, ne altri sono di ciò informati: ed a norma di quanto mi verrà benignamente disposto da V. Ecc.za piglierò le mie misure per regolare il Sig.r Regazzi sud.o, a portarsi

dall'Ecc.za V.ra, se verrà dall'Ecc.za V.ra creduto opportuno. Ed inoltre non le piacendo di adderire a questa mia intenzione, supplico di tutto Cuore V.ra Ecc.za a volermi conservare la sua Padronanza come sempre in passato per gentilezza sua ho avuto la fortuna di Possedere. Oltre li sud.i SSig.ri Servo ancora il Sig.r Co. Ricardo Caraffa Fratello della Sig.ra Principessa Doria pure per Maestro d'Architettura, e spero con un poco di tempo di fare maggiori progressi, il che prego Dio a volermi concedere.

Rinovo per tanto li miei ossequii a V. Ecc.za e di nuovo col Rossore in faccia la supplico a volermi perdonarmi la libertà che mi sono preso, che io frattanto in attenzione de suoi pregiatissimi comandamenti, qual sono inviolabilmente mi rassegno

Dell'Ecc.za V.ra

Roma, li 28 Luglio 1762.

U.mo Dev.mo et Obb.mo Servitore
Luigi Balugani.

Soprascritta dall'involucro:

A Sua Eccellenza
il Sig.r Conte Gregorio Casali
Bologna.

Documento n. 19.

Eccellenza,

Quantunque per mia mala sorte abbia incontrato di pregare l'Ecc.za V.ra per il consaputo interesse, in un tempo che per l'appunto l'Ecc.za V.ra non ha avuto comodo di potermi favorire, ciò non ostante le professo mille, ed infinite obbligazioni per il buon cuore, e genio che mi ha dimostrato per favorirmi contro ogni mio merito; sarà pertanto debito conservar viva la memoria delle molte obbligazioni che professo all'Ecc.za V.ra: e solo mi sarà perpetuamente grande il rossore, di non aver merito veruno per cui possa sperare di meritare qualche pregiatissimo suo Comandamento, benche in attenzione de medesimi, desideroso io sia di farmi conoscere quale io inviolabilmente mi rassegno protestandomi

Dell'Ecc.za V.ra

Roma, li 25 Agosto 1762.

U.mo Devot.mo et Obb.mo Servitore
Luigi Balugani.

Soprascritta dell'involucro:

A Sua Eccellenza.

Documento n. 20.

Eccellenza,

L'occasione in cui siamo dell'approssimazione del SS.mo Natale mi presenta l'opportunità di ossequiare umilmente la mia Servitù all'Eza V.ra; ed insieme di desiderarle dal Cielo quelle maggiori Consolazioni e prosperità che V. Ecza possa mai desiderare. Suplico pertanto l'innata Bontà di V. Ec.za a volermi conservare nel numero dei suoi servidori mentre, che io umilmente ansioso de Veneratissimi suoi Comandamenti, passo inviolabilmente a dichiararmi dell'Ec.za V.ra

Roma, li 11 Decbre 1762.

U.mo dev.mo Ob.mo Servitore
Luigi Balugani.

Soprascritta della busta:

A Sua Eccellenza
Il Sig. Conte Gregorio Casali
Bologna.

Documento n. 21.

Eccellenza,

Gli augurii di Felicità che nel rinnovarsi del Santo Natale riverentemente porgo a V.ra Ec.za nascono non tanto dal singolare rispetto che ossequiosamente le professo, quanto dalla viva, e sincera brama d'ogni sua maggior contentezza. Per l'uno, e per l'altro riguardo spero, che V. Eccellenza si compiacerà d'accoglierli con suo benigno gradimento, dandone perciò in contrassegno l'onore de suoi Pregiatissimi Comandi, in attenzione de quali umilmente mi rassegno

Di V. Ec.za

Roma, lì 17 Xbre 1762.

U.mo Dev.mo Ob.mo Servitore
Luigi Balugani.

Senza soprascritta.

Documento n. 22.

Eccellenza,

Nell'atto med.o che io vengo con questo mio Foglio per rinnovare gl'atti del mio più rispettoso ossequio verso di V. Ec.za, mi occorre di supplicare l'innata Bontà sua a voler proporre per Accademico Clementino d'onore il sig. Giuseppe Cascha, per il quale io sono stato impegnato

caldamente, a volerlo raccomandare a V. Ec.za a ciò si degni a volerlo compiacere. Il qui annesso Foglio sono attestati della sua abilità, ed il Sig. Filippo Dalla Valle autore del primo attestato, è uno dei primi scultori di Roma: dico questo perchè l'Ec.za V. possa misurare l'abilità del giovine dalla forza del medesimo attestato.

Conosco nella mia domanda una troppo grande temerità nell'incomodare V. Ec.za in simile affare; ma la Bontà sua è quella che mi fa sperare un benigno compatimento, ed un esito felice per quello che io la prego: Sarà per me grand'onore se l'Ec.za V. mi onorerà di qualche suo pregevolissimo comando, e mi darà campo con ciò di farmele conoscere quale con sommo onore mi dichiaro

Di V. Ec.za

Roma, 22 Febbra. 1764.

U.mo Dev.mo Ob.mo Servitore
Luigi Balugani.

Vi è compiegato il duplice attesto sopra ricordato, il primo: Roma questo di 3 Gennaro 1764 Filippo Dalla Valle Scultore Accademico.

Il secondo: Roma questo di 18 Gennaro 1764 Antonio Giuseppe Barbazza Pittore Accademico Clementino.

Ambedue nello stesso foglio.

Soprascritta dell'involucro:

A sua Eccellenza
Il Sig. C.e Gregorio Casali
Bologna.

Documento n. 23.

Eccellenza,

Mi trovo favorito di gentilissima sua quale a dir vero mi riempie di confusione, per vedermi contro ogni mio merito favorito. Io per me tralascierò tutti quei complimenti, che sarebbero necessari per dargli una sufficiente soddisfazione delle obbligazioni che le professo. Il Giovane che è stato da V. Ec.za graziato gliene rende infinitissime grazie, e non mancherà di dargliene convincenti attestati unitamente all'Accademia, per mezzo di V. Ec.za, ed io pieno di inalterabile stima mi do l'onore di esser dell'Ec.za V.ra

Roma, li 7 Aprile 1764.

U.mo Dev.mo Ob.mo Servitore
Luigi Balugani.

Soprascritta dell'involucro:

A Sua Eccellenza
Il Sig. C.e Gregorio Casali
Bologna.

Documento n. 24.

Eccellenza,

La Bontà con cui V. Ec.za si è sempre degnato di riguardare la mia persona, mi fa sperare che Ella sarà per gradire, che io li rinovi il mio costante ossequio, ed insieme mi permetterà suplicarla a volere in nome mio presentare alla nostra Accademia Clementina Ill.mo Sig. Giacomo Bruce Kinard, affine di scriverlo al numero de nostri accademici d'onore, essendo questi un signore non solo eccellente nel disegno, ma eziandio versatissimo nelle Scienze, come ne potrà farne giusta testimonianza un opera che egli à fatto, e che tra poco sortirà dalle stampe; e l'altra dell'Historia dell'Affrica che ora a intrapreso e che a Dio piacendo anche essa tra pochi anni sarà publicata, io penso con generale approvazione.

La premura che V. Ec.za ha sempre avuta per l'onore della Nostra Accademia mi fa sperare che Ella prenderà a cuore l'impegno di ascrivere nella nostra Accademia un Sig. di tanto merito; e insieme vorrà dare a me di presentarle la sua Patente essendo io sicuro, che da esso sarà pienamente gradita.

Perdoni V. Ec.za l'ardire che io mi sono preso, e fra tanto in attenzione di questa risposta costantemente mi protesto ai Comandi di V. Ec.za

Algieri, 17 Luglio 1765.

P. S. Prego V. Ec.za quando mi fa l'onore di scrivermi dirigere le Lettere nella seguente maniera

A Luigi Balugani
Raccomandata al Sig. Matteo Pastacaldi di
Livorno.

U.mo Dev.mo Ob.mo Servitore
Luigi Balugani.

Soprascritta dell'involucro:
A Sua Eccellenza
Il Sig. Senatore C.e Gregorio Casali
Bologna.

Documento n. 25.

Eccellenza,

Col gentilissimo foglio di V. Ec.za segnato lì 3 Xbre dell'anno scorso ho inteso le premure fatte alla nostra Accademia, per l'Aggregazione del mio Principale, al quale io comunicai il Foglio, e me ne diede mille segni di gradimento. Con altro poi, accluso ho ritrovato la patente che immediatamente io ho consegnato al sud.o Signore, che ne è stato con-

tentissimo, e mi ha imposto a fargliene li suoi più vivi ringraziamenti, assicurandomi, che non avrebbe lasciato egli med.° di scrivere, a V. Ec.za e ancora al Signor Dom.co Piò pregandolo in suo nome di ringraziare l'Accademia del favore compartitogli; Io med.° rendo a V. Ec.za mille ringraziamenti, tanto per il sud.° favore, quanto per ogni altro che si compiace di fare alla nostra Casa.

Intendo inoltre il piacere, che Lei prova per li miei progressi, e il desiderio che tiene che io porti qualche bel documento per le nostre Accademie. Rispetto a questo confesso il Vero, che io non mi trovo nessuna abilità; non di meno avendo sempre in vista l'amore della Patria, io stimo bene raccogliere medaglie in fine, che se fra queste vi possono essere alcune, che manchino alle raccolte che abbiamo nello Instituto, si possi con esse perfezionare le serie, e renderle più perfette: Penso inoltre fare una serie concepita delle Medaglie di Cartagine quale potrà fare il med.° fine qualora dagl'Ill.mi SS.ri Assunti degl'Instituto venga accettata: Per parte mia di più non posso fare; Quello di che io posso assicurare V. Ec.za egl'è che la Provincia dell'Architettura sarà ricchita di belli Monumenti Antichi, che donaranno grandissimo Lume a giovani studenti, e toglieranno moltissimi pregiudizi che in oggi si sentono mostrando a Loro, come si possono scambiare le solite proporzioni, modinatura ed ornamenti, senza sortire dal buon gusto, pur che siano con savio discernimento, alle Fabriche, addattati. Sono circa 6 mesi, che io travaglio assiduamente per mettere in limpio li disegni delle Fabbriche, che abbiamo ritrovato nel viaggio passato; ma ora questi si tralascieranno, e a Dio piacendo in pocchi giorni intraprendiamo un altro viaggio, che se non sarà meno disastroso del passato non sarà ne meno, meno ricco e abbondante di belli monumenti senza dubbio migliori di quelli del Viaggio passato. Dopo il quale faremo ritorno in Tunisi, dove passeremmo qualche tempo, e indi si trasferiremmo in Italia: giunti che saremmo però in Tunisi, mi farò onore di darne parte a V. Ec.za e frattanto suplicandola della sua validissima protezione la prego onorarmi de suoi Comandi, nel mentre che costantemente mi rassegno

Di V. Ec.za

Tunisi, 3 Luglio 1766.

U.mo Dev.mo Ob.mo Servitore
Luigi Balugani.

Soprascritta dell'involucro:

A Sua Eccellenza
Il Sig. Senatore C.e Gregorio Casali
Bologna.

24 Marseille.

Par adresse des tres humbles Serviteurs de Votre Excellence J. L. Ployart et Comp. Marseille le 27. 7br 1766.

Documento n. 26.

Eccellenza

Dovendo anche per qualche tempo essere privo dell'Onore di venir personalmente, a prestare a V. Ec.za gli Atti del mio dovuto ossequio, mi prendo l'ardire di inviarle questo Foglio affine di rinovarglieli con la più profonda umiltà che io posso, ringraziandola sempre di tutte le grazie e bontà che si è degnato usare verso di me senza merito veruno. Per le quali prego il Signore Iddio a dargliene dal Cielo la più larga ricompensa.

Presentemente mi trovo in Seida di ritorno d'un pericolosissimo viaggio che abbiamo fatto nei deserti della Siria, ma che e per grazia del Signore siamo riusciti a salvamento.

Suplico V. E.za perdonarmi l'incomodo che li reco, e suplicandola insieme dell'honore di Sua validissima protezione passo inviolabilmente a dichiararmi

Di V. Ec.za

Seida, li 13 Novbre 1767.

U.mo Dev.mo ed Ob.mo Servitore
Luigi Balugani.

Soprascritta della busta:

A Sua Eccellenza Marseille
Il Sig. C.e Senatore Gregorio Casali
30 Bologna.

dietro: Avis a 23–Aprile 1768.

Documento n. 27.

Paragrafo d'una lettera di Luigi Balugani segnata li 15 Marzo 1769, a Filippo Balugani suo fratello (di pugno di Filippo Balugani).

Noi facciamo questo viaggio per molti oggetti riguardanti l'Istoria Naturale e la Geografia, ma sopratutto vogliamo se è possibile delineare tutto il corso del Nilo dalle sue Fontane per insino al mare: Niuno fra gli antichi de Romani, e de Greci ha mai potuto riuscirvi; alcun moderno non ha tentato per l'arduità dell'Impresa, ma se Iddio ne presta sua Assistenza spero che avremo la gloria di riuscirvi Felicemente. Molte osservazioni Astronomiche sono necessarie in quest'impresa, e a questo

fine ho diretto una lettera al Sig.r Conte Senatore Casali supplicandolo di assumere l'impegno di pregare li Sig.ri Professori di Astronomia di fare per noi osservazioni corrispondenti [prima era scritto: « alcuno dilettantesi di matematica », scancellato] di tutte le Eclissi de Satelliti di Jupiter che sono visibili in Bologna; per confrontare il tempo con quello che noi faremo, e determinare la longitudine de luoghi con più esattezza che non è possibile con il solo aiuto delle Tavole Astronomiche. Lui probabilmente ve ne parlerà nel qual caso vi prego far mie scuse e supplicarlo per amor della Scienza a far quanto desidero.

Di tutto ciò si prega di secretezza al più che sia possibile [questa ultima riga è stata scancellata].

Biblioteca Comunale, Miscellanea XI.

Documento n. 28.

Marseilles 12 Jiulett 1773.

Monsieur,

Jai tant de fois Entendu le pauvre Louis Balugani louer les bontees que vous avez eu pour luj et tant conter sur votre protection au retour de son voyage que cest avec une deplesens Sensible que je me trouve obligé de vous donner les nouvelles de sa mort arrivee a Gondar Capital d'Ethiopie d'une Dysenterie que ne cedoit pour rient a aucun remede Je lai fait enterrer dans la Cimetiere de St. Rafael parmi les Catholiques anciennement morts dans celle ville.

Je croyos quand je luy donners une salaire assez fort et le faisant venir de Rome en Afrique quil etoit capable en toute genre de dessin mais je lai trouvee si foible dans la prospective che jetoies obligee moymeme de dessiner presque toutes les Voues quoique il sest rendu fort habile dans les desseins d'Architecture et des Ornemens.

Comme Je ne suis pas non plus que luy figuriste nous sommes convenues de laisser celle partie des desseins jusques a Notre arrivee en Italie a lors il sobligoit a faire faire les paysages cieux et figures par Mauro Thesi et celuy etant mort il fixoit pour suppleer un Peintre a Forlì et apres il a encore trouvee un figuriste quil pensoit assez habile a Bologna meme dont Joublie le nom pour garantir leffet de ces promesses Jai gardé entre mes Mains un somme assez considerable beaucup plus que n'est pas necessaire a faire ce que reste a faire car je suis content avec cette Excuse de mettre pein a son Gout pour la depense enfin che sil retournait en Italie il poussait avoire quelque chose de reste ou sil mourroit

comme il est arrivee sa famille pourroit avoir quelque consolation en ce quel laissoit comme je ne connois meme de Noms aucune de sa famille Jose a Vous prier Monsieur davoir la bonte de remetre cette Lettre a Luy enfin de le mettre en leur Choise sils veulent chez eux rempler l'obligation de leur frere ou si je dois trouver en France ou Italie quelque Artiste et le payer de l'argent entre mes mains mais je crois ils epargnieront beaucoup en le faisant faire Eux memes car on le fera pour eux beaucoup plus a bon Marché que pour moy.

Vos talens et connoissances Monsieur que vous font autant d'honneur que votre illustre Naissance sembleait d'exiger de moy que je entre en quelque detail sur un voyage si longue que la mien dans un pays si peu connu nous arrivames a ces celebres Sources du Nil en Novre 1770 Je par des Observations faites avec un Quart de Cercle de trois pieds de Rayon jai determiné la latitude 10.56.45. Je n'entre plus en detail a present car jespere davoir l'honneur de vous offrir mes respects a Bologna surtout sil y eurra quelque un la capable de dessiner les paysages et figures que manquent a mes desseins Or vous prie Mons.r de me faire la faveur dune Ligne addresser

Au Chevalier Bruce Anglois chez Mons.r Holford Consul Anglois
Genoa

par la quelle je puis scavoir que celle Lettre vous est parvenue Jai l'honeur d'Etre avec la plus Grande Estime et Consideration

Monsieur

Votre tres humble tres Obeissant Serviteur
James Bruce.

La lettera ripiegata era contenuta in un altro foglio con la soprascritta:

55 Marseille
All Ill.mo Sig.re Sig.re Pat.ne Col.mo
Il Sig.r Conte de Casali
48 Bologna.

Biblioteca Comunale, Cart. V. 36. Bruce Cav. James. Lett. I. 1773.

DOCUMENTI ESTRATTI DALL'ARCHIVIO DELLA ECC.MA CASA RANUZZI

col grazioso consenso ed ausilio del conte Cesare Ranuzzi Segni, e del fratello conte Ferdinando Ranuzzi.

(Per la Casa Ranuzzi vedi DEMETRIO LORENZINI, *Guida dei Bagni della Porretta*, seconda Ed. Bologna 1894).

Documento n. 29.

Registro di Tutti quelli a' quali per ragione di Commercio, di Civiltà, e Parentela giornalmente si scrive da S. E. Il Sig. Senatore Girolamo Ranuzzi Conte XII della Porretta A. D. MDCCLIV Dott. Lorenzo Beccadelli Fio no. Segretario Poscia Barg. Corticelli Bol.

Foglio 5 verso

Balugani Luigi Ballugani ches S. E. Mr: Bruce Ministre d'Angleterre in Algieri

Mr. Lumisden chez le Marquis Belloni de Rome, è quello col quale si accordò per andare in Algieri.

Siegue l'Indice di quelli che si scrive per Civiltà etc.:

Bruce James Chevalier Anglois, era quello che aveva seco Ballugani, nei Viaggi in Palmira, Egitto: andò alla Porretta 1773.

Indirizzo del d. Inglese stato in Abissinia, e col quale bisogna tener corrispondenza per li Sali a Phalmut alle cave dello Stagno =, e le sue Lettere si devono inviare al seguente; pma indirizzo dell' Inglese sudetto cioè. To James Bruce of Kinnaird Esquire at Kinnard.

La sopra carta poi dee essere come segue:

To Mess.rs Drumond of Com: Bankers Charing Cross. London.

LETTERE DI LUIGI BALUGANI

Documento n. 30.

Eccellenza,

Non prima di ora io ho potuto raguagliare V. Ecellenza del mio arrivo in buona salute ed esente da ogni disgrazia in questa città di Algeri, perchè questo Bastimento è il primo che di costà è partito alla volta di un Porto ove potere fare recapitare alcune Lettere; arrivato dunque in Algeri il giorno 20 di Marzo grazie a Dio in buonissima salute, come pure io godo ancor presentemente, immediatamente mi portai alla Casa di campagna del Sig.r Console Bruce guidato dal suo Secretario e dal sud.o fui accolto cortesissimamente, ed in seguito di continuo ho esperimentato sempre più in Lui ogni tratto della più civile cortesia che si possa usare da Cavaliere, verso di una Persona la quale sia verso di Lui amica semplicemente, e non famigliare quale io sono: in verità che ora riconosco in Lui quel carattere appunto che da Monsieur Lumisden mi venne significato e più tosto fin ora ho occasione di dire, che è un Signore, che il serviggio di Lui non recca nessun incomodo quantunque in apparenza assiduissimo. Già due Operazioni a quest'ora si son fatte in un Viaggio di 6 giorni: Queste Operazioni si son fatta col comodo maggiore del mondo e come si potrebbe fare in ogni altra parte, atteso la Potenza del Sig.r Console, la grande amicizia non solo delli Primi Soggetti del Paese, ma dell'Bei, ossia del Re medesimo, che le ha somministrato gente, ed ajutato acciocchè venga da tutti ajutato, e servito, in tutto che a Lui potesse abbisognare, ed in verità il tutto è riuscito con molta sua e mia soddisfazione, e spero in Dio che un giorno il mondo avrà da mirare quest'opera con molto piacere, e per il merito Loro, che in sestesse, è particolare, e per la difficoltà, anzi per dir così per la impossibilità che da nessuno possino, esser mirate. Spero in Dio, che in tutto il rimanente del Viaggio le cose anderanno sempre così, e di bene in meglio ancora.

Forse fra non molto ritorneremo in Italia, e a quel tempo potrà meglio conoscere la verità di quello che io dico. Anzi, che io pregherò V.ra Ecc.za a volere in mio nome inchinare distintamente il Sig.r Avvocato Pisani, e pregarlo scrivere una Lettera al suo Sig.r Fratello in Malta, perchè forse tra 5 o 6 mesi mi troverò in Malta, per il che mi sarebbe molto caro avere un Signore ove potere recapitare in qualunque caso mi potesse occorere e se non per altro per darmele a conoscere, e avere

l'onore di rassegnarle una eguale stima, come faccio, e farò sempre fin che vivrò per il Sig.r Avvoccato.

Rispetto poi al conto nostro, io non manco di tenerne memoria, e spero nella Misericordia del Sig.e se mi dà vita quest'anno di metter in parri tutti li miei conti, e venire a casa con qualche Zecchino in saccoccia che basteranno fintanto che avrò ritrovato qualche occupazione per tirare avanti, e vivere comodamente.

Io ho reccapitato le Lettere del Ambasc.e di Venezia, del C°. Cardelli, del P. Ciroffi al Sig.r Capriata, ma nascostamente, perchè ho creduto bene così, e così penso senza additarne raggione di aver fatto molto bene: Dal med.° Sig. Capriata ho ricevuto molto favore: e molto mi sarebbe grato; anzi la prego grandemente presso li sud.i SS.ri farle li miei più distinti ringraziamenti, e se stimasse bene, fare tre Lettere di ringraziamento in mio nome, avrei molto piacere, perchè sarebbe di genio ancora del Sig.r Capriata; ma siccome non sapevo se ciò poteva essere benfatto, mentre essi mi favorirono per mezzo di V. Ecc.za, per tal ragione io rimetto il tutto nelle sue mani, solo bensì avrei piacere, che il Sig.r Capriata avesse notizia da sud.i Signori del mio gradimento, e conoscesse che io non ho trascurato di porgerli li miei ringraziamenti e additarle le cortesie che ho da Lui ricevute.

Ho ricevuto due sue Lettere per mezzo del Sig. Pastacaldi il quale mi accenna alcuni modi per rendere soddisfatto V. Ecc.za. In ciascuno de sud.i modi io penso non essere a proposito; solo li posso dire che a me può mancare la vita bensì, ma non l'animo di renderla soddisfatta, onde stia sicuro V. Ecc.za, che io altra mira non ho, e altro desiderio, che quello di mettere assieme la somma prestatatami (*sic*), e quella che già supongo già sborsata, doppo la mia partenza, come ella mi promise, e per cui io intrapresi il viaggio, che non avrei mai intrapreso se io non avevo messo in parri ogni mio creditore.

La prego ossequiare in mio nome Monsig.r suo Sig.r Fratello e riverire il Sig.r Abbate Sicca, Sig.r Abbate Baldelli, che io fratanto pieno d'ossequio immutabilmente qual sono mi dichiaro di V.ra Ecc.za

Algeri, 24 Aprile 1765.

P. S. La prego a non scrivermi se prima non le dò avviso ove farò la mia permanenza, perchè in Algeri certo mi giungerebbe.

Suo U.mo Ob.mo Servitore vero
Luigi Balugani.

Soprascritta:

a Sua Eccellenza
Il Sig.r Senat.e Conte Girolamo Ranuzzi
Roma.

Documento n. 31.

Eccellenza,

Resterà sorpreso V. Ecc.za se io scrivo di Rado (*sic*), ma l'assiduità del mio travaglio non mi permette d'avantaggio. Domani noi siamo di Partenza per Tripoli, e doppo per Benaza dove speriamo di ritrovare varie Fabriche più belle assai di quelle che noi abbiamo ritrovato fino ad ora. Questo solo giorno mi è stato concesso dal mio principale per lestire tutto il bisognevole, e dar sesto a' miei affari; nelli mesi passati, ho travagliato senza neppure il riposo delle Domeniche, onde lei vede che in ogni modo sono compatibile. Questo viaggio probabilmente sarà terminato a' Decembre, e saremo di ritorno in Tunisi dove faremmo (*sic*) alcuni mesi di Permanenza (*sic*), per dippoi portarsi (*sic*) in Italia dove probabilmente terminerò il mio Servizio col mio principale; rispetto a Nostri Conti in quel Tempo saranno accomodati perchè di qui non torna conto, ne a me ne al mio Principale.

Se io tengo Commodo procurerò di scrivere a monsignore ma nel caso mi mancasse il tempo supplico V. E. a farlo in mio nome li più ossequiosi complimenti; e a lei per fine bacciandole le mani pieno di obbligazioni qual sono inviolabilmente mi dichiaro

Di V. Ecc.za

Tunisi, li 4 Agosto 1766.

U.mo Dev.mo et Ob.mo Servitore
Luigi Balugani.

Marseille.

Sulla soprascritta:
a Sua Eccellenza
Il Sig. Senatore Co. Girolamo Ranuzzi
Ciambellano di Sua M. J. R. A.
Bologna.

Par adresse des Tres humbles serviteurs de Votre Excelle.nce J. L. Ployart et Comp. Marseille le 27 7bre 1766.

Documento n. 32.

Eccellenza,

L'honore che V. Ecc.za mi ha fatto di riguardare con tanto amore tanto me stesso come tutti di nostra casa mi stimola tutto giorno a desiderare di dargliene alcuno attestato di riconoscenza, almeno con inviarle i miei più ossequiosi ringraziamenti. Sarà insieme un mio honore ed

un opera assai meritoria se V. Ecc.za ci continua una tal Grazia, e se doppo il mio ritorno mi permetterà offrirli alcuna mia opera, assicurandola senza flattarmi che non sarà niente paragonabile a ciò, che facevo avanti il mio viaggio: riconoscendo il tutto dallo studio che ho fatto nel corso di questo viaggio, il quale posso assicurare V. Ecc.za, che mi ha profittato più, che tutto lo studio che per fino allora di mia partenza di Roma avevo fatto. E per questa raggione ancora mi cresce obbligazione a V. Ecc.za che con tanta bontà, ed incomodo, mi ha fatto l'honore di consigliarmi.

Io sono in Siria sopra un Viaggio con il mio Principale, per Balbek, e Palmira, ma prego l'Ecc.za V. a non fare moto (*sic*) con nessuno perchè il sud.o mi ha proibito di parlarne a veruno.

Restami solo di supplicarla nuovamente della sua Protezione, ed Assistenza a mia Famiglia, e desiderando l'honore di servirla passo costantemente a dichiararmi di V. E.

Seida, li 12 Luglio 1767.

U.mo Dev.mo ed Ob.mo Servitore
Luigi Balugani.

Fu asportato il foglio con la soprascritta.

Documento n. 33.

Eccellenza,

Dovendo anche per quest Anno esser privo del honore, di essere personalmente a compiere gl'Atti del mio dovuto ossequio, Specialmente nella Ventura Solennità del SS.mo Natale di Nostro Signore, mi prendo la Libertà d'inviarle questo Foglio affine di rinovare a V. Ecc.za la mia più umile Servitù, ed insieme per augurarle dal Sig.r Iddio tutte quelle Consolazioni e prosperità che saprà desiderare.

Spero che V. Ecc.za sarà persuaso di mia Sincerità, e riceverà questo in Contrassegno della memoria che io Conservo di tutte le grazie e favori che V. Ecc.za si è degnato di accordarmi, e de quali non tralascierò di riconoscermele perpetuamente obbligato.

Spero inoltre che sarà contento di sapere che abbiamo fatto il viaggio di Balbec e Palmira ne deserti della Siria, e che in oggi siamo giunti costà a Salvamento.

Il sudetto Viaggio si è fatto con grandissimo rischio di perdere la Vita; non per mancanza di precauzioni; ma bensì per mancanza di fede in quelle Persone, che li Comandamenti di questi Paesi avevano commesso la cura di difendersi.

Due volte fortunatamente per poche ore abbiamo evitato gl'Arabi che in grandissimo numero sono accampati in quelle Vicinanze, e che

vanno facendo Scorerie, e che nella Strada medesima hanno spogliato una Caravana, e preso più che cento Camelli carichi, e quantità di altri animali charici (*sic*) che andavano a Damasco, oltre la morte che hanno dato a varie persone che li volevano fare resistenza.

Ciò non ostante abbiamo avuto commodo in Palmira di fare nostre osservazioni ed ora che siamo ritornati si troviamo assai contenti.

Devo ben supplicare V. Ecc.za a non farne parola con alcuno, perchè il mio Principale me lo ha difeso, ma con Lei ho creduto mio debito di parteciparlo.

Presentemente il mio Principale è in Strada per portarsi in Alepo, ma in meno di un mese io spero che sarà qui di ritorno. Doppo di che Se vi è occasione, mi farò l'honore di informarla del nostro viaggio, il quale credo sarà alquanto differente da quello che nell'ultima mia Lettera ho avuto l'honore di Significarli.

Presentemente mi resta di Supplicarla a Continuarmi la Grazia di Sua Protezione e ansioso di baciarle la Mano Inviolabilmente mi protesto di V. Ecc.za.

Seida, li 13 Novbre 1767.

P. S. Se V. Ecc.zi mi fa l'honore di scrivermi la prego raccomandare le Lettere al Sig.r Pietro Remedelli Console di Ragusa in Smirne, oppure a Monsieur Peisonnel Console di Francia in detta Città di Smirne

U.mo Dev.mo Ob.mo Servitore
Luigi Balugani.

Ricevuta li 18 aprile 1768.

A Sua Eccellenza Marseille
Il Sig.r Senatore Conte Girolamo Ranuzzi
Bologna.

Soprascritta su un foglio nel quale è compiegata a guisa di busta
25 agosto (data di avviso a Bologna).

Documento n. 34.

Eccellenza,

Benchè sia poco tempo che io mi sono fatto l'honore d'inviare i miei ossequi a V Ecc.za; mi prendo la libertà di indirizzarli questa nuovamente per assicurarla della memoria che tengo tutto giorno delle obbligazioni che li professo. E quantunque siano più che due Anni che non ho ricevuto alcuna Lettera di Italia, e per conseguenza privo ancora dell'honore di sapere qualche nuova di V. Ecc.za; spero non ostante che starà sempre bene, e non manco ogni giorno più degnamente che posso di porgere li miei Voti all'Altissimo pregandolo di prosperarla e colmarla di tutte le felicità che Saprà desiderare.

Noi siamo qui attendendo un Bastimento per farci portare in Alessandria d'Egitto, dove poi a Dio piacendo faremo un viaggio di qualche mesi, dopo delquale ritornaremo nella Caramania per fare il viaggio che in altra mia mi sono dato l'honore di divisarle.

Per ora non mi resta che di Supplicarla continuarmi l'honore di sua Validissima protezione, e ansioso di ricevere qualche suo Comando costantemente mi dico

Di V. Ecc.za

Seida, li 25 Aprile 1768.

U.mo Dev.mo ed Ob.mo Servitore
Luigi Balugani.

Senza soprascritta.

Documento n. 35.

Eccellenza,

Eccomi a profittare di questa occasione per rinovare gli atti del mio ossequiosissimo rispetto con V.ra Ecc.za e nel medesimo tempo per darle avviso che ho spedito una cambiale a mio Fratello su la quale vi sarà per intieramente Soddisfarla non tanto dell'imprestito che ebbe la Bontà di farmi in Roma avanti il mio dipartito per Algeri, ma di più della Somma che supongo Lei avrà sborsato pagando li miei Creditori in Bologna, come mi aveva benignamente promesso. In Verità ! che se V. Ecc.za non aveva così caritatevolmente operato verso di me specialmente assumendosi l'impegno di soddisfare li miei Creditori, io avrei sofferto nel mio viaggio la massima confusione possibile.

Supongo che Sarà stato estremamente sorpreso, che io abbi dilazionato fino a questo tempo a fare quello che avrei potuto fare due Anni sono come mi ero impegnato: ma spero altresì che sua sorpresa cesserà allorchè io li dico sinceramente che più volte ho pensato di farlo ma l'esser privo di Lettere di Italia me ne ha tratenuto.

Già mancava poco tempo al compimento di tre anni quando finalmente il giorno 13 di Giugno in Seyda mi vidi arrivare una Lettera di mio Fratello che mi riempì di Consolazione.

Più che Trenta Lettere io ho scritto alla Casa mia e per quante mio Fratello me ne enuncia io vedo che sono quasi tutte perdute. Con eguale proporzione ho scritto a V Ecc.za, a Monsignore, e molt altri (*sic*) miei Padroni senza che mai io possi avere il vantaggio di riceverne il riscontro.

Forse che la perdita di mie Lettere avrà dato occasione a V. Ecc.za di credermi un indiscreto, ed incapace di quella riconoscenza che per tanti titoli io li devo: Siccome però la colpa è involontaria spero che sarà disposto ad accordarmi un benigno perdono.

Presentemente ci troviamo nel Cairo dappoi il giorno 29 dello scaduto: Mi domanderà V. Ecc.za io suppongo per qual ragione ho tardato fino a questo giorno di fare gli atti del mio dovere, per cui altro non posso dire se non che doppo la Lettera di mio Fratello ricevuta in Seida, era mia intenzione di rispondere immediatamente, ma siccome si doveva finire molte cose avanti di intraprendere il presente viaggio in Egitto mi è stato totalmente impossibile.

In queste parti dell'Egitto cioè Alexandria, Rossetto Damiata e Cairo e villaggi circonvicini hanno sofferto assai della Peste, ma per la Dio Grazia al nostro arrivo in Alexandria già tutta era finita, e le Nazioni Franche, cioè Europee già avevano aperto le Loro Case e comunicavano con le Persone del Paese senza il minimo rischio di essere Pestiferate. Il zelo delli due Padri Curati, cioè quello di Alexandria e quello del Cairo, è stato un poco troppo ardente poichè sono stati attaccati di Peste, e in tre o quattro giorni sono passati all'altro Mondo. Fra gl'altri europei atteso loro precauzioni non vi è stato alcuno attaccato di Peste, alla riserva de' poveri Marinari che si trovavano in Alexandria, che attesa la communicazione che hanno con Turchi sopra li Bastimenti, alcun di loro à dovuto perdere miserabilmente la vita.

Noi se piace a Dio faremo un piccolo Viaggio in queste Parti e in Pochi mesi riprenderemmo (sic) nostra rotta alla volta per la Siria, Caramania, Morea, e Italia.

Piaccia a Dio che questo non sia Lontano, e che mi venghi accordato personalmente l'honore che io aspiro di bacciare le mani a V. Ecc.za, e ringraziarla vivamente di tutta la Bontà, e dell'Amore con cui ha riguardato Nostra Famiglia, e nel med.o tempo offerirli quei Servigi di cui mi trovarò capace, e suplicandola intanto continuarmi l'honore di Sua Grazia ossequiosamente mi dico

Di V. Ecc.za

Dal Cairo, lì 16 Agosto 1768.

Um.mo Dev.mo. ed Obb.mo Servitore
Luigi Balugani.

in testa al Foglio sta la scritta:

Ricevuta in Bol.a per la via di Livorno lì 22 agto 1770.

Esternamente:

16 Agosto 1768 Senza soprascritta.

LETTERE RELATIVE AL SOGGIORNO DI JAMES BRUCE ALLA PORRETTA

Documento n. 36.

Dal Sasso 31 Agosto 1773.

(Autografa).

Monsieur,

Son qui per accidente giachè sabato torno a Bologna dove aspetto dei forestieri in casa mia ad alloggio.

Sento le sue previdenze prese, e l'ordine dato a famigli per il Pane, ella fà bene a aver l'occhio, ma però l'abbia con discretezza, perchè se giungesse all'orecchie della Legazione, che si caturano quelli che dalla Legazione comprano pane costà, questa sarebbe una cosa da far sì che forse li sarebbero negate le tratte de' grani, che già pensato ho di far provvedere per codesti miei sudditi.

Ella dice bene rispetto al Canevaro, e Cuoco ma per un solo cioè per il Sig.r Gumer, che abbiano a star anche costà li suoi 2 uomini per poca carità del Gumer med.o basta giacchè alli 8 entrante finisce il sud.o le sue bagnatture fino a quel tempo bisognerà, che lasci costà li sud.i Cuoco e Canevaro. Delli libri da lei dispensati, mi dica quanti gliene dovrò mandare nell'entrante 7mana: che glieli manderò, e per fine al solito sono:

aff.mo per Ser.la
G. Ranuzzi.

P. S. Domattina partono da qui li attrezzi del Teatro e dica a Pasquini, che mandi due para bovi incontro M.ro Lodovico fino a Riola.

P. S. Mi scordavo dirle che il Marc. Lucrezio mi ha detto 50 volte, che gli ricordi la restituzione de' Protocolli, la prego fare in modo che egli si quieti perchè non mi lascia vivere su ciò tutte le volte che lo vedo.

Soprascritta

A Monsieur
Monsieur le Docteur Pagliarini
Governeur de La
Porretta

Da un lato:

1773
Sig. Sen.e Ranuzzi
3 7bre risposto
12 Sett. sabato

Documento n. 37.

(Amanuense).

M.ro Ill.re ed Ecc.te Sig.r Oss.mo – Verrà costà il Sig. Sanguinetti negoziante di Modena, per accomodare varj suoi conti, che ha in codesto luogo tanto col *Bartoli*, come col *Lelli* ed *altri*, e per esigere il suo danaro, se sarà possibile, contro alle persone di mia piena Giurisd.e, farà le cose con vigore di Giustizia, e contro le altre interporrà la sua autorevole mediazione, affinchè il Sanguinetti resti almeno cautellato nel suo interesse, premendomi assai, ch'egli risenta qualche vantaggio dalle mie premure, e del di Lei impegno; onde mi lusingo, ch'ella non lascierà di assisterlo colla possibile attenzione e attività.

Desidero sapere, se un certo Biagi di Contea sia possidente per poter fare una sigurtà per 35 Zecchini Romani C.co, cosa, che brama sapere il S.r Senatore Marsigli con tutta verità.

Nella ventura settimana verrà alli Bagni, alloggiato nel mio Casino dove sono li Bagni un signore Inglese non Cattolico. Scrivo al Lorenzini perchè prepari il bisognevole; onde mi raccomando a V. S. che d. Inglese sia servito a dovere, mentre per quello riguarda all'appartamento e alla Tavola, non potendosi parlare di Tariffa perchè il trattamento sarebbe troppo scarso, ho scritto al Lorenzini come contenersi. Del rimanente ella procuri tenerli compagnia, e di farlo assistere dal Medico, giachè credo non abbia bisogno che di acquistare colle docciature la forza in un braccio scavezzo, e nell'altro già un tempo fa ferito da una freccia dai Mori, con li quali si è trovato più volte alla Battaglia in Affrica, ed in Etiopia: Ella parli alli Bartoli per avere in prestito una spinetta accordata, che farà trovare nell'appartamento dell'Inglese al suo arrivo; perchè possa divertirsi sonando, locchè preme infinitamente.

Dietro alla sua delli 5 andante mi occorre dirli, che si ponno fare le note Catture (*sic*) a chi ritrae prodigiosa quantità di pane, faccendole nel modo divisato; ma abbia riflesso ancora che la frequenza delle medesime, non vaddi a pregiudicare alla concorrenza del mercato, senza l'affluenza del quale, codesto Paese sarebbe povero, e spopolato; e però si regoli con prudenza, che sì in lei risiede abbondantemente. Quanto al Forno del Pane Bianco, finchè non è fatta la necessaria provvisione per tutto l'anno il come prevent.e sono attorno a fare, dovrà essere soggetto alla Legge degli altri Forni, sempre però con gli anzidetti riflessi, massimo se l'estrazione del Pane Bianco, non fosse in quantità vistosa, e che dasse nell'occhio al Paese.

Circa al Teatro farà subito murare dei legni per una seconda ringhiera, che venga al pari dell'altro palco sopra al mio, e li legni dovranno essere della lunghezza, e divisione, che sono quelli della prima ringhiera

e si servirà di quelli, che sono sotto alla loggia del Mulino. Nel partere, o sia platea farà fare il battuto in Calcina, e ghiara secondo il Livello del Fassani, e sento che a quest'ora sarà cominciato. Farà murare le quattro finestre vecchie della facciata, e farà stabilire la facciata stessa come disse il Fassani.

Sotto al palco del Teatro, cioè sotto al Luogo ove si deve recitare, comminciando dall'Imboccatura sino al Muro del Rio, farà scavare per due piedi di Terra circa, in modo che il battuto rimanga alto più di d.i due piedi, dal piano; che sarà sotto al Teatro, e la Terra, si ponga nel Rio, in modo, che non faccia chiusa, e non impedisca il corso dell'acqua.

Termini le due Finestre che guardano nel Rio, ponendovi i suoi sereri, però per di fuori, lasciandovi il gargame per di dentro, nel caso, che si volesse ponervi la vitriata.

Faccia finire il luogo de Sbirri, come ordinò il Fassani al Parietti, e pel rimanente si compierà al mio arrivo, che spero senza meno seguirà alla fine del presente, come l'avviserò alcuni giorni avanti, Locchè farà sapere ancora al Cap.no Sabbatini per sua regola, a cui aggiugnerà che le 80 Braccie della Cordella per le Coccarde sarà al Bagno nella prossima settimana.

Abbia presente le premure del S.re M.se Lucrezio Pepoli per li noti Istrumenti, siccome anche il mio credito di Castiglione ceduto dal Lelli: E con piena stima mi confermo.

Bologna, 8 Sett. 1773.

P. S. Al tempo che verrò costà vorrei, che fossero pronte due, o tre Commedie, da recitarsi nel Teatro nuovo [aggiunta autografa] e se per divertire l'Inglese si potesse far delle Commedie sarebbe molto bene.

Af.mo per Ser.la
Girolamo Ranuzzi (autografo).

I.tre Gov.re /Porr//:

Soprascritta dell'amanuense:

Al M.to Ill.re ed Ec.te Sig.re On.mo
Il Sig.re Dott.re Giuseppe Pagliarini
Gov.re alla Porretta

Lateralmente:

1773
Sig. Sen.re Ranuzzi
22 7bre risposta

Documento n. 38.

12 Sett.

Eccellenza,

Qui comparendo il Sanguinetti non avrà luogo a dolersi della pronta giustizia ad essi dovuta.

Altramenti non è vero, ch'el ricercato Biaggi sia suddito; non so per altro per qual motivo tanti montanari circonvicini si fanno credere, e si decantano per conteani.

Se ho cercato a qualunque Concorrente a queste Terme di farle tutte le maggiori pollizie, ed attenzioni, com'è noto a tutti, con ciò dunque potrà l'Ec.za V. essere persuaso che tanto più lo farò nella persona dell'Inglese, sopra cui sento le premure di V. Ec.za

Sopra quanto mi cenna per i lavori del Teatro, può accertarsi ch'io non ometterò tutta l'opera e l'attenzione mia, a finchè adempite siano le brame di V. E.

In quattro differenti Commedie già fatte si è avuto una perdita di L. 3 : 7 : ho creduto ben fatto di permettere le recite delle med.me col fine di tener in esercizio gli Attori, essendosi ultimamente rappresentato l'Amor finto, e l'Amor vero, ed in adesso ne stanno studiando una nuova.

Ciò è quanto in piena esecuzione per contestarmi quale con profondissimo ossequio sono

D. V. E.

Porretta, 12. 7bre 1773.

Um.mo Div.mo Fedel.mo Serv
Giuseppe Pagliarini Governatore

Senza soprascritta.

Documento n. 39.

(Amanuense).

Sig.re Gov.re Stimat.mo,

Trasferendosi a codesti Bagni, il noto Cav.re Inglese, è un oggetto di mia premura, ch'ella non manchi di prestargli ogni sua assistenza, affinchè sia servita a dovere, ed a norma degli ordini dati, premendomi moltissimo, che non gli riesca rincrescevole il soggiorno, che farà costà, onde procurerà; che sia ricevuto in ogni luogo con distinzione, e pregherà il S.re Dott.re Bartoli, che li permetta parimenti di far la Conoscenza della Sposa Bartoli, assicurandolo essere un Cav.re pieno di distinto merito, e grato alle attenzioni, che verso lui si praticano. Credo, che resterà al

Bagno quindici giorni circa, sicchè è ben naturale, che ella debba impegnarsi, perchè egli resta contento del soggiorno, e pago delle compagnie, ch'ella saprà procurargli. Riposo dunque nella sua attenzione su ciò, e colla solita sincera stima mi rinovo.

Di Lei S.r Gov.re River.mo

Bologna, 17 7bre 1773.

Aff.mo per Ser.la
GIROLAMO RANUZZI (autografo).

Soprascritta autografa del conte Ranuzzi.
a Monsieur
Monsieur le Docteur Pagliarini
Gouverneur de la
Porretta
Da un lato:
1773
Sig.r Sen.re Ranuzzi
19. 7bre risposta

Documento n. 40.

M.to Ill.re ed Ecc.mo Sig.re Os.mo,

In replica ad ultima sua 12 andante puoco ho da dirle, se non che essere costà domani il noto Inglese, mi raccomando di nuovo, che sia ben servito nei Bagni, nei Casini, ed al Medico, e che vostra S. gli procuri compagnia conducendolo anche dalla Sposa Bartoli.

Verrà domani parimenti mastro Lodovico, con altri due operarj destinati a finire il Teatro, e però si preparino Commedie, e per maggior commodo, finito il Teatro, si trasporteranno gli abiti nell'appartamento del custode.

Aspetto qui dei Forastieri se poi verrò costà ancor io con buona comittiva, e credo, che ciò seguirà alla fine del presente, come sarà avvisata; E colla consueta stima mi rinnovo

Di V. S. M.to Ill.re ed Ec.e

Bol.a, 15 7bre 1773.

Aff.mo per Ser.la
GIROLAMO RANUZZI.

Soprascritta: Al M.to Ill.re ed Ecc.te S. Os.mo
Il Sig.re Dott.re Gius.e Pagliarini Gov.re alla Porretta
Di lato:
1773
Sig. Sen.re Ranuzzi/
19. 7bre risposto

Documento n. 41.

17 Sett.e R. 18. d.

Eccellenza,

Io arrivai ieri alli bagni della Poretta ma oggi stato tanto Incommodato del Gran Freddo che non ho arrischiato de prendere li bagni domani Io spero di cominciare.

Questo Philippo Balugani riservo appresso da Lui uno Libretto di disegni miei di figurine priego V. Ecc.za che ne le fa rendere per darli al Pittor Signor Manfredi chi navra (*sic*) della bisogna Supplico V. S. che presenti li miei più ossequiosi rispetti alla sua Ecc.za la Sig.ra Contessa e Baciando le mani mi Rassegno de V. Ecc.

Bagni 17 Sett.re 1773.

Il Umillissimo Obbedientm Servo
James Bruce.

D'altra mano.
a Monsieur
Mons. Jaques Bruce
Chevalier Anglois
Porrette.

Senza soprascritta.

Documento n. 42.

18 Sett. R. 22. d.

Eccellenza,

Contento si trova il Cavaglier Inglese del suo Soggiorno quale mi favorisce a ber il caffè: Condotto a Casa Bartoli, siccome Egli usa meco qualche atto confidenziale, così parlando della Sposa, e di sua Sorella, mi ha detto essere due scioccarelle. Ho capito, che è un Soggetto che sa star in piedi, che a primo incontro distingue e sà conoscer tutto. Provo tutto il mio piacere e mi glorio della sua compagnia, ne credo ingannarmi, se dico della mia mostrarsi contento, ed aggradevole.

È qui arrivato Mro Lodovico, ed avendomi mostrato una Nota di alcune cose ordinate, e da V. Ec.za volute riguardanti i lavori del nuovo Teatro, così non ommetterassi da me tutta la possibile attenzione mandati siano alla sua piena esecuzione ed osservanza, a fine di vie più sappermi gloriare d'essere con profondissimo ossequio.

D. V. E.

Porretta, 18 7bre: 1773.

Umil.o Div.mo Fedel.m Ser.e
Giuseppe Pagliarini Govern.

Senza soprascritta.

Documento n. 43.

19 Sett. R. 22 d.

Monseigneur

Non respondebis stulto secundum stultitiam suam ne fias ei similis dit Solomon et pour ceste raison je me despence de repondere a la lettre que Sig.r Balugani m'ecrit il a lu et relu sa lettre il dit quantité des fois et il ny a trouvé rien de mal et moy qui nai que lu une fois je lui trouvée tres offensante.

Je prie pourtant V. Exc. de luy oter de sa tete deux erreurs la premiere est qu'il a un Heritage a cerevoir de son frere La seconde que jai en un contrat avec Luy je nen ai pas jamais eu avec luy ni avec quelque autre a mon service dautre contrat que ma parole et leur merite de lautre coté Filippe Balugani na pas aucune obligation de faire faire pour moy aucune dessein ou autre ouvrage. Ni in Valida probante forma ni in Altra.

Jai une somme fruct de mes liberalitees a son frere qui est sequestrée entre mes mains pour une certaine fin consideration pour la famille supposant de les trouver dignes ma fait assez legerement entreprendere ce Voyage a Bologna dans lesperance qu'eux pouroient maider de Epargnier quelque chose qui devoit revenir a Eux pour contribuer mieux encore a ce fin je faisois faire deux tiers de louvrage par Manfredi a mes fraix et depens ils se sont revolté contre moy pour avoir agì si genereusement envers eux en distribuant de celle maniere les desseins je voulois epargner du temps pour moy et de largent pour eux ils ne mont permis de faire L'une et je ne veux plus faire l'autre.

Je ne veux pas attendre que Zampa acheve cette ouvrage qu il a Commencé et sil ne se rend pas Mercredì le Soir a son travail je naurai rien plus a faire avec luy je ferai payer Manfredi de largent entre mes mains et mes desseins seront faites a Venise ou a Rome ou en Angleterre meme a Loisir je ne puis pas attendre Jai des affaires ailleurs et si ça ne tourne pas a conte a Balugani il na a se plaindre que de Soy meme Jai eté tres Incommodé de puis que jai eté ici au Bains et Je nai pas baigné que par deux fois je trouve pourtant mon Genou beaucoup mieus mon bras a peu a pres comme auparavant.

Je vous prie Monsigneur de vouloir demander pour moy de Segn.r Ferdinando Bassi un morceau des plus beaux de pierre Bolognoise de cette Espece dont on fait le Phosphore et Ie serai charmé sil put me donner aussi quelques coquillage petrifices de ces Especes que se trouvent ici au Voisinage de Bologne.

Je rend Grace a Votre Ex.ce pour toutes ses bontes et en priant mes tres humbles respects a Madame la Contesse

Hai l'honneur detre

Monsegneur

Porretta, 19 Sett.re 1773.

Votre tres Humble
tres Obeissant Serviteur
James Bruce.

Senza soprascritta.

Documento n. 44.

19 Sett. r. 22. d.

Eccellenza Padrone.

Per ordine di questo: S. Milord spedj il Corriere per espresso con chiave, e lettera al S.r Landi con la raccomandaz.e al Ecc.za V.a. acciò fosse consegnato al Corriere un abito per che essendo staggione freda, ed esso Sig.re si trova con qualche incomodo prodotoli dal fredo obbligato al letto; ed essendo ritornato il Corriere senza l'abito molto gli è dispiaciuto e non intende di voler pagare l'Omo per non aver eseguito quel tanto per cui è stato spedito, si è procurato di quietarlo con dirli che il S.r Landi è in campagna, questa ragione non lo persuade, dice se esso è in campagna la sua roba è nel negozio ed essendovi ministro dal quale si può avere quello che esso desidera. Il S.r Governatore, gl'à imprestato un sopratodes, e non manca di farli compagnia, il simile, il S.r Dott.r Neri, ed altri SS.ri; però mi raccomando all'Ecc.za V.a di procurare che venghi con la maggior sollecitudine le robe che esso S.r aveva mandato a prendere. Martedì sera sarà al Sasso li due cavalli da sella per il Macchinista e l'alloggio si darà nel Casino del Leone; il Pallazino di Ecc.za V.ta è tutto per comodo di questo S.r Inglese e non avendo altro da Significarli resto di farli Um.sa Riverenza.

Dell'Ecc.za V.ra

Poretta, li 19 Sette.re 1773.

Uml.so Dev.smo Oblig.smo Sev.re
Pietro Lorenzini.

Senza soprascritta.

Documento n. 45.

M.to Ill.re ed Ecc.e S.r Oss.mo,

Dalla sua 18 andante intendo con piace (*sic*), che il noto Soggetto Inglese sia contento del soggiorno che fa costà, onde sempre più lo raccomando a V. S. perchè sia servito del bisognevole, affinchè a suo tempo parta soddisfatto, e rechi altrove buon nome di codesti Bagni.

Procurerà dunque, che sieno fatti a dovere li Lavori ordinati pel Teatro, per compiere il quale, sarà costà un bravo Professore dimani per intendersela col Mastro Lodovico.

Mi dia nuove, come si sta a grano, e se crede, che la provigione occorrente non possa mancare per tutto l'anno 1773; dovendo io prender regola sopra questo particolare.

Ho preparata a una cassa con varj attrezzi per il Teatro, e che si manderà quanto prima, essendo serrata a chiave, e legata con corde. Ora le mando la chiave nella Bolgetta, e lascerà tal quale La cassa, fino al mio arrivo al Bagno.

Ho anche in Pronto le Bandiere, il Tamburo ecc. per la Milizia, cose tutte che si manderanno costì per Vetturali io per altra occasione al S.r Cap.no.

Non ho che aggiungere, e con ciò mi rinnovo.

Bologna, 22 7ett.re 1773.

P. S. Si ricordi provvedermi il Vino di Toscana già ordinato.

Aff.mo per Ser.la
G. Ranuzzi.

S.r Gov.re/ Porr.a//
Soprascritta:
Al Molto Ill.re ed Ecc.e S.r Oss.mo
Il Sig.r Dtt.r Gius.e Pagliarini
Gov.e alla Porretta
Di lato:
1773
Sig.r Sen.re Ranuzzi
26. 7bre risposto

Documento n. 46.

24 Sett. r. 28. d.

Bagni della Porretta 24 Sett.re 1773.

Eccellenza,

Ha stato con summo piacere che Io ricevo il suo Riverito Foglio nel tempo ch'ho creduto V. E. in Modena.

Sarebbe stato assai al Vantaggio del Balugani di non aver mai Uscite delli sentimenti in quali V. E. dice che esso se trova oggi V. E. deve infallibilmente reflettere che Si Io non avesse intenzione de farli del bene non cera Necessità de portarmi in Bologna. Io potevo applicare quelli dinari all'Uso destinato senza aver de Luy ricercato avviso in Ajuto.

Il mio pensiero era che nel tempo che Io fosse alli Bagni Zampa poteva terminare li pochi piccoli disegni che restavano Io avro trovato

miei disegni terminati al mio ritorno et mi Stesso in Liberta de proseguire miei altri Viaggi. Il tempo destinato a tal fine viene dessere passato da Esso Sg. Zampa in deliri et stravaganze hanno perso doppia fatica Loro et reso impossibile a me de servirmi de Essi poiche Io ho de partire per Venezia senza che Io posso più rattenermi a Bologna Luogo per mi incommodo et de poco piacere.

Io non posso Lasciare a Miei disegni indietro da me et meno nel Simili mani che in altre poiche Io ho veduto loro disposizione et Io sono in nessuna maniera convinto de Loro onoratezza ni non saro mai a Segno di fidarli dove Io non sono dopo questo che m'è arrivato Io in tutto desidero de Compiacere a questo che V. E. trova bene et Ragionevole ma Loro folie son la causa che Io mi trovo ubbligato a Scegliere de due cose una o de Lasciare miei disegni ove io non sono o de Abbandonare miei Altre premure et restare con Sig.ri Zampa et Balugani fin che Vedo si loro sono disposti de continuare o a operare o pure de tralasciare de Nuovo per qualche altro deliberamento.

Io ho l'onore d'informare V. Ecc.za chio Me trovo tanto bene et del Ginocchio et del braccio ch'Io credo in pochi altri bagnature dessere perfettamente guarito Io penso che andare fin a Pistoia a cavallo Lunedì ordinare qualche fucili domani cioè Venerdì in otto spero dessere in Bologna ed Assicuro V. E. che li Bagni della Porretta avranno in me un defensore forse più utile et estremo che V. E. non pensa. In tanto prego il Sig.r Marchese Giraldini (Gherardini) si cè altro Riccardo o qualche sia tyranno a combattere che me mette me del Partito perche Io son Grazia a Iddio li Bagni della Porretta et Lamicizia del V. E. assai forte per tal impegno sia a piedi sia a Cavallo.

E possibile che Io essendo a Pistoia faccio una Scappata a Firenza ma solo a desinare con il Nostro Ambasciatore. Io saro Martidì Sera a Porretta di nuovo.

Supplico V. E. di far Gradevoli a S. E. La Sig.rà Contessa i miei Umilissimi rispetti et mi Rassegno

De V. Eccellenza
Il Umilissimo et Devotissimo Servo
James Bruce.

P. S. La Lettera che V. E. me mando era de Pietro Manzoni de Venezia ha ricevuto un ferito nelli piedi et e tornato da na villeggiatura Io credo a qualche bagni senza aver ricevuto nessun profitto dimanda da me come mi hanno trattato li bagni della Porretta et Io ho fatto un Elogio magnifico de Loro invitando Lo de venire qui alla Porretta Credo però che sara de buon uso si V. E. fa al Vostro Sig.r Secretario scrivere due Righe mandando la mia lettera in chiusa et de dirli che sentendo da me chio molto compatisca la sua Maladia si Esso trova che

le Aque de Poretta possono giovare che la Casa de V. E. e a sua disposizione Io so che non Venerá mai ma come V. Ecc.za ha altri affare et altri bisogni a Venezia vedra V. E. nel seguito che occorrendo occasione de servirvi questa finezza non sara Gettata perche Vi Assicuro a V. E. Cosa nelle fabbriche ne Magistrato non se fa senza suo parere ch'Io so d'avere Stato et d'Essere ancora del più gran peso in tanto V. E. fara come Lei sa riflettendo ch'io non posso in questo Consiglio aver altro motivo che di promuovere il suo Vantaggio come Luy proprio a dirizzato La mia Lettera alle Mani di V. E. la scusa sara il mio desiderio che mia Lettera vada sicuramente alli Mani Sui et dopo il offerto della Casa a Poretta può essere fatto in pochi paroli come passando.

Senza soprascritta.

Documento n. 47.

M.to Ill.re et Ecc.te S.r Oss.mo,

Prima di rispondere sopra il Vino di Toscana Spiacemi sentire dalla sua 26 cadente essere ella attaccata da un puoco di Febbre, e sarà perciò necessario che ella si abbia riguardo, per potersi presto ristabilire, come le auguro di vero cuore.

Anche il Cav.re Inglese mi assicura della sua tottale guarigione, cosa per me assai consolante, mentre avremmo à Londra un oratore delle Terme Porrettane. Egli parte presto, onde mi raccomando bene, se ella può, d'invigilare, che sino all'ultimo sia ben servito, anche ne Cavalli, e nella portantina caso la prendesse.

Sento dal Nanni che il Teatro riesce bene. Ella facci, che non si perda tempo nel Lavoro, e sieno eseguiti gli ordini Lasciati dal Nanni, il quale tornerà costà nella ventura Settimana probabilmente.

Dal Lorenzini si faccia istruire degli ordini a lui dati toccanti la mia venuta ed esservi dopo, se viene eseguita l'istruzione che in inscritto gli ho inviata.

Della provvigione del grano, ne parleremo in persona.

All'occasione che codesti Soldati saranno in motto, dia al Bargello gli ordini necessari perchè non accadesse verun inconveniente, ed assegni agli Sbirri una sola Osteria; ove non dovranno andare li soldati, per evitare ogni incontro critico, oppure ordini agli Sbirri, di starsene dentro al Loro quartiere.

Non ho avuto li 4 modelli delle Scranne, e però faccia ricerca del Vetturale affinchè me li porti, mentre gli attendo con premura, sento la ricevuta delle ultime robe del Teatro, e chiodi mandati, e mi suppongo ancora,

ch'ella avrà presa nota dei primi, che mandai al Lorenzini, e che scrissi, che fossero consegnati al Fasani.

Per ora non ho, che aggiugnere, e però finisco con rinnovarmi secondo il solito, e con verace stima.

Bol.a, li 28 Sett. 1773.

Ill. Gov.re/ Porr.//

Aff. per Ser.la
Girolamo Ranuzzi.

Soprascritta:
Al M.to Ill.re ed Ecc.e S.e Oss.mo
Il Sig.r Dott.re Giuseppe Orsoni
Gov.re alla Porretta
Di lato:
1773
Sig. Sen. Ranuzzi
3. 8bre risposto

Documento n. 48.

3. 8bre r. 6. d.

Eccellenza,

Il vino di Toscana da pasteggiare, anche da me in persona cercato in Pistoia egli è puoco buono, ed assai caro, a motivo d'essere stata scarsa non solo la Raccolta passata, ma per essersi in moltissima quantità guastato, cosicchè qui condotto verrebbe a costare nommeno di S. 17 in 28 il fiasco, onde non ho avuto coragio di provvederlo, il che ad ogni ordine con brevità di tempo posso fare.

La Lettera pervenutami da recare al Cavaglier Inglese (che qui penso sicuramente arrivato), la rimetto al fine del suo destino.

Anche con il detto Cavagliere il Coco si è reso disgustato, e per fine poi il Lorenzini, a cui villanamente ha voluto restituire un Zecchino, che qui compiego, non essendomi potuto riescire, dopo un lungo contraditorio, persuadere il d.o Coco, perchè, o non intende, o non vuol sentire ragione.

Si fa onninam. quanto si può nel lavoro del Teatro, e parmi, ch'l tutto cammini ad dovere.

Il Bargello sa star in piedi, onde in qualunque occasione del Militare in mossa penso non sia per accadere verun Inconveniente.

Penso pur anche pervenuti li quattro Modelli delle Scranne, che furono posti nel Stallatico de due Gamberi; tanto m'assecura il Vetturale Groncarella premuroso di servire V. E.

Le Commissioni avanzate al Lorenzini saranno pienam. eseguite; bramo pure l'istesso effetto nella provvista delle Scelle per i Cavalli ordinati per servizio di V. E. solito Imbroglio di ogn'anno al tempo de'

Cavalli ch'abbisognano per i Bevilacqua, perchè chi ha cavalli da noleggiare, in maggior parte non hanno le Scelle.

Il Romagnoli, che obligò a V. E. li cavalli non ha, che cinque Scelle: Ne ho ritrovato qualch'una, ma dispero di trovare quanto occorre a fine imperfette non restino le brame di V. E. a cui con profondissimo ossequio Sono

Di V. E.

Poretta, 3. 8bre. 1773.

Umil.mo Div.mo Fedl.mo Servitore
GIUSEPPE PAGLIARINI Governatore.

Senza soprascritta.

Documento n. 49.

ALBERO GENEALOGICO DELLA FAMIGLIA BALUGANI DI GIOVANNI NEGRONI

(Biblioteca Comunale di Bologna)

Domenico Balugani

Luca Balugani

Filippo	Luigi
Accademico Clementino dell'Istituto delle Scienze e delle Belle Arti; Maestro de' Conj della Pubblica Zecca di Bologna; nato il 2 agosto 1734, coniugato con Geltrude Dalbuono o Dal Bono (abitante a S. Tommaso del Mercato)	nato il 14 gennaio 1737 morto a Gondar il 3 maggio 1771 di 34 anni

Luigia	Luca	Eleonora
nata il 1° dicembre 1775 (abitante a S. Lorenzo di P. Stiera), coniugata con Gallina Luigi Giuseppe nato a Chieri di Ignazio il 31 marzo 1768. Possedeva la casa n. 819 nel Borgheto di S. Francesco ora Piazza De Marchi 4; poi passarono ad abitare in via S. Felice 50 (ora 40), indi in via Pratello 1054 (ora 45). Nel 1820 abbandonarono Bologna senza più ritornarvi.	nato il 5 novembre 1777 (S. Lorenzo P. S.)	nata il 9 aprile 1780 (S. Lorenzo P. S.)

Luca	Filippo	Carolina	Domenico
nato il 23 settembre 1803	nato il 26 settembre 1805	nata il 1810 o il 1811	nato il 4 agosto 1814

Eccellenza

Dovendo anche per qualche tempo esser privo dell'Onore di venire personalmente, a prestare a Vostra gl'atti del mio dovuto ossequio, mi prendo l'ardire di inviarle questo Foglio affine di rinnovarglieli con la più profonda umiltà che io posso, ringraziando Dola sempre di tutte le grazie, e bontà che si è degnato usarè verso di me senza merito veruno. Per le quale prego il Signore Iddio a Vargliene dal Cielo la più larga ricompensa.

Presentemente mi ritrovo in Seida di ritorno d'un penosissimo Viaggio, che abbiamo fatto nel deserto della Siria, ma che per grazia del Signore ne siamo riusciti a Salvamento.

Supplico Vostra perdonarmi l'incomodo che li reco, e supplicandola intieme dell'honore di sua validissima protezione passo inviolabilmente a dichiararmi

Di Vostra

Seida li 13 Xbre 1767

Umo Devmo ed Obbmo Servitore
Luigi Baliganes

17. Sbre

V. 18.9.

Eccellenza

Io arrivai ieri alli Bagni della Porretta ma oggi stato tanto incommodato dal gran freddo che non ho arischiato de prendere li bagni domani Io spero de commenciare

Questo Philippo Balugano riserbo appresso di Lui un Libretto di disegni antichi di figurine prego V.E. che me le fa rendere per darle a Pittori Sig.r Manfredi che marca della bisogna supplico V.S. che presentie di mia parte ossequiosi rispetti alla Sua E.za La sig.ra Contessa Lucrezia Bacciardo e mani un Bassigno da V.E.

A Monsieur
Mon.r Jaques Bruce
Chevalier Anglois
Porretta

Bagni 17 Sbre 1773
di Vostra Eccellenza Umilissimo Obbedientissimo
Servo

James Bruce

Matematica. — *Sulle superficie con flessi infinitamente vicini.* Nota (1) di ENRICO BOMPIANI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

I.

Superficie con linee di flessi.

1. Com'è noto, una superficie (algebrica o non algebrica) di S_3 proiettivo non ammette in generale punti di flesso, cioè tali che il piano tangente in uno di essi contenga non soltanto l'intorno del 1° ordine, ma anche quello del 2° ordine del punto sulla superficie (in tal caso il piano si dirà osculatore alla superficie).

Tali punti possono anche caratterizzarsi dicendo che tutte le tangenti per essi sono tripunte (almeno): e se il punto non ha singolarità più elevata esse sono effettivamente tripunte ad eccezione di TRE che riescono quadripunte (a questo caso mi riferirò in seguito).

Non credo che siano state studiate le superficie con due o più flessi infinitamente vicini: e, più in particolare, con linee luoghi di flessi.

Recentemente E. CIANI (2) ha dato un esempio di una superficie cubica, con due (o tre) punti biplanari, la cui congiungente è luogo di flessi: ed ha espresso la presunzione ch'essa sia l'unica superficie del 3° ordine con infiniti flessi.

La presunzione del CIANI è esatta, e la sua esattezza si prova facilmente in più modi.

Ma sussiste il fatto molto più generale espresso dal teorema seguente: *se una superficie (algebrica oppure non algebrica) possiede un luogo di flessi esso si compone necessariamente di curve piane, eventualmente rette; questo ultimo caso si presenta necessariamente se la superficie è algebrica di ordine* 3 *o* 4 *o* 5.

---

(1) Presentata nell'Adunanza del 20 dicembre 1940–XIX.

(2) *Sopra le superficie cubiche dotate di infiniti punti di Eckhardt.* « Periodico di Matem. », (IV) 20, 1940, pagg. 240–245; e una Nota precedente a pagg. 190-194 dello stesso Periodico.

E, in generale, se la superficie è algebrica d'ordine n con un luogo di flessi, una sua componente piana ha un ordine k tale che $3k \leq n$ (e si possono effettivamente costruire superficie con componenti di flesso piane d'ordine k prefissato soddisfacente a tale limitazione).

Se la superficie è algebrica il teorema generale precedente diviene molto più espressivo: perchè, in relazione all'algebricità, basta un numero conveniente di flessi infinitamente vicini ad assicurare l'esistenza di un luogo di flessi.

Si hanno per esempio i teoremi seguenti:

Se una superficie algebrica d'ordine n possiede $n-1$ *flessi infinitamente vicini allineati, ogni punto della loro retta è di flesso* (*e su questa sono* $n-1$ *punti biplanari*).

Ciò esaurisce, nel caso $n = 3$, la questione aperta dal Ciani.

Se una superficie del 4°, o del 5°, ordine ha 4 o rispettivamente 6 flessi infinitamente vicini essa ne ha necessariamente infiniti nei punti di una retta (*a cui quelli dati necessariamente appartengono*; *ed eventualmente altri*).

Ma è anche interessante indagare come si distribuiscano flessi infinitamente vicini in numero inferiore a quello ora indicato (tale quindi da non portare di necessità l'esistenza di infiniti flessi): il che è qui fatto per le superficie del 4° e del 5° ordine in relazione alla sezione piana tangente in un punto. Gli elementi curvilinei su cui si distribuiscono quei flessi si caratterizzano completamente per mezzo dei loro invarianti di contatto con detta sezione piana, se questa li determina.

Superficie con un luogo di flessi.

2. Sia F una qualsiasi superficie con più flessi infinitamente vicini O, O', $O'' \cdots$ succedentisi sopra un ramo di curva uscente da O.

Il piano tangente in O è per ipotesi osculatore ivi cioè contiene tutti gli elementi E_2 (del 2° ordine) di curve uscenti da O: ed è quindi tangente in ogni punto dell'intorno del 1° ordine di O. Se in quest'intorno si prende O' pure di flesso, quello stesso piano essendo tangente in O' è pure osculatore in O', cioè contiene l'elemento del 3° ordine, E_3, di ogni curva della superficie uscente da O con la tangente OO'.

In altri termini:

Se una superficie ha due *flessi infinitamente vicini ogni elemento curvilineo del 3° ordine della superficie che li contenga ha piano osculatore stazionario* (*a contatto 4-punto*).

Ne segue immediatamente che:

Se la superficie ha un luogo di flessi esso si compone di curve piane (*eventualmente rette*)

perchè ogni suo punto generico ha piano osculatore stazionario.

Introdotta l'ipotesi dell'algebricità della superficie si ha poi:

Se una superficie algebrica possiede un luogo di flessi di cui almeno una componente non sia retta, essa ha necessariamente ordine ≥ 6; *quindi se una superficie d'ordine* ≤ 5 *ha un luogo di flessi questo si compone di rette.*

Infatti se C^k è una componente piana d'ordine $k \geq 2$ il piano tangente alla superficie in un punto qualsiasi di C^k contiene C^k contata tre volte; ed è perciò la superficie d'ordine $\geq 3k \geq 6$.

Superficie cubiche con due flessi infinitamente vicini.

3. Consideriamo una F^3 con due flessi infinitamente vicini O e O'.

Una sezione piana generica per la retta $r = OO'$, essendo una cubica con due flessi infinitamente vicini si spezza necessariamente in r e in una conica; quindi intanto r appartiene ad F^3.

Il piano tangente in O è ivi osculatore e poichè anche O' è flesso quel piano è tangente in tre punti infinitamente vicini di r. Ma poichè r appartiene ad F^3 ogni piano per essa è tangente al più in due punti ad F^3 a meno che sia tangente in tutti i punti di r. Per il fatto rilevato, deve presentarsi questa seconda eventualità, cioè esiste un piano tangente fisso in tutt'i punti di r.

Ne segue che le coniche residue intersezioni dei piani per r non possono tagliare r in punti variabili, ma necessariamente in due punti doppi: e per l'esistenza di un piano tangente fisso lungo r questi sono punti doppi biplanari.

Per essere O e O' di flesso la sezione del piano tangente lungo r con F^3 deve spezzarsi in tre rette infinitamente vicine: e perciò ogni punto di r è di flesso per F^3. Dunque:

Se una F^3 *possiede due flessi infinitamente vicini la loro retta appartiene ad* F^3 *ed è luogo di punti di flesso. Essa congiunge due punti biplanari di* F^3, *e il piano tangente non varia col punto sulla retta.*

Se F^3 ha due soli punti biplanari vi è una sola retta di flessi; se ne ha tre, vi sono tre di tali rette.

Si sono così ritrovati, come i soli esistenti, i casi dati dal Ciani, *sotto la sola ipotesi che* F^3 *contenga due flessi infinitamente vicini* (1).

---

(1) Se si fa invece l'ipotesi che esista un luogo di flessi, la conclusione può raggiungersi col ragionamento seguente comunicatomi da G. Gherardelli: Da ogni punto del luogo devono uscire tre rette della F^3 (le tangenti quadripunte); ciò è impossibile a meno che quelle tre rette coincidano in una che è necessariamente luogo di flessi.

Superficie d'ordine n con $n-1$ flessi infinitamente vicini allineati.

4. I fatti che giocano nella dimostrazione precedente sono i seguenti:

1° una cubica (piana) con due flessi infinitamente vicini si spezza in una retta e in una conica;

2° i piani tangenti nei punti di una retta di una F^3 non possono coincidere in tre punti senza coincidere in tutti.

Questi fatti si generalizzano come segue:

1° una C^n piana con $n-1$ flessi infinitamente vicini (necessariamente allineati) si spezza in una retta e in una C^{n-1} residua.

2° se una F^n possiede una retta e in n punti di essa vi è lo stesso piano tangente questo è fisso in tutt'i punti della retta (poichè la corrispondenza fra i punti della retta e i piani tangenti è $(n-1, 1)$ al più).

Esaminiamo allora una F^n con $n-1$ punti di flesso infinitamente vicini allineati. Un piano per la retta r su cui essi si trovano dà luogo ad una C^n nelle condizioni precedenti, cioè di cui fa parte la r.

Il piano tangente ad F^n in un punto O di flesso è osculatore sia in O che nei flessi infinitamente vicini supposti, ed è quindi tangente in n punti infinitamente vicini; e perciò, per quanto s'è osservato sopra, è tangente fisso in tutt'i punti di r. Ne segue che la sua sezione con F^n deve comporsi della retta r contata tre volte e di una C^{n-3} residua; e perciò tutti i punti di r sono di flesso.

Una sezione piana generica per r si compone di r e di una residua C^{n-1} che al variare del piano secante deve tagliare r in $n-1$ punti fissi: questi $n-1$ punti sono necessariamente biplanari (o di singolarità più elevata). Quindi:

Se una F^n possiede $n-1$ flessi infinitamente vicini allineati, la loro retta è luogo di punti di flesso e su di essa vi sono $n-1$ punti biplanari.

Si noti che l'ipotesi di allineamento dei supposti flessi è essenziale appena $n > 3$; vedremo che già per $n = 4$ e 5 possono esistere 3 e risp. 4 flessi infinitamente vicini (e non allineati) senza che la superficie ne possegga infiniti.

Dimostrazione analitica dei teoremi precedenti.

5. Procuriamoci ora una dimostrazione analitica dei teoremi precedenti: gli sviluppi cui perverremo saranno utilizzati in seguito per l'esame di superficie algebriche con più punti di flesso infinitamente vicini (senza che di necessità ne esistano infiniti).

Cominciamo dall'esprimere che una superficie ha due flessi infinitamente vicini.

Sia O $(0,0,0)$ uno di essi e la superficie sia rappresentata nel suo intorno da

$$z = \theta_3(x,y) + \theta_4(x,y) + \theta_5(x,y) + \cdots$$

ove θ_h è una forma d'ordine h in x,y; $\theta_3(x,y)$ non è identicamente nulla perchè si suppone che O sia proprio punto di flesso e non di singolarità più elevata.

Supponiamo che il flesso infinitamente vicino O' sia sulla $y = z = 0$ (cioè su un qualsiasi ramo di curva $y = lx^2 + \cdots$): bisognerà che le derivate z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}, *fatta in esse la sostituzione* $y = lx^2 + \cdots$, abbiano in O uno zero del 2° ordine. Ciò avviene se e soltanto se $\theta_{3xx}, \theta_{3xy}, \theta_{3yy}$ hanno uno zero del 2° ordine, cioè se, a parte un coefficiente numerico che può sempre prendersi $= 1$, è $\theta_3(x,y) \equiv y^3$ quindi

$$z = y^3 + \theta_4(x,y) + \theta_5(x,y) + \cdots$$

Questo è il tipo di sviluppo spettante ad una superficie con i due flessi assegnati O, O'.

Da esso segue subito il teorema sulle superficie con un luogo di flessi. Supponiamo infatti che O sia un suo punto, $y = z = 0$ la sua tangente ivi e perciò il luogo abbia uno sviluppo del tipo

$$y = lx^2 + mx^3 + \cdots, \quad z = n, x^2 + n_1 x^3 + \cdots$$

Perchè esso possa appartenere alla superficie precedente occorre che sia $n_1 = n_2 = 0$, cioè che il piano osculatore in O sia a contatto quadripunto con il luogo: ma poichè O è un punto generico del luogo segue che è costituito da componenti piane o rette.

Pure immediatamente segue la verifica analitica relativa al teorema sulle superficie del 3° ordine con due flessi infinitamente vicini.

Infatti per quanto precede la sua equazione è necessariamente del tipo

$$zQ(x,y,z) = y^3$$

ove $Q = 0$ è l'equazione di una qualsiasi quadrica non passante per O; i punti biplanari sono quelli d'intersezione della quadrica con la retta luogo dei flessi $y = z = 0$. Se la quadrica si spezza si hanno i tre punti biplanari nelle intersezioni degli spigoli di un triedro con il piano contenente le tre rette di flesso.

6. Passiamo ora ad imporre che la superficie abbia tre flessi infinitamente vicini O, O', O'' sull'elemento E_2 dato da $y = lx^2 + \cdots$. Le derivate

$$z_{xx} = \theta_{4xx} + \cdots$$
$$z_{xy} = \theta_{4xy} + \cdots$$
$$z_{yy} = 6y + \theta_{4yy} + \cdots$$

devono avere, fatta la sostituzione $y = lx^2$, uno zero del 3° ordine. Le prime due portano che $\theta_4 = y^2 \zeta_2 (x, y)$ ove ζ_2 è una forma di 2° grado, mentre l'ultima dà una relazione fra l e il coefficiente di x^2 in ζ_2. Sicchè

$$z = y^3 + y^2 \zeta_2 (x, y) + \theta_5 (x, y) + \cdots$$

è lo sviluppo tipico di una superficie con *tre* flessi infinitamente vicini.

Se questi sono allineati, $l = 0$, si ha $\theta_4 = y^3 \zeta_1 (x, y)$ quindi

$$z = y^3 (1 + \zeta_1) + \theta_5 (x, y) + \cdots$$

Supponiamo la superficie in esame del 4° ordine F^4. Per quanto s'è stabilito ora la sua equazione è del tipo

$$z Q_3 = y^3 (1 + \zeta_1)$$

ove $Q_3 = 0$ è l'equazione di una qualsiasi superficie cubica non passante per O. La F^4 contiene la retta $y = z = 0$ luogo di flessi, d'accordo con quanto s'era stabilito per via sintetica sulle superficie d'ordine n con $n - 1$ flessi infinitamente vicini allineati (qui $n = 4$).

7. Possiamo ora dimostrare il teorema sulle superficie d'ordine n con $n - 1$ flessi allineati in tutta la sua generalità. Si potrà supporre senz'altro $n > 4$ (essendo già stato dimostrato il teorema per $n = 3, 4$).

Una F^n con tre flessi infinitamente vicini allineati ha, per quanto s'è visto al n. 5 (indipendentemente da ogni ipotesi di algebricità), un'equazione del tipo

$$z Q_{n-1} (x, y, z) = y^3 \{1 + \zeta_1 (x, y)\} + \psi_5 (x, y) + \cdots + \psi_n (x, y)$$

ove Q_{n-1} è un polinomio di grado $n - 1$ e $Q_{n-1} (0, 0, 0) \neq 0$ e può farsi $= 1$; mentre ζ_1 e le ψ_s sono forme in x, y di grado uguale all'indice.

Supponiamo di aver dimostrato che una F^n con k flessi infinitamente vicini allineati abbia un'equazione del tipo

$$z Q_{n-1} (x, y, z) = y^3 \{1 + \zeta_1 (x, y) + \cdots + \zeta_{k-2} (x, y)\} + \\ + \psi_{k+2} (x, y) + \cdots + \psi_n (x, y);$$

vogliamo provare che lo stesso tipo di sviluppo deve valere per una superficie con $k + 1$ flessi infinitamente vicini allineati cambiando k in $k + 1$.

Le condizioni da imporre sono che, fatta la sostituzione $y = px^{k+1} + \cdots$ nelle derivate z_{xx}, z_{yx}, z_{yy} queste abbiano in O uno zero d'ordine $k + 1$.

Si vede subito che i termini d'ordine più basso in quelle derivate provengono da $\psi_{k+2} (x, y)$ e che essi hanno ordine k a meno che sia

$$\psi_{k+2} (x, y) = y^3 \zeta_{k-1} (x, y)$$

e questo prova quanto s'è detto. Così procedendo fino a $k + 2 = n$, cioè a $k + 1 = n - 1$ si ha il teorema che volevamo provare. Ma in realtà la dimostrazione ora fatta ci dice di più che:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una superficie abbia k flessi infinitamente vicini allineati è che la sezione col piano tangente nel punto iniziale abbia ivi un punto triplo con tre tangenti coincidenti e inoltre che questa abbia incontro $(k + 2)$*-punto con la sezione detta in quel punto.*

Come si vede l'esistenza di flessi *allineati* infinitamente vicini si esprime unicamente per mezzo di caratteri della sezione piana tangente nel punto: non è più così per flessi *non* allineati.

8. Prima di lasciare l'argomento delle superficie che posseggono luoghi di flessi dò qualche esempio.

La superficie del 6° ordine

$$zQ_5(x, y, z) = (y - x^2)^3$$

possiede la conica $z = 0, y = x^2$ come linea di flessi. Essa ha un contatto del 2° ordine con la F^5 di equazione $Q_5 = 0$ lungo la C^{10} segata su di essa dal cono $y = x^2$: sulla conica dei flessi esistono 10 punti biplanari (o di singolarità più elevata).

Più in particolare la F^6 di equazione

$$z_1 z_2 z_3 z_4 z_5 z_6 = Q_2(x, y, z)^3$$

ove le $z_i = 0$ rappresentano piani e $Q_2 = 0$ una quadrica ha 6 coniche di flesso appartenenti tutte alla quadrica e ciascuna ad uno dei 6 piani precedenti. Vi sono 30 punti biplanari distribuiti a 10 a 10 su quelle coniche.

Così la superficie del 7° ordine

$$zQ_2'^3 = Q_2^3\zeta$$

ove $Q_2 = 0, Q_2' = 0$ rappresentano quadriche (e $\zeta = 0$ un piano) possiede due coniche di flessi nei piani $z = 0$ e $\zeta = 0$; ogni piano per la retta d'intersezione di questi taglia ulteriormente la superficie in tre coniche appartenenti ad un fascio che ha i 4 punti base sulla quartica $Q_2 = Q_2' = 0$ che è tripla per la superficie: sicchè ogni quadrica del fascio per la quartica taglia ulteriormente la superficie in una conica che sta in un piano del fascio $z = \zeta = 0$. La superficie può quindi generarsi con una proiettività fra un fascio di piani e un'involuzione cubica in un fascio di quadriche, ecc. ecc.

Invece la superficie

$$z_1 z_2 z_3 z_4 z_5 z_6 z_7 = Q_2^3\zeta$$

ove $\zeta = 0$ e $z_i = 0$ sono piani e $Q_2 = 0$ una quadrica possiede 7 coniche di flesso (e 7 rette $\zeta = z_i = 0$).

È facile generalizzare questi esempi e costruire superficie di qualsiasi ordine con linee di flesso.

II.

Superficie con un numero finito di flessi.

Superficie con tre e con quattro flessi infinitamente vicini.

9. Esaminiamo ora più a fondo l'esistenza di flessi non allineati infinitamente vicini in numero finito.

Riprendiamo le condizioni affinchè una superficie abbia TRE flessi infinitamente vicini sull'elemento $E_2 : z = 0 , y = lx^2$; se non sono allineati (l'ipotesi opposta è già stata esaminata) è $l \neq 0$.

L'equazione della superficie nell'intorno di O è del tipo

$$z = y^3 + y^2 \zeta_2 (x , y) + \theta_5 (x , y) + \cdots$$

e posto $\zeta_2 = a_{20} x^2 + 2 a_{11} xy + a_{02} y^2$, la condizione (non ancora scritta) relativa allo zero di 3° ordine di z_{yy} dà

$$3 l + a_{20} = 0 .$$

Procuriamoci ora le condizioni affinchè la superficie abbia QUATTRO flessi infinitamente vicini sull'$E_3 : z = 0 , y = lx^2 + mx^3$.

Si ha

$$z_{xx} = 2 a_{20} y^2 + \theta_{5\,xx} + \cdots$$
$$z_{xy} = 4 a_{20} xy + 6 a_{11} y^2 + \theta_{5\,xy} + \cdots$$
$$z_{yy} = 6 y + 2 a_{20} x^2 + 12 a_{11} xy + 12 a_{02} y^2 + \theta_{5\,yy} + \cdots$$

e queste, fatta la sostituzione $y = lx^2 + mx^3$, devono avere uno zero del 4° ordine in x. Deve aversi anzitutto (dalla prima)

$$\theta_5 = y \zeta_4 (x , y) = y (a_{40} x^4 + 4 a_{31} x^3 y + 6 a_{22} x^2 y^2 + 4 a_{13} xy^3 + a_{04} y^4)$$

e poi, oltre alla condizione già trovata per l,

$$a_{20} l + a_{40} = 0$$
$$3 m + 6 a_{11} l + 4 a_{31} = 0 .$$

Si hanno quindi *due* condizioni in l che portano

$$3 a_{40} = a_{20}^2$$

per la loro compatibilità; e poi

$$m = \frac{2}{3} (a_{20} a_{11} - 2 a_{31}) .$$

Superficie del 4° ordine con flessi infinitamente vicini.

10. Supponiamo ora di avere una superficie del 4° ordine F^4 con due flessi infinitamente vicini e scriviamo la sua equazione, come si può,

$$zQ_3(x, y, z) = y^3 + \psi_4(x, y),$$

ove

$$Q_3 = 1 - (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) + zQ_2(x, y, z)$$

le φ_i e ψ_i essendo forme in x, y di grado i e Q_2 un polinomio di 2° grado in x, y, z. Si ha quindi

$$z = y^3 + \psi_4(x, y) + \varphi_1 y^3 + \theta_5(x, y) + \cdots$$

e perciò, confrontando con le notazioni precedenti

$$\theta_4(x, y) = \psi_4(x, y) + \varphi_1 y^3.$$

Condizione necessaria e sufficiente affinchè F^4 abbia *tre* flessi infinitamente vicini è che θ_4, e quindi ψ_4 sia divisibile per y^2; e se si pone

$$\psi_4 = y^2 (b_{20} x^2 + 2 b_{11} xy + b_{02} y^2)$$

si ha per l'E_2 dei tre flessi

$$y = -\frac{1}{3} b_{20} x^2.$$

Questi fatti possono esprimersi tutti per mezzo della sezione piana tangente in O: la quale in tal caso si spezza nella retta $y = 0$ contata due volte e in una conica ad essa tangente in O il cui E_2 ivi è

$$y = -b_{20} x^2.$$

Si ha quindi il teorema:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una superficie del 4° ordine F^4 possegga tre flessi infinitamente vicini, su un E_2 di origine O, è che la sezione piana tangente in O si spezzi in una retta contata due volte (che appartiene ad F^4 e lungo la quale si ha un piano tangente fisso) e in una conica tangente ad essa in O. In tal caso, la retta è tangente all'E_2 di flesso e questo è completamente caratterizzato dal fatto che il suo invariante di contatto con l'E_2 della conica è $= 1/3$.

Solo se $b_{20} = 0$ i tre flessi sono allineati e allora, come sappiamo, la loro retta è luogo di flessi.

Nel caso che ciò non avvenga, $b_{20} \neq 0$, la superficie non ha di necessità altri flessi. Ogni piano per la tangente ad E_2 sega ulteriormente F^4

in una cubica che incontra quella tangente in tre punti fissi (al variare del piano) determinati da

$$y = z = 0 \quad , \qquad 1 = \varphi_1(x, 0) + \varphi_2(x, 0) + \varphi_3(x, 0) .$$

Preso uno di questi come A_1 (1 , 0 , 0 , 0), sicchè $\varphi_3(x, 0) \equiv 0$, si vede facilmente che esso è un punto conico e che il cono in esso tangente *non* si spezza essendo $b_{20} \neq 0$ (quindi lo spezzarsi di questo cono, oltre al fatto che F^4 possegga una retta a piano tangente fisso, è condizione necessaria e sufficiente affinchè F^4 abbia tre flessi infinitamente vicini allineati e perciò infiniti flessi).

Preso il piano tangente al cono di vertice A_1 e alla conica sezione residua in O con $z = 0$ come piano $t = 0$ e inoltre il piano polare della retta $z = t = 0$ rispetto al cono come piano $y = 0$ e il piano per la polare di A_1 rispetto alla conica e per l'ulteriore intersezione di $y - t = 0$ con F^4 si ha un tetraedro di riferimento definito (a meno della scelta di A_1 in quella terna) da F^4.

È possibile attribuire ad F^4 un E_3 di flessi (cioè 4 flessi infinitamente vicini) ?

Da quanto si è visto al n. 9, dovrebbe essere $\theta_5 = y\zeta_4$; ma per essere ora la superficie una F^4 risulta

$$\theta_5(x, y) = y^3(\varphi_2 + \varphi_1^2) + y^2(b_{20}x^2 + 2b_{11}xy + b_{02}y^2)\varphi_1$$

quindi θ_5 è divisibile per y^2 e perciò $a_{40} = 0$, quindi anche $b_{20} = l = 0$: e tanto basta perchè F^4 abbia infiniti flessi allineati. Perciò:

Non è possibile attribuire ad una F^4 quattro flessi infinitamente vicini senza che questa ne possegga infiniti allineati.

Superficie del 5° ordine con flessi infinitamente vicini.

11. Fatti nuovi si presentano per la superficie del 5° ordine F^5; l'esistenza per essa di più di tre flessi infinitamente vicini non può più rilevarsi soltanto dalla natura della sezione piana tangente in uno di essi.

Supposti due flessi infinitamente vicini esistenti sulla superficie l'equazione di questa può scriversi:

$$z\{1 - (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 + \varphi_5)\} + z^2 P_3(x, y) + z^3 P_2(x, y) + z^4 P_1(x, y) + \\ + z^5 P_0 = y^3 + \psi_4(x, y) + \psi_5(x, y)$$

ove φ_i e ψ_i sono forme e P_i polinomi dei gradi indicati.

Lo sviluppo di z fino ai termini del 6° ordine inclusi è dato da

$$z = y^3 + \theta_4(x, y) + \theta_5(x, y) + \theta_6(x, y) + \cdots$$

ove

$$\theta_4 = y^3 \varphi_1 + \psi_4$$

$$\theta_5 = y^3 (\varphi_1^2 + \varphi_2) + \psi_4 \varphi_1 + \psi_5$$

$$\theta_6 = y^3 (\varphi_3 + 2 \varphi_1 \varphi_2 + \varphi_1^3) + \psi_4 (\varphi_2 + \varphi_1^2) + \psi_5 \varphi_1 - \alpha y^6$$

e $\alpha = P_3 (0, 0)$.

Imponiamo ora ad F^5 di avere TRE flessi infinitamente vicini. Deve essere, come s'è visto, $\theta_4 = y^2 \zeta_2$ e perciò anche $\psi_4 = y^2 \chi_2$.

Questa condizione riguarda soltanto la sezione piana tangente in O per la quale è

$$y^3 + y^2 \chi_2 + \psi_5 (x, y) = 0 .$$

Essa ha in generale un ramo del tipo

$$x = t^3 \quad , \quad y = at^5 + bt^6 + \cdots$$

e viceversa questo è caratteristico per la presenza di tre flessi infinitamente vicini su F^5.

Naturalmente possono presentarsi circostanze più particolari, senza che per questo esistano altri flessi oltre quelli supposti.

Se in ψ_5 manca il termine in x^5, la retta $y = 0$ appartiene ad F^5 e la sezione piana tangente si spezza in essa e in una C^4 che ha O per punto doppio con tangente doppia $y = 0$ e questa è ad incontro quadripunto con la curva in O.

Se poi in ψ_5 manca anche il termine in $x^4 y$, la retta $y = 0$ si stacca due volte dalla sezione tangente che si compone ulteriormente di una cubica tangente ad essa in O. Soltanto se quella retta si stacca tre volte dalla sezione piana tangente la F^5 acquista infiniti flessi su quella retta.

Escludiamo pure queste circostanze particolari. L'E_2 dei tre flessi è determinato (come per le F^4) dalla sezione piana tangente perchè esso dipende solo dal coefficiente di $x^2 y^2$ in θ_4 e questo è lo stesso che in ψ_4 (ed è il coefficiente di x^2 in χ_2). Per costruirlo si consideri la quartica polare di O rispetto alla C^5 sezione piana tangente; essa si spezza nella $y = 0$ contata due volte e in una conica $2y + \chi_2 = 0$ il cui E_2 in O è

$$y = -\frac{1}{2} b_{20} x^2 + \cdots .$$

Poichè l'E_2 dei flessi è

$$y = -\frac{1}{3} b_{20} x^2 + \cdots$$

il loro invariante di contatto vale 2/3; l'E_2 dei flessi è perfettamente determinato.

Si vede facilmente che vale il seguente teorema per superficie d'ordine qualsiasi:

Se una F^n ha tre flessi infinitamente vicini sopra un E_2 d'origine O esso è perfettamente determinato dalla sezione piana tangente in O. Per costruirlo, si consideri la $(n-4)$-esima polare di O rispetto ad essa, che si spezza nella retta tangente contata due volte e in una conica: l'E_2 dei flessi ha con questa in O invariante di contatto $= (n-3)/3$.

12. Passiamo ad imporre che F^5 contenga un E_3 di flessi di origine O; e sia esso $y = lx^2 + mx^3$. Si ha

$$\theta_5 = y^3(\varphi_1^2 + \varphi_2) + y^2 \varphi_1 \chi_2 + \psi_5;$$

e poichè in questo caso è $\theta_5 = y\zeta_4$ risulterà

$$\psi_5 = y\chi_4 = y(b_{40} x^4 + 4 b_{31} x^3 y + \cdots)$$

e anzi, confrontando con l'espressione di θ_5 data al n. 9, $b_{40} = a_{40}$, $b_{31} = a_{31}$.

Posto

$$\varphi_1 = a_1 x + b_1 y \quad , \quad \chi_2 = b_{20} x^2 + 2 b_{11} xy + b_{02} y^2$$

si ha poi $a_{20} = b_{20}$, $a_{11} = b_{11} + \frac{1}{2} a_1$, $a_{02} = b_{02} + b_1$; e dalle condizioni già trovate per l'E_3 dei flessi

$$3 b_{40} = b_{20}^2$$

$$l = -\frac{b_{20}}{3} \quad , \quad m = \frac{2}{3}(b_{20} b_{11} - 2 b_{31}) + \frac{1}{3} b_{20} a_1 .$$

Il fatto nuovo che qui si presenta è che in m comparisce a_1, cioè che l'E_3 dei flessi non dipende più soltanto dalla sezione piana tangente in O (ma anche da φ_1). Ciò accade però quando $b_{20} = 0$ cioè quando i primi tre flessi non siano allineati (cioè il loro E_2 non sia di flesso).

Nel caso opposto $(b_{20} = 0)$ si ha $l = 0$, $m = -\frac{4}{3} a_{31}$, $a_{40} = 0$: la sezione piana tangente si spezza in $y^2 = 0$ e in

$$y + 2 b_{11} xy + b_{02} y^2 + 4 a_{31} x^3 + \cdots = 0$$

cubica che ha in O un flesso con E_3 di equazione

$$y = -4 a_{31} x^3 + \cdots .$$

L'invariante di contatto dell'E_3 dei flessi con questo vale 1/3.

Invece nel caso generale $l = 0$ si ha un tacnodo della sezione piana tangente e l'invariante di contatto dei due rami tangenti (a causa della

relazione $3\,b_{40} = b_{20}^2$) vale $\pm i$ (secondo l'ordine in cui si prendono i due rami).

Sicchè riassumendo quanto si è trovato sulle F^5 con 4 flessi infinitamente vicini si ha:

Se una F^5 possiede un E_3 di flessi di origine O la tangente in O ad E_3 appartiene ad F^5.

Se l'E_2 di E_3 non è inflessionale (cioè se i primi tre flessi non sono in linea retta) la sezione piana tangente in O, tolta la tangente ad E_2, ha un tacnodo i cui rami lineari hanno in O invariante di contatto $= \pm i$, l'E_2 è perfettamente determinato da essa, ma non così l'E_3.

Se invece l'E_2 di E_3 è inflessionale non solo la sua tangente in O appartiene ad F^5, ma il piano tangente nei punti di essa è fisso. In questo caso l'E_3 dei flessi è pienamente determinato dal suo invariante di contatto con l'E_3 (pure di flesso) della cubica sezione del piano tangente in O.

Se l'E_3 è inflessionale cioè se i 4 flessi sono allineati tutta la loro retta è luogo di flessi.

13. Domandiamoci infine se può una F^5 avere un E_4 di flessi (cioè CINQUE flessi infinitamente vicini).

Si suppongono naturalmente soddisfatte le condizioni per un E_3 di flessi, già trovate. Bisognerà che le derivate z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}, fatta in esse la sostituzione $y = lx^2 + mx^3 + nx^4 + \cdots$, abbiano in O uno zero del 5° ordine in x.

Tenuta presente l'espressione di θ_5 si vede che in z_{xx} comparisce x^4 col coefficiente

$$2\,l\,(lb_{20} + 6\,b_{40})$$

che deve dunque essere nullo. Se $l = 0$ segue dalle condizioni già trovate $b_{20} = b_{40} = 0$; se invece $lb_{20} + 6\,b_{40} = 0$, pure per le condizioni già trovate $l = -\,b_{20}/3\,,\ 3\,b_{40} = b_{20}^2$, segue $l = b_{20} = b_{40} = 0$; ed $m = -\dfrac{4}{3}\,b_{31}$.

Se ora si ritorna, con queste specificazioni, all'espressione di z si può porre

$$\psi_4 = y^3\,\chi_1 = y^3\,(2\,b_{11}\,x + b_{02}\,y)$$

$$\psi_5 = y^2\,\chi_3 = y^2\,(4\,b_{31}\,x^3 + 6\,b_{22}\,x^2\,y + 4\,b_{13}\,xy^2 + b_{04}\,y^3)$$

e

$$z = y^3 + y^3\,(\varphi_1 + \chi_1) + y^3\,(\varphi_1^2 + \varphi_2 + \chi_1\,\varphi_1) + y^2\,\chi_3 + y^3\,(\varphi_3 + 2\,\varphi_1\,\varphi_2 + \varphi_1^3) + \\ + y^3\,\chi_1\,(\varphi_2 + \varphi_1^2) + y^2\,\chi_3\,\varphi_1 - \alpha y^6\,.$$

Se si forma z_{xy} e si pone poi in essa $y = mx^3 + nx^4$ si vede ch'essa è già del 5° ordine in x. Invece per l'espressione di z_{yy} (e tenendo presente

che ci occorrono i soli termini del 4° ordine in x dopo fatta quella sostituzione) basta derivare

$$z = y^3 + y^3 (\varphi_1 + \chi_1) + y^2 \chi_3 + y^2 \chi_3 \varphi_1$$

(gli altri termini darebbero luogo a termini in x d'ordine $\geqq 5$). Se si annullano i coefficienti del termine in x^3 e in x^4 entro z_{yyy} si trova per m il valore precedente e una relazione che determina n (in relazione alla sezione piana tangente e a φ_1).

Soltanto se s'impone un sesto flesso si ricava $b_{31} = 0$, cioè ψ_3 è divisibile per y^3 e allora F^5 ha infiniti flessi allineati. Quindi:

Una F^5 può contenere un E_4 di flessi (senza contenerne infiniti) a patto che i primi tre siano allineati.

Se F^5 contiene 6 flessi infinitamente vicini questi sono allineati sopra una retta che è luogo di flessi.

Meccanica. — *Invarianti quadratici dei tensori.* Nota (1) di UMBERTO CISOTTI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

Con referenza a una precedente Nota (2) mi propongo di studiare gli invarianti quadratici dei tensori, che dopo i lineari sono i più interessanti; in particolar modo di quei tensori recentemente introdotti (3) e che ho denominati *potenziali.*

1. INVARIANTI QUADRATICI DISTINTI. — Siano

[1] $$T_{i_1 \cdots i_m}$$

le componenti cartesiane di un tensore m–plo. Introduciamo il tensore $(2m)$–plo, che è la potenza m–ma del tensore fondamentale ed ha le componenti cartesiane

[2] $$\delta_{i_1 k_1} \cdots \delta_{i_m k_m};$$

variando le disposizioni con ripetizione dei $2m$ indici $i_1, \cdots, i_m, k_1, \cdots, k_m$ si ottengono le diverse potenze m–me del tensore fondamentale; quelle tra di loro distinte, cioè linearmente indipendenti, sono in numero di (4)

[3] $$N = \sum_0^m k \left[\binom{2m}{2k} - \frac{1}{2} \binom{2m}{2k-1} \right] \binom{2k}{k}.$$

Indichiamo col simbolo

[4] $$\Delta^{(r)}_{(i_1 \cdots k_m)} \qquad (r = 1, \ldots, N)$$

le componenti cartesiane di una generica delle N potenze m–me in discorso. Poniamo

[5] $$J_r = \sum_1^3 {}_{i_1 \cdots k_m} T_{i_1 \cdots i_m} T_{k_1 \cdots k_m} \Delta^{(r)}_{(i_1 \cdots k_m)}.$$

---

(1) Presentata nell'Adunanza del 20 dicembre 1940–XIX.

(2) *Invarianti ed eminvarianti lineari dei tensori.* Questi « Rendiconti », serie VII, vol. I (1940–XVIII); pag. 337.

(3) *Campi tensoriali potenziali.* Questi « Rendiconti », serie VII, vol. II (1941–XIX); pag. 129.

(4) RACAH, loco primo citato, pag. 338.

$J_1, \cdots, J_N$ sono invarianti quadratici del tensore [1] *e sono i soli distinti, cioè linearmente indipendenti. Dunque N rappresenta anche il numero degli invarianti quadratici distinti del tensore* [1].

2. Invariante quadratico notevole: il quadrato del modulo. — In particolare, se si assume

$$\Delta^{(1)}_{(i_1 \cdots k_m)} = \delta_{i_1 k_1} \cdots \delta_{i_m k_m},$$

dalla [5] si ottiene:

$$[6] \qquad J_1 = \sum_1^3 {}_{i_1 \cdots k_m} T_{i_1 \cdots i_m} \cdot T_{k_1 \cdots k_m} \cdot \delta_{i_1 k_1} \cdots \delta_{i_m k_m} = \sum_1^3 {}_{i_1 \cdots i_m} T^2_{i_1 \cdots i_m},$$

il secondo membro è il quadrato del modulo del tensore (1): dunque *tra gli invarianti quadratici di un tensore vi è il quadrato del suo modulo.*

3. Vettori. — In particolare, se $m = 1$ si ha un tensore semplice o vettore, le cui componenti cartesiane indicheremo con T_i. Essendo $N = 1$ si ha l'unico invariante quadratico:

$$J = \sum_1^3 {}_{ik} T_i T_k \delta_{ik} = \sum_1^3 {}_i T_i^2,$$

che è appunto il quadrato del modulo del vettore.

Se il vettore è potenziale, cioè $T = \operatorname{grad} f$, essendo f la funzione potenziale, risulta

$$T_i = \frac{\partial f}{\partial y_i}, \qquad J = \sum_1^3 {}_i \left(\frac{\partial f}{\partial y_i}\right)^2 = (\Delta_1 f)^2 = (\operatorname{grad} f)^2,$$

cioè *l'invariante quadratico è il parametro differenziale di primo ordine della funzione potenziale, ovverossia il quadrato del suo gradiente.*

4. Tensori doppi. — Per $m = 2$ si ha un tensore doppio, le cui componenti cartesiane indichiamo con T_{ik}. In tal caso risulta dalla [3] $N = 3$ perciò *tre sono gli invarianti quadratici distinti di un tensore doppio.* Essi sono:

(1) Cisotti, *Meccanica razionale*. Terza edizione, Libreria Editrice Politecnica, Milano (1939-XVIII), pag. 342.

$$J_1 = \sum_{1}^{3}{}_{ikjh}\, T_{ik}\, T_{jh}\, \delta_{ij}\, \delta_{kh} = \sum_{1}^{3}{}_{ik} T_{ik}^2,$$

$$J_2 = \sum_{1}^{3}{}_{ikjh}\, T_{ik}\, T_{jh}\, \delta_{ik}\, \delta_{jh} = \sum_{1}^{3}{}_{ij}\, T_{ii}\, T_{jj} = \left(\sum_{1}^{3}{}_{i}\, T_{ii}\right)^2,$$

$$J_3 = \sum_{1}^{3}{}_{ikjh}\, T_{ik}\, T_{jh}\, \delta_{ih}\, \delta_{kj} = \sum_{1}^{3}{}_{ik}\, T_{ik}\, T_{ki}.$$

J_1 è il quadrato del modulo del tensore, J_2 è il quadrato dell'invariante lineare, $J_3 = J_1$ quando il tensore è simmetrico (nel qual caso è $T_{ki} = T_{ik}$) ed è $J_3 = -J_1$ quando il tensore è emisimmetrico ($T_{ki} = -T_{ik}$).

Se si introducono i tensori

$$S_{ik} = \frac{1}{2}(T_{ik} + T_{ki}) = S_{ki} \quad , \quad E_{ik} = \frac{1}{2}(T_{ik} - T_{ki}) = -E_{ki},$$

rispettivamente parte simmetrica e parte emisimmetrica del tensore dato [1], per cui risulta

$$T_{ik} = S_{ik} + E_{ik},$$

si ottiene:

$$J_1 = S^2 + E^2 \quad , \quad J_3 = S^2 - E^2 \quad , \quad J_2 = \left(\sum_{1}^{3}{}_{i}\, S_{ii}\right)^2 = \left(\sum_{1}^{3}{}_{i}\, T_{ii}\right)^2.$$

Si può concludere che *possono essere assunti come invarianti quadratici distinti di un tensore doppio i quadrati dei moduli dei due tensori, parte simmetrica e parte emisimmetrica del tensore dato, e il quadrato dell'invariante lineare del tensore.* Considerando il quadrato dell'invariante lineare come un invariante quadratico *non proprio*, perchè qualunque funzione di un invariante (in particolare il quadrato) è pure invariante, si può dire che *un tensore doppio mentre ha un solo invariante lineare* (la somma delle tre componenti di indici eguali) *ammette due invarianti quadratici propri: i quadrati dei moduli dei due tensori, simmetrico e emisimmetrico, di cui il tensore considerato è somma. Se il tensore è simmetrico* ($E_{ik} = 0$) *oppure emisimmetrico* ($S_{ik} = 0$) *si ha un solo invariante quadratico proprio: il quadrato del suo modulo.*

Se il tensore è potenziale di prima specie, chiamando f la funzione potenziale, si ha [2]:

$$T_{ik} = \frac{\partial^2 f}{\partial y_i\, \partial y_k} = S_{ik} \quad , \quad E_{ik} = 0,$$

---

[1] Loco cit. *Meccanica razionale*, pag. 349.

[2] Loco cit. *Campi tensoriali potenziali*, pag. 131.

per cui si ha un solo invariante quadratico proprio, il quadrato del modulo, cioè *la somma dei quadrati di tutte le derivate seconde della funzione potenziale.*

Se il tensore doppio è potenziale di seconda specie, e g è la funzione potenziale, risulta [1]

$$U_{ik} = \frac{\partial g}{\partial y_i}\frac{\partial g}{\partial y_k} = S_{ik} \quad , \quad E_{ik} = 0 \, ,$$

per cui si ha un solo invariante quadratico proprio:

$$\sum_1^3{}_{ik} \, U_{ik}^2 = \sum_1^3{}_{ik} \left(\frac{\partial g}{\partial y_i}\right)^2 \left(\frac{\partial g}{\partial y_k}\right)^2 = (\text{grad}\, g)^4 ,$$

che *è la quarta potenza del gradiente della funzione potenziale.*

5. *Tensori tripli.* — Se $m = 3$ si ha un tensore triplo le cui componenti cartesiane indichiamo

$$T_{ihk} \, .$$

Risultano $N = 15$ invarianti quadratici distinti, non tutti propri, corrispondenti alle seguenti 15 potenze terze del tensore fondamentale:

$$\delta_{ip}\cdot\delta_{hq}\cdot\delta_{kr} \quad , \quad \delta_{ip}\cdot\delta_{hk}\cdot\delta_{qr} \quad , \quad \delta_{ip}\cdot\delta_{hr}\cdot\delta_{qk} \quad , \quad \delta_{hq}\cdot\delta_{ik}\cdot\delta_{pr} \quad , \quad \delta_{hq}\cdot\delta_{ir}\cdot\delta_{pk} \, ,$$
$$\delta_{kr}\cdot\delta_{ih}\cdot\delta_{pq} \quad , \quad \delta_{kr}\cdot\delta_{iq}\cdot\delta_{ph} \quad , \quad \delta_{ih}\cdot\delta_{kp}\cdot\delta_{qr} \quad , \quad \delta_{ih}\cdot\delta_{kq}\cdot\delta_{pr} \quad , \quad \delta_{kp}\cdot\delta_{iq}\cdot\delta_{hr} \, ,$$
$$\delta_{qr}\cdot\delta_{ik}\cdot\delta_{hp} \quad , \quad \delta_{ik}\cdot\delta_{pq}\cdot\delta_{hr} \quad , \quad \delta_{pq}\cdot\delta_{ir}\cdot\delta_{kh} \quad , \quad \delta_{hp}\cdot\delta_{kq}\cdot\delta_{ir} \quad , \quad \delta_{hk}\cdot\delta_{pr}\cdot\delta_{iq} \, .$$

Si ottengono, sottintendendo per tutti i secondi membri $\sum_1^3{}_{ihk}$, i seguenti invarianti quadratici:

$$J_1 = T_{ihk}^2 \quad , \quad J_2 = T_{ihh}\, T_{ikk} \quad , \quad J_3 = T_{ihk}\, T_{ikh} \quad , \quad J_4 = T_{ihi}\, T_{khk} \, ,$$
$$J_5 = T_{ihk}\, T_{khi} \quad , \quad J_6 = T_{iik}\, T_{hkk} \quad , \quad J_7 = T_{ihk}\, T_{hik} \quad , \quad J_8 = T_{iik}\, T_{khh} \, ,$$
$$J_9 = T_{iik}\, T_{hkh} \quad , \quad J_{10} = T_{ihk}\, T_{kih} \quad , \quad J_{11} = T_{ihi}\, T_{hkk} \quad , \quad J_{12} = T_{ihi}\, T_{kkh} \, ,$$
$$J_{13} = T_{ikk}\, T_{hhi} \quad , \quad J_{14} = T_{ihk}\, T_{hki} \quad , \quad J_{15} = T_{ihh}\, T_{kik} \, .$$

Se il tensore è simmetrico risulta:

$$J_1 = J_3 = J_5 = J_7 = J_{10} = J_{14} = T^2 ;$$
$$J_2 = J_4 = J_6 = J_8 = J_9 = J_{11} = J_{12} = J_{13} = J_{15} = \sum_1^3{}_i \left(\sum_1^3{}_h \, T_{ihh}\right)^2 ;$$

---

[1] Loco ultimo citato, pag. 133.

concludendo, *gli invarianti quadratici di un tensore triplo simmetrico sono due soli distinti: il quadrato del modulo*

$$T^2 = \sum_1^3{}_{ihk} T_{ihk}^2 \quad \text{e} \quad \sum_1^3{}_i \left(\sum_1^3{}_h T_{ihh} \right)^2 .$$

In particolare, se si tratta di un tensore triplo potenziale di prima specie, di funzione potenziale f, si ha [1]

$$T_{ihk} = \frac{\partial^3 f}{\partial y_i \partial y_h \partial y_k} ;$$

trattandosi di un tensore simmetrico i due suaccennati invarianti quadratici diventano:

$$T^2 = \sum_1^3{}_{ihk} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial y_i \partial y_h \partial y_k} \right)^2 ,$$

e

$$\sum_1^3{}_i \left(\frac{\partial}{\partial y_i} \sum_1^3{}_h \frac{\partial^2 f}{\partial y_h^2} \right)^2 = \sum_1^3{}_i \left[\frac{\partial}{\partial y_i} (\Delta_2 f) \right]^2 = [\text{grad (div grad } f)]^2 .$$

Si consideri ora un tensore triplo potenziale di seconda specie [2] di componenti cartesiane

$$U_{ihk} = \frac{\partial g}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial g}{\partial y_h} \cdot \frac{\partial g}{\partial y_k} ;$$

si tratta ancora di un tensore triplo simmetrico e i due invarianti quadratici su nominati divengono

$$U^2 = \sum_1^3{}_{ihk} \left(\frac{\partial g}{\partial y_i} \right)^2 \left(\frac{\partial g}{\partial y_h} \right)^2 \left(\frac{\partial g}{\partial y_k} \right)^2 = (\text{grad } g)^6 ,$$

e

$$\sum_1^3{}_i \left[\sum_1^3{}_h \left(\frac{\partial g}{\partial y_i} \frac{\partial g}{\partial y_h} \frac{\partial g}{\partial y_k} \right) \right]^2 = \sum_1^3{}_i \left(\frac{\partial g}{\partial y_i} \right)^2 \left[\sum_1^3{}_h \left(\frac{\partial g}{\partial y_h} \right)^2 \right]^2 = \sum_1^3{}_i \left(\frac{\partial g}{\partial y_i} \right)^2 (\text{grad } g)^4 = (\text{grad } g)^6 ;$$

i due invarianti quadratici vanno a coincidere, per cui *un tensore triplo potenziale di seconda specie, ammette un solo invariante quadratico: il quadrato del modulo, che è la sesta potenza del gradiente della corrispondente funzione potenziale.*

---

[1] Loco ultimo citato, pag. 131,
[2] Loco ultimo citato, pag. 131.

6. *Tensori m-pli potenziali.* — Se è

$$T = \mathrm{grad}_m f ,$$

risulta [1]

$$T_{i_1 \cdots i_m} = \frac{\partial^m f}{\partial y_{i_1} \cdots \partial y_{i_m}} ,$$

per cui l'invariante quadratico [6] diviene nel caso attuale *la somma dei quadrati di tutte le derivate m-me della funzione potenziale.*

Se invece si ha un tensore m-plo potenziale di seconda specie

$$U = \mathrm{Grad}_m g ,$$

con che [2]

$$U_{i_1 \cdots i_m} = \frac{\partial g}{\partial y_{i_1}} \cdots \frac{\partial g}{\partial y_{i_m}} ,$$

l'invariante quadratico [6] diviene

$$(\mathrm{grad}\, g)^{2m} ,$$

cioè *la potenza* $(2m)$*-ma del gradiente della funzione potenziale.*

---

[1] Loco ultimo citato, pag. 131, 132.
[2] Loco ultimo citato, pag. 132.

Meccanica. — *Sul calcolo delle piastre elastiche a forma di settore anulare* [1]. Nota di Carlo Tolotti, presentata [2] da Mauro Picone, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

1. Introduzione.

In un mio recente lavoro [3] ho mostrato a quali interessanti risultati porti l'applicazione, all'integrazione delle equazioni dell'elasticità in un parallelepipedo rettangolo, di un nuovo metodo del Picone [4], fondato sull'uso della trasformata di Laplace delle soluzioni, ad intervallo d'integrazione finito.

Applicazione altresì interessante del detto metodo del Picone è quella, considerata nella presente Nota, alla risoluzione dei problemi al contorno che, secondo la teoria classica di Kirchhoff, traducono l'equilibrio di una piastra elastica a forma di settore anulare, comunque vincolata (incastro, appoggio, libertà) su ciascuno dei lati rettilinei o curvilinei del settore.

Introducendo come nuova incognita, nel riferimento precisato al n. 2, al posto dell'abbassamento w della piastra, la relativa trasformata di Fourier

$$[1] \qquad w^*(\rho, \lambda) = \int_0^{\alpha} w(\rho, \theta)\, e^{-i\lambda\theta}\, d\theta,$$

---

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

[2] Nell'Adunanza del 20 dicembre 1940-XIX.

[3] C. Tolotti, *Applicazione di un nuovo metodo di M. Picone all'integrazione delle equazioni dell'elasticità in un parallelepipedo rettangolo.* « Rend. R. Acc. d'Italia », ser. VII, vol. 1, fasc. 10, 1940; per un'esposizione più dettagliata e completa del medesimo lavoro cfr. anche una Memoria in corso di stampa su « Wiener Monatshefte für Mathematik und Physik ».

[4] M. Picone, *Nuovi metodi d'indagine per la teoria delle equazioni lineari a derivate parziali.* « Rend. Sem. Mat. e Fisico di Milano », vol. XIII, 1939, e *Nuovi metodi risolutivi per i problemi d'integrazione delle equazioni lineari a derivate parziali e nuova applicazione della trasformata multipla di Laplace nel caso delle equazioni a coefficienti costanti,* « Atti R. Accad. Scienze Torino », vol. 75, 1940.

si presenta per tale trasformata la stessa equazione differenziale ordinaria e condizioni ai limiti, a cui si è condotti nel caso della piastra a forma di anello circolare ($\alpha = 2\pi$), colla differenza che, al posto dei termini noti, compaiono, per α generico, delle espressioni contenenti anche i valori di $w, \frac{\partial w}{\partial \theta}, \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}, \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3}$ sui lati rettilinei del settore.

Rimandando pertanto per l'espressione risolutiva del problema trasformato alla letteratura sulla piastra anulare [5], e poichè, una volta determinato w^*, si risale immediatamente a w mediante lo sviluppo in serie di FOURIER, il còmpito della presente Nota si riduce a quello della determinazione delle funzioni $w, \frac{\partial w}{\partial \theta}, \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}, \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3}$ sui lati rettilinei del settore, ove esse risultano solo in parte individuate dalle condizioni al contorno del problema.

L'idea, in proposito, del metodo del PICONE è che tale determinazione vada richiesta alle condizioni esprimenti che l'espressione di w^* dedotta dal problema trasformato, e che si presenta nella forma del quoziente $\frac{W(\rho, \lambda)}{D(\lambda)}$ di due trascendenti intere in λ, si riduca ad una funzione intera di λ come richiede la definizione stessa [1] di w^*.

Per la scrittura di dette condizioni necessita lo studio degli zeri della trascendenta intera $D(\lambda)$. Nel corso della Nota si trovano scritte le varie forme che competono a $D(\lambda)$, in dipendenza delle condizioni che si intendono valevoli sui bordi circolari del settore, ed è dimostrato che ognuna di queste trascendenti intere possiede una successione infinita di zeri. Circa al calcolo effettivo di questi, posso annunciare che l'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo, diretto dal PICONE stesso a cui il metodo è dovuto, si propone, allo scopo di facilitare le applicazioni pratiche, di pubblicare una tabellazione dei primi zeri della successione infinita, posseduta da ciascuna di dette trascendenti, in funzione del rapporto q dei raggi del settore che, assieme al coefficiente ν di POISSON del materiale costituente la piastra (di cui basteranno considerare pochi valori), sono gli unici parametri da cui dipendono i coefficienti di quelle trascendenti.

Quanto alla struttura delle condizioni, a cui porta l'eliminazione dei poli di $\frac{W(\rho, \lambda)}{D(\lambda)}$, segnalerò che esse non sono altro che la formula di GREEN relativa al doppio operatore laplaciano applicata all'abbassamento incognito w e ad una successione infinita di convenienti abbassamenti w. La funzione dell'idea del PICONE appare così esser quella di un criterio

---

[5] Citerò, in particolare, C. TOLOTTI, *Sull'equilibrio delle piastre elastiche anulari libere.* « Mathematica », Cluj, vol. XIV, 1938.

per la scelta degli abbassamenti $\overline{w}$ in guisa che il corrispondente sistema di infinite equazioni integrali FISCHER–RIESZ, che così si ottiene tra le funzioni incognite rimaste da determinare sui lati rettilinei del settore, sia atto alla determinazione di queste, a meno di un eventuale spostamento rigido della piastra.

La questione se tale criterio sia, non solo presumibilmente, ma sicuramente atto allo scopo prefissogli, è una questione ancora aperta, posta in generale dal PICONE, e che ha potuto avere finora risposta affermativa solo in alcuni problemi particolari.

2. POSIZIONE DEL PROBLEMA.

Riferiremo il settore anulare costituente la piastra ad un sistema destro di coordinate cilindriche ρ, θ, z avente come origine O il centro della corona circolare, a cui il settore appartiene, e coll'asse z normale alla piastra e rivolto verso il basso; e siano $r \leq \rho \leq R$, $0 \leq \theta \leq \alpha$ le limitazioni che, in tale riferimento, definiscono il settore stesso.

Diremo w lo spostamento secondo z del generico punto (ρ, θ) della piastra; p il carico agente sull'unità di superficie; m_ρ, $m_{\rho\theta}$, p_ρ, i momenti flettente e torcente e lo sforzo di taglio agenti sull'unità di lunghezza di una sezione della piastra normale al raggio vettore, m_θ, $m_{\rho\theta}$, p_θ gli analoghi momenti e sforzo per una sezione parallela al raggio vettore (6); E il modulo di elasticità del materiale costituente la piastra, ν il relativo coefficiente di POISSON, h lo spessore costante della piastra.

Le espressioni dei momenti m_ρ, m_θ, $m_{\rho\theta}$ e degli sforzi p_ρ, p_θ per mezzo dell'abbassamento w sono

$$[2]\quad \begin{cases} m_\rho = -N\left[\dfrac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} + \nu\left(\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial w}{\partial \rho} + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right)\right], \\ m_\theta = -N\left[\nu\dfrac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial w}{\partial \rho} + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right], \\ m_{\rho\theta} = -(1-\nu)N\dfrac{\partial}{\partial \rho}\left(\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial w}{\partial \theta}\right), \\ p_\rho = -N\dfrac{\partial \Delta w}{\partial \rho} \quad , \quad p_\theta = -\dfrac{N}{\rho}\dfrac{\partial \Delta w}{\partial \theta}, \end{cases}$$

con

$$N = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad \text{e} \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}.$$

(6) Le convenzioni sui segni sono quelle usate da A. NADAI, *Die elastischen Platten*. Springer, 1925, pagg. 190-193, a cui anche rimandiamo per le [2].

Ciò premesso, l'equazione alle derivate parziali a cui deve soddisfare la deformazione trasversale w della piastra è

$$[3] \qquad \Delta\Delta w = \frac{p}{N} ;$$

in quanto alle condizioni al contorno, supporremo che sui bordi $\rho = r$ e $\rho = R$ del settore anulare possa essere o $w = 0$, $\frac{\partial w}{\partial \rho} = 0$ (incastro), o $w = 0$ e m_ρ funzione assegnata di θ (appoggio), o m_ρ e $q_\rho = p_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial m_{\rho\theta}}{\partial \theta}$ funzioni assegnate di θ (bordo libero), ed analogamente sui lati $\theta = 0$ e $\theta = \alpha$ possa essere o $w = 0$, $\frac{\partial w}{\partial \theta} = 0$ (incastro), o $w = 0$ e m_θ funzione assegnata di ρ (appoggio), o m_θ e $q_\theta = p_\theta + \frac{\partial m_{\rho\theta}}{\partial \rho}$ funzioni assegnate di ρ (bordo libero).

Il procedimento che seguiremo per l'integrazione dell'equazione [3] e relative condizioni al contorno consiste, come abbiamo detto al n. 1, nell'introdurre come nuova incognita al posto di w la relativa trasformata di Fourier w^* definita dalla [1], una volta determinata la quale, ogni eventuale soluzione w di detto problema, che possegga nel settore anulare derivate finite e continue fino all'ordine massimo interveniente in [3], è espressa dalla serie

$$[4] \qquad w(\rho, \theta) = \frac{1}{\alpha} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_k \, w^*\left(\rho, \frac{2k\pi}{\alpha}\right) e^{i\frac{2k\pi}{\alpha}\theta}$$

(la sommatoria va estesa ai valori interi di k), convergente uniformemente in ogni campo chiuso per cui sia $r \leq \rho \leq R$, $0 < \theta < \alpha$.

Del calcolo di w^* ci occuperemo nei prossimi numeri.

3. — Riduzione del problema originario al calcolo di w, $\frac{\partial w}{\partial \theta}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}$, $\frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3}$ sui lati rettilinei del settore.

Moltiplicando la [3] per $e^{-i\lambda\theta}$ ed integrando rispetto a θ da 0 ad α, si ha l'equazione in w^*

$$[3'] \qquad \Delta^* \Delta^* w^* = F ,$$

con $\Delta^* = \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho} - \frac{\lambda^2}{\rho^2}$ e, denotando p^* la trasformata di Fourier di p,

$$[5] \qquad F = \frac{p^*}{N} - \frac{1}{\rho^2} f_1 - \Delta^*\left(\frac{1}{\rho^2} f_2\right),$$

ove inoltre si è posto

$$[6] \qquad f_1 = \left(\frac{\partial \Delta w}{\partial \theta} + i\lambda \Delta w\right)_{\theta=\alpha} e^{-i\lambda\alpha} - \left(\frac{\partial \Delta w}{\partial \theta} + i\lambda \Delta w\right)_{\theta=0},$$

$$[7] \qquad f_2 = \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} + i\lambda w\right)_{\theta=\alpha} e^{-i\lambda\alpha} - \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} + i\lambda w\right)_{\theta=0}.$$

La [3'] è un'equazione differenziale ordinaria del 4° ordine nella incognita w^*, a cui vanno associate come condizioni ai limiti per $\rho = r$ e $\rho = R$ le condizioni che si ottengono dalle corrispondenti condizioni del n. 2, valevoli su tali bordi, moltiplicandole per $e^{-i\lambda\vartheta}$ ed integrando rispetto a θ da 0 ad α, e cioè o $w^* = 0$, $\frac{dw^*}{d\rho} = 0$ (incastro), o $w^* = 0$ e m_ϱ^* quantità assegnata (appoggio), o m_ϱ^* e q_ϱ^* quantità assegnate (bordo libero), con m_ϱ^*, q_ϱ^* (trasformate di FOURIER di m_ϱ, q_ϱ) espresse per mezzo di w^* da

$$-\frac{1}{N} m_\varrho^* = \frac{d^2 w^*}{d\rho^2} + \nu\left(\frac{1}{\rho}\frac{dw^*}{d\rho} - \frac{\lambda^2}{\rho^2} w^*\right) + \frac{\nu}{\rho^2} f_2,$$

$$-\frac{1}{N} q_\varrho^* = \frac{d}{d\rho}(\Delta^* w^*) - (1-\nu)\frac{\lambda^2}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\frac{w^*}{\rho}\right) + \frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{\rho^2} f_2\right) + \frac{1-\nu}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{\rho} f_2\right).$$

Poichè per $\alpha = 2\pi$, cioè se il settore anulare diventa un anello circolare, è $f_1 = f_2 = 0$ (per essere w periodica rispetto a θ con periodo 2π), ne segue che *l'espressione di w^* per α generico si ottiene da quella relativa all'anello circolare* ($\alpha = 2\pi$) *pur di sostituire* $\frac{p^*}{N}$ *con* F, $\frac{1}{N} m_\varrho^*$ *con*

$$\frac{1}{N} m_\varrho^* + \frac{\nu}{\rho^2} f_2 \quad e \quad \frac{1}{N} q_\varrho^* \quad con \quad \frac{1}{N} q_\varrho^* + \frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{\rho^2} f_2\right) + \frac{1-\nu}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{\rho} f_2\right).$$

Nel procedere innanzi supporremo nota l'espressione di w^* relativa all'anello circolare soggetto sui suoi due bordi alle varie modalità di vincolo su prospettate (incastro, appoggio, libertà). Per tale espressione, come abbiamo già detto nell'introduzione, rimandiamo, in genere, alla letteratura sull'argomento ed, in particolare, alla nostra Memoria, già citata, sull'equilibrio delle piastre anulari.

Ci basti qui notare che, colla sostituzione da eseguire per passare al caso di α generico, tali espressioni di w^* vengono a contenere (cfr. le espressioni [5], [6], [7] di F, f_1, f_2) come funzioni da supporsi note le funzioni w, $\frac{\partial w}{\partial \theta}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}$, $\frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3}$ per $\theta = 0$ e $\theta = \alpha$. Pertanto, per poter effettivamente

usare le espressioni di w^* a cui così si giunge, è necessario predeterminare dette funzioni per $\theta = 0$ e $\theta = \alpha$.

4. Studio di alcune trascendenti intere.

Le espressioni di $w^*(\rho, \lambda)$, di cui al numero precedente, sono quozienti del tipo

$$[8] \qquad w^*(\rho, \lambda) = \frac{W(\rho, \lambda)}{D(\lambda)},$$

con $W(\rho, \lambda)$ e $D(\lambda)$ funzioni intere di λ, e, più precisamente, $D(\lambda)$ determinante dei coefficienti del sistema di 4 equazioni algebriche lineari nelle costanti c_1, c_2, c_3, c_4 che si ottiene imponendo che l'integral generale dell'equazione [3'']

$$w^* = c_1 \rho^{\lambda} + c_2 \rho^{-\lambda} + c_3 \rho^{\lambda+2} + c_4 \rho^{-\lambda+2} + w_0^* \qquad (\lambda \neq 0, 1, -1),$$

con w_0^* integral particolare della stessa equazione, soddisfi alle condizioni ai limiti ad essa associate per $\rho = r$ e $\rho = R$.

Eseguendo i relativi calcoli, si riconosce che $D(\lambda)$ si riduce, a meno di eventuali fattori λ e $\lambda^2 - 1$, alle seguenti trascendenti intere:

se i bordi $\rho = r$ e $\rho = R$ del settore si intendono incastrati o liberi

$$[9] \qquad \varphi_1(\zeta) = \cosh\zeta + b\zeta^2 + c,$$

se uno di detti bordi è appoggiato e l'altro incastrato o libero

$$[10] \qquad \varphi_2(\zeta) = \zeta \operatorname{senh}\zeta + a\cosh\zeta + b\zeta^2 + c,$$

ed infine se ambedue i bordi sono appoggiati

$$[11] \qquad \varphi_3(\zeta) = (\zeta^2 + a)\cosh\zeta + b\zeta^2 + c,$$

con $\zeta = 2\lambda \log q \left(q = \frac{r}{R}\right)$ ed a, b, c funzioni note di ν e di q aventi espressioni diverse da caso a caso.

Applichiamo a ciascuna delle φ_k $(k = 1, 2, 3)$ la formula di Cauchy per l'indicatore logaritmico che, trattandosi di funzioni intere, si scrive, per ogni circuito chiuso s del piano complesso di rappresentazione di $\zeta = \xi + i\eta$ lungo il quale le φ_k mai si annullino,

$$[12] \qquad \frac{1}{2\pi}\int_s d\Omega_k = N_k \qquad (k = 1, 2, 3),$$

con Ω_k argomento di φ_k ed N_k numero degli zeri di φ_k racchiusi da s, ciascuno computato tante volte quante unità sono nel suo ordine.

Si identifichi nella [12] il circuito s con il contorno di un rettangolo di lati $\xi = \pm \xi_0$, $\eta = \pm n\pi$ (n intero) e si facciano tendere ξ_0 ed n all'infinito attraverso una serie di valori tali che, lungo tutto il contorno dei rettangoli corrispondenti, le φ_k mai si annullino.

Essendo tg Ω_k eguale al rapporto tra il coefficiente dell'immaginario e la parte reale di φ_k, si ha da [9], [10], [11] rispettivamente

$$[13] \qquad \operatorname{tg}\Omega_1 = \frac{\operatorname{senh}\xi \operatorname{sen}\eta + 2b\xi\eta}{\cosh\xi\cos\eta + b(\xi^2 - \eta^2) + c},$$

$$[14] \quad \operatorname{tg}\Omega_2 = \frac{\xi\cosh\xi\operatorname{sen}\eta + \eta\operatorname{senh}\xi\cos\eta + a\operatorname{senh}\xi\operatorname{sen}\eta + 2b\xi\eta}{\xi\operatorname{senh}\xi\cos\eta - \eta\cosh\xi\operatorname{sen}\eta + a\cosh\xi\cos\eta + b(\xi^2 - \eta^2) + c},$$

$$[15] \quad \operatorname{tg}\Omega_3 = \frac{(\xi^2 - \eta^2 + a)\operatorname{senh}\xi\operatorname{sen}\eta + 2\xi\eta\cosh\xi\cos\eta + 2b\xi\eta}{(\xi^2 - \eta^2 + a)\cosh\xi\cos\eta - 2\xi\eta\operatorname{senh}\xi\operatorname{sen}\eta + b(\xi^2 - \eta^2) + c}.$$

Tenendo presente che il coefficiente b, comparente nelle espressioni delle φ_k, non si annulla per $0 < q < 1$, le [13], [14], [15] mostrano che tg Ω_k ($k = 1, 2, 3$) tende sui lati $\xi = \pm \xi_0$, per $\xi_0 \to +\infty$, rispettivamente a $\pm$ tg η, mentre tende a zero sui lati $\eta = \pm n\pi$ per $n \to \infty$. Ne segue che, mentre il rettangolo considerato invade tutto il piano, Ω_k ($k = 1, 2, 3$) tende ad incrementarsi, per un intero percorso del contorno s di esso, di infinite volte 2π (più precisamente, il valore asintotico dell'incremento è $4n\pi$).

In conclusione, tornando alla [12], resta dimostrato che *le* φ_k ($k = 1, 2, 3$) *posseggono, nell'intero piano complesso di rappresentazione di* ζ, *un'infinità numerabile di zeri.*

5. Calcolo di w, $\frac{\partial w}{\partial\theta}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}$, $\frac{\partial^3 w}{\partial\theta^3}$ sui lati rettilinei del settore.

Si osservi che, per la definizione stessa [1], $w^*(\rho, \lambda)$ deve risultare funzione intera della variabile complessa λ. Poichè tale non è invece, in generale, l'espressione [8] a cui si giunge risolvendo l'equazione [3'] e relative condizioni ai limiti, ne segue che le funzioni F, f_1, f_2 devono soddisfare a quelle condizioni che si richiedono affinchè il secondo membro della [8] diventi funzione intera di λ e cioè alle condizioni esprimenti che, in ogni zero di $D(\lambda)$, $W(\rho, \lambda)$ abbia, qualunque sia ρ, uno zero di ordine almeno uguale.

Avendo dimostrato al n. 4 che $D(\lambda)$ ammette un'infinità numerabile di zeri, e tenendo presente le espressioni [5], [6], [7] di F, f_1, f_2, si

perviene così ad una successione di infinite equazioni tra le funzioni w, $\frac{\partial w}{\partial \theta}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}$, $\frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3}$ sui lati rettilinei del settore $\theta = 0$ e $\theta = \alpha$.

Affermo che tali relazioni non sono altro che la formula di GREEN relativa all'operatore $\Delta\Delta$ applicata all'incognita w e ad una successione infinita di convenienti $\overline{w}$ (soddisfacenti l'equazione omogenea associata a [3] e le relative condizioni al contorno per $\rho = r$ e $\rho = R$ anch'esse rese omogenee), cioè (7)

$$[16] \qquad \left| \int_r^R \left(w\,\overline{q}_\theta - \overline{w}\,q_\theta - \frac{1}{\rho}\frac{\partial w}{\partial \theta}\,\overline{m}_\theta + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{w}}{\partial \theta}\,m_\theta \right) d\rho \right|_{\theta=0}^{\theta=\alpha} +$$

$$+ \left| \int_0^\alpha \left(w\,\overline{q}_\varrho - \overline{w}\,q_\varrho - \frac{\partial w}{\partial \rho}\,\overline{m}_\varrho + \frac{\partial \overline{w}}{\partial \rho}\,m_\varrho \right) \rho\, d\theta \right|_{\varrho=r}^{\varrho=R} - \int_r^R \int_0^\alpha \overline{w}\,p\rho\, d\rho\, d\theta = 0\,,$$

ove m_ϱ, m_θ, q_ϱ, q_θ si intendono espressi per mezzo di $\overline{w}$ come i corrispondenti simboli senza soprassegno per mezzo di w, e dove, per le proprietà a cui soddisfano le $\overline{w}$, nell'integrando del secondo integrale sono nulli i coefficienti di quelle due delle quattro funzioni w, $\frac{\partial w}{\partial \rho}$, m_ϱ, q_ϱ che non sono note per $\rho = r$ e $\rho = R$ come dati al contorno.

Senza entrare in dettagli sulla dimostrazione della affermazione fatta, mi limito qui a riferire che essa è facile conseguenza dei risultati del n. 3, in base alle proprietà della funzione di GREEN dell'equazione differenziale ordinaria [3'] e relative condizioni ai limiti, seguendo lo stesso schema di dimostrazione che usammo a scopo analogo nell'applicazione che dello stesso metodo del PICONE abbiamo fatta all'integrazione delle equazioni dell'equilibrio elastico di un parallelepipedo rettangolo (8).

Le infinite equazioni [16], a cui porta l'imposizione che l'espressione [8] di w^* (ρ, λ) risulti funzione intera di λ, costituiscono *un sistema di infinite equazioni integrali* FISCHER-RIESZ *a cui richiedere la determinazione di* $w, \frac{\partial w}{\partial 0}, \frac{\partial^2 w}{\partial 0^2}, \frac{\partial^3 w}{\partial 0^3}$ *per* $\theta = 0$ *e* $\theta = \alpha$ o, più precisamente, di quelle due delle quattro funzioni w, $\frac{\partial w}{\partial 0}$, m_0, q_0 che non sono assegnate su tali bordi

(7) La forma, da noi qui data, della formula di GREEN per l'operatore $\Delta\Delta$ è una trasformazione di quella classica che mette in evidenza le quantità di significato meccanico interveniente nel nostro problema ed è valida per w, $\overline{w}$ appartenenti alla classe di funzioni già precisata al n. 2.

(8) Cfr. la mia Memoria cit. in (3).

come dati del problema. E, come abbiamo detto nell'introduzione, sebbene manchi l'effettiva dimostrazione, si hanno ragioni di presumere che le dette infinite equazioni siano realmente sufficienti a determinare le funzioni cercate, a meno di un eventuale spostamento rigido della piastra.

Come prevedibile, nel caso particolare dell'anello circolare ($\alpha = 2\pi$), le condizioni [16] svaniscono (o si riducono tutt'al più alle condizioni di equilibrio delle forze esterne), non esistendo altro che la soluzione $\overline{w} = 0$ (a meno di un eventuale spostamento rigido) che in tutto l'anello soddisfi l'equazione omogenea associata a [3] e le relative condizioni al contorno per $\rho = r$ e $\rho = R$ rese omogenee.

Astronomia. — *La radiazione del Sole a Roma dal 1937 al 1939.* Nota di GIOVANNI L. ANDRISSI, presentata (1) da GIUSEPPE ARMELLINI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

Come è stato detto in precedenti Note (2), sino dal 1929 il R. Osservatorio Astronomico di Roma ha iniziata una serie di misura della radiazione solare con un piroeliometro a pila termoelettrica di tipo Kipp, munito di un disco a « revolver » portante quattro filtri di luce azzurro, giallo, rosso e rosso cupo e collocato dinanzi al foro in cui entra il fascio luminoso.

Le osservazioni sono sempre state fatte a mezzogiorno *vero* in modo di avere il sole alla massima altezza diurna e trascurabili le variazioni dell'altezza mentre si compiono le osservazioni della radiazione totale ed attraverso i quattro filtri, potendosi così ritenere, inoltre, costante l'assorbimento atmosferico, durante le misure.

Le osservazioni sino ad oggi compiute sono state pubblicate in tre serie: dal 1929 al 1930, dal 1931 al 1932, dal 1933 al 1939 e completa il primo decennio di osservazioni la presente Nota che riporta le osservazioni compiute dal 1937 al 1939.

Complessivamente dal 1929 al 1939 vennero compiute più di *tremilacinquecento osservazioni*, delle quali più di settecento della radiazione totale del sole. Tale vasto materiale di osservazione servirà per una prima discussione sull'andamento della radiazione solare a Roma e sulle sue probabili variazioni: sia nei riguardi della radiazione totale, sia nelle diverse lunghezze d'onde ottenute attraverso i quattro filtri del piroeliometro. Nello stesso tempo, eseguendosi al R. Osservatorio di Roma da più di mezzo secolo la misura del diametro orizzontale del sole, sarà possibile così anche confrontare l'andamento della radiazione totale con la variazione del diametro solare, messa in luce dalle predette osservazioni.

---

(1) Nell'Adunanza del 20 dicembre 1940-XIX.

(2) G. ARMELLINI-G. ANDRISSI, *La radiazione del Sole nel 1929 e nel 1930.* « Rend. Acc. Lincei », 1933, vol. XVII, ser. 6ª; ID., *La radiazione del Sole nel 1931 e nel 1932*, « Rend. Acc. Lincei », vol. XVII, ser. 6ª; G. ANDRISSI, *La radiazione del Sole a Roma dal 1933 al 1936*, « Rend. Acc. Lincei », vol. XXVII, ser. 6ª.

Inoltre, i primi dieci anni di osservazioni piroeliometriche potranno permettere di giungere ad un risultato definitivo circa l'assorbimento atmosferico, già discusso in una precedente Nota [1] in base ai primi quattro anni di osservazione. Era stato trovato allora per il coefficiente S di assorbimento a Roma riferito all'energia totale del sole, il valore medio annuo:

$$S = 0{,}393$$

che risultava 1,71 volte maggiore del valore $S = 0{,}23$ ricavato dal Müller e ciò in soddisfacente accordo con il rapporto 1,95 ottenuto con misure fotometriche [2]. Le discussioni ora accennate del decennio di osservazioni piroeliometriche saranno pubblicate in una prossima Nota.

Ricordiamo ancora che le osservazioni furono iniziate il 12 giugno 1929 e continuate fino ai primi di aprile del 1935 all'Osservatorio del Campidoglio e riprese il 20 aprile 1935 nella nuova sede dell'Osservatorio di Roma a Monte Mario dove tutt'ora continuano e che tali osservazioni furono compiute quasi esclusivamente dal dott. Andrissi.

Il minor numero di osservazioni che si può constatare negli ultimi anni del decennio, dipende, oltre che dallo stato del cielo o dalla nebulosità, anche dal fatto che le osservazioni vennero compiute solo nei giorni completamente sereni. In tal modo il minore numero delle osservazioni viene compensato dal maggior peso da assegnarsi loro nelle riduzioni, rispetto alle osservazioni del primo periodo del Campidoglio, quando si voglia ottenere un valore medio della radiazione solare a Roma.

Nella tabella indichiamo con T, A, G, R, RC, le deviazioni osservate dell'ago del galvanometro in corrispondenza alla irradiazione totale del sole ed a quella filtrata con filtro azzurro, giallo, rosso e rosso cupo, tenendo presente che ogni unità corrisponde a 0,0202, calorie-grammi per minuto primo e per centimetro quadrato.

---

[1] G. Armellini-G. Andrissi, *La radiazione del Sole nel 1931 e nel 1932*, not. cit.

[1] G. Armellini, *Sopra l'estinzione della luce nell'atmosfera di Roma.* « Rend. Acc. Lincei », 1918, 2° sem.; G. Andrissi, *Sopra l'assorbimento della luce stellare nell'atmosfera di Roma.* Id., 1928, 1° sem.

TABELLA

Data	*T*	*A*	*G*	*R*	*RC*	Data	*T*	*A*	*G*	*R*	*RC*
1937						1938					
9 gennaio	58.7	15.9	46.1	35.1	30.9	12 febbraio	61.9	19.0	45.2	34.5	30.2
22 »	59.3	17.2	46.6	33.5	29.9	19 »	61.7	20.5	48.7	36.7	32.7
23 »	56.2	17.2	45.1	33.6	30.5	21 »	62.7	20.6	48.3	36.8	32.3
20 aprile	60.1	18.2	44.8	33.8	29.8	23 »	60.1	19.9	46.6	36.6	32.6
22 »	54.9	15.8	44.6	31.8	29.4	24 »	58.6	20.4	44.4	34.9	30.2
23 »	49.8	12.8	38.8	36.6	23.6	28 »	57.8	18.6	46.4	35.9	33.1
7 maggio	58.3	17.0	44.7	33.7	29.1	7 marzo	56.8	20.3	44.3	35.3	31.8
17 giugno	61.9	18.8	47.3	34.9	30.3	8 »	50.9	17.7	39.9	31.4	28.9
18 »	59.6	16.9	46.5	36.1	29.6	9 »	60.4	21.0	46.8	37.8	32.8
21 »	62.4	21.0	49.3	37.2	33.1	14 »	65.5	19.7	49.5	37.6	33.8
1 luglio	62.8	21.2	49.4	37.9	33.9	15 »	66.6	21.4	51.1	39.1	34.4
8 »	54.2	19.3	40.3	30.5	27.3	16 »	62.7	19.3	47.1	35.1	31.3
9 »	55.1	16.2	42.8	31.8	28.1	17 »	56.3	15.1	44.6	34.0	28.6
15 »	57.8	16.2	44.1	31.3	27.0	7 aprile	56.6	18.6	42.6	32.6	28.9
20 »	57.0	17.6	44.3	32.6	28.5	8 »	61.5	20.2	46.7	35.7	31.3
22 »	57.1	15.2	44.8	33.7	29.0	13 »	63.8	19.8	45.0	35.0	31.3
23 »	55.2	15.4	42.9	30.9	27.5	31 maggio	57.6	18.6	45.2	33.4	29.4
28 »	54.2	18.2	40.2	30.4	26.4	1 giugno	60.3	18.9	43.3	32.1	28.1
7 settembre	61.4	18.4	47.6	35.5	31.2	2 »	59.9	17.7	48.7	31.6	28.0
8 »	61.8	21.8	49.9	35.8	32.1	4 »	63.6	20.5	46.0	35.9	31.5
12 ottobre	60.5	21.1	46.1	35.4	31.9	6 »	57.0	19.7	42.4	31.7	27.7
26 »	62.9	20.1	49.2	36.6	32.2	7 »	57.7	16.1	41.0	30.2	25.5
29 novembre	59.1	18.5	47.9	37.2	33.2	8 »	60.6	20.6	45.4	34.4	30.9
1938						9 »	62.4	20.6	45.2	34.9	31.2
31 gennaio	60.8	18.5	46.0	35.2	31.5	10 »	59.4	19.2	43.6	32.0	28.8
1 febbraio	64.9	18.6	48.5	37.6	33.4	17 »	60.0	21.3	44.7	34.6	30.0
5 »	62.6	19.5	48.3	37.0	32.5	18 »	56.1	18.4	42.3	32.4	28.4
7 »	60.6	20.1	47.2	36.6	32.4	22 »	59.2	19.2	43.2	32.7	28.2
8 »	58.2	19.7	43.2	34.2	30.4	23 »	57.9	20.2	42.5	32.5	29.0
9 »	59.0	20.3	45.5	36.4	32.3	24 »	59.3	20.5	43.8	34.3	30.8

(*Segue* Tabella).

Data	*T*	*A*	*G*	*R*	*RC*	Data	*T*	*A*	*G*	*R*	*RC*
1938						1939					
25 Giugno	57.5	20.5	42.5	32.5	29.6	7 Febbraio	61.7	21.7	48.4	38.4	33.7
28 »	57.6	19.3	43.7	32.2	28.2	8 »	67.7	24.3	51.4	41.5	36.5
30 »	53.0	14.5	37.5	27.5	24.0	9 »	63.5	21.5	51.0	40.0	35.0
7 luglio	63.6	22.6	49.2	38.3	33.6	16 »	66.4	22.9	52.9	41.8	36.1
8 »	59.7	21.1	43.1	35.1	31.8	22 »	59.0	20.5	45.0	35.5	31.0
20 »	60.8	23.2	47.6	37.8	33.4	28 »	64.8	22.3	49.5	39.3	35.3
22 »	53.8	16.5	38.5	30.3	26.3	2 marzo	62.0	21.0	48.5	38.0	34.5
28 »	62.8	23.3	48.3	37.7	34.0	3 »	64.8	22.8	51.8	40.8	35.8
29 »	57.5	19.9	45.0	35.8	31.0	10 »	61.0	21.5	46.0	37.0	33.0
30 »	53.3	20.5	40.5	31.5	28.5	14 »	67.8	22.0	52.9	42.2	38.0
1 agosto	52.8	21.2	41.2	32.4	28.2	16 »	67.3	22.3	52.8	41.8	36.8
5 »	59.0	22.5	45.0	35.6	31.5	21 »	65.3	22.7	51.7	40.5	36.5
20 »	54.2	28.0	50.9	43.0	40.0	7 aprile	58.2	22.5	46.0	36.0	32.0
23 »	52.5	22.1	49.8	37.7	32.0	11 »	60.7	21.5	46.2	36.5	30.7
9 settembre	57.8	21.3	44.3	34.8	39.8	12 »	58.4	20.2	43.4	34.4	29.9
13 ottobre	52.5	18.0	39.5	31.2	27.0	13 »	56.5	16.0	41.3	30.6	25.8
18 »	59.2	22.5	45.5	37.0	33.0	14 »	64.2	21.7	49.2	37.9	33.2
22 »	62.8	25.7	50.7	31.4	36.7	17 »	57.0	19.5	42.5	32.5	27.8
24 »	66.7	25.0	54.0	42.0	37.8	17 maggio	60.6	20.6	39.1	38.1	32.8
3 novembre	55.5	18.5	43.0	33.5	29.2	9 giugno	60.0	19.5	44.7	35.0	30.0
8 »	60.8	21.3	48.0	38.8	34.8	22 »	59.0	21.5	44.5	34.7	31.0
19 »	55.5	20.1	44.3	36.2	32.0	26 »	60.3	19.8	44.8	34.0	29.3
5 dicembre	58.4	20.2	46.9	37.4	32.9	30 »	59.5	21.2	44.5	34.8	30.5
29 »	56.7	18.2	44.2	35.2	30.7	1 luglio	62.6	22.3	47.3	37.3	32.3
30 »	56.1	19.0	44.2	36.0	32.0	3 »	63.9	22.7	47.7	36.2	32.5
1939						4 »	67.3	24.3	41.8	40.3	35.3
4 gennaio	54.1	21.8	33.8	29.6	25.6	6 »	58.9	20.9	43.7	34.1	30.1
13 »	58.3	20.8	46.7	37.7	32.8	7 »	55.4	18.1	41.1	31.1	27.1
20 »	60.0	20.3	47.8	36.8	31.8	8 »	55.3	18.1	41.3	30.3	26.5
3 febbraio	60.8	20.8	48.6	39.6	34.9	9 »	54.0	20.0	40.5	31.5	27.5
6 »	63.5	22.5	50.7	40.5	35.5	10 »	57.3	17.7	42.2	33.0	27.7

(*Segue* TABELLA).

Data	*T*	*A*	*G*	*R*	*RC*	Data	*T*	*A*	*G*	*R*	*RC*
1939						1939					
15 luglio	58.0	19.7	43.0	32.7	28.7	18 ottobre	62.3	22.8	50.8	40.0	35.8
18 »	52.3	20.3	39.8	30.8	25.8	24 »	64.2	20.9	51.6	39.8	34.4
19 »	59.6	24.0	45.5	36.0	32.0	6 novembre	55.7	15.7	44.5	32.7	27.6
20 »	52.2	17.1	38.1	28.5	24.1	7 »	59.9	20.4	45.9	35.1	30.4
21 »	57.4	21.9	33.4	33.4	28.9	15 »	56.1	20.6	44.6	35.6	31.1
26 »	66.7	23.7	51.5	39.7	35.0	17 »	62.2	23.2	49.2	39.0	34.0
28 »	67.8	25.8	51.8	40.8	36.0	24 »	63.1	22.5	49.8	40.3	35.8
11 agosto	57.6	18.7	45.6	34.1	28.5	30 dicembre	60.0	21.0	47.0	38.5	34.3

Astronomia. — *Il diametro orizzontale del Sole nel 1938, 1939 e 1940, osservato al R. Osservatorio Astronomico di Monte Mario.* Nota di Gabriella Armellini Conti, presentata (1) da Giuseppe Armellini, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

1. – Le misure sistematiche del diametro orizzontale del Sole, nel momento del suo passaggio al meridiano, furono iniziate da L. Respighi nel 1873, nel R. Osservatorio del Campidoglio a Roma, e vennero ivi continuate quotidianamente, senza interruzioni fino al 29 luglio 1937. E cioè tali misure - costituenti una serie forse unica al mondo per omogeneità e durata – si prolungarono per sessantaquattro anni, fin quando (13 agosto 1937) la Specola Capitolina, dopo centodieci anni di attività (essendo stata fondata nel 1827 dall'abate Feliciano Scarpellini) venne abbandonata e demolita dal Governatorato, mentre il materiale strumentario e bibliografico veniva trasportato nella più atta e vasta sede di Monte Mario, sul primo meridiano d'Italia.

Dopo i primi tre anni di misure visuali, a partire dal 1876, il metodo usato fu sempre quello della proiezione e sempre si è adoperato, a tale scopo, il cannocchiale meridiano di Ertel con obbiettivo di 94 mm. e distanza fuocale di m. 1,132. Con tale strumento, nel momento del passaggio al meridiano, il disco solare assai ingrandito (circa 70 cm.) veniva proiettato sopra un cartone bianco, sul quale si proiettavano pure i fili orari del micrometro. Gli osservatori, generalmente tre o quattro, seduti intorno, determinavano ad occhio e orecchio (servendosi di un cronometro a tempo siderale) gl'istanti in cui il primo ed il secondo bordo del Sole veniva a tagliare sette fili micrometrici.

Dal 1876 al 1879 gli osservatori furono L. Respighi, A. Di Legge e F. Giacomelli; a questi, nel 1880, si aggiunse l'abate A. Prosperi. Avvenuta la morte del Respighi nel 1889, il lavoro venne continuato dai tre astronomi ora nominati a cui, nel 1905, si aggiunse il tecnico P. Mignucci.

---

(1) Nell'Adunanza del 20 dicembre 1940–XIX.

Il prof. A. Di Legge cessò di osservare nel 1915 quando la sordità incipiente gl'impedì di ascoltare le battute del cronometro; l'abate Prosperi osservò quasi fino alla sua morte, avvenuta nel 1921 ed il prof. Giacomelli fino al 1922, anno in cui venne collocato a riposo per raggiunti limiti di età. Nel 1922 il Prosperi veniva sostituito dalla scrivente dott.ssa G. Conti, che da allora in poi ha sempre continuato queste osservazioni. Nel 1923 il prof. G. Armellini, nominato Direttore della Specola, vi si aggiunse anche esso, insieme con la dott.ssa Conti e col Mignucci. Ad essi, nel 1926 si aggiungeva il dott. N. Squillace, a cui successe nel 1934 il prof. L. Gialanella.

2. – I risultati di questa lunga serie di osservazioni ridotti [1] e pubblicati (eccettuato il periodo 1912-1923 che si sta ora riducendo), hanno mostrato che:

a) Il globo solare è soggetto a notevoli pulsazioni per cui il suo raggio (o meglio il raggio della fotosfera) ridotto sempre alla distanza media dalla Terra può variare di oltre un secondo di arco e cioè in realtà di circa ottocento chilometri.

Così, per esempio, nel periodo Di Legge, il raggio solare (ridotto sempre alla distanza media) oscillò tra un minimo di 960″,58. ottenuto come media dei valori osservati nel 1894, ed un massimo di 961″,77 media dei valori del 1909. Analogamente nel periodo Armellini, si ha un minimo di 960″,63 quale valore corrispondente all'anno 1925 ed un massimo di 961″,80 valore corrispondente all'anno 1938.

Prendendo per ascissa il tempo e per ordinata il raggio solare (cfr. *Rendiconti Lincei*, novembre 1925), si trova che il diagramma presenta larghe e ben sensibili oscillazioni.

b) Non ci è stato però possibile di stabilire un periodo di queste oscillazioni – che chiamerò più propriamente *fluttuazioni* – e nemmeno di decidere se esse siano connesse col ciclo undecennale delle macchie. In ogni caso però, possiamo ora dire che, se una tale relazione esiste, vi è certo uno *sfasamento* notevole tra i due cicli.

---

[1] Oltre ai primi lavori del Respighi, pubblicati in « Mem. Lincei », serie II, t. II, e serie III, vol. I, II, VII e XIII, cfr. A. Di Legge, *Sul diametro solare.* Mem. premiata col premio Carpi, in « Mem. Lincei », serie IV, vol. I (1884); A. Di Legge ed A. Prosperi, *Sul diametro solare*, in « Mem. Soc. It. delle Scienze detta dei XL », serie III, t. XII (1899); A. Di Legge ed A. Prosperi, *Osservazioni sul diametro orizzontale del Sole.* (Roma, Off. Poligrafica, 1902); A. Di Legge, *Il diametro orizzontale del Sole dal 1901 al 1910*, in « Rend. Lincei », 1934, sem. I; G. Armellini, *Il diametro del Sole.* Id. id.; 1924, sem. I; 1925, sem. II; 1927, sem. I; 1928, sem. II; 1929, sem. I; 1930, sem. I; 1934, sem. I; 1939, sem. I.

Tali conclusioni erano state pubblicate [1] l'anno scorso da G. Armellini, nell'opera: *Un secolo di progresso scientifico in Italia*, edita dalla S. I. P. S., quando, due mesi or sono, ci è giunta con piacere una breve Nota del dott. B. Meyermann [2] dell'Osservatorio di Gottinga, che riprende nuovamente in esame una serie di osservazioni (disgraziatamente limitate ad un breve periodo e cioè dal 1890 al 1902) sul diametro solare, eseguite eliometricamente in quella specola da Schur ed Ambronn, concludendo anche egli con l'esistenza di pulsazioni solari secondo un ciclo *sfasato* rispetto a quelle delle macchie.

3. – Sarebbe stato doloroso che la magnifica serie capitolina, forse la più importante per omogeneità ed estensione, fosse rimasta interrotta dopo la chiusura di quella specola. E perciò, appena sistemata la specola di Monte Mario, fu iniziata una nuova serie di misure del diametro solare al passaggio al meridiano dell'astro, apportando al procedimento alcune modificazioni – suggerito dai progressi della tecnica – che non avevamo introdotto prima per non alterare l'omogeneità della serie primitiva.

E precisamente ci parve utile di sostituire l'antico metodo « ad occhio e orecchio » con la battuta del tasto cronografico, che conferisce una precisione indubbiamente maggiore. E così pure ci parve utile sostituire alla proiezione sopra lo schermo (dove il bordo solare per grandi immagini appare lievemente sfumato) con la visione diretta, prendendo gli appulsi a 15 fili orari, anzichè a 7.

In conseguenza, ci siamo serviti per le nuove misure dell'ottimo strumento dei passaggi di Bamberg, a cannocchiale a gomito, con l'obbiettivo di mm. 88 di apertura e m. 0,95 di distanza fuocale; strumento solidamente fondato sul terreno e posto in un padiglione che si erige nel giardino della specola. Soltanto, con tale metodo, si ha l'inconveniente che il diametro solare può essere osservato da una sola persona, essendo ovviamente impossibili osservazioni simultanee. Ma ci sembrò che i vantaggi superassero l'inconveniente.

4. – Ciò posto, nella seguente tabella I riporto le osservazioni sul raggio orizzontale del Sole, eseguite col metodo ora indicato, nel R. Osservatorio di Monte Mario; T indica il tempo impiegato nel passaggio al meridiano in secondi siderali, risultante dalla media degli appulsi a 15 fili orari, essendo ogni appulso registrato sulla striscia del cronografo col tasto (cfr. Tab. I).

---

[1] G. Armellini, *Il contributo italiano al progresso dell'astronomia negli ultimi cento anni.* (Estr. dall'opera: *Un secolo di progressi scientifici in Italia*, Roma, Soc. It. Progr. Scienze, 1939–XVII).

[2] B. Meyermann, *Der Sonnendurchmesser*, in « Veroff. Univ. Sternwarte zu Gottingen », n. 63, 1939.

TABELLA I.

Valori osservati della durata del raggio orizzontale del Sole.

a) GIUSEPPE ARMELLINI.

Data	T	Data	T	Data	T
1938		1938		1939	
Gennaio 22	138,82	Novembre 21	138,49	Luglio 24	134,77
Febbraio 1	136,48	Dicembre 7	141,57	» 27	134,26
» 5	135,75	1939		» 28	134,08
» 7	135,27	Gennaio 7	141,75	Settembre 4	128,72
» 14	133,75	Febbraio 3	136,24	» 9	128,27
» 21	132,39	Marzo 6	130,23	» 23	128,15
» 24	131,95	» 20	129,17	» 27	128,29
Marzo 1	130,83	Aprile 3	129,17	Ottobre 7	129,25
» 3	130,37	» 17	130,30	1940	
» 7	129,93	» 21	130,64	Febbraio 5	135,82
» 14	129,48	Maggio 1	132,00	Marzo 15	129,49
» 17	129,37	» 3	132,48	Giugno 27	138,01
» 31	129,10	» 29	136,24	Luglio 6	136,92
Aprile 7	129,43	Giugno 2	136,93	» 9	137,03
» 18	130,08	» 19	138,13	» 12	136,63
Maggio 14	134,20	» 23	137,90	» 24	134,69
Giugno 6	137,23	» 26	137,71	Agosto 27	129,29
» 13	137,76	Luglio 3	137,59	» 29	128,87
» 20	137,97	» 7	137,03	Settembre 3	128,71
Luglio 7	137,16	» 10	136,89	» 19	128,09
Settembre 19	128,35	» 14	136,33	Novembre 25	139,41
Ottobre 17	130,70	» 20	135,43		
Novembre 5	134,56	» 22	135,13		

b) GABRIELLA CONTI.

1938		1938		1938	
Gennaio 25	138,19	Gennaio 31	136,60	Febbraio 9	134,83
» 28	137,49	Febbraio 3	136,14	» 19	132,72

(*Segue* Tabella I: Gabriella Conti).

Data	T	Data	T	Data	T
1938		1938		1939	
Febbraio 22 .	132,27	Luglio 15 .	135,83	Febbraio 2 .	136,29
» 26 .	131,35	» 20 .	135,33	» 7 .	135,29
Marzo 4 .	130,66	Settembre 13 .	128,18	» 9 .	134,71
» 8 .	129,88	» 20 .	128,19	» 16 .	134,45
» 10 .	129,79	Ottobre 6 .	129,17	» 20 .	132,53
» 15 .	129,49	» 7 .	129,14	» 23 .	131,91
» 18 .	129,17	» 10 .	129,63	Marzo 2 .	130,88
» 21 .	128,91	» 11 .	129,65	» 13 .	129,60
» 22 .	128,99	» 14 .	130,44	» 21 .	129,17
» 24 .	129,13	» 18 .	130,89	Aprile 4 .	129,25
» 25 .	128,91	» 20 .	131,22	» 20 .	130,59
Aprile 3 .	129,16	Novembre 2 .	134,25	» 24 .	130,90
» 6 .	129,48	» 3 .	134,54	» 25 .	130,99
» 28 .	131,82	» 7 .	135,20	» 27 .	131,51
Maggio 3 .	132,37	» 8 .	135,43	» 28 .	131,49
» 12 .	133,89	» 14 .	136,81	Maggio 11 .	133,86
» 13 .	134,04	» 15 .	137,15	» 16 .	134,51
» 23 .	135,91	» 17 .	137,61	» 23 .	135,64
» 31 .	136,79	» 18 .	137,94	» 24 .	135,54
Giugno 2 .	136,81	» 24 .	138,79	» 26 .	136,15
» 7 .	137,32	» 28 .	139,81	Giugno 1 .	136,73
» 8 .	137,69	Dicembre 1 .	140,39	» 3 .	137,09
» 9 .	137,73	» 3 .	140,79	» 6 .	137,27
» 17 .	138,05	» 5 .	141,11	» 9 .	137,62
» 23 .	137,93	» 15 .	142,23	» 20 .	137,87
» 24 .	137,99	» 27 .	142,59	» 21 .	137,91
Luglio 1 .	137,54	» 31 .	142,20	Luglio 5 .	137,50
» 4 .	137,60	1939		» 11 .	136,61
» 5 .	137,19	Gennaio 10 .	141,17	» 15 .	136,08
» 8 .	136,99	» 17 .	139,83	» 19 .	135,47
» 14 .	136,15	» 20 .	139,29	» 21 .	135,19

(*Segue* TABELLA 1: GABRIELLA CONTI).

Data	T	Data	T	Data	T
1939		1940		1940	
Luglio 25	134,71	Febbraio 19	132,71	Giugno 24	137,95
» 26	134,37	» 20	132,35	» 25	137,75
» 31	133,59	» 22	132,18	» 28	137,65
Agosto 1	133,18	» 23	131,94	Luglio 1	137,59
Settembre 5	128,75	» 26	131,28	» 3	137,42
» 11	128,21	» 27	131,31	» 5	137,25
» 12	128,10	» 29	131,03	» 10	136,38
» 21	128,04	Marzo 1	130,88	» 11	136,50
» 26	128,19	» 2	130,83	» 15	136,03
Ottobre 9	129,28	» 4	130,45	» 17	135,54
» 18	130,59	» 8	129,95	» 19	135,23
» 27	132,74	» 22	128,89	» 26	134,25
Novembre 13	136,23	Aprile 1	129,24	Agosto 2	133,30
» 20	138,04	» 2	128,99	» 5	132,46
» 24	139,11	» 15	129,95	» 12	131,21
» 30	140,12	» 18	130,51	» 14	130,96
Dicembre 4	140,92	» 19	130,27	» 16	130,58
» 5	141,02	» 22	130,70	» 26	129,44
» 12	142,09	» 23	130,91	» 28	129,18
» 21	142,63	» 30	131,79	» 30	128,93
» 22	142,47	Maggio 10	133,54	» 31	128,63
» 23	142,83	» 13	134,03	Settembre 2	128,75
» 29	142,37	» 14	134,13	» 20	128,17
1940		» 20	135,45	» 23	128,07
Gennaio 8	141,52	» 21	135,61	» 25	128,38
» 12	140,79	Giugno 6	137,31	» 27	128,29
» 16	140,09	» 7	137,52	Ottobre 15	130,53
» 26	138,22	» 10	137,33	» 17	130,78
» 29	137,74	» 11	137,58	» 18	131,07
Febbraio 7	135,13	» 12	137,55	» 19	131,21
» 15	133,61	» 17	137,89	Novembre 11	136,19

(*Segue* Tabella I: Gabriella Conti).

Data	*T*	Data	*T*	Data	*T*
1940		1940		1940	
Novembre 13	136,77	Novembre 27	139,89	Dicembre 16	142,33
» 15	137,05	Dicembre 4	140,97	» 18	142,29
» 20	138,51	» 7	141,49	» 20	142,25
» 22	138,95	» 13	142,11		

c) Lucio Gialanella.

1938		1938		1938	
Gennaio 29	137,01	Maggio 18	134,71	Luglio 29	133,85
Febbraio 4	135,70	» 21	135,26	» 30	133,58
» 8	135,09	» 30	136,58	Agosto 3	133,03
» 18	132,75	Giugno 1	136,73	» 5	132,02
» 23	131,93	» 4	137,09	» 8	132,16
» 25	131,64	» 10	137,61	» 9	131,97
» 28	131,17	» 11	137,69	» 10	131,68
Marzo 5	130,45	» 18	137,87	» 19	130,30
» 9	129,88	» 22	137,92	» 23	130,87
» 11	129,64	» 25	137,83	» 24	129,72
» 16	129,34	» 27	137,80	» 26	129,42
» 28	129,03	» 28	137,78	Settembre 16	128,10
» 29	128,93	Luglio 2	137,52	» 17	128,24
Aprile 2	129,10	» 6	137,08	» 24	128,27
» 9	129,65	» 9	136,79	Ottobre 8	129,30
» 14	130,07	» 16	135,91	» 15	130,37
» 16	130,05	» 18	135,59	» 22	130,80
» 20	130,67	» 19	135,51	» 24	132,06
» 23	130,88	» 21	135,22	Novembre 2	134,02
» 25	131,15	» 22	134,92	» 9	135,73
» 30	131,79	» 23	134,76	» 10	135,90
Maggio 2	132,23	» 25	134,70	» 12	136,26
» 16	134,43	» 26	134,37	» 16	137,28

(*Segue* TABELLA I: LUCIO GIALANELLA).

Data	*T*	Data	*T*	Data	*T*
1938		1939		1939	
Novembre 19 .	137,95	Maggio 10 .	133,40	Agosto 28 .	129,29
Dicembre 2 .	140,49	» 17 .	134,48	» 29 .	129,14
» 12 .	141,61	» 25 .	135,73	Settembre 1 .	128,78
» 24 .	142,43	Giugno 7 .	137,22	» 2 .	128,83
» 29 .	142,42	» 10 .	137,54	» 28 .	128,19
» 30 .	142,40	» 16 .	137,81	Ottobre 2 .	128,48
1939		» 17 .	137,91	» 5 .	128,95
Gennaio 4 .	141,88	» 22 .	137,93	» 6 .	128,90
» 9 .	141,27	» 24 .	137,76	» 16 .	130,27
» 14 .	140,00	» 27 .	137,85	» 17 .	130,65
» 18 .	139,33	Luglio 1 .	137,48	» 21 .	131,40
» 21 .	139,30	» 4 .	137,38	Novembre 3 .	134,01
» 28 .	137,43	» 6 .	137,24	» 6 .	134,85
Febbraio 4 .	135,93	» 8 .	137,00	» 8 .	135,20
» 8 .	135,01	» 12 .	136,46	» 11 .	136,00
» 10 .	134,55	» 13 .	136,31	» 15 .	137,20
» 11 .	134,33	» 18 .	135,62	» 18 .	137,64
» 22 .	132,19	Agosto 2 .	133,19	» 22 .	138,41
» 28 .	131,07	» 3 .	133,13	» 29 .	140,12
Marzo 4 .	130,50	» 4 .	132,65	Dicembre 1 .	140,28
» 10 .	130,08	» 5 .	132,64	» 6 .	140,90
» 11 .	129,83	» 7 .	132,23	» 9 .	141,44
» 15 .	129,33	» 9 .	131,79	» 13 .	141,81
» 25 .	128,88	» 10 .	131,80	» 19 .	142,37
Aprile 1 .	128,95	» 11 .	131,64	1940	
» 5 .	129,16	» 12 .	131,47	Gennaio 3 .	141,90
» 12 .	129,54	» 14 .	131,07	» 13 .	140,70
» 15 .	129,75	» 15 .	130,93	» 31 .	136,81
» 22 .	130,90	» 17 .	130,71	Febbraio 3 .	136,29
» 26 .	131,29	» 18 .	130,50	» 14 .	133,78
Maggio 6 .	132,73	» 19 .	130,31	» 21 .	132,41

(*Segue* Tabella I: Lucio Gialanella).

Data	T	Data	T	Data	T
1940		1940		1940	
Febbraio 24 .	131,66	Giugno 21 .	137,90	Settembre 26 .	128,21
Marzo 7 .	130,04	» 26 .	137,73	» 28 .	128,36
» 9 .	129,67	Luglio 13 .	136,09	Ottobre 5 .	129,01
» 16 .	129,13	» 16 .	135,77	» 7 .	129,11
» 18 .	129,25	» 18 .	135,39	» 8 .	129,40
» 25 .	128,71	» 20 .	135,30	» 14 .	130,08
» 27 .	128,88	» 23 .	134,83	» 16 .	130,42
» 28 .	128,84	» 25 .	134,54	» 21 .	131,47
» 30 .	129,00	» 27 .	134,14	» 24 .	132,08
Aprile 12 .	129,71	» 30 .	133,57	» 31 .	133,54
» 13 .	129,77	Agosto 1 .	133,23	Novembre 8 .	135,42
» 17 .	129,86	» 3 .	132,94	» 9 .	135,59
» 20 .	130,58	» 6 .	132,40	» 16 .	137,18
» 24 .	131,01	» 8 .	132,10	» 19 .	137,87
Maggio 1 .	132,00	» 10 .	131,66	» 23 .	138,58
» 4 .	132,59	» 17 .	130,59	» 26 .	139,51
» 8 .	133,06	» 20 .	130,13	Dicembre 5 .	141,15
» 11 .	133,82	» 22 .	129,70	» 9 .	141,59
» 22 .	135,34	» 23 .	129,69	» 14 .	142,22
» 25 .	136,04	Settembre 5 .	128,44	» 17 .	142,23
« 29 .	136,32	» 6 .	128,41	» 19 .	142,55
Giugno 3 .	136,89	» 12 .	127,97	» 21 .	142,77
» 4 .	137,10	» 13 .	128,12	» 26 .	142,54
» 5 .	137,35	» 18 .	128,05	» 27 .	142,47
» 13 .	137,71	» 21 .	127,93	» 28 .	142,33
» 19 .	137,96	» 24 .	128,26		

5. – Determinate così le durate dei passaggi, dedotte sempre ognuna dalla media di 15 appulsi dei due bordi solari ai fili orari del micrometro, occorre ridurle in secondi equatoriali moltiplicando per il coseno della declinazione del Sole e quindi alla distanza unitaria (o distanza media del

Sole dalla Terra) moltiplicando per la distanza solare (data dalle effemeridi) al momento delle osservazioni. Il calcolo, alquanto laborioso, può semplificarsi per mezzo delle effemeridi pubblicate nel *Berliner Astronomisches Jahrbuch*, che riportano i tempi T nell'ipotesi che il raggio solare R si conservi sempre eguale (visto alla distanza media) al valore di 961″,5 e cioè a 64^s,10 secondi di tempo equatoriali. Infatti, poichè le differenze O–B tra i risultati delle osservazioni e le effemeridi del *Berliner Jahrbuch* sono sempre piccole, torna vantaggioso ridurre queste differenze, ciò che può farsi – data la loro piccolezza – con l'uso di opportuni fattori di riduzione variabili durante il corso dell'anno. Ciò fatto, altro non mi restava che moltiplicare per 15 onde ridurre i secondi di tempo equatoriali in secondi di arco di cerchio massimo e quindi eseguire le medie per ottenere il valore annuale di R, di ciascun osservatore. Nelle riduzioni ho tralasciato le osservazioni del 23 maggio e 22 ottobre 1938, quelle del 7 gennaio, 17 aprile, 19 giugno e 4 settembre 1939 e del 27 giugno e 9 luglio 1940, perchè incomplete, od ostacolate da nubi, o simili. Ho poi eseguito, per ciascun anno, la media ponderata delle medie ottenute da ciascun osservatore, dando a ciascuno di essi un peso proporzionale al numero delle osservazioni eseguite.

Indicando con N il numero delle osservazioni eseguite da ciascuno, ho così ottenuto la seguente

TABELLA II.

Valori medi annuali del raggio solare R *alla distanza unitaria dalla Terra.*

Epoca media	G. ARMELLINI		G. CONTI		L. GIALANELLA		Medie	
	N	*R*	*N*	*R*	*N*	*R*	*N*	*R*
1938,5	25	962″,03	63	962″,04	74	961″,83	162	961″,94
1939,5	24	962 ,01	57	961 ,79	79	961 ,43	160	961 ,65
1940,5	10	961 ,97	80	961 ,68	83	961 ,39	173	961 ,56

6. – Confrontando ciascun osservatore con « l'osservatore medio » e cioè con la media aritmetica annuale ponderata dei tre osservatori, ed eseguendo le differenze, abbiamo la seguente

Tabella III.

Differenze personali relative.

Anno	G. Armellini	G. Conti Armellini	L. Gialanella
1938,5	0″,09	0″,10	— 0″,11
1939,5	0 ,36	0 ,14	— 0 ,22
1940,5	0 ,41	0 ,12	— 0 ,17

Ricordando [1] che per il 1937,5 avevamo trovato per il raggio R del Sole il valore 961″,66, abbiamo infine prendendo le medie la seguente

Tabella IV.

Raggi solari alla distanza media.

1938 ,0	1939 ,0	1940 ,0
R = 961″,80	961″,79	961″,61

Occorre però tener presente che a queste osservazioni non ha preso parte il tecnico P. Mignucci, la cui differenza personale relativa (cfr. Nota citata in *Rend. Lincei*, 1939, sem. I e Note precedenti) è stata sempre costantemente negativa e, nelle medie ponderate, ha diminuito il valore finale del raggio solare ottenuto dagli altri tre osservatori di circa 0,″10–0″,18.

Volendo quindi ridurre le odierne misure all'antico sistema, e cioè ad un osservatore ideale rappresentato dalla media dei quattro osservatori G. Armellini, G. Armellini Conti, L. Gialanella e P. Mignucci occorre togliere questa quantità alle medie poco anzi indicate. Togliendo, p. esempio 0″,14 e tenendo presenti i risultati da noi ottenuti a partire dall'ultimo massimo del raggio solare R, che noi osservammo nel 1935 – e cioè che, secondo le nostre misure, si verificò circa due anni innanzi al massimo delle macchie solari avvenuto nel 1937, come è ben noto – abbiamo il seguente specchietto:

1935,0	R = 961″,76	1938,0	R = 961″,66
36,0	961 ,71	39,0	961 ,65
37,0	961 ,67	40,0	961 ,47

[1] Cfr. G. Armellini, *Il diametro orizzontale del Sole nel 1934, 1935, 1936 e 1937*, in « Rend. Lincei », 1939, sem. 1.

Fisica. — *Metodo di misura rapida e precisa delle frequenze.* Nota di Francesco Vecchiacchi e Alfonso Barone, presentata (1) da Luigi Lombardi, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

1. – Il problema di misurare una frequenza con precisione e nello stesso tempo con rapidità, ricorre frequentemente nell'acustica in quanto i suoni e le oscillazioni su cui si opera sovente sussistono soltanto per brevi intervalli di tempo o variano rapidamente di frequenza.

Il problema si presenta d'altronde anche in altri campi tra cui si potrà citare quello della misura di frequenza a distanza a mezzo di collegamenti radio, soggetti in più di un caso a fenomeni di instabilità o di disturbo da parte di oscillazioni estranee. L'argomento può essere quindi considerato oltre che dal particolare punto di vista acustico, anche nel suo aspetto più generale.

Eviteremo qui per brevità una discussione sulle varie maniere con cui la nozione di frequenza può essere generalizzata dal caso di grandezza periodica a quello di grandezza oscillante « quasi periodica » e riferiremo senz'altro la frequenza ad un singolo ciclo della oscillazione definendola convenzionalmente come l'inverso della durata del ciclo.

A rigore si presenterà in generale il problema di isolare un singolo ciclo tra una successione di cicli non esattamente eguali ovvero non esattamente confrontabili. Scelto un certo istante quale istante di inizio, si tratterà infatti di determinare l'istante in cui il ciclo stesso ha termine. Una discussione a tale proposito potrebbe esulare dallo scopo qui prefissatoci e ci limiteremo ad osservare che, nella grande maggioranza dei casi ricorrenti nella pratica, la difficoltà cade ove si scelga l'origine del ciclo e quindi il suo termine in corrispondenza di un suo punto caratteristico quale ad esempio un determinato massimo o minimo, ovvero un determinato passaggio per lo zero. Delle due soluzioni accennate la seconda risulterà in generale preferibile per più di una ragione e ad essa ci riferiremo essenzialmente.

Avendo riferito la nozione di frequenza ad un singolo ciclo della oscillazione, la frequenza, a rigore, non risulta seguibile nel tempo con assoluta continuità giacchè due successivi valori di essa devono succedersi a distanza di almeno un periodo.

(1) Nell'Adunanza del 20 dicembre 1940-XIX.

Anche le difficoltà che potrebbero derivare da questo fatto cessano di presentare importanza pratica nel caso di oscillazioni la cui frequenza vari non troppo rapidamente nel tempo e cioè nel caso in cui la frequenza relativa ad un ciclo sia solamente di poco diversa da quella relativa ai cicli precedente e successivo. La variazione di frequenza nel tempo si potrà perciò praticamente rappresentare e considerare in questo caso, a guisa di fenomeno continuo giacchè non si richiederà che l'istante di tempo sia determinato con una approssimazione superiore ad un periodo della oscillazione. Si può dunque concludere che nella pratica, eccezione fatta per il caso, che poco ci interessa, di oscillazioni troppo lontane dalla condizione di periodicità, ci sarà lecito riferire convenzionalmente la nozione di frequenza ad ogni singolo istante e parlare di « frequenza istantanea » per l'istante generico di tempo.

2. – La tecnica delle misure di frequenza ad alta precisione è sviluppatissima e specie in questi ultimi anni ha raggiunto un grado di perfezione così elevato da potersi senz'altro asserire che le misure di frequenza si possono effettuare oggi con precisioni sconosciute in altri campi di misura.

Non ci si è sinora troppo preoccupati di ottenere una misura precisa in un tempo molto ridotto e cioè conciliare quanto più è possibile i due termini: rapidità e precisione. Scopo del presente lavoro è quello appunto di studiare la possibilità di attuare misure siffatte mediante l'uso di semplici dispositivi.

Una misura rapida di frequenza richiede anzitutto l'uso di un apparecchio registratore; tale può essere ad esempio un frequenziometro elettronico a deviazione del tipo Vecchiacchi [1] dove il galvanometro sia sostituito con un oscillografo o un'altro apparecchio registratore a piccola costante di tempo. Non staremo qui a descrivere dettagliatamente i diversi tipi di frequenziometri e le loro speciali caratteristiche, per le quali si rimanda ad altro lavoro [1], e ci limiteremo a richiamarne il principio fondamentale.

Come è noto la corrente media I_m che attraversa un condensatore sottoposto ad una oscillazione periodica risulta legata alla capacità C del condensatore, all'escursione $(V_{max} - V_{min})$ della tensione eccitatrice ed alla frequenza f mediante la relazione:

$$I_m = fC\ (V_{max} - V_{min})$$

alla condizione, si intende, che in ogni ciclo si presenti un solo massimo ed un solo minimo.

Pertanto se stabilizziamo l'escursione della tensione e fissiamo la capacità C, la corrente I_m risulta direttamente proporzionale alla fre-

[1] F. Vecchiacchi A. F., VI, 5 maggio 1937, pag. 279.

quenza. Diverse sono le soluzioni che, mediante l'uso di tubi elettronici, permettono la stabilizzazione della tensione e la misura della I_m.

In ogni caso la corrente che attraversa lo strumento di misura nel circuito di uscita del frequenziometro si deve considerare come la somma di una componente continua e di una alternativa che si stabiliscono praticamente senza ritardo. La componente alternativa deve pertanto essere eliminata in modo da registrare la sola componente utile alla misura che è quella continua. Manifestamente tale eliminazione dovrà essere effettuata ad un grado elevato che dipenderà dal grado di precisione richiesto nella misura.

Si rende così necessaria l'introduzione di un filtro passa basso cui resterà immancabilmente associata una costante di tempo tanto maggiore quanto più efficace è l'attenuazione richiesta; si verrà quindi ad incidere sulla rapidità della misura. Il primo problema che si presenta a questo riguardo è dunque quello di stabilire un filtro che, a parità di attenuazione della componente alternativa, presenti una costante di tempo il più possibile ridotta. L'argomento non è stato molto approfondito, tuttavia sia il ragionamento sia l'esperienza hanno portato a stabilire che un filtro parzialmente dissipativo darebbe modo di ottenere il miglior compromesso tra precisione e costante di tempo.

Sarà bene qui ricordare la nozione di costante di tempo di un filtro alla maniera in cui essa viene generalmente intesa. Se ai morsetti di entrata di un filtro passa basso applichiamo una d. d. p. V_0 istantanea, del tipo rappresentato, per esempio, dalla funzione unitaria di Heaviside, la corrente di uscita presenta l'andamento indicato nella figura 1: essa impiega un certo tempo ad attraversare il filtro e fino ad un certo istante t_1 non subisce che deboli ondulazioni; cresce poi bruscamente fino all'istante t_2 ed infine presenta di nuovo delle ondulazioni, che vanno smorzandosi intorno al regime stazionario.

Per parlare di «costante di tempo» occorre fissare gli istanti t_1 e t_2 corrispondenti ai valori della corrente i_1 e i_2 considerati rispettivamente come trascurabili e sufficiente rispetto al valore di regime. L'intervallo $0t_1$ è nella maggioranza dei casi trascurabile e la durata $t_2 - t_1$ viene generalmente chiamata costante di tempo. È superfluo dire che essa dipende dalla scelta arbitraria di i_1 e i_2.

Nel caso che ci interessa, contrariamente a quanto spesso viene fatto e in particolare nelle trattazioni in cui per $t_2 - t_1$ convenzionalmente si assume il valore fornito dalla relazione di Kupfmüller (1), dovremo

(1) Per un filtro passa basso ideale di frequenza frontiera f_1 la relazione di Kupfmüller fornisce una costante di tempo $t = 1/2 f_1$ per tutte le frequenze f nettamente inferiori ad f_1. Se f si avvicina ad f_1 la costante di tempo aumenta; quando $f = 0{,}8\ f_1$ i valori vanno aumentati del 20 %.

riferire l'istante t_2 ad un regime quasi perfetto, privo cioè delle ondulazioni riscontrate.

A tale scopo giova rendere il filtro parzialmente dissipativo disponendo opportuni valori di resistenza in serie con le induttanze. In tal modo, poichè il taglio del filtro diventa meno ripido, da un lato, per avere la stessa attenuazione della componente alternativa si dovrà abbassare alquanto la frequenza di taglio con conseguente aumento della costante di tempo di Kupfmüller, ma d'altro lato si ridurranno le fluttuazioni e quindi diminuirà il rapporto fra il tempo richiesto per ottenere il regime voluto e la costante di tempo secondo Kupfmüller. Sicchè in definitiva si può avere una diminuzione della costante di tempo effettiva quale a noi interessa.

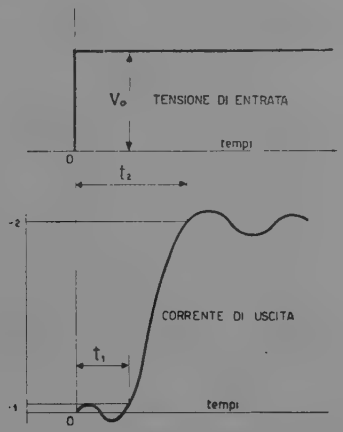


Fig. 1.

È evidente che a parità di attenuazione e tipo di filtro adoperato, avendo tra l'altro fissato un rapporto fra la frequenza di taglio e quella considerata, la costante di tempo risulterà inversamente proporzionale alla frequenza, ciò che possiamo esprimere dicendo che la costante di tempo può misurarsi in numero di cicli della frequenza considerata. Si ha dunque che a parità di tempo assegnato alla misura la precisione relativa risulterà tanto maggiore quanto più alta è la frequenza in esame.

Sorge quindi l'idea di ricorrere ad una moltiplicazione di frequenza della oscillazione per effettuare la misura ad una frequenza più elevata. Il problema non presenterebbe nessuna difficoltà se potessimo disporre di un mezzo semplice per ottenere rapidamente una frequenza multipla secondo un rapporto stabilito anche quando la frequenza base si debba supporre indeterminata entro un certo intervallo. Ciò non è, e l'oscillazione che si ottiene come risultato della moltiplicazione, qualunque sia il procedimento adottato, non sarà mai una oscillazione esattamente

periodica poichè presenterà in genere una modulazione di ampiezza e di frequenza aventi periodo eguale a quello della oscillazione base. Infatti qualunque sistema di moltiplicazione è caratterizzato da una propria frequenza di oscillazione naturale o di risonanza che non coinciderà in generale con un multiplo della frequenza base poichè questa ultima è incognita.

La figura 2 mostra schematicamente come si verifica il fenomeno sopra accennato nel caso di moltiplicazione ottenuta a mezzo di multivibratore sincronizzato, sistema che si è dimostrato uno dei più adatti allo scopo. Come si vede, in questo caso, praticamente sussiste la sola modulazione di frequenza.

La modulazione di ampiezza può presentarsi in altri sistemi di moltiplicazione, ma vediamo subito che essa non genera alcun inconveniente poichè, come è stato già detto, nei frequenziometri elettronici l'ampiezza

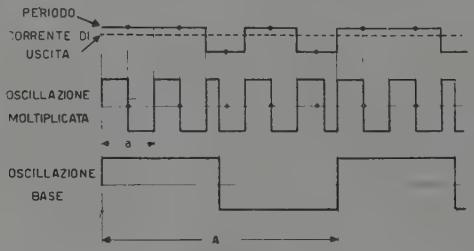


Fig. 2.

della oscillazione di entrata non ha influenza sulle misure, in seguito alla stabilizzazione effettuata nell'interno dell'apparecchio.

Per quanto riguarda la modulazione di frequenza è ovvio che essa comporterà una modulazione di ampiezza sulla componente continua fornita dal frequenziometro. Si può dunque osservare che per il fatto del non perfetto accordo del moltiplicatore si sovrappone alla componente che fornisce il valore di frequenza, una nuova componente alternata (oltre a quella per cui è stato disposto il filtro) avente la frequenza base. Questa nuova componente è però di ampiezza assai ridotta tanto da rappresentare un effetto di secondo ordine. Possiamo facilmente renderci conto che se il rapporto di moltiplicazione non è eccessivo e la frequenza da misurare varia in un intervallo limitato, in modo da rendere possibile un più perfetto accordo della frequenza del circuito moltiplicatore, allora la componente indesiderata si riduce ad un grado tale che praticamente ogni suo effetto nella registrazione viene eliminato purchè la costante di tempo del filtro comprenda un numero anche ridottissimo di cicli dell'oscillazione base.

La corrente di uscita del filtro collegato al frequenziometro presenta quindi l'andamento indicato dalla linea tratteggiata della figura 2.

Praticamente possiamo pensare di moltiplicare la frequenza per un fattore che non superi, ad esempio, 10 se vogliamo mantenerci nelle condizioni citate.

Nei casi in cui la costante di tempo fosse già accettabile per la frequenza della oscillazione base, il vantaggio offerto dalla moltiplicazione potrebbe permettere peraltro di ricorrere ad un procedimento di conversione di frequenza per sottrazione allo scopo di aumentare la precisione della misura. Si può cioè far « battere » l'oscillazione moltiplicata con una oscillazione ausiliaria di frequenza costante ed inviare al frequenziometro la differenza fra le due, stabilita ad un valore discretamente più basso. In tal caso possiamo ottenere un forte aumento nella variazione percentuale della frequenza di eccitazione con conseguente aumento di sensibilità dell'apparecchio.

In generale, una misura precisa presuppone che la frequenza incognita resti compresa in una gamma tanto più limitata quanto maggiore è la precisione voluta. Si richiederà allora che tutta l'escursione dell'elemento registratore corrisponda soltanto a questo ridotto intervallo di frequenza. Tale risultato potrebbe ottenersi ad esempio differenziando l'uscita del frequenziometro, ma un attento esame del caso più generale ci consiglierà una soluzione diversa.

Dobbiamo infatti supporre in generale che l'oscillazione in esame sussista solo in un certo intervallo di tempo *a priori* non determinabile, ovvero che al di fuori di questo intervallo la sua frequenza sia molto lontana dalla ristretta gamma sottoposta alla misura. In tal caso la componente continua della corrente di uscita del frequenziometro subirà variazioni notevoli per portarsi, nell'istante opportuno, al valore dovuto, mentre la variazione che compete all'intervallo di frequenza in cui si effettua la misura sarà in generale assai piccola di fronte alla escursione totale. Non si può pensare ad una compensazione della corrente non utilizzata dato il carattere di instabilità ed indeterminazione della frequenza al di fuori dell'intervallo di misura.

Si potrà invece ricorrere con vantaggio ad un multivibratore che ecciti permanentemente il frequenziometro ad una delle frequenze limiti dell'intervallo in cui si presuppone debba trovarsi la frequenza incognita. È ovvio pertanto che l'intervallo di sincronizzazione del multivibratore dovrà coincidere all'incirca con quello di misura. In tal modo la compensazione della corrente di uscita che compete alla frequenza propria del multivibratore è facilmente attuabile mentre, appena l'oscillazione esterna sincronizza il multivibratore, si avranno dopo la compensazione per le medesime variazioni di frequenza, variazioni relative di corrente assai ampie. Sarà così possibile conseguire precisioni molto elevate.

L'uso del multivibratore risulta poi utilissimo per un altro motivo: mentre infatti si sincronizza sulla oscillazione impressa in un tempo corrispondente a poco più di un periodo, esso comporta all'istante della misura una variazione del regime del frequenziometro molto più moderata e contribuisce con ciò ad aumentare la rapidità della misura.

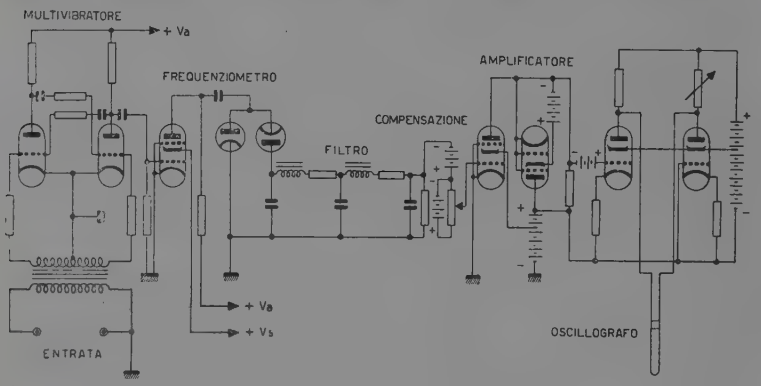


Fig. 3.

3. – Sulla base delle considerazioni fin qui fatte circa il modo di ottenere il migliore compromesso tra rapidità e precisione è stato realizzato un dispositivo il cui funzionamento ha soddisfatto ottimamente alle prerogative desiderate.

Lo schema elettrico di un tale dispositivo è riportato in figura 3. Esso è stato progettato per le frequenze acustiche, ma ovviamente il suo principio è valido anche in altre gamme di frequenza.

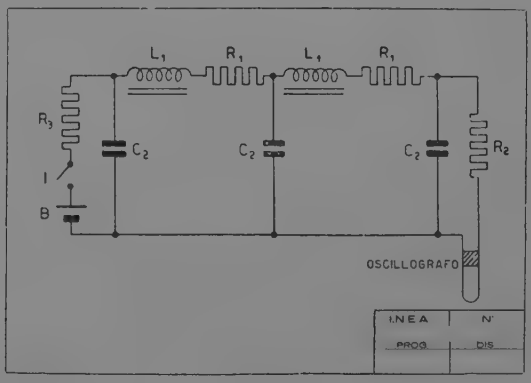


Fig. 4.

Il primo stadio del circuito è costituito dal multivibratore che viene sincronizzato nell'intervallo di misura dalla oscillazione di entrata, con un rapporto di moltiplicazione che può variare da uno a qualche unità, ed eccita il frequenziometro elettronico che segue. Nel circuito di misura di quest'ultimo è inserito, come si vede, il filtro semi-dissipativo per l'eliminazione della componente alternativa.

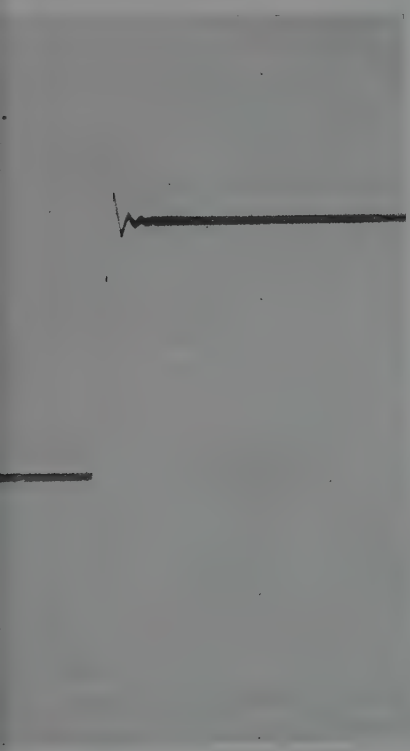


Fig. 5.

Fig. 6.

Particolare cura è stata posta nell'attuazione di tale filtro onde ovviare agli inconvenienti cui nel corso della presente Nota è stato fatto cenno. Lo schema della fig. 4 riporta la disposizione sperimentale usata per lo studio del periodo transitorio del filtro. Le resistenze R_3 ed R_2 sostituiscono i carichi su cui è chiusa l'entrata e l'uscita del filtro quando esso è inserito nel circuito dell'apparecchio. Le resistenze R_1 vengono inserite allo scopo di rendere il filtro parzialmente dissipativo. Le varie costanti del filtro e della terminazione sono fissate in modo che l'inter-

vallo delle frequenze di misura si trovi convenientemente al di sopra della frequenza di taglio, sicchè, in regime stazionario, una grandezza alternativa avente la frequenza di misura venga convenientemente attenuata dal filtro. La batteria B fornisce la f. e. m. che bruscamente viene applicata al filtro a mezzo dell'interruttore I. Gli oscillogrammi delle figure 5 e 6 mostrano il regime transitorio del filtro nel caso di $R_1 = 0$ (fig. 5) e di R_1 eguale alla reattanza presentata dalle bobine d'induttanza L_1 per le frequenze in giuoco (fig. 6). L'aver introdotto la dissipazione comporta, come si vede, un vantaggio notevolissimo.

Ai capi della resistenza su cui è chiusa l'uscita del filtro, si localizza la tensione utile alla misura. La parte di essa che compete alla oscillazione base del multivibratore viene compensata in maniera opportuna, mentre quella relativa allo scarto fra la frequenza in misura e quella della oscillazione base, squilibra il sistema e viene amplificata convenientemente dal successivo stadio di amplificazione per tensioni continue, costituito da un pentodo a forte pendenza avente come carico di placca lo spazio anodico di un tubo elettronico analogo. Tale stadio non rappresenta ovviamente l'unica soluzione per l'amplificazione desiderata, tuttavia esso si è dimostrato abbastanza efficiente e stabile specie se si ha cura di accendere i tubi alquanto prima della misura allo scopo di stabilizzarne l'emissione elettronica. L'ultimo stadio costituisce il complesso di registrazione ed è realizzato con due tubi di potenza atti a fornire le correnti necessarie alla registrazione, disposti secondo uno schema a ponte sulla cui diagonale è inserito l'equipaggio oscillografico. La precisione delle misure ottenute è tale che per una variazione del 3 % nella frequenza di eccitazione si copre l'intera estensione della carta di registrazione di circa 10 centimetri con una perfetta linearità nella risposta; ciò comporta, con l'equipaggio adoperato, una escursione di circa 10 mA della corrente finale di misura.

Possiamo dire che con il dispositivo descritto questa precisione può essere, entro certi limiti, aumentata a volontà se si riduce l'intervallo di frequenza in esame e si aumenta la sensibilità dell'equipaggio oscillografico o dell'amplificatore associato.

La rapidità della misura è legata al tempo che l'apparecchio impiega a raggiungere le condizioni di regime permanente; tempo che d'altra parte risulta quasi del tutto localizzato nel transitorio del filtro e che, come si è visto, è sufficientemente breve e tale da soddisfare largamente le esigenze delle misure acustiche.

Riguardo al compromesso fra rapidità e precisione, risulta in linea di massima dalle prove eseguite, che, con l'uso della moltiplicazione e per frequenze variabili in un intervallo limitato, in quattro o cinque periodi della oscillazione base si possono ottenere precisioni dell'1 ‰ ed anche superiori.

Le applicazioni cui si presta questo apparecchio sono molteplici; citeremo per esempio quelle nel campo musicale in cui spesso i suoni presentano caratteri tali da rendere necessaria una misura rapida e, in determinati problemi, precisa. Così sarà possibile misurare la frequenza delle note per qualsiasi tipo di strumento anche durante una

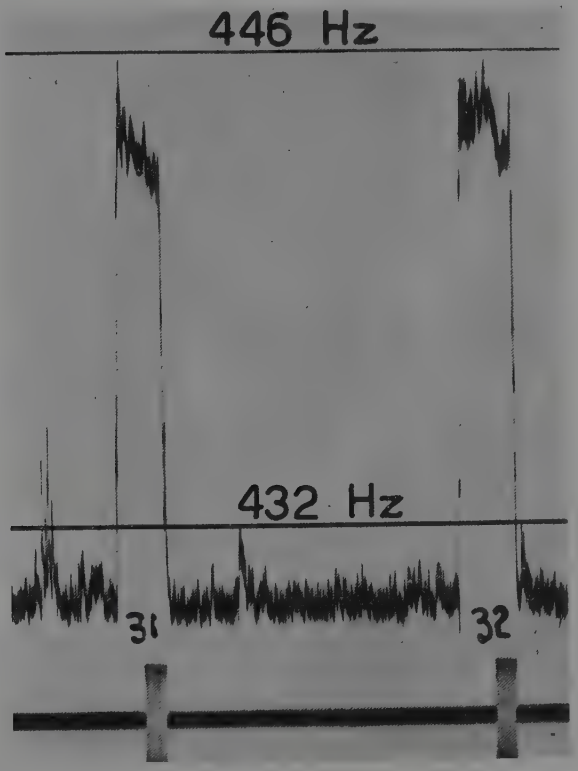


Fig. 7.

complessa esecuzione musicale e seguire nel tempo la forma e l'entità delle fluttuazioni di frequenza avvenute in ogni singola nota.

Bisognerà allora isolare la nota in esame, e se si vuole poter misurare più note passando rapidamente dalla condizione per cui l'apparecchio è predisposto per una nota alla condizione per cui è predisposto per un'altra, basterà usare un opportuno commutatore per cambiare la frequenza dell'onda base e, contemporaneamente, se occorre, le costanti che caratterizzano i filtri.

L'esempio di registrazione della figura 7 si riferisce alla frequenza della nota La_3 emessa durante un'esecuzione musicale.

Applicazioni altrettanto interessanti potrebbero presentarsi nello studio dei fenomeni in regime transitorio siano essi elettrici, acustici o meccanici e i risultati saranno in genere tanto più aderenti alla realtà fisica quanto più il ritardo dell'apparecchio sarà trascurabile.

Gli Autori ringraziano vivamente il Presidente dell'Istituto Nazionale di Elettroacustica Senatore Luigi Lombardi, per l'interessamento da lui mostrato a questo lavoro.

Zoologia. — *Sulla maniera di fecondazione della femmina negli « Stylopidae » (Insecta, Strepsiptera).* Nota (1) dell'Accademico Filippo Silvestri.

Dopo avere scoperto il particolare modo di fecondazione degli Strepsipteri della fam. *Mengenillidae* (2), ho voluto estendere le mie osservazioni ad una specie della famiglia degli *Stylopidae*, appartenente allo stesso ordine, ma molto diverso per avere le femmine parassite per tutta la durata della loro vita.

La scelta è caduta sull'*Halictophagus tettigometrae* Silv., parassita dell'Omottero Fulgoride *Tettigometra impressifrons* Muls. et Rey.

Debbo ricordare che le femmine degli Stilopidi nell'ultimo stadio, pur restando colla maggior parte del corpo in quello dell'ospite, sporgono da esso per breve tratto (nell'*H. tettigometrae* per mm. 0,20) col capo e coi primi due segmenti toracici molto accorciati, protetti da un dermascheletro relativamente robusto eccettuata la parte mediana ventrale cefalo-protoracica, che è coperta da una sottile membrana, e rivolti colla faccia ventrale in alto, se situati al dorso e in fuori se di lato o in basso se situati eccezionalmente sul ventre, in modo che il maschio possa avere sempre libera la faccia su cui si trova la membrana cefalo-protoracica ventrale, attraverso la quale introduce il pene (3).

Nelle femmine degli Stilopidi Siebold (1839) fu il primo a descrivere i tubi ventrali comunicanti colla camera ventrale e a indicare il loro ufficio di vie di passaggio delle larve neonate per uscire attraverso la membrana cefalo-protoracica ventrale. Egli chiamò detti canali « Brutknal » e non si pronunciò sul modo come poteva avvenire la fecondazione in questi insetti che avevano sporgente dal corpo dell'ospite

(1) Presentata nell'Adunanza del 20 dicembre 1940-XIX.

(2) Silvestri F., *Descrizione preliminare di una specie nuova di « Mengenilla » (M. spinulosa, Insecta Strepsiptera) della Sicilia e notizie sul suo ciclo e sul particolare modo di fecondazione*; in questi stessi « Rendiconti », ser. VII, vol. I, pag. 614-618.

(3) Nella specie *Corioxenus antestiae* Blair il Kirkpatrick (« Trans. ent. Soc. London », vol. 86 [1937], pag. 314) ammette che la fecondazione avvenga attraverso 2 aree laterali (che chiama « window ») del cefalo-torace.

soltanto una breve parte anteriore cefalo–toracica mentre tutto il resto era nascosto, immerso nel lacunoma e protetto dal dermascheletro dello stesso ospite. Nassonov, che fece uno studio assai interessante sugli Stilopidi (1893), confermò la funzione dei tubi ventrali quale vie di passaggio delle larve neonate e quanto al modo come avveniva la fecondazione scrisse che gli era sconosciuto.

Meinert (1896) fu il primo a chiamare i tubi ventrali « Befruchtungkanal » e ad ammettere la fecondazione per mezzo del pene introdotto in detto canale fino a lasciare lo sperma sulle aperture dei tubi ventrali senza dare però una prova e senza aggiungere nulla a quanto avevano scritto Siebold e Nassonov e quindi solo per supposizione. Anche il Pierce (1909) scrisse a proposito della copula di una specie di Stilopide del genere *Crawfordia* Pierce: « Fertilization was probably effected by the release of the brood chamber or in the alimentary canal », ma nessun autore potè dare una prova, fino al 1924, del reale modo di entrata degli spermatozoi nel corpo degli Stilopidi. D'altra parte la penetrazione attraverso la camera ventrale e i tubi ventrali parve tanto straordinaria e poco ammissibile che già il Nassonov (1892) e il Perkins (1892) e il Brues (1903) ritennero che la riproduzione degli Strepsipteri dovesse essere prevalentemente partenogenetica e Smith e Hamm (1914) ammisero questa sola forma di riproduzione escludendo completamente quella anfigonica; ma la Hughes–Schrader studiando con metodo citologico la riproduzione nello stilopide *Acroschismus wheeleri* Pierce osservò la copula varie volte e scrisse: « The crescentic slit on the cephalothorax, which is always closed in virgin females, shows a slight swelling and stretching of the lips, and may easily be forced open with a needle. It is into this slit that the penis of the male is inserted during copulation. The spermatozoa are thus liberated in the brood canal and probably make their way into the body cavity through the trumpet–shaped ducts, penetrating between the cells of the delicate epithelium which lines the inner ends of the ducts. Although I have never seen sperm fixed while actually passing through these epithelial barriers, I do find them, rarely, within the ducts and the brood canals of females killed two hours after copulation. The extreme difficulty of procuring the material, has prevented a more exact determination of this point. It is certain, however, that the crescentic slit and the brood canal, together with the four trumpet–shaped ducts, function in a double capacity, first constituting the apparatus for conveying the spermatozoa to the eggs and later serving as the passageway through which the young larvae reach the outer surface of the host ».

Dopo la pubblicazione della Schrader, quantunque essa dichiarava che la scarsezza del materiale le aveva impedito di determinare più esattamente la via seguìta dagli spermatozoi dopo la copula, nessuno più

dubitò che la fecondazione negli Stilopidi avesse luogo col passaggio degli spermatozoi attraverso la camera larvegredienti (canale larvale) e i tubi larvesuttori (canali genitali), come si desume anche dai trattati più recenti (Ulrich 1927, Meixner 1935) (1).

Io dopo la scoperta del modo di fecondazione delle femmine nei *Mengenillidae* sospettai che anche negli Stilopidi essa dovesse aver luogo in modo diverso da quello ammesso fino ad oggi ed ebbi dalle osservazioni condotte sulla copula e sulla fecondazione nell'*Halictophagus tettigometrae* la prova lampante dell'errore, che si sosteneva.

I maschi fuoriescono dal pupario la mattina tra le ore 6 e le 8 sollevando a guisa di opercolo il dermascheletro corrispondente al capo e volano via con movimento rapido in cerca di femmine di *Tettigometra impressifrons* nello stesso nido di *Tapinoma* o anche di altro nido. Trovata una Tettigometra avente una femmina di *Halticophagus* sporgente, il maschio riconosce subito se essa contiene ova allo stadio di ovocite di 1° ordine oppure ova a sviluppo più o meno avanzato, perchè nel secondo caso esso non manifesta alcuna attrazione per la femmina, mentre nel primo le si avvicina rapidamente, si attacca colle mandibole alla parte basale ventrale-laterale del mesotorace, piega l'addome fino a portare violentemente la sua parte posteriore contro la membrana cefalo-protoracica e ad introdurvi il pene. In tale posizione colle ali rivolte in alto resta pochi secondi, di regola 5 a 10, poi distende l'addome sollevandosi in alto e in dietro e si distacca.

Lo stesso maschio può fecondare più volte (io l'ho visto fino a 3 volte) la stessa femmina ad intervallo di qualche minuto, se gli si permette di tornare in presenza di essa o fecondare tre femmine diverse (almeno in prove condotte in tubi di vetro); ma condizione essenziale è che la femmina contenga ova che non abbiano iniziato lo sviluppo. Potendo il maschio riconoscere la femmina, che non si trova nello stato adatto, deve esso percepire qualche particolare odore emanato dalle femmine con ova complete allo stadio di ovocide di 1° ordine, odore che invece non è più prodotto quando le ova hanno cominciato lo sviluppo. La femmina di *Halticophagus*, ripeto, può essere fecondata più di una volta, ma solo a breve distanza dalla 1ª copula, perchè più tardi quando l'ovo comincia a svilupparsi (il momento preciso non è accertato, ma probabilmente coincide colla formazione dei due pronuclei) essa non è ricercata dal maschio.

---

(1) Ulrich, W., *Strepsiptera. Fächerflügler.* « Biologie der Tiere Deutschlands » (1927), XXIII, n. 41, pagg. 1–103, Berlin.

Meixner J., *Strepsiptera Kirby* (1813). *Fächerflügler oder Kolbenflügler*, in Kükenthal W., *Handbuch der Zoologie* (*Insecta* 2) (1933–36), pagg. 1347–1382, Berlin.

Nell'atto della copula, coll'introduzione del pene attraverso la membrana cefalo-protoracica ventrale, gli spermatozoi vengono immessi in gran numero nel lacunoma toracico, da dove a poco a poco arrivano fino all'estremità posteriore dell'addome.

In femmina fecondata da mezz'ora si vedono nella cavità ventrale del torace (dal protorace in dietro) gli spermatozoi in grande quantità e non se ne trovano affatto nella camera ventrale (camera larvegredienti) nè nei tubi ventrali (tubi larvesuttori), quindi è certo che nell'atto della copula il pene del maschio viene introdotto nella cavità del torace attraverso la membrana cefalo-protoracica e non nella camera ventrale.

Non può esservi dubbio che un tale modo di fecondazione della femmina deve essere uguale per tutti gli Stilopidi, perciò è naturale chiedersi una spiegazione della diversa affermazione della HUGHES-SHRADER. Innanzi tutto bisogna tenere presente che essa aveva scritto: « The extreme difficulty of procuring the material has prevented a more exact determination of this point »; perciò doveva avere nel suo animo almeno qualche dubbio sulla normalità di quanto aveva osservato e che era: « I do find them (spermatozoi) rarely within the ducts and the brood canals of females killed two hours after copulation ». Data la dichiarata rarità della presenza di spermatozoi nella camera ventrale (brood canal) e nei tubi ventrali (ducts) può darsi che nel sezionare la femmina qualche spermatozoo sia stato trasportato via dal suo posto normale (lacunoma) della parte ventrale del torace alla detta camera e nei tubi. Questa a me sembra che possa essere la spiegazione dell'errore involontario della HUGHES-SCHRADER.

Dopo queste mie osservazioni anche sugli Stilopidi si deve ritenere che in tutti gli Strepsipteri la fecondazione della femmina è extravulvare e che nei *Mengenillidae* ha luogo attraverso qualunque parte della parete del corpo (vengono così gli spermatozoi introdotti in un punto qualsiasi del lacumona da dove poi colla linfa e coi propri movimenti possono spostarsi per tutta la parte interna del corpo, che contiene ova mature libere), mentre negli *Stylopidae* ha luogo attraverso la membrana ventrale cefalo-protoracica e in tal modo gli spermatozoi sono introdotti nella parte ventrale del lacumona del torace da dove ugualmente possono colla linfa e coi propri movimenti arrivare a tutte le ova, che sono ugualmente libere in tutto il lacunoma.

Fisiologia. — *L'opera scientifica di Adolfo Montuori nel campo della Fisiologia.* Comunicazione (1) di SILVESTRO BAGLIONI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

ADOLFO MONTUORI (1869–1918) laureatosi a Napoli, in medicina e chirurgia nel 1892, svolse il primo dodicennio della sua attività di ricercatore e di insegnante presso quella R. Università nell'Istituto di Fisiologia diretto dall'ALBINI, dapprima come assistente, dal 1892 al 1896, poi come coadiutore dal 1896 al 1905. Libero docente in Fisiologia dal 1899; supplì nell'insegnamento ufficiale di Fisiologia il suo Direttore malato, dal 1902 al 1904.

Il suo secondo periodo di attività scientifica, dal 1905 al 1912, si svolse presso quel magnifico centro di ricerche biologiche dei viventi marini che era ed è la Stazione zoologica di Napoli, nel reparto di Fisiologia e di Chimica fisiologica, presso il quale MONTUORI ideò e compì la sua importante opera sulle ossidazioni organiche.

Nel suo terzo periodo di attività, che va dal 1913 alla sua immatura scomparsa, trasferitosi a Roma e ottenuto il posto di insegnante di fisiologia e poi di Preside nel R. Istituto di Magistero per l'Educazione fisica, continuò le sue preferite ricerche di Fisiologia presso l'Istituto di Fisiologia della R. Università diretto da L. LUCIANI, occupandosi anche di problemi di Fisiologia applicata all'Educazione fisica.

L'opera svolta dal MONTUORI nel campo delle ricerche sperimentali di fisiologia è caratterizzata specialmente da una intima coerenza logica, che dimostra la sua particolare dote di porre ed affrontare in fondo pochi, ma capitali problemi, nella cui soluzione pratica egli si serve di metodi attinenti alla fisica o alla chimica, adattandoli, non raramente mediante opportune modificazioni sperimentali, allo scopo di risolvere il problema proposto.

Come chiaro e logico è il suo modo di procedere nell'impostazione e nella soluzione del problema, altrettanto chiaro e modesto è il modo di

(1) Letta nell'Adunanza del 17 gennaio 1941–XIX.

esporre nei suoi scritti i risultati e le deduzioni scientifiche, che non sconfinano mai al di là e al di sopra delle conclusioni immediate, senza cioè salire alle vette di generalizzazioni teoriche, che se possono momentaneamente soddisfare, non raramente sono condannate a crollare col progredire delle ricerche.

Questo fu forse il motivo per il quale importanti risultati delle sue ricerche rimasero quasi inavvertiti, mentre invece meritavano un ampio riconoscimento, come recenti e recentissime acquisizioni l'hanno luminosamente dimostrato.

Non sono numerose le pubblicazioni alle quali affidò il frutto del suo continuo e paziente lavoro scientifico; ma alcune di esse rivelano pregi di primo ordine. In poco più di quaranta (circa quarantaquattro) Note e Memorie delle quali specialmente le prime sono pubblicate in riviste e giornali di medicina non accessibili o almeno non consultati dai cultori di fisiologia, si trova tutta la sua produzione scientifica.

I. – L'Azione glicoinibitrice della secrezione interna del pancreas.

Dei primi lavori, compiuti nell'Istituto di Fisiologia di Napoli, meritano oggi una particolare considerazione quelli che si riferiscono al complesso e per tanti anni intricato problema del metabolismo del glicosio specialmente in rapporto alle funzioni epatiche e pancreatiche. Con la memorabile scoperta del diabete sperimentale, fatta contemporaneamente (nel 1887) in Italia dal De Dominici e in Germania dal Minkowski e v. Mering, che cioè coll'estirpazione del pancreas si provoca negli animali un grave diabete, che per la sua origine fu poi indicato col nome di diabete pancreatico e identificato con una forma analoga nell'uomo, si fondò la dottrina che il pancreas mercè la sua secrezione interna interviene nella regolazione del metabolismo interno del glicosio, la cui sorgente principale per le precedenti classiche ricerche del sommo fisiologo francese C. Bernard era d'altra parte stato riconosciuta dipendente dalla funzione amilogenetica e glicogenetica del fegato.

Montuori attratto dalla particolare importanza di queste allora recenti scoperte, mediante una serie di ricerche compiute e pubblicate nel 1895 si propose di chiarire i rapporti esistenti tra il pancreas e il fegato nei riguardi del metabolismo glicidico. Il titolo delle tre brevi ma importantissime Note, i cui risultati furono riconosciuti degni di richiamare l'attenzione di tutti i fisiologi dell'epoca dal Luciani, che li riassunse e lumeggiò nel primo volume del suo trattato di Fisiologia dell'uomo, indicano esattamente l'argomento trattato; la prima è sull'azione glicoinibitrice del secreto pancreatico, la seconda sull'origine epatica e la terza sull'importanza del fegato nella produzione del diabete pancreatico, pubblicate rispet-

tivamente nella *Riforma Medica*, nei *Rendiconti della R. Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli* e nella *Gazzetta degli Ospedali*, e come ampi riassunti negli *Archives italiennes de Biologie*, voll. XXIV e XXV. Di queste tre Note brevi ma dense di contenuto di nuovi fatti, che nell'epoca in cui comparvero non furono (e forse non potevano essere) apprezzate nel loro giusto valore, è specialmente la prima, sull'azione glicoinibitrice del secreto pancreatico, che oggi, dopo le numerosissime ricerche sull'argomento, si può dire assurge al significto di una vera scoperta, che almeno di cinque lustri ha preceduto la scoperta dell'ormone (insulina) pancreatico, che esercita appunto un'azione glicoinibitrice sulla glicemia e sulla glicogenesi epatica. Il Montuori giunse a questa scoperta per via indiretta; avendo egli visto che se al fegato estirpato ad un animale si aggiunge un estratto di pancreas, si forma nel fegato (secondo le classiche ricerche di Bernard) per un processo post–vitale una quantità di glicosio (a spese del glicogeno ivi accumulato in vita, e solo del glicogeno, come lo stesso Montuori ha dimostrato nella seconda Nota di questa serie) minore di quanto non si aggiunge estratto pancreatico, suppose che questa azione inibitrice dell'estratto pancreatico si dovesse esplicare anche in condizioni di vita dell'animale e fosse la sua mancanza la causa principale del diabete sperimentale.

Guidato da questa ipotesi Montuori volle sperimentalmente stabilire, in un cane spancreato, secondo il metodo di De Dominici, e quindi affetto da diabete sperimentale, l'azione esercitata sulla eliminazione dello zucchero coll'urina (glicosuria) dalla iniezione di estratto pancreatico (estratto acquoso o glicerico della ghiandola) in una piccola vena del mesentere, allo scopo di far giungere l'estratto direttamente al fegato per la breve via della vena porta. Mediante il dosaggio della quantità di zucchero eliminato coll'urina, vide che la quantità totale e percentuale dello zucchero nell'urina dell'animale tenuto per vari giorni ad una razione alimentare costante (di pane e carne) diminuiva notevolmente dopo l'iniezione del liquido pancreatico. Nel dubbio, tuttavia, che tale diminuzione dello zucchero nell'urina potesse dipendere da altra causa, egli ideò un altro metodo di ricerca scevro di ogni obiezione.

Invece di determinare le variazioni di zucchero eliminato coll'urina determinò le variazioni di zucchero nel sangue (attinto dalla carotide) ossia invece di seguire la curva della glicosuria, preferì seguire la curva della glicemia (come poi in seguito fu dimostrato realmente essere il metodo più esatto, quale oggi si suole costantemente usare in analoghe ricerche). L'esperimento consisteva nel legare tutte le radici pancreatiche della vena porta in modo da escludere il pancreas dalla circolazione ed impedire che i suoi prodotti giungano al fegato, e poi determinare il contenuto di zucchero nel sangue e, in un secondo tempo, iniettare nel circolo della vena porta l'estratto pancreatico e vederne l'azione sulla glicemia.

La determinazione del tasso glicemico era fatta dal MONTUORI con un metodo essenzialmente uguale a quello che si usa oggi, e con tale esattezza che i dati da lui indicati corrispondono quasi perfettamente a quelli delle ricerche moderne. Vide infatti che lo zucchero del sangue carotideo oscillava tra 0.95 e 2.00, in condizioni normali, coi valori più frequenti di 1.12 e 1.00 per mille, mentre dopo la legatura delle vene pancreatiche saliva a 3.21, 3.40, 2.80 e 4.15. per tornare a discendere, dopo l'iniezione dell'estratto pancreatico, rispettivamente a 1.85, 2.15, 1.90 e 3.18.

Da questi risultati MONTUORI deduceva:

1° Che il secreto del pancreas, e probabilmente il secreto interno esercita un'azione inibitrice sulla produzione di zucchero nel fegato;

2° Che l'aumento postmortale della produzione di zucchero nel fegato si deve alla mancanza dell'azione glicoinibitrice che il pancreas esercita continuamente sul fegato, durante la vita;

3° Che la glicosuria e la glicemia consecutive all'estirpazione del pancreas dipendono parimenti, almeno nella massima parte, dalla stessa mancata azione glicoinibitrice della glandola asportata.

Il MONTUORI nella sua modestia di severo sperimentatore non aveva dati per giudicare la natura del principio o della sostanza glicoinibitrice del secreto interno pancreatico, ma supponeva che fosse un fermento.

In una successiva ricerca sulla glicogenesi postmortale nel fegato dei cani spancreati, pubblicata nella *Gazzetta Internazionale di Medicina* (novembre 1903), MONTUORI torna sull'attraente argomento dei rapporti tra funzione interna del pancreas e funzione glicogenica del fegato. Egli vide che nel fegato di cani spancreati non ha luogo una formazione di zucchero dopo la morte, come avviene nei cani normali. Tale abolizione del potere glicogenico non compare subito dopo l'ablazione del pancreas, ma si va gradatamente determinando per un certo periodo di tempo dalla subita operazione, dopo il quale il fegato riprende in parte l'attività glicoformatrice postmortale. Nel fegato degli animali spancreati si trova sempre una quantità di zucchero molto più scarsa che in condizioni normali. Tali risultati MONTUORI considera come un'ulteriore dimostrazione dell'azione glicoinibitrice del secreto interno del pancreas sulla glicogenesi epatica. Il fegato di un cane privato di pancreas deve considerarsi come un organo in cui la formazione di zucchero è già esagerata al massimo grado, perchè non più frenato dalle secrezioni interne del pancreas; staccato dal corpo non può quindi risentire le mancate conseguenze di un'azione inibitrice che già prima non esisteva. Egli ammette infatti che l'esagerata formazione di zucchero nel fegato isolato di animali sani deve attribuirsi alla mancata azione glicoinibitrice del pancreas.

Il fatto da lui osservato che varia la glicogenesi postmortale del fegato secondo il periodo di tempo, che intercede dall'ablazione del pancreas, e che è necessario che decorrano vari giorni per aversi una notevole di-

minuzione, egli lo spiega coll'ipotesi che le sostanze glicoinibitrici formate dal pancreas, che sono di natura enzimatica, perdurino ancora ed esercitino la loro azione sul fegato per un certo tempo dopo l'ablazione del pancreas fino a che non sia scomparsa l'ultima loro traccia dal circolo sanguigno.

Da tutti questi importanti fatti sperimentali trovati dal Montuori risulta ben chiaro, come egli fin dal 1895 ha dimostrato esistere nell'estratto acquoso e glicerico del pancreas una sostanza che fa parte della sua secrezione interna che esercita una netta azione glicoinibitrice che, cioè, fa diminuire l'iperglicemia nel sangue carotideo di animali diabetici. A Montuori spetta pertanto il grande merito di essere stato il primo precursore della forse più grande scoperta moderna nel campo degli ormoni, ossia della insulina, che fu fatta, come è noto, nel 1921, da F. C. Banting e C. H. Best, sotto la guida di J. J. R. Macleod, nell'Istituto di Fisiologia dell'Università di Toronto. È interessante notare che l'azione degli estratti del pancreas (opportunamente preparati) fu da loro studiata, come l'aveva studiata il Montuori, sui cani resi diabetici, e considerando, precisamente come il Montuori, la diminuzione della glicemia come il più sicuro sintomo dell'azione antidiabetica. (1). Poichè l'insulina è solubile in acqua, si comprende come gli estratti preparati dal Montuori dovessero contenere questo ormone, al quale si deve ascrivere l'azione glicoinibitrice ben dimostrata dal Montuori.

II. – Ricerche biotermiche.

Sono il nucleo più ricco dell'attività del Montuori, che vi ha dedicato più di un quindicennio di lavoro nell'epoca più fattiva di sua vita (1900–1916) esponendone i risultati in quindici Memorie. Partendo da un metodo di indagine (quello delle trasfusioni del sangue), prima di lui da nessuno applicato al complesso problema della termoregolazione, giungeva a nuovi risultati, che gli consentirono di formulare una nuova dottrina sui fattori chimici della termoregolazione degli animali omotermi, da considerare indipendenti dai fattori prevalentemente fisici di detta regolazione, ammessi generalmente dai precedenti autori.

Già nella prima Memoria, che fu una comunicazione preventiva al V° Congresso Internazionale dei Fisiologi (Torino, 1901), intitolandola: *I fattori chimici della regolazione termica*, sottolineò il concetto fondamentale ed originale delle sue ricerche. «Gli esperimenti (egli scriveva in questa comunicazione), di cui qui riferisco, rappresentano i primi risultati da me

(1) I. I. R. Macleod, *Insuline to the Rescue of the diabetic*. Chemistry in Medicine, by I. Stieglitz. The Chemical Foundation, New York, 1928.

ottenuti applicando allo studio dei fenomeni biotermici il metodo delle trasfusioni. I dati da me raccolti non formano finora un tutto completamente organico, ma sono sufficienti per far intravedere che negli animali omotermi la produzione e la regolazione del calore, oltre che dal sistema nervoso, vengono effettuate da peculiari modifiche chimiche che subiscono il sangue e gli elementi istologici sotto l'influenza delle variazioni termiche dell'ambiente o di altre condizioni capaci di modificare il ricambio termico dell'organismo.

« Il metodo delle trasfusioni mi ha permesso *d'isolare* questo fattore chimico dagli altri che regolano i complessi fenomeni della termogenesi.

« Studiando infatti le modifiche della termogenesi in un animale tenuto in determinate condizioni, noi non saremo mai in grado di riconoscere i vari fattori che hanno prodotto queste modifiche; trasfondendo invece il sangue di questo animale ad altro che è in condizioni normali e studiando in quest'ultimo le modifiche della produzione di calore, dobbiamo senz'altro attribuirle a peculiari proprietà del sangue trasfuso ».

Con altre parole, Montuori si propose di stabilire se e quali modificazioni chimiche insorgessero nella composizione del sangue di un animale artificialmente riscaldato o raffreddato, che fossero capaci di produrre in altro animale della stessa specie modificazioni nella temperatura del suo corpo. Sin dalle prime ricerche, i cui risultati comunicò al Congresso internazionale dei Fisiologi di Torino, Montuori rilevò che realmente il sangue di animali sovrariscaldati (in un bagno a 42°-44°) trasfuso direttamente in cani normali determina una diminuzione della loro termogenesi; come viceversa il sangue raffreddato (in un bagno a 0°-5°) trasfuso direttamente in animale normale provoca un aumento della termogenesi. Da questi primi esperimenti concludeva: *a*) che nel sangue di cane tenuto in bagno esistono sostanze capaci di diminuire la produzione di calore; *b*) che nel sangue di cane tenuto in bagno freddo esistono sostanze capaci di elevare la termogenesi; *c*) che tali sostanze sono probabilmente legate ai corpuscoli, mancano nel siero del sangue, non sono prodotte dall'artificiale riscaldamento o raffreddamento del sangue *in vitro* e si formano esclusivamente nell'animale riscaldato o raffreddato.

È nella più ampia e dettagliata monografia *Ricerche biotermiche* del 1904, che Montuori espone i risultati delle sue ulteriori ricerche e le deduzioni teoriche. Un ampio riassunto (al quale rinvio l'attento lettore) ne diede egli stesso nel sommario della sua carriera didattica e delle sue pubblicazioni scientifiche presentato alla commissione giudicatrice del concorso di Fisiologia del 1905.

Secondo Montuori, l'azione delle sostanze termoinibitrici, che si formerebbero nel corpo degli animali riscaldati, contribuirebbe alla difesa dell'organismo contro l'ipertermia, provocando nell'organismo reazioni endotermiche ed accrescendo le secrezioni, specialmente quella del

sudore. Nella lotta contro le basse temperature le sostanze termoattive agirebbero esagerando il consumo organico, mentre la loro produzione sarebbe in dipendenza di meccanismi nervosi reflettori. La difesa dell'organismo contro il freddo non rappresenterebbe che un caso speciale di produzione di corpi eccitatori della termogenesi per opera del lavorio dei muscoli.

La origine muscolare delle sostanze termoregolatrici che, secondo i risultati degli esperimenti, deve ritenersi diretta per quelle termoinibitrici ed indiretta per quelle termoeccitatrici, conferma e chiarisce l'idea già sufficientemente acquisita alle nostre conoscenze biotermiche che, cioè, l'apparecchio muscolare rappresenti l'organo termoregolatore per eccellenza. I fatti riferiti da Montuori modificano però il concetto dell'intervento dei muscoli nella difesa contro il freddo, e ne creano uno assolutamente nuovo sulla loro importanza nella regolazione rispetto alle temperature elevate.

Con una successiva ricerca (1905) Montuori ha dimostrato che nel sangue di animali riscaldati trovasi oltre che una sostanza che eccita la secrezione della saliva (nel cane) e del sudore (gatto) anche una sostanza che provoca la secrezione del pancreas, che in analogia alla denominazione di *secretina*, dimostrata in quell'epoca da Bayliss e Starling, è da lui indicata come *termosecretina*. La sua azione è però condizionata dalla integrità dell'innervazione della glandola.

Con altre ricerche riguardanti la produzione delle sostanze termoattive in rapporto al sistema nervoso (1905) egli dimostrò che il sistema nervoso agisce indirettamente provocando nei muscoli la formazione di sostanze che esagerano i processi esotermici. I muscoli privi della loro innervazione forniscono invece corpi dotati di azione opposta.

Anche sul meccanismo di azione delle sostanze termoinibitrici, prodotte dalla ipertermia sperimentale, Montuori non mancò di istituire ulteriori ricerche. Un'opportuna modificazione del metodo da poco introdotto da Ivo Novi per la determinazione dell'ossigeno mobile nel sangue, applicò allo studio delle variazioni di detto ossigeno nel sangue degli animali riscaldati (1905) e vide che l'ossigeno mobile effettivamente diminuisce di una quantità costante, riducendosi a 6/10 del normale. Con questo si può spiegare perchè, entro certi limiti di aumento di temperatura dell'ambiente, si riducano le ossidazioni organiche, rendendosi meno dissociabile la combinazione dell'ossigeno coll'emoglobina (forse pel fatto dell'aumento dei processi sintetici negli animali riscaldati). Si ha quindi (conclude Montuori) un mezzo finora ignoto di difesa contro l'ipertermia.

Successivamente egli estese le sue ricerche sullo stesso oggetto agli animali eterotermi (1905–1906) viventi nel mare, presso il reparto di fisiologia della stazione zoologica di Napoli, studiando le variazioni dell'ossigeno mobile del sangue di questi animali in rapporto alla temperatura del-

l'ambiente, e servendosi di un metodo di determinazione chimica più rapido, ma non meno esatto, di Schutzenberger e Risler (1871) fondato sulla proprietà dell'indigo-carminio di venire ridotto a indigo bianco dall'idrosolfito di sodio per riacquistare il colore azzurro quando assume nuove quantità di ossigeno. La modificazione tecnica di questo metodo introdotta dal Montuori, analoga a quella da lui introdotta precedentemente al metodo di Ivo Novi, consiste nel fatto che invece di operare in un'atmosfera di idrogeno (difficile a maneggiarsi) si serve dell'olio di vaselina per proteggere i liquidi dal contatto dell'ossigeno dell'aria.

Egli vide che anche nel sangue dei pesci esiste ossigeno mobile che viene a diminuire notevolmente ed in rapporto costante rispetto al normale, se essi sono esposti a temperature elevate. Tale diminuzione rappresenta, anche per questi animali, un mezzo di difesa contro l'aumento dei processi ossidativi, determinato nei tessuti dal brusco elevamento di temperatura ambiente. Ma Montuori vide pure che ben diverso è il comportamento del consumo di ossigeno e, quindi, dei processi ossidativi di questi animali sottoposti a sovrariscaldamento artificiale, secondo la rapidità colla quale tale riscaldamento avviene. Era noto da precedenti ricerche di altri autori che il chimismo respiratorio di questi animali subisce un aumento proporzionale all'aumento della temperatura sottoponendo l'animale a sbalzi più o meno bruschi di essa.

Montuori invece determinava dapprima il consumo di ossigeno in animali viventi alla temperatura normale (10°-11°) dei bacini dell'Acquario di Napoli; innalzava quindi gradatamente la temperatura dell'acqua in 6-7 giorni a 26°-31°, e dopo che l'animale si era abituato, per due giorni almeno, a questa temperatura, determinava di nuovo il consumo di ossigeno. I risultati ottenuti dimostrano che gli eterotermi mentre esagerano il loro consumo di ossigeno quando son portati *bruscamente* in ambienti più caldi, riducono notevolmente tale consumo quando siano *lentamente* e *gradualmente* abituati a temperature più elevate.

Egli vide inoltre, in accordo coi risultati precedenti, che di due animali della stessa specie e grandezza, resiste all'asfissia un tempo di gran lunga maggiore quello precedentemente abituato a temperatura elevata, anzichè l'altro tenuto alla temperatura ordinaria; ciò dimostra che realmente l'azione prolungata delle temperature elevate fa diminuire negli eterotermi il bisogno di ossigeno.

Un'altra serie di ricerche compiute da Montuori sull'argomento preferito dei fenomeni biotermici concerne il problema della secrezione del sudore nella ipertermia. Servendosi dei gatti, che si prestano a tali esperimenti, vide (1911) che la secrezione termica del sudore coincide con un abbassamento della pressione osmotica del sangue, mentre l'arresto della secrezione coincide con un elevamento di detta pressione. La trasfusione di sangue defibrinato di altro gatto, precedentemente riscaldato, pro-

voca secrezione di sudore e contemporaneo abbassamento della pressione osmotica del sangue. La trasfusione di soluzione ipotonica di cloruro di sodio provoca secrezione di sudore quando provoca abbassamento di concentrazione molecolare del sangue; e viceversa, trasfusione di soluzione ipertonica in gatti che sudano, tanto per azione diretta del calore quanto per trasfusione di soluzione ipotonica, arresta la secrezione di sudore elevando la pressione osmotica del sangue. L'abbassamento della pressione osmotica del sangue, comunque prodotto, è pertanto uno stimolo adeguato per i centri nervosi della secrezione del sudore. La secrezione termica del sudore (che è un fattore della termo-regolazione) rappresenta così un caso speciale di una legge generale, che, cioè, gli apparati nervosi centrali che determinano la secrezione del sudore entrano in funzione quando la pressione osmotica del sangue scende al di sotto del normale, cioè quando cresce la quantità relativa di acqua circolante nel corpo.

Questo importante gruppo di ricerche biotermiche del Montuori rimase (come egli stesso, con parole troppo miti e modeste, rileva in un punto della sua ultima Memoria) inavvertito e appena da pochissimi (tra i quali dal Maragliano) compreso nel giusto valore. Con piacere debbo tuttavia rilevare che R. Thauer nella sua recentissima Memoria riassuntiva sul meccanismo della termoregolazione (*Ergebnisse der Physiologie*, Monaco, 1939, pagg. 607-805) ha riconosciuta l'opera di pioniere del Montuori, ricordando le ricerche del Barbour e dei suoi numerosi allievi del l'Istituto di Farmacologia dell'Università americana Mc Gill (Yale degli Stati Uniti d'America), compiute nel 1923 (senza ricordare l'opera del Montuori), secondo le quali si osserva una diluizione del sangue, tenendo gli animali in bagni caldi (o all'aria riscaldata) come effetto di aumentato passaggio di acqua dai tessuti nel sangue; soltanto ad altissime temperature si osserva un opposto comportamento, ossia un aumento della concentrazione del sangue.

Ossia, una perfetta conferma dei risultati segnalati dal Montuori più di un decennio prima.

Ma R. Thauer riconosce al Montuori anche il merito di aver per il primo dimostrato che realmente nel sangue di animali riscaldati esistano sostanze termoinibitrici, e viceversa, nel sangue di animali raffreddati esistono sostanze termoeccitatrici, ciò che rappresenta il nucleo fondamentale e la base essenziale delle ricerche biotermiche del Montuori. La conferma dell'esattezza di questi risultati (che rimasero per tanto tempo ignorati e misconosciuti) si ha nel fatto ben messo in evidenza da P. Schenck (1922, 1924), Mansfeldi e von Pap (1920, 1935) che l'azione del riscaldamento o raffreddamento del corpo provoca una diminuzione, rispettivamente aumento della secrezione interna della tiroide, i cui ormoni regolando i processi metabolici dell'organismo intervengono direttamente nella termoregolazione. Con altre parole, secondo queste recentissime

vedute, le sostanze termoattive, dimostrate dal MONTUORI conseguire all'azione delle variazioni termiche dell'ambiente, e sulla natura delle quali egli modestamente non volle esprimersi, non avendo dati sperimentali sufficienti, si debbono oggi identificare nel carico maggiore e minore degli ormoni tiroidei, che sarebbero prodotti in misura maggiore o minore, passando nel sangue circolante, secondo la temperatura ambiente.

Al MONTUORI appartiene anche il merito di aver dimostrato che la legge di superficie del RUBNER non vale per i processi ossidativi negli animali marini, nel 1912, in un'epoca, nella quale dominava questa dottrina formulata da RUBNER e prima che il BENEDICT (1915) dimostrasse con ricerche sul metabolismo basale di diversi individui umani e nel digiuno che tale legge non è effettivamente valida per tutti gli organismi viventi.

Nelle sue ultime ricerche, compiute nell'Istituto di Fisiologia dell'Università di Roma, MONTUORI continuò ad occuparsi del suo tema preferito dei fatti biotermici, dimostrando specialmente il meccanismo dell'adattamento degli animali omotermi alle elevate e basse temperature, come pure su alcuni mezzi chimici di difesa contro il freddo, trovando tra l'altro che il caffè, addizionato a piccole dosi di alcool, è capace di combattere con efficacia gli effetti perniciosi delle basse temperature, ciò che ha trovato una recente conferma nelle esperienze di G. GENNARI [1].

III. – SUL MECCANISMO DELLE OSSIDAZIONI ORGANICHE.

È il terzo gruppo di ricerche al quale MONTUORI ha legato il suo nome di pioniere, avendo preceduto, di almeno un decennio, le ricerche concernenti i processi di ossidazione, che hanno assunto tanto ampio sviluppo nel moderno campo della biochimica. Fu certamente dalle precedenti ricerche biotermiche in quanto esse lo condussero, come ho detto, a indagare i processi chimici ossidativi negli organismi viventi, che determinano la produzione di calore, che egli trasse argomento per intraprendere queste ricerche.

E fu pure l'altra felice circostanza di poter estendere il campo delle ricerche agli animali marini nella sezione fisiologica e biochimica della Stazione zoologica di Napoli, che gli fornì il mezzo migliore per poterle compiere.

I risultati di questa serie di ricerche furono accolti in una degna sede, che per la sua classica tradizione si deve considerare come la più importante ed elevata raccolta di Memorie di scienziati italiani, ossia la *Società*

---

[1] G. GENNARI. *Azione della caffeina nella ipotermia passiva da perfrigerazione sperimentale.* « Rendic. dell'Istituto di Sanità pubblica », vol. III: 1940, XVIII. Roma, pagg. 515-522.

italiana delle Scienze (detta dei XL), nel tomo XVI della serie 3ª (1910) pagg. 237–314: un ampio riassunto comparve negli *Arch. ital. de Biol.*, 55, 1911, pagg. 197–220. Ciononostante rimase del tutto inavvertita dagli studiosi italiani e stranieri, malgrado la sua capitale importanza. Soltanto F. Battelli e L. Stern ricordano questa Memoria del Montuori nella loro Memoria riassuntiva sui fermenti ossidativi (*Ergebnisse der Physiologie*, 12, 1912, pag. 243), riferendo che Montuori aveva ottenuto un'ossidasi artificiale bollendo il peptone Witte con 3 % di NaOH. L'importanza fondamentale della ricerca è però rimasta sinora ingiustamente sconosciuta.

Nè si può ripetere quanto è spesso detto per alcuni autori di nuove idee e scopritori di nuovi fatti, che cioè la importanza capitale di essi sia sfuggita agli autori stessi; Montuori fu ben conscio della importanza dei fatti da lui dimostrati, pur non eccedendo nella valutazione di essi. Le parole con cui inizia la sua Memoria ne sono chiara prova.

« Il problema del meccanismo intimo delle ossidazioni organiche aspetta, ancora, dai tempi di Lavoisier, la sua soluzione. A seconda delle ipotesi che hanno successivamente dominato nella Fisiologia, esso ha formato oggetto di moltissime speculazioni teoriche, fondate su pochi fatti, interpretati quasi sempre da un punto di vista unilaterale. Con gli studi di cui qui riferisco, io non ho la pretesa di aver risoluto tale difficile problema, solo credo di essere giunto, con nuove indagini metodiche, a dare un assetto a molte categorie di osservazioni sparse sinora nel vasto campo della letteratura sull'argomento.

« Stabilito che i processi di riduzione dipendono da sostanze che si formano nei tessuti per opera di uno speciale enzima, ho in seguito dimostrato che queste sostanze riducenti possono, in determinate condizioni, funzionare da ossidanti, tanto da riuscire a preparare con esse artificialmente dei corpi identici ai così detti enzimi ossidanti. In conseguenza di queste osservazioni, sono giunto ad ottenere fenomeni respiratorî (consumo di ossigeno e produzione di acido carbonico) in estratti di tessuti privati espressamente di ogni attività vitale.

« Questa serie di fatti ben legati fra loro, rappresenta, più che una teoria, una specie di schema del modo con cui probabilmente si svolgono i processi di ossidazione negli organismi viventi; schema che dovrà perfezionarsi con ulteriori ricerche ».

Con queste parole Montuori non poteva meglio precisare la portata dei risultati delle sue ricerche, inquadrandoli perfettamente nell'edificio delle nozioni precedenti e contribuendo a risolvere uno dei problemi capitali della fisiologia, quello dei processi biochimici della respirazione interna dei tessuti; al quale poi, in seguito, si sono dedicati tanti valenti ricercatori, giungendo a conclusioni analoghe alle sue, ma ignorando (come ho detto) completamente quanto egli aveva già luminosamente dimostrato.

Egli suddivide opportunamente in due parti i risultati ottenuti colle sue ricerche; nella parte prima tratta dei processi di riduzione, nella seconda dei processi di ossidazione. In una chiara e ben nutrita introduzione egli espone con grande accuratezza i risultati e le dottrine degli autori precedenti, a cominciare da HOPPE-SEYLER e da EHRLICH che avevano rilevato l'importanza che hanno i processi di riduzione nei tessuti viventi, sino a quelli che erano i più recenti e contemporanei delle sue ricerche; per poi passare ai risultati da lui ottenuti su un materiale di ricerca assolutamente nuovo, quale era quello degli organismi viventi nel mare. Come indicatore sistematico dei processi di riduzione si serviva del bleu di metilene, corpo poco o niente tossico, dotato di un energico potere tintorio e facilmente riducibile, cedendo ossigeno dalla sua molecola e trasformandosi nella fase senza colore (leucobase), e capace d'altra parte di assumere facilmente ossigeno ritrasformandosi nella fase colorata.

È il classico metodo introdotto da EHRLICH (e che ebbe in seguito tante numerose applicazioni), rappresentandone (come ben dice MONTUORI) un certo progresso in quanto EHRLICH doveva contentarsi di constatare la riduzione *dopo la morte* dell'animale, mentre MONTUORI scegliendo specie opportune, poteva seguire il decorso del fenomeno durante la vita e dopo la morte. Con altre parole egli inaugurò il metodo dell'osservazione dei fatti di riduzione intravitali, come furono poi indicati dai successivi osservatori.

Le diverse specie di animali marini scelti da MONTUORI si prestavano molto bene per queste ricerche, essendo trasparenti e in grado di assorbire direttamente il bleu di metilene disciolto nel loro normale ambiente rappresentato dall'acqua di mare; furono meduse (*Carmarina hastata*), molluschi (*Pterotrachea coronata*, *Phylliroe bucephala*) larve di crostacei (*Carcinus moenas*). Esperimenti più numerosi furono inoltre condotti in un grosso mollusco (*Aplysia limacina*) e un grosso crostaceo (*Maja squinado*), mediante iniezione nell'interno del corpo di soluzione (1 %) di bleu di metilene in acqua di mare. Tutti, dopo una prolungata azione della sostanza, tolti dall'acqua colorata presentavano i loro tessuti del tutto scolorati finchè restavano in vita; mentre andavano assumendo all'aria una colorazione sempre più intensa dopo la morte. Ciò significa che finchè dura la vita durano e prevalgono i processi di riduzione; quando la vita è cessata, predominano e subentrano quelli di ossidazione.

Di queste costatazioni preliminari che dimostrano l'esistenza di fatti di riduzione negli animali viventi si servì il MONTUORI come punto di partenza per un ulteriore studio sulle sostanze riducenti dei vari tessuti e sul loro meccanismo di produzione e di azione.

Dimostrato così *in vitro* il potere riducente del sangue dei detti e di altri animali (selaci e teleostei), come pure dei loro vari organi (fegato, muscoli, glandole genitali, branchie, uova, pancreas, milza), ne dedusse che l'energico potere riducente esercitato in vita dagli animali è dovuto

a speciali sostanze che esistono e si formano in determinati organi. Per avere una più concreta nozione di queste sostanze, studiò le principali condizioni che modificano i processi riduttivi, servendosi specialmente del fegato di *Maja* che fornisce il materiale più energicamente riducente, giungendo alle conclusioni:

1° Che il potere riducente è una proprietà dei tessuti viventi;

2° Che esso è dovuto a speciali sostanze la cui azione è favorita da un leggiero grado d'alcalinità e da moderate temperature, ostacolata dalla minima acidità del liquido, degli antisettici più comuni, aggiunti anche in tracce, distrutta dalla alta temperatura;

3° Che è da escludersi l'ipotesi che il potere riducente sia dovuto allo sviluppo accidentale di microrganismi.

Ricerche intese a stabilire il meccanismo di formazione delle sostanze riducenti, il materiale da cui esse derivano, e le loro proprietà e caratteri, dimostrarono che queste sostanze si formano dai corpi proteici o dai loro derivati, per opera di uno speciale enzima, e che il meccanismo di questa formazione consiste essenzialmente in una idrolisi, poichè si possono ottenere sostanze riducenti colla semplice idrolisi dai corpi proteici in mezzo alcalino o acido.

Nella seconda parte della memoria Montuori riferisce i risultati delle sue ricerche sui processi di ossidazione.

Premessa una succinta ma esauriente rassegna sulle varie dottrine dominanti sull'argomento, mette in rilievo che non si hanno criteri esatti per affermare che le ossidasi siano gli agenti specifici dei processi ossidativi dei tessuti, tanto più che sotto il nome generico di ossidasi si comprende tutta una serie delle più disparate sostanze, le quali hanno di comune solo il carattere di accelerare la velocità di ossidazione di molti corpi, per loro stessi facilmente ossidabili.

Intuita felicemente l'importanza che potevano avere le sostanze riducenti, dimostrate nella precedente serie di ricerche, nel meccanismo dei processi ossidativi della respirazione interna degli organismi, Montuori mettendo da parte per il momento una ricerca analitica sulla natura chimica delle sostanze riduttrici (che del resto egli espressamente si proponeva di intraprendere in seguito), volle innanzi tutto stabilire il loro comportamento rispetto all'ossigeno atmosferico. « L'assodare, come in realtà mi è riuscito (egli scrive), che questi miscugli, comunque ottenuti coi metodi precedentemente esposti (sia cioè per l'azione dell'enzima sui brodi di organi, sia per idrolisi di sostanze proteiche pure) fossero capaci di fissare ossigeno mi sembrò molto più urgente che stabilire se trasformassero i nitrati in nitriti o scolorassero l'indaco, come scolorano il bleu di metilene ecc. Non debbo tacere che molte di queste e simili prove furono anche da me praticate con buoni risultati, ma ne darò conto in altra pubblicazione ».

Il metodo usato per stabilire il potere assorbente per l'ossigeno dei miscugli riducenti consisteva essenzialmente nel misurare le variazioni di ossigeno che avvenivano nell'interno di una bottiglia ermeticamente chiusa, contenente una nota quantità di ossigeno, tenuta a diretto contatto col liquido per 21 ore, coll'aggiunta dell'1 % di cloroformio e toluolo per impedire eventuali processi batterici. I risultati dimostrarono che tutti i corpi, il cui potere riducente era stato dedotto dalla loro azione sul bleu di metilene, sono anche capaci di fissare ossigeno atmosferico. Questa costatazione, che al MONTUORI sembrava giustamente di una grande utilità perchè serve ad assegnare una reale funzione alle sostanze riducenti e a fare quindi intravedere quale può essere il loro posto nei processi respiratorî dei tessuti, non era stato da alcun autore precedente (come lo stesso MONTUORI rileva) prima di lui fatta, nè supposta, poichè nessuno avevâ dimostrato che le sostanze riducenti degli organismi viventi sono capaci di fissare in qualche modo l'ossigeno dell'aria, mentre tutti si erano affaticati a dimostrare la loro capacità di togliere ossigeno a corpi che più o meno facilmente lo cedono. « In altri termini (egli aggiunge) se finora ai processi di riduzione si poteva attribuire una importanza indiretta nel meccanismo delle ossidazioni organiche, dopo la dimostrazione che per la idrolisi delle sostanze proteiche si possono ottenere corpi capaci di fissare l'ossigeno dell'aria, sorge la necessità di indagare quale possa essere la parte che questi corpi prendono nelle combustioni lente dei tessuti ».

Il primo passo alla dimostrazione che queste sostanze riducenti, capaci di fissare ossigeno dell'aria, potessero realmente avere un'importanza nei processi ossidativi della respirazione dei tessuti, consisteva nello stabilire se essi in presenza dell'aria potessero esercitare un'azione ossidante su altri composti. A tal riguardo MONTUORI (come tutti i successivi autori che si occuparono della stessa questione) ricorda innanzi tutto la ben nota reazione di CANNIZZARO e tutte le spiegazioni che erano state date al fenomeno, per esporre poi i risultati da lui ottenuti di ossidazione dei vari composti che si usano comunemente, quali i sali di cerio, la fenolftaleina, i joduri alcalini, l'aldeide salicilica, il pirogallolo, il glicosio e altri composti, osservando che le dette sostanze riducenti in ambiente alcalino ed in presenza di ossigeno sono realmente capaci di determinare la ossidazione di molti corpi per loro stessi non facilmente ossidabili.

Con altre ricerche MONTUORI dimostrava che un'azione simile di autossidazione esercitano i corpi riducenti quando sono assorbiti o combinati con sostanze colloidi. Precipitando opportunamente un miscuglio di corpi riducenti e colloidi, si ottengono sostanze perfettamente simili per funzione e proprietà alle cosidette *ossidasi* o enzimi ossidanti.

Egli vide inoltre che tali corpi riducenti assumono, in presenza di colloidi, una funzione respiratoria specifica, poichè negli estratti di tessuti

morti (brodi di organi) si può promuovere un notevole scambio respiratorio, determinando in essi la formazione di corpi riducenti mercè l'aggiunta dello speciale enzima che li produce.

Da tutto l'insieme di questi risultati sperimentali Montuori conclude che « si ricava un concetto del meccanismo delle ossidazioni organiche molto più concreto ed esatto di quelli finora esistenti.

« Il fondamento dei processi ossidativi consisterebbero nella formazione di speciali corpi del materiale proteico dei tessuti, corpi che, in presenza o in combinazione con i colloidi dei tessuti stessi, provocherebbero le ossidazioni.

« Come si rileva facilmente, per questa ipotesi generale, non è necessario invocare l'intervento di nuovi o sconosciuti fattori, ma basta ravvicinare due fatti già noti, cioè, che le sostanze proteiche dànno anche nei tessuti prodotti di sdoppiamento idrolitico e che i colloidi rappresentano una condizione essenziale per i processi vitali.

« La verisimiglianza della ipotesi è poggiata essenzialmente sulla osservazione che si può, come ho riferito, stabilire lo scambio respiratorio anche in un brodo di tessuti morti, purchè vi esistano ancora sostanze colloidi e purchè il fermento speciale vi formi i corpi specifici riducenti–ossidanti. Nulla ci vieta di supporre che nel vivo le cose vadano in modo analogo.

« Lasciando impregiudicata ogni altra ipotesi, parmi che le presenti ricerche abbiamo stabilito un punto essenziale delle nostre conoscenze sulle ossidazioni organiche che, cioè, *con un meccanismo enzimatico si formano nei tessuti delle sostanze capaci di promuovere le ossidazioni* ».

Per intendere il valore storico veramente capitale di questa Memoria del Montuori basta rilevare che, mentre fino all'epoca delle sue ricerche (1910) nessuna importanza si attribuiva nella discussione del meccanismo dei processi biochimici respiratorî interni all'azione riducente dei vari composti dei tessuti e dei liquidi dell'organismo, oggi invece anche nei comuni trattati didattici di chimica biologica il capitolo sui processi ossidoriduttivi ha assunto ampissimo sviluppo, sino al punto di sentire la necessità di trovare una particolare nomenclatura per essi (Ossidoriducasi). *Redoxpotentiale und Stoffwechsel* è il titolo della recente rivista sintetica che W. Kollath e P. Stadler hanno pubblicato negli *Ergebnisse der Physiol.*, Bd. 41, 1939, pagg. 806–882, nella quale trattano ampiamente dei vari sistemi ridossici, ossia sistemi riducenti–ossidanti, indicando con queste parole i numerosi e diversi, oggi mano mano scoperti corpi o sistemi che hanno le proprietà ossidoriducenti.

Comunemente si attribuisce a H. Wieland il merito di aver per il primo cercato di spiegare i vari processi ossidativi che avvengono nell'organismo piuttosto che ad una attivazione delle molecole dell'ossigeno, secondo il vecchio schema (sostenuto recentemente da A. Bach e R. Cho-

DAT, i cui primi lavori erano del resto noti al MONTUORI), alla liberazione di atomi o molecole di idrogeno attivo, ossia a sostanze riducenti capaci di combinarsi attivamente coll'ossigeno, il quale quindi avrebbe quasi una funzione passiva.

La prima Memoria del WIELAND, sulla idrogenazione e deidrogenazione comparve nei rendiconti della società chimica tedesca del 1912, alla quale seguirono altre Memorie sullo stesso argomento, che trovarono poi un ampio riassunto nella Memoria sintetica sul meccanismo dei processi ossidativi pubblicata negli *Ergebnisse der Physiologie* del 1922 (vol. XX, pagg. 477-518). La teoria dell'attivazione dell'idrogeno, come H. WIELAND la chiama, viene da lui sintetizzata colle parole: « La funzione chimica dell'ossigeno è posposta a quella dell'idrogeno, che è tratto dall'oggetto del processo mediante la deidrogenazione. Si ammette che l'azione catalitica dell'enzima non si estende all'ossigeno molecolare, ma piuttosto al sostrato, nel quale gli atomi di idrogeno che partecipano alla reazione sono resi capaci di reagire in modo che possono combinarsi coll'ossigeno per formare acqua. La sostanza pertanto che ossida enzimaticamente, agisce idrogenando sull'ossigeno molecolare, al quale appartiene l'ufficio di legarsi all'idrogeno reso libero. L'ossigeno appare in questa funzione come accettore di idrogeno. Esso non è in legame chimico col sostrato di ossidazione, ma è combinato in acqua ».

L'argomento principale sul quale WIELAND basa la sua teoria applicata ai processi biochimici è precisamente il fatto che in processi biologici si può dimostrare un potere riducente delle cellule, che si rileva dalla scolorazione di sostanze colorate (come è appunto il bleu di metilene). Tali processi biologici di riduzione cadono nel campo della deidrogenazione. A questi processi di riduzione corrispondono sempre processi di ossidazione, in modo che ossidazione e riduzione formano un complesso unitario. WIELAND prende in considerazione processi di fermentazione semplici noti, ad esempio, la fermentazione dell'alcool in acido acetico prodotta dall'enzima dei batteri acetici, e che consiste nella formazione di acido acetico per ossidazione dell'alcool, che si ottiene anche se al posto dell'ossigeno libero dell'aria si pone un composto capace di cedere ossigeno come il chinone o il bleu di metilene.

Senza dilungarci nell'esposizione della dottrina di WIELAND, dal già detto vediamo che egli giunge alle stesse conclusioni alle quali era giunto il MONTUORI fin dal 1910 servendosi di dati diversi, ma non meno importanti, anzi posso dire forse più importanti, perchè desunti da fatti più strettamente biologici, seppure meno strettamente chimici, come del resto era da attendersi dalla diversa competenza dei due autori.

Ciò non significa però che al MONTUORI non spetta il merito di essere stato il primo biologo che abbia riconosciuta e dimostrata, con adeguati mezzi di sperimentazione ed elaborazione logica, la dottrina che i processi

ossidoriduttivi abbiano una notevolissima parte nel meccanismo dei processi ossidativi dei tessuti e degli organismi viventi.

La conclusione che evidente scaturisce da questa rapida rassegna dei tre principali gruppi dei risultati delle ricerche di Adolfo Montuori nel campo della fisiologia, confrontati coi risultati ottenuti dai successivi sperimentatori, è che l'opera scientifica di questo nostro fisiologo, svolta durante un venticinquennio (1892–1916) di intenso lavoro, compiuto in forma originale e indipendente, ha fruttato almeno in tre dei più interessanti campi della fisiologia risultati che ben meritano il titolo di scoperte, precedendo di interi decenni i risultati segnalati da altri scienziati stranieri. Egli infatti ha dimostrato per il primo:

a) L'azione glicoinibitrice del secreto interno del pancreas (insulina);

b) I mezzi chimici della termoregolazione;

c) I processi chimici di ossidoriduzione come fattori principali delle ossidazioni interne dei tessuti.

L'importanza di questi risultati è rimasta (tranne alcune parti delle ricerche sulle ossidazioni organiche, ricordate da Battelli e Stern, subito dopo la pubblicazione della Memoria del Montuori, e di quelle biotermiche ricordate recentemente da R. Thauer) completamente inavvertita, non solo dai fisiologi stranieri (che quasi sempre, specialmente i Francesi, gli Inglesi e i Nordamericani, ignorano i risultati delle nostre ricerche), ma anche dai fisiologi italiani. Non è qui il caso di esaminare i motivi che hanno contribuito a far ignorare e a condannare al silenzio i risultati tanto importanti di Adolfo Montuori, che dopo quanto ho potuto esporre e documentare, deve essere considerato come una delle figure più fulgide tra i fisiologi moderni italiani.

Matematica. — *Sulla relazione tra il rango e il tipo di un gruppo.* Nota di GUIDO ZAPPA, presentata (1) dall'Accademico FRANCESCO SEVERI.

Questa Nota si riattacca alle ricerche di CIPOLLA sulla struttura dei gruppi di ordine finito, pubblicate nel *Rendiconto* della Reale Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli (2), e a quelle di SCORZA sui sottogruppi fondamentali di un gruppo (3), e sulla relazione intercedente tra il rango e il tipo di un gruppo (4), pubblicate nei *Rendiconti* della R. Accademia Nazionale dei Lincei.

Ci atterremo in tutto alla nomenclatura di CIPOLLA, seguìta anche da SCORZA, e useremo in particolare i simboli adoperati da quest'ultimo.

CIPOLLA, nel porre i fondamenti della teoria dei sottogruppi fondamentali di un gruppo, cui sono dedicate le Note sopra citate, arriva tra l'altro a mostrare (5) che se r è il rango e τ il tipo di un gruppo finito, sussiste la diseguaglianza

$$[1] \qquad r \leq \frac{\tau + 2}{3}$$

SCORZA (6) ha sostituito alla [1] l'altra diseguaglianza più espressiva

$$[2] \qquad r \leq \frac{\tau + 5}{6}$$

---

(1) Nell'Adunanza del 17 gennaio 1941–XIX.

(2) M. CIPOLLA, *Sulla struttura dei gruppi d'ordine finito.* « Rend. Accad. delle Scienze fisiche e matematiche », Napoli, Nota I e II (1909); Nota III (1911); Nota IV (1912).

(3) G. SCORZA, *Sui sottogruppi fondamentali di un gruppo.* « Rend. R. Accad. Naz. dei Lincei », Nota I, vol. VI, pagg. 361–365 (1927); Nota II: id., pagg. 441–445 (1927).

(4) G. SCORZA, *Maggiore determinazione della relazione intercedente tra il rango e il tipo di un gruppo.* Id., vol. VII, pagg. 173–178 (1928).

(5) Op. cit. (2), Nota III, pag. 128.

(6) Op. cit., (3), Nota II, pag. 445.

e in un secondo tempo (7) l'altra

$$[3] \qquad r \leq \frac{\tau + 7}{7}$$

la quale, appena $\tau > 7$, è più espressiva della [2] stessa.

Scopo della presente Nota è mostrare che sussiste la diseguaglianza

$$[4] \qquad r \leq \frac{\tau + 9}{8}$$

la quale, sempre per $\tau > 7$, è più espressiva anche della [3].

Il ragionamento che passiamo ad esporre si ispira a quello usato da Scorza nell'ultima Nota citata.

1. Premettiamo, che, a differenza di Cipolla e di Scorza i quali non definiscono il tipo per un gruppo abeliano, definiamo tipo di un gruppo abeliano il numero -2.

Sia H un gruppo finito, non abeliano, e sia G un suo sottogruppo fondamentale. Sia τ il tipo di H, r il rango di H, τ' il tipo di G. Siano poi J_0 il centrale di H, J il centrale di G, e I il sistema fondamentale di H corrispondente a G.

Siano inoltre:

λ, il numero dei sistemi fondamentali di H contenuti in G;

λ', il numero dei sottogruppi fondamentali di H contenenti G;

λ'', il numero dei sottogruppi fondamentali di H contenuti in G.

Si vede subito che λ' è anche il numero dei sistemi fondamentali di H contenuti in J.

Avremo allora le seguenti diseguaglianze, dimostrate da Scorza (8).

$$[5] \qquad \tau' \leq \lambda - \lambda' - 2$$

$$[6] \qquad \tau' \geq \lambda'' - 3$$

$$[7] \qquad \tau' \leq \frac{1}{2}(\lambda - \lambda' + \lambda'' - 5)$$

ed inoltre (9) per $\tau > 3$

$$[8] \qquad \lambda \leq \tau - 2.$$

2. Ricordiamo ora, perchè ci saranno utili in seguito, le seguenti proprietà, dovute a Scorza (10):

---

(7) Op. cit. (4), pag. 178.

(8) Op. cit. (3), Nota I, pagg. 362, 363.

(9) Op. cit. (3) Nota II, pag. 442.

(10) G. Scorza, *I gruppi che possono pensarsi come somma di tre loro sottogruppi.* « Bollettino dell'Unione Matematica Italiana », V (1926) pagg. 216–218.

a) un gruppo non può mai pensarsi come somma di due suoi sottogruppi propri.

b) se un gruppo può pensarsi come somma di tre suoi sottogruppi propri, ognuno di questi sottogruppi è invariante di indice 2.

c) se un gruppo può pensarsi come somma di tre suoi sottogruppi propri, ogni elemento comune a due di essi appartiene anche al terzo. Il sottogruppo comune ai tre detti sottogruppi è invariante, e il corrispondente gruppo complementare è un gruppo quadrinomio.

3. La prima parte della proprietà *c*) del numero precedente può subito generalizzarsi come segue:

Se un gruppo G può pensarsi come somma di n suoi sottogruppi propri, $n-1$ qualunque dei quali non lo esauriscono, ogni elemento comune ad $n-1$ di detti n sottogruppi appartiene anche all'n-esimo.

Sia infatti G il gruppo dato, e siano $G_1, G_2, \cdots, G_n$ n suoi sottogruppi tali che

$$G = G_1 + G_2 + \cdots + G_n$$

Sia x un elemento comune a $G_1, G_2, \cdots, G_{n-1}$. Se ogni elemento di G_n appartenesse ad uno dei sottogruppi $G_1, G_2, \cdots, G_{n-1}$, questi ultimi esaurirebbero G, contro l'ipotesi. Pertanto esiste almeno un elemento y di G_n, che non appartiene a nessuno dei sottogruppi $G_1, G_2, \cdots, G_{n-1}$.

Il prodotto xy non può stare in G_1, altrimenti essendo x in G_1, anche $y = x^{-1} xy$ vi starebbe, contro l'ipotesi. Per analoga ragione xy non può stare in $G_2, G_3, \cdots, G_{n-1}$. Onde xy sarà in G_n, e, dato che y è anche esso in G_n, pure $x = x \cdot y\, y^{-1}$ è in G_n, c. d. d.

4. Come ultima premessa, ricordiamo la seguente proprietà dimostrata anch'essa da Scorza [11].

Esistono $\tau' - \lambda'' + 3$ sistemi fondamentali di G per ognuno dei quali il corrispondente sottogruppo fondamentale di G non è un sottogruppo fondamentale di H contenuto in G. Ognuno di questi sistemi fondamentali di G si spezza in almeno due sistemi fondamentali di H.

5. Ci proponiamo di mostrare anzitutto che, se G è un sottogruppo fondamentale massimo, e $\tau' \geq \tau - 7$, il rango r di H non supera il numero 2; e ciò sarà còmpito dei numeri seguenti. Indi si ci sarà facile dimostrare la [4].

Scorza ha dimostrato [12] che $r \leq 2$ se è $\tau' > \tau - 7$; basterà pertanto esaminare il caso $\tau' = \tau - 7$.

[11] Op. cit. [3], Nota I, pag. 362.

[12] Op. cit. [3], pag. 174 e sgg.

Essendo G un sottogruppo fondamentale massimo di H, si ha $\lambda' = 1$. La [5] ci dà allora

$$\lambda \geqq \tau' + 3$$

ossia, dato che per ipotesi $\tau' = \tau - 7$

$$\lambda \geqq \tau - 4.$$

D'altra parte, essendo $-2 \leqq \tau' = \tau - 7$, è anche $\tau \geqq 5$, onde $\tau > 3$, e allora può applicarsi la [8] che ci dà

$$\lambda \leqq \tau - 2.$$

λ prende perciò uno dei valori $\tau - 4, \tau - 3, \tau - 2$.

La [6] dà inoltre $\lambda'' \leqq \tau' + 3 = \tau - 4$, mentre la [7] dà $\lambda'' \geqq 2\tau' + 6 - \lambda = 2(\tau - 4) - \lambda$, vale a dire, per $\lambda = \tau - 4$, $\lambda'' \geqq \tau - 4$, per $\lambda = \tau - 3$, $\lambda'' \geqq \tau - 5$, e per $\lambda = \tau - 2$, $\lambda'' \geqq \tau - 6$. Sono pertanto possibili i sei seguenti casi:

I)	$\lambda = \tau - 4$	$\lambda'' = \tau - 4$
II)	$\lambda = \tau - 3$	$\lambda'' = \tau - 4$
III)	$\lambda = \tau - 3$	$\lambda'' = \tau - 5$
IV)	$\lambda = \tau - 2$	$\lambda'' = \tau - 4$
V)	$\lambda = \tau - 2$	$\lambda'' = \tau - 5$
VI)	$\lambda = \tau - 2$	$\lambda'' = \tau - 6$

6. Mostriamo anzitutto che

Nel caso I) è $\tau = 5$, *ed* $r = 1$.

Infatti in tal caso si ha $\lambda'' = \lambda - \lambda' + 1$. Orbene, Scorza [13] ha dimostrato che, quando $\lambda'' = \lambda - \lambda' + 1$, detto ρ il genere di G (che, per ipotesi, è un sottogruppo fondamentale massimo) si ha $\tau - \lambda + 2 \geqq 2^{2\rho-1}$.

Essendo nel nostro caso $\lambda = \tau - 4$, cioè $\tau - \lambda = 4$, dovrà essere $2^{2\rho-1} \leqq 6$, onde $2\rho - 1 \leqq 2$, $\rho \leqq 1$, e pertanto G non contiene sottogruppi fondamentali, e di conseguenza si ha $\lambda'' = 1$, ossia $\lambda = 1$, e $\tau = 5$. Dalla [3] segue allora $r = 1$, c. d. d.

7. Proviamo ora che

Il caso II) si può escludere.

Essendo $\lambda = \tau - 3$, esistono 5 sistemi fondamentali di H non contenuti in G; siano essi $I^{(1)}, I^{(2)}, I^{(3)}, I^{(4)}, I^{(5)}$, e siano $G^{(1)}, G^{(2)}, G^{(3)}, G^{(4)}, G^{(5)}$

---

[13] Op. cit. [3], Nota I pag. 364.

i corrispondenti sottogruppi fondamentali. Essendo poi $\lambda'' = \tau - 4$, cioè $\lambda = \lambda'' + 1$, esisterà un solo sistema fondamentale di H, sia esso $\bar{I}$, che è contenuto in G, senza che il sottogruppo fondamentale G ad esso corrispondente sia contenuto in G.

Poichè $\bar{I}$ appartiene a G, anche I appartiene a $\bar{G}$. L'intersezione Γ di G con $\bar{G}$ è quindi un sottogruppo fondamentale di G e di $\bar{G}$. Almeno due sistemi fondamentali di G dovranno essere pertanto fuori di Γ, e di conseguenza almeno due sistemi fondamentali di H dovranno essere contenuti in $\bar{G}$, senza essere contenuti in Γ, nè quindi in G.

Dei sistemi $I^{(1)}$, $I^{(2)}$, $I^{(3)}$, $I^{(4)}$, $I^{(5)}$, almeno due son dunque in $\bar{G}$. Ma se $\bar{G}$ contenesse tutti e cinque i detti sistemi, si avrebbe $H = G + \bar{G}$, contro la *a*) del n. 2. Se ne contenesse quattro, per esempio $I^{(1)}, I^{(2)}, I^{(3)}, I^{(4)}$, si avrebbe $H = G + \bar{G} + G^{(5)}$, onde per la *c*) del n. 2, I, appartenendo a G e a $\bar{G}$, dovrebbe appartenere anche a $G^{(5)}$, e di conseguenza G dovrebbe contenere $I^{(5)}$, il che non avviene. Restano pertanto due possibilità:

a) $\bar{G}$ contiene tre dei sistemi $I^{(1)}$, $I^{(2)}$, $I^{(3)}$, $I^{(4)}$, $I^{(5)}$, poniamo $I^{(1)}, I^{(2)}, I^{(3)}$;

b) $\bar{G}$ contiene due tali sistemi, poniamo $I^{(1)}$, e $I^{(2)}$.

Il caso *a*) si esclude con un ragionamento fatto da Scorza[14] per dimostrare la [3], e che qui riportiamo, salvo simboli mutati, per comodità del lettore.

« Dei sistemi I e $I^{(1)}$, I è interno a G e $\bar{G}$, ma esterno a $G^{(1)}$, $I^{(4)}$ è esterno a G e $\bar{G}$, ma interno a $G^{(4)}$, dunque ciascun elemento del prodotto è esterno a G, $\bar{G}$ e $G^{(4)}$, ossia appartiene a $I^{(5)}$, e si ha $I\, I^{(4)} \leq I^{(5)}$, indi $\bar{I}\, I\, I^{(4)} \leq \bar{I}\, I^{(5)}$.

Ora $\bar{I}$ è interno a G e $\bar{G}$, ma esterno a $G^{(5)}$, ed $I^{(5)}$ è interno a $G^{(5)}$ ma esterno a G e $\bar{G}$; dunque ciascun elemento del prodotto $\bar{I}\, I^{(5)}$ è esterno a G, $\bar{G}$, $G^{(5)}$, ossia appartiene ad $I^{(4)}$, e si ha $\bar{I}\, I\, I^{(4)}, \leq I^{(4)}$.

Segue che. se i, i, $i^{(4)}$ sono elementi comunque presi, il primo in $\bar{I}$, il secondo in I, e il terzo in $I^{(4)}$, esiste un elemento di $I^{(4)}$, e sia $i_1^{(4)}$, per il quale si ha $\bar{i}\, i\, i^{(4)} = i_1^{(4)}$, ossia $i\, i = i_1^{(4)}\, (i^{(4)})^{-1}$ quindi ii appartiene all'intersezione di G e G_4. Ma codesta intersezione è J_0, perchè, essendo $I^{(4)}$ esterno a G e a G, non può contenere nessuno dei sistemi fondamentali di H contenuti in G; dunque $\bar{i}\, i$ è un elemento di J_0.

Ora ciò è assurdo; ed invero da $i\, i = j_0$, con j_0 elemento di J_0, seguirebbe $i = j_0\, i^{-1}$, e i sarebbe, al pari di i e di i^{-1}, un elemento di I ».

Esaminiamo la possibilità *b*).

Notiamo anzitutto che $G^{(1)}$ non può contenere $I^{(2)}$, altrimenti, detta $\Gamma^{(1)}$ l'intersezione di $G^{(1)}$ con $\bar{G}$ (la quale, al pari di $G^{(1)}$, non contiene I e quindi nemmeno Γ) si avrebbe $G = \Gamma + \Gamma^{(1)}$, contro la *a*) del n. 2. Analoga-

---

(14) Op. cit. (4). pag. 175.

mente $G^{(2)}$ non contiene $I^{(1)}$. Dette pertanto $\Gamma^{(1)}$ e $\Gamma^{(2)}$ le intersezioni di $\bar{G}$ con $G^{(1)}$, e $G^{(2)}$, si avrà $\bar{G} = \Gamma + \Gamma^{(1)} + \Gamma^{(2)}$, onde, per la *c*) del n. 2, il sottogruppo comune a Γ, $\Gamma^{(1)}$, $\Gamma^{(2)}$, che diremo Δ, avrà indice 2 in Γ, in $\Gamma^{(1)}$ e in $\Gamma^{(2)}$, e si avrà $\Gamma^{(1)} = \Delta + I^{(1)}$, $\Gamma^{(2)} = \Delta + I^{(2)}$.

Se ora $G^{(3)}$ contenesse $I^{(1)}$, esso, contenendo anche J_0 che è in Δ, conterrebbe più di metà degli elementi di $\Gamma^{(1)}$ quindi addirittura tutto $\Gamma^{(1)}$. Ma poichè $\bar{I}$ appartiene a $\bar{G}$ e a $G^{(1)}$ (in conseguenza del fatto che $I^{(1)}$ appartiene a $\bar{G}$), segue che esso appartiene a $\Gamma^{(1)}$, onde $G^{(3)}$ dovrebbe contenere $\bar{I}$, in contrasto col fatto che $\bar{G}$ non contiene $I^{(3)}$. Pertanto $G^{(3)}$, e così $G^{(4)}$ e $G^{(5)}$, non contengono $I^{(1)}$, e parimenti non contengono $I^{(2)}$.

$G^{(3)}$ non può poi contenere alcun sistema fondamentale contenuto in G, altrimenti il sottogruppo fondamentale corrispondente ad un tale sistema dovrebbe contenere $I^{(3)}$, contro l'ipotesi.

Ancora, $G^{(3)}$ non può contenere $I^{(4)}$ e $I^{(5)}$, altrimenti sarebbe $H = G + \bar{G} + G^{(3)}$, onde per la *c*) del n. 2, $G^{(3)}$ dovrebbe contenere ogni elemento comune a G e $\bar{G}$, quindi anche I e $\bar{I}$, in contrasto col fatto che G e $\bar{G}$ non contengono $I^{(3)}$. Così $G^{(4)}$ non può contenere $I^{(3)}$ e $I^{(5)}$, e $G^{(5)}$ non può contenere $I^{(3)}$ e $I^{(4)}$. Infine, $G^{(3)}$ non può contenere $I^{(4)}$ (nè $I^{(5)}$), altrimenti $G^{(4)}$ conterrebbe $I^{(3)}$ e si avrebbe $G^{(4)} = J_0 + I^{(3)} + I^{(4)} = G^{(3)}$, contro l'ipotesi che $G^{(3)}$ e $G^{(4)}$ siano sottogruppi fondamentali distinti. Pertanto è $G^{(3)} = I^{(3)} + J_0$, e analogamente $G^{(4)} = I^{(4)} + J_0$, $G^{(5)} = I^{(5)} + J_0$.

Se G non è invariante in H, esso dovrà essere coniugato ad un sottogruppo fondamentale massimo, vale a dire a $\bar{G}$, o a $G^{(3)}$, o a $G^{(4)}$, o a $G^{(5)}$. È però da escludersi che G sia coniugato a $G^{(3)}$, $G^{(4)}$, $G^{(5)}$, perchè G contiene un sistema fondamentale di H, il cui sottogruppo fondamentale non è in G, mentre $G^{(3)}$, $G^{(4)}$, $G^{(5)}$ non godono di analoga proprietà. Pertanto, o G è invariante in H, o esso è coniugato a $\bar{G}$. Sia ora D il minimo sottogruppo di H che contenga G e $\bar{G}$. Ogni elemento di $\bar{G}$, non potendo trasformare G in $\bar{G}$, lo trasforma in sè, e poichè altrettanto fa ogni elemento di G, si ha che G, e analogamente $\bar{G}$, è invariante in D.

Siano ora $K^{(3)}$, $K^{(4)}$, $K^{(5)}$ le intersezioni di D con $G^{(3)}$, $G^{(4)}$, $G^{(5)}$. Dei tre sottogruppi $K^{(3)}$, $K^{(4)}$, $K^{(5)}$, almeno due non sono in G. Infatti, se G contenesse tutti e tre questi sottogruppi, si avrebbe $D = G + \bar{G}$, contro la *a*) del n. 2, e se ne contenesse due, ad es. $K^{(3)}$ e $K^{(4)}$, si avrebbe $D = G + \bar{G} + K^{(5)}$, onde per la *c*) del n. 2, $K^{(5)}$ dovrebbe contenere Γ, il che non è. Quindi G, o contiene uno solo di quei sottogruppi, che senza ledere la generalità possiamo supporre sia $K^{(5)}$, o non ne contiene nessuno. Avremo in conclusione

α) $$D = G + \bar{G} + K^{(3)} + K^{(4)}$$

oppure

β) $$D = G + \bar{G} + K^{(3)} + K^{(4)} + K^{(5)}$$

Essendo G invariante in D, si avrà, per un teorema sugli isomorfismi $D/G \simeq G\,\Gamma$, e poichè Γ ha indice 2 in $\bar{G}$ (vedi la b) del n. 2), G dovrà avere indice 2 in D. Se poi $K^{(i)}$ non è in G ($i = 3\,,\,4\,,\,5$), si avrà anche che D è il minimo sottogruppo contenente G e $K^{(i)}$, onde $D/G = K^{(i)}/J_0$, e poichè G ha indice 2 in D, J_0 ha indice 2 in $K^{(i)}$.

Detto ora n l'ordine di D, e detto k l'indice di J_0 in D, si avrà, nel caso α)

$$n = \frac{n}{2} + \frac{n}{4} + \frac{2n}{k}$$

da cui

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{2}{k}$$

ossia

$$\frac{2}{k} = \frac{1}{4} \qquad k = 8$$

e analogamente, nel caso β)

$$n = \frac{n}{2} + \frac{n}{4} + \frac{3n}{k}$$

da cui

$$k = 12.$$

Pertanto J_0 ha indice 4 in G nel caso α), e indice 6 nel caso β); onde $J \quad I - J_0$ ha in G indice 1 , 2 o 3. Ma J è il centrale di G; ed è noto che il centrale di un gruppo non può mai avere per indice un numero primo. Onde J dovrebbe coincidere con G, il quale sarebbe abeliano; e allora $\bar{G}$ dovrebbe contenere G, il che non è. Si è pertanto giunti ad un assurdo.

8. Mostriamo ora che

Il caso III) si può escludere.

Essendo, nel caso III), $\lambda = \tau - 3$, esistono 5 sistemi fondamentali di H non contenuti in G; siano essi, come nel caso precedente, $I^{(1)}$, $I^{(2)}$, $I^{(3)}$, $I^{(4)}$, $I^{(5)}$, e siano $G^{(1)}$, $G^{(2)}$, $G^{(3)}$, $G^{(4)}$, $G^{(5)}$ i sottogruppi fondamentali ad essi corrispondenti. Essendo poi $\lambda = \lambda'' + 2$, esistono in G due sistemi fondamentali di H, siano I e $\bar{I}$, i cui corrispondenti sottogruppi fondamentali $\bar{G}$ e $\bar{\bar{G}}$ non sono contenuti in G.

Essendo $\tau' - \lambda'' - 3 = 1$, esiste, in base alla proprietà del n. 4, un sistema fondamentale di G il cui corrispondente sottogruppo fondamentale di G non è un sottogruppo fondamentale di H contenuto in G. Esso si spezza in almeno due sistemi fondamentali di H, i cui corrispondenti sottogruppi fondamentali di H non sono in G. Detti sistemi saranno pertanto I e $\bar{I}$, i quali costituiscono perciò un unico sistema fondamentale

di G; onde $\bar{G}$ e $\bar{\bar{G}}$ intersecheranno G in uno stesso sottogruppo Γ, che contiene I, perchè G contiene $\bar{I}$, $\bar{\bar{I}}$.

Mostriamo ora che $\bar{G}$ e $\bar{\bar{G}}$ contengono complessivamente almeno quattro dei cinque sistemi $I^{(1)}$, $I^{(2)}$, $I^{(3)}$, $I^{(4)}$, $I^{(5)}$. Infatti, nel caso che $\bar{G}$ contenga $\bar{\bar{G}}$, Γ è un sottogruppo fondamentale di $\bar{\bar{G}}$, onde $\bar{\bar{G}}$ dovrà contenere almeno due sistemi fondamentali di H non contenuti in Γ, e $\bar{\bar{G}}$ è un sottogruppo fondamentale di $\bar{G}$, onde $\bar{G}$ dovrà contenere almeno due sistemi fondamentali di H non contenuti in $\bar{\bar{G}}$, e quindi almeno quattro sistemi fondamentali di H non contenuti in G. Analogamente si procede se $\bar{G}$ è contenuto in $\bar{\bar{G}}$. Se poi nè $\bar{G}$ contiene $\bar{\bar{G}}$, nè $\bar{\bar{G}}$ contiene $\bar{G}$, si ha che l'intersezione $\bar{\Gamma}$ di $\bar{G}$ e $\bar{\bar{G}}$ è un sottogruppo fondamentale di $\bar{G}$ e di $\bar{\bar{G}}$, onde $\bar{G}$ e $\bar{\bar{G}}$ dovranno ciascuno contenere almeno due sistemi fondamentali di H non contenuti in $\bar{\Gamma}$, nè quindi in Γ. In ogni caso pertanto $\bar{G}$ e $\bar{\bar{G}}$ contengono complessivamente almeno quattro sistemi fondamentali tra i cinque $I^{(1)}$, $I^{(2)}$, $I^{(3)}$, $I^{(4)}$, $I^{(5)}$; e possiamo supporre che siano i primi quattro.

Supponiamo in primo luogo che $\bar{G}$ e $\bar{\bar{G}}$ non contengano $I^{(5)}$, onde sarà $H = G + \bar{G} + \bar{\bar{G}} + G^{(5)}$, e i sottogruppi G, $\bar{G}$, $\bar{\bar{G}}$, non esauriranno H.

Se H sarà esaurito da $G^{(5)}$ e da altri due dei sottogruppi G, $\bar{G}$, $\bar{\bar{G}}$, e si avrà, per fissare le idee $H = G + \bar{G} + G^{(5)}$, $G^{(5)}$ conterrà, per la c) del n. 2, l'intersezione Γ di G e $\bar{G}$, e quindi anche I. Ma ciò è assurdo, perchè G non contiene $I^{(5)}$. Se poi H non è esaurito in nessun modo da tre dei sottogruppi G, $\bar{G}$, $\bar{\bar{G}}$, $G^{(5)}$, in base alla proprietà del n. 3, $G^{(5)}$ dovrà contenere l'intersezione Γ di G, $\bar{G}$ e $\bar{\bar{G}}$, quindi anche I, il che s'è visto essere assurdo.

Resta pertanto da esaminare il caso $H = G + \bar{G} + \bar{\bar{G}}$. Allora, per la c) del n. 2, $\bar{G}$ e $\bar{\bar{G}}$ hanno a comune il solo Γ, che ha indice 2 in ciascuno dei sottogruppi G, $\bar{G}$, $\bar{\bar{G}}$. Uno dei sottogruppi $\bar{G}$ e $\bar{\bar{G}}$, poniamo $\bar{G}$, conterrà due dei sistemi $I^{(1)}$, $I^{(2)}$, $I^{(3)}$, $I^{(4)}$, $I^{(5)}$, poniamo $I^{(1)}$ ed $I^{(2)}$, mentre $\bar{\bar{G}}$ conterrà i tre rimanenti. $\bar{G}$ è somma dei suoi tre sottogruppi fondamentali Γ, $\Gamma^{(1)}$, $\Gamma^{(2)}$, i quali due ultimi corrispondono ai sistemi $I^{(1)}$ ed $I^{(2)}$. Ogni sistema fondamentale di H contenuto in Γ e diverso da $\bar{I}$, ha il corrispondente sottogruppo fondamentale che è contenuto in G, o è $\bar{\bar{G}}$, e quindi non contiene $I^{(1)}$; onde $\Gamma^{(1)}$, e analogamente $\Gamma^{(2)}$ non potranno contenere, oltre $\bar{I}$, alcun altro sistema fondamentale contenuto in Γ. L'intersezione di Γ con $\Gamma^{(1)}$ e $\Gamma^{(2)}$ è data pertanto da $\bar{I} + J_0$, e, per la c) del n. 2, ha indice 2 in Γ. Γ è il sottogruppo fondamentale massimo di G corrispondente a $\bar{I} + \bar{\bar{I}}$, onde $\bar{I} + \bar{\bar{I}} + I + J_0$ è il centrale di Γ e, contenendo $\bar{I} + J_0$, che ha indice 2 in Γ, coincide con Γ stesso. Essendo $\bar{\bar{G}}$ un sottogruppo fondamentale massimo di H, il suo centrale è costituito da $\bar{\bar{I}} + J_0$, onde Γ sarà somma dei suoi tre sottogruppi $I + J_0$, $\bar{I} + J_0$,

$I + J_0$. Per la *b*) del n. 2, $\bar{\bar{I}} + J_0$ ha allora indice 2 in Γ, e indice 4 in $\bar{\bar{G}}$ (perchè Γ ha indice 2 in $\bar{\bar{G}}$). $\bar{\bar{G}}$ contiene allora tre soli suoi sistemi fondamentali, uno pei quali è $I + \bar{I}$. Segue che due dei tre sistemi fondamentali di G contenuti in $\bar{\bar{G}}$ ma non in Γ, poniamo $I^{(4)}$ ed $I^{(5)}$, costituiscono un unico sistema fondamentale di $\bar{\bar{G}}$, onde $G^{(4)}$ e $G^{(5)}$ interseceranno $\bar{\bar{G}}$ in uno stesso sottogruppo. Ma $G^{(4)}$ non può contenere alcun sistema fondamentale di H contenuto in G e diverso da $\bar{\bar{I}}$, perchè il sottogruppo fondamentale corrispondente ad un tal sistema non contiene $I^{(4)}$, e non può contenere $I^{(1)}$, nè $I^{(2)}$, perchè altrimenti sarebbe somma di due suoi sottogruppi costituiti dalle sue intersezioni con $\bar{G}$ e $\bar{\bar{G}}$, contro la *a*) del n. 2. Onde $G^{(4)}$, e analogamente $G^{(5)}$, sono in $\bar{\bar{G}}$, e poichè si sapeva che intersecavano $\bar{\bar{G}}$ in uno stesso sottogruppo, coincidono; ma ciò è assurdo, perchè $I^{(4)}$ ed $I^{(5)}$ sono due sistemi fondamentali distinti di H.

9. Ora vedremo che

Anche il caso IV) può escludersi.

Essendo $\lambda = \tau - 2$, esistono quattro sistemi fondamentali di H non contenuti in G; siano essi $I^{(1)}, I^{(2)}, I^{(3)}, I^{(4)}$, e siano $G^{(1)}, G^{(2)}, G^{(3)}, G^{(4)}$ i corrispondenti sottogruppi fondamentali. Essendo $\lambda = \lambda'' + 2$, esistono in G due sistemi fondamentali, $\bar{I}$ e $\bar{\bar{I}}$, i cui corrispondenti sottogruppi fondamentali $\bar{G}, \bar{\bar{G}}$ non sono in G. Se è $H = G + \bar{G} + \bar{\bar{G}}$ si vede, ragionando come nel caso III), che $\bar{I} + J_0$, (e, nel caso IV) anche, per ragioni analoghe, $\bar{\bar{I}} + J_0$) hanno indice 2 nell'intersezione Γ di G, $\bar{G}$, $\bar{\bar{G}}$, onde la loro intersezione J_0 avrà indice 4 in Γ, mentre il centrale $I + J_0$ di G avrà indice 2 in Γ, e si avrà $\Gamma = I + \bar{I} + \bar{\bar{I}} + J_0$. Ora ciò è assurdo, perchè, essendo, nel nostro caso, $\tau' - \lambda'' + 3 = 0$, ogni sottogruppo fondamentale di G deve essere un sottogruppo fondamentale di H contenuto in G, mentre Γ, che è il sottogruppo fondamentale di G corrispondente al sistema $\bar{I} + \bar{\bar{I}}$, non è, se vale $\Gamma = \bar{I} + \bar{\bar{I}} + I + J_0$, un sottogruppo fondamentale di H, in quanto nessun sistema fondamentale di H che esso contenga $(I, \bar{I}, \bar{\bar{I}})$ ha Γ per corrispondente sottogruppo fondamentale di H.

Se poi non è $H + G - \bar{G} + \bar{\bar{G}}$, supposto, come è sempre possibile, che $\bar{G}$ non contenga $\bar{\bar{G}}$, $\bar{G}$ dovrà contenere almeno due sistemi fondamentali di H non contenuti in G, e $\bar{\bar{G}}$ dovrà contenere almeno un sistema fondamentale di H non contenuto in G, nè in $\bar{G}$ (altrimenti sarebbe somma delle sue due intersezioni con G e $\bar{G}$, contro la *a*) del n. 2). Pertanto vi sarà un solo sistema fondamentale, supponiamo $I^{(4)}$, non contenuto nè in G, nè in $\bar{G}$, nè in $\bar{\bar{G}}$. Sarà allora $H = G + \bar{G} + \bar{\bar{G}} + G^{(4)}$, e, ragionando come nel caso III), si vede che $G^{(4)}$ dovrebbe contenere anche I, che appartiene a G, $\bar{G}$, $\bar{\bar{G}}$; ma ciò non può essere, perchè G non contiene $I^{(4)}$.

10. Mostriamo ancora che

Il caso V) può escludersi.

Essendo $\lambda = \tau - 2$, esistono 4 sistemi fondamentali di H non contenuti in G; siano essi $I^{(1)}, I^{(2)}, I^{(3)}, I^{(4)}$, e siano $G^{(1)}, G^{(2)}, G^{(3)}, G^{(4)}$ i corrispondenti sottogruppi fondamentali. Essendo $\lambda = \lambda'' + 3$, esistono in G tre sistemi fondamentali di H, siano I_1, I_2, I_3, i cui corrispondenti sottogruppi fondamentali, G_1, G_2, G_3, non sono contenuti in G.

Essendo $\tau' - \lambda'' + 3 = 1$, esisterà un sistema fondamentale di G, il cui corrispondente sottogruppo fondamentale di G non è un sottogruppo fondamentale di H contenuto in G (vedi n. 4); detto sistema dovrà poi spezzarsi in almeno due sistemi fondamentali di H, i cui corrispondenti sottogruppi fondamentali non sono in G. Essi saranno almeno due dei tre sistemi I_1, I_2, I_3, poniamo I_1 ed I_2, i quali faran parte perciò di un unico sistema fondamentale di G; onde G_1 e G_2 intersecheranno G in uno stesso sottogruppo Γ.

Sia G_1 che G_2 dovranno contenere ciascuno almeno due dei sistemi $I^{(1)}, I^{(2)}, I^{(3)}, I^{(4)}$. Se uno di essi, poniamo G_1, li contenesse tutti e quattro, sarebbe $H = G + G_1$, contro la *a*) del n. 2. Se ne contenesse tre, poniamo $I^{(1)}, I^{(2)}, I^{(3)}$, sarebbe $H = G + G_1 + G^{(4)}$, e, per la *c*) del n. 2, $G^{(4)}$ dovrebbe contenere l'intersezione Γ di G e G_1, indi anche I ed I_1, il che non può avvenire, perchè G e G_1 non contengono $I^{(4)}$. Pertanto G_1 e G_2 contengono ciascuno due dei sistemi $I^{(1)}, I^{(2)}, I^{(3)}, I^{(4)}$. Supponiamo che G_1 contenga $I^{(1)}$ ed $I^{(2)}$. Allora G_1 è somma dei suoi tre sottogruppi $\Gamma, I^{(1)} + I_1 + J_0$, $I^{(2)} + I_1 + J_0$, onde, per la *b*) del n. 2, Γ ha indice 2 in $G_1 . G_2$, avendo a comune con G_1 il sottogruppo Γ di indice 2 in G_1, non può contenere altri elementi di G_1, quindi non conterrà nè $I^{(1)}$, nè $I^{(2)}$. Esso conterrà allora $I^{(3)}$ ed $I^{(4)}$, e sarà dato dalla somma dei suoi tre sottogruppi $\Gamma, I^{(3)} + I_2 + J_0$, $I^{(4)} + I_2 + J_0$. $I_1 + J_0$ dovrà avere indice 2 in Γ, e così $I_2 + J_0$; onde J_0 avrà indice 4 in Γ, e si avrà $\Gamma = J_0 + I + I_1 + I_2$.

G_3 non può contenere I_1, nè I_2 altrimenti G_1, o G_2, e quindi Γ conterrebbero I_2, il che non è. D'altra parte G_3 deve contenere almeno due dei 4 sistemi $I^{(1)}, I^{(2)}, I^{(3)}, I^{(4)}$. Ma se esso contiene, ad esempio, $I^{(1)}$, essendo $I^{(1)}$ un laterale di G_1 rispetto al sottogruppo $J_0 + I_1$, G_3 deve contenere anche detto sottogruppo, quindi anche I_1, il che, s'è visto, non può essere. Analogamente si vede che G_3 non può contenere $I^{(2)}, I^{(3)}, I^{(4)}$, onde si giunge ad un assurdo.

11. Dimostriamo infine che

Il caso VI) si può escludere.

Essendo $\lambda = \tau - 2$, esistono quattro sistemi fondamentali di H non contenuti in G; siano essi $I^{(1)}, I^{(2)}, I^{(3)}, I^{(4)}$. Essendo $\lambda = \lambda'' + 4$, esistono in G quattro sistemi fondamentali di H, siano I_1, I_2, I_3, I_4,

i cui corrispondenti sottogruppi fondamentali G_1, G_2, G_3, G_4 non sono contenuti in G.

Essendo $\tau' - \lambda'' + 3 = 2$, esistono due sistemi fondamentali di G, i cui corrispondenti sottogruppi fondamentali di G non sono sottogruppi fondamentali di H contenuti in G (vedi n. 4); ciascuno di detti sistemi dovrà poi spezzarsi in almeno due sistemi fondamentali di H, i cui corrispondenti sottogruppi fondamentali non sono in G. Questi sistemi, in numero di almeno quattro, dovranno essere necessariamente I_1, I_2, I_3, I_4. Supponiamo che I_1 ed I_2 costituiscano un unico sistema fondamentale di G, e così I_3 ed I_4.

Si dimostra allora, in modo analogo a quello seguìto nel caso precedente, che G_1 contiene due dei quattro sistemi $I^{(1)}, I^{(2)}, I^{(3)}, I^{(4)}$, poniamo $I^{(1)}$ ed $I^{(2)}$, mentre G_2 contiene i rimanenti, di modo che è $H = G + G_1 + G_2$, e G, G_1, G_2 si intersecano in un sottogruppo $\Gamma = J_0 + I + I_1 + I_2$.

Inoltre, in modo analogo che nel caso precedente, si dimostra che G_3 il quale dovrebbe contenere almeno due dei quattro sistemi $I^{(1)}, I^{(2)}, I^{(3)}, I^{(4)}$, non può contenerne alcuno; onde si giunge ad un assurdo.

12. Dai numeri precedenti segue che, se G è un sottogruppo fondamentale massimo di H, e il rango r di H è > 2, detti τ e τ' il tipo di H e di G, si ha $\tau' \leq \tau - 8$.

Si può però subito togliere la restrizione che G sia un sottogruppo fondamentale massimo di H. Se infatti G non è un sottogruppo fondamentale massimo di H, esiste un sottogruppo fondamentale massimo $\bar{G}$ di H, che contiene G. Detto $\bar{\tau}$ il tipo di $\bar{G}$ si ha da un lato $\bar{\tau} \leq \tau - 8$, e dall'altro $\tau' \leq \bar{\tau} - 3$ [15], onde $\tau' \leq \tau - 11 < \tau - 8$. In conclusione

Se G è un sottogruppo fondamentale, di tipo τ', del gruppo H di tipo τ e rango $r > 2$, si ha $\tau' \leq \tau - 8$.

13. Si supponga ora che H sia un gruppo di rango r, e, conformemente a ciò, sia G_r un sottogruppo fondamentale di H di genere r, e

$$G_r, G_{r-1}, \cdots, G_2, G_1$$

una successione di sottogruppi fondamentali di H di cui ciascuno, diverso dall'ultimo, contenga propriamente il successivo. Ciascuno di detti sottogruppi, diverso dal primo, è un sottogruppo fondamentale di tutti quelli che lo precedono.

Vedesi subito che, per $4 \leq i \leq r$, il rango di G_i è ≥ 3, e pertanto, per la proposizione del numero precedente, detto τ_i il tipo di G_i, si ha

---

[15] Op. cit. [3], Nota II, pag. 444.

$\tau_{i+1} \leq \tau_i - 8$, come pure $\tau_r \leq \tau - 8$, se τ indica il tipo di H. Si ha ancora, (visto che $\tau_3 > 3$) $\tau_2 \leq \tau_3 - 6$, e $\tau_1 \leq \tau_2 - 3$ [15]. In conclusione

$$\tau_r \leq \tau - 8$$
$$\tau_{r-1} \leq \tau_r - 8$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\tau_3 \leq \tau_4 - 8$$
$$\tau_2 \leq \tau_3 - 6$$
$$\tau_1 \leq \tau_2 - 3$$
$$-2 \leq \tau_1$$

ossia, sommando membro a membro e riducendo

$$-2 \leq \tau - 8r + 7$$

indi

$$\tau \geq 8r - 9 \qquad \text{ed} \qquad r \leq \frac{\tau + 9}{8}.$$

Pertanto la nostra diseguaglianza è completamente dimostrata.

Meccanica. — *Campi tensoriali potenziali di rango superiore.* Nota (1) di UMBERTO CISOTTI, Aggregato alla Reale Accademia d'Italia.

Ho già introdotto la definizione di tensori potenziali (2), quando viene stabilita una corrispondenza univoca, nei punti di un campo, tra una funzione scalare dei punti del campo (*potenziale*) e un tensore posizionale cioè funzione dei punti dello stesso campo. Questa nozione costituisce un'estensione ai campi tensoriali di quella notissima, e largamente usata, di campi vettoriali conservativi.

Trattando con tensori m–pli, per $m \geq 2$, si può anche pensare di estendere ulteriormente il su richiamato concetto al caso in cui venga stabilita una corrispondenza tra un *vettore*, o *tensore semplice*, e un tensore che dev'essere almeno doppio o m–plo con $m > 2$. Chiamando tensori potenziali di *primo rango* quelli finora considerati, quelli cioè nei quali il *potenziale è uno scalare*, chiameremo di *secondo rango* un tensore m–plo, con $m \geq 2$, quando questo tensore si fa dipendere da un *vettore potenziale*.

È manifesto come il concetto possa venire esteso a campi tensoriali nei quali il tensore del campo, poniamo m–plo, viene fatto dipendere da un altro *tensore potenziale* p–plo, essendo $p < m$; sarà allora a dirsi che il campo tensoriale è *potenziale di rango* $p + 1$.

Mi propongo, in questa Nota, di mettere in evidenza due notevoli tensori: uno doppio e l'altro triplo, legati ad un vettore e che, per quanto si è stabilito, potremo chiamare *potenziali di secondo rango*. Il primo di questi interviene a formare il tensore doppio di deformazione, che interessa lo studio delle deformazioni finite dei sistemi continui e precisamente nella parte che viene trascurata nelle cosidette deformazioni infinitesime; esso va a coincidere col noto tensore fondamentale δ quando il vettore potenziale è $P - O$, essendo O un punto fisso e P il generico punto dello spazio. L'altro – il tensore triplo – offre un interessante esempio di tensore *emisotropo*, che va a coincidere col noto tensore ε quando il vettore potenziale è $P - O$.

---

(1) Presentata nell'Adunanza del 17 gennaio 1941–XIX.

(2) *Campi tensoriali potenziali.* Questi « Rendiconti », serie VII, vol. II (1940–XVIII), pag. 129.

1. Tensore doppio potenziale di secondo rango. — Sia v un vettore posizionale, funzione dei punti P di un campo, regolare insieme alle derivate prime secondo tutte le direzioni uscenti da P (y_i). Poniamo:

$$[1] \qquad \boxed{V_{ik} = \frac{\partial v}{\partial y_i} \times \frac{\partial v}{\partial y_k} = \sum_1^3{}_\lambda \frac{\partial v_\lambda}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial v_\lambda}{\partial y_k}} \,.$$

È facile constatare che V_{ik} sono le componenti cartesiane di un tensore doppio V, cioè che la [1] ha carattere tensoriale di fronte al sistema di riferimento: chiamando $\bar{v}_\mu$ le componenti cartesiane di v rispetto ad un altro riferimento di assi $\bar{y}_j$, le componenti $\bar{V}_{jh}$ dello stesso tensore V secondo il nuovo riferimento sono:

$$[2] \qquad \bar{V}_{jh} = \frac{\partial v}{\partial \bar{y}_j} \times \frac{\partial v}{\partial \bar{y}_h} = \sum_1^3{}_\mu \frac{\partial \bar{v}_\mu}{\partial \bar{y}_j} \cdot \frac{\partial \bar{v}_\mu}{\partial \bar{y}_h} \,.$$

Basta rilevare che, se T_{ik} sono le componenti cartesiane di un tensore doppio qualsiasi T rispetto al primo riferimento, le componenti $\bar{T}_{jh}$ dello stesso tensore con riferimento alla seconda terna sono definite dalla relazione [1]

$$\bar{T}_{jh} = \sum_1^3{}_{ik} T_{ik} \alpha_{ij} \alpha_{kh} \,,$$

essendo $\alpha_{ij} = \cos(y_i, \bar{y}_j)$.

Tenendo conto della [1] si ottiene:

$$\bar{V}_{jh} = \sum_1^3{}_{ik} V_{ik} \alpha_{ij} \alpha_{kh} = \sum_1^3{}_{ik\lambda} \frac{\partial v_\lambda}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial v_\lambda}{\partial y_k} \alpha_{ij} \alpha_{kh} \,,$$

e, per essere

$$\sum_1^3{}_i \frac{\partial v_\lambda}{\partial y_i} \alpha_{ij} = \frac{\partial v_\lambda}{\partial \bar{y}_j} \quad , \quad \sum_1^3{}_k \frac{\partial v_\lambda}{\partial y_k} \alpha_{kh} = \frac{\partial v_\lambda}{\partial \bar{y}_h} \,,$$

si ha, sostituendo,

$$\bar{V}_{jh} = \sum_1^3{}_\lambda \frac{\partial v_\lambda}{\partial \bar{y}_j} \cdot \frac{\partial v_\lambda}{\partial \bar{y}_h} \,;$$

se si osserva altresì che

$$v_\lambda = \sum_1^3{}_\mu \bar{v}_\mu \alpha_{\lambda\mu} = \sum_1^3{}_\nu \bar{v}_\nu \alpha_{\lambda\nu} \,,$$

---

[1] Cisotti, *Meccanica razionale*. Terza ediz. Libreria Editrice Politecnica Milano (1939–XVII), pag. 334.

si ottiene successivamente

$$V_{jh} = \sum_{1}^{3}{}_{\lambda\mu\nu} \frac{\partial \overline{v}_\mu}{\partial \overline{y}_j} \cdot \frac{\partial \overline{v}_\nu}{\partial \overline{y}_h} \alpha_{\lambda\mu} \cdot \alpha_{\lambda\nu} = \sum_{1}^{3}{}_{\mu\nu} \frac{\partial \overline{v}_\mu}{\partial \overline{y}_j} \cdot \frac{\partial \overline{v}_\nu}{\partial \overline{y}_h} \sum_{1}^{3}{}_{\lambda} \alpha_{\lambda\mu} \alpha_{\lambda\nu} =$$

$$= \sum_{1}^{3}{}_{\mu\nu} \frac{\partial \overline{v}_\mu}{\partial \overline{y}_j} \cdot \frac{\partial \overline{v}_\nu}{\partial \overline{y}_h} \delta_{\mu\nu} = \sum_{1}^{3}{}_{\mu} \frac{\partial \overline{v}_\mu}{\partial \overline{y}_j} \cdot \frac{\partial \overline{v}_\mu}{\partial \overline{y}_h} ,$$

che è appunto la preannunciata relazione [2].

Le caratteristiche delle deformazioni finite di un sistema continuo sono notoriamente determinate dalle seguenti relazioni:

$$[3] \qquad 2\xi_{ik} = \frac{\partial v_i}{\partial y_k} + \frac{\partial v_k}{\partial y_i} + \sum_{1}^{3}{}_{\lambda} \frac{\partial v_\lambda}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial v_\lambda}{\partial y_k} ;$$

la somma dei primi due termini del secondo membro definisce il doppio della parte simmetrica del tensore derivato del vettore $\boldsymbol{v}$ [1], la sommatoria coincide con V_{ik}, cioè è la generica componente cartesiana del tensore $\boldsymbol{V}$ ora introdotto.

Abbiamo così analiticamente confermato il carattere tensoriale di [3] anche per le deformazioni finite, come lo era già per le deformazioni infinitesime per le quali $\boldsymbol{V}$ è ritenuto trascurabile.

Se, in particolare, si assume

$$\boldsymbol{v} = P - O ,$$

essendo O l'origine delle coordinate, e P il punto generico di coordinate y_i, avendosi $v_i = y_i$ dalla [1] scende

$$V_{ik} = \sum_{1}^{3}{}_{\lambda} \delta_{\lambda i} \delta_{\lambda k} = \delta_{ik} .$$

Risulta $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{\delta}$: il tensore $\boldsymbol{V}$ va a coincidere col tensore fondamentale.

2. Tensore triplo potenziale di secondo rango. — Poniamo ora:

$$[4] \qquad \boxed{W_{ihk} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial y_i} \times \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial y_h} \wedge \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial y_k}} .$$

Dico che, ponendo

$$[5] \qquad \overline{W}_{jlm} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \overline{y}_j} \times \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \overline{y}_l} \wedge \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \overline{y}_m} ,$$

[1] Loco citato, pag. 356.

risulta

$$[6] \qquad \overline{W}_{jlm} = \sum_{1}^{3}{}_{ihk} W_{ihk}\, \alpha_{ij}\, \alpha_{hl}\, \alpha_{km} ,$$

con che resta analiticamente constatato (1) che [4] definisce un *tensore triplo potenziale di secondo rango.*

Basta osservare che è:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \overline{y}_j} = \sum_{1}^{3}{}_{i} \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial y_i}\, \alpha_{ij} \quad , \quad \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial y_l} = \sum_{1}^{3}{}_{h} \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial y_h}\, \alpha_{hl} \quad , \quad \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \overline{y}_m} = \sum_{1}^{3}{}_{k} \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial y_k}\, \alpha_{km} ,$$

dalle quali si deduce

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \overline{y}_j} \times \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \overline{y}_h} \wedge \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \overline{y}_m} = \sum_{1}^{3}{}_{ihk} \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial y_i} \times \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial y_h} \wedge \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial y_k}\, \alpha_{ij}\, \alpha_{hl}\, \alpha_{km} ;$$

questa relazione, in virtù di [4] e [5], dà luogo alla preannunciata relazione [6].

Risulta da [4] che se i , h , k non sono tutti distinti è $W_{ihk} = 0$; quindi le componenti cartesiane di $\boldsymbol{W}$ non nulle si hanno quando i , h , k sono distinti, cioè costituiscono una delle $3! = 6$ permutazioni degli indici 1, 2, 3. L'espressione cartesiana di [4] è

$$W_{ihk} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial v_1}{\partial y_i} & \dfrac{\partial v_2}{\partial y_i} & \dfrac{\partial v_3}{\partial y_i} \\ \dfrac{\partial v_1}{\partial y_h} & \dfrac{\partial v_2}{\partial y_h} & \dfrac{\partial v_3}{\partial y_h} \\ \dfrac{\partial v_1}{\partial y_k} & \dfrac{\partial v_2}{\partial y_k} & \dfrac{\partial v_3}{\partial y_k} \end{vmatrix} ,$$

la quale conferma essere $W_{ihk} = 0$ quando i tre indici non sono distinti; se gli indici sono distinti, ponendo

$$[7] \qquad D = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial v_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial v_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial v_3}{\partial y_1} \\ \dfrac{\partial v_1}{\partial y_2} & \dfrac{\partial v_2}{\partial y_2} & \dfrac{\partial v_3}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial v_1}{\partial y_3} & \dfrac{\partial v_2}{\partial y_3} & \dfrac{\partial v_3}{\partial y_3} \end{vmatrix} = \frac{d\,(v_1 , v_2 , v_3)}{d\,(y_1 , y_2 , y_3)} ,$$

si ha

$$W_{ihk} = (-1)^e D ,$$

(1) Loco citato, pag. 339.

essendo c il numero delle inversioni che la permutazione i, h, k presenta rispetto alla fondamentale $1, 2, 3$. Introducendo il tensore ε le cui componenti cartesiane sono nulle quando i, h, k non sono distinti mentre, quando sono distinti, è [1]

$$\varepsilon_{ihk} = (-1)^c ,$$

si possono esprimere nel seguente modo le componenti cartesiane del tensore W:

[8] $$W_{ihk} = D\,\varepsilon_{ihk} .$$

Se si opera un cambiamento di coordinate e si pone

$$\overline{D} = \frac{d(\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3)}{d(\overline{y}_1, \overline{y}_2, \overline{y}_3)} ,$$

è notoriamente [2]

[9] $$\overline{D} = D .$$

Una facile riconferma del carattere tensoriale di W_{ihk} scende dalla [8]; basta notare che, avendosi per [9]

$$\overline{W}_{jlm} = \overline{D}\overline{\varepsilon}_{jlm} = D\overline{\varepsilon}_{jlm} ,$$

---

[1] Loco citato, pag. 340.

[2] La constatazione è del resto quasi immediata se si nota che, essendo

$$\overline{v}_j = \sum_1^3{}_i\, v_i\, \alpha_{ij} ,$$

risulta

$$\frac{\partial \overline{v}_j}{\partial \overline{y}_l} = \sum_1^3{}_i \frac{\partial v_i}{\partial \overline{y}_l}\,\alpha_{ij} = \sum_1^3{}_{ih} \frac{\partial v_i}{\partial y_h}\,\alpha_{hl}\,\alpha_{ij} = \sum_1^3{}_h\,\alpha_{hl} \sum_1^3{}_i \frac{\partial v_i}{\partial y_h}\,\alpha_{ij} ,$$

la quale, posto

[*] $$\beta_{hj} = \sum_1^3{}_i \frac{\partial v_i}{\partial y_h}\,\alpha_{ij} .$$

può scriversi

$$\frac{\partial \overline{v}_j}{\partial \overline{y}_l} = \sum_1^3{}_h\,\alpha_{hl}\,\beta_{hj} .$$

Scende da questa:

$$\overline{D} = \left\| \frac{\partial \overline{v}_j}{\partial \overline{y}_l} \right\| = \| \alpha_{hl} \| \cdot \| \beta_{hj} \| ,$$

mentre dalla [*] risulta

$$\| \beta_{hj} \| = \left\| \frac{\partial v_i}{\partial y_h} \right\| \cdot \| \alpha_{ij} \| = D \cdot \| \alpha_{ij} \| ,$$

per cui $\overline{D} = |\alpha_{hl}|^2 D$, ovvero, per essere $|\alpha_{hl}|^2 = 1$, scende senz'altro la [9]

le relazioni lineari e omogenee tra $\overline{W}_{jlm}$ e W_{ihk} sono quelle stesse che legano tra di loro $\bar{\varepsilon}_{jlm}$ e ε_{ihk}, relazioni che sappiamo essere tensoriali (1).

Concludendo, possiamo esprimere [8] in forma tensoriale scrivendo:

$$[10] \qquad \boxed{W = D\varepsilon} \,.$$

In virtù di questa relazione i caratteri del tensore ε si trasmettono al tensore W: oltre quello della *emisimmetria*, direttamente constatabile sulla [4], sussiste il carattere notevolissimo della *emisotropia* (2); dunque il tensore W offre un esempio di tensore posizionale *emisotropo*.

Nel caso particolare di

$$v = P - O \,,$$

avendosi $D = 1$, risulta

$$W = \varepsilon \,.$$

(1) Loco citato, pag. 340.
(2) Loco citato, pagg. 340 e 364.

Astronomia. — *Effetto del termine cosmogonico sullo spostamento del perielio di una orbita planetaria e sulla variazione del parametro e dell'eccentricità.* Nota di CATALDO AGOSTINELLI, presentata (1) da GIUSEPPE ARMELLINI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

1. In due Note pubblicate nei *Rendiconti* della Reale Accademia d'Italia (2), introducendo nella formula newtoniana che dà l'attrazione di due punti il *termine cosmogonico* di ARMELLINI, ho stabilito le equazioni generali del moto relativo di un pianeta puntiforme P, di massa m, intorno al baricentro Q_0 del Sole, considerato di forma qualsiasi e di massa m_0, nonchè le equazioni del moto del Sole intorno al suo baricentro, nell'ipotesi che siano trascurabili i termini di ordine superiore al secondo in $\frac{\delta}{\rho}$, ove δ è la distanza di un punto generico Q del Sole dal suo baricentro Q_0, e ρ la distanza PQ_0.

In esse, dopo aver confermato alcuni dei risultati ottenuti dal professore ARMELLINI nelle sue recenti ricerche di *Cosmogonia*, ho dimostrato che l'asse di rotazione del Sole tende, col crescere, indefinitamente del tempo, ad una direzione fissa, e che la velocità angolare del Sole e il moto medio del pianeta tendono allo stesso valore.

In questa Nota, partendo dalle equazioni ivi stabilite, mi sono proposto di determinare innanzi tutto lo spostamento del perielio di un'orbita planetaria arrivando a una formula da cui risulta che *il termine cosmogonico dà luogo a uno spostamento del perielio, nel verso di rotazione del pianeta intorno al Sole, che va lentamente crescendo ad ogni giro*, formula che applicata ad un dato ciclo di anni, e a partire da un dato istante, scelto come iniziale, *può forse spiegare lo spostamento del perielio del pianeta Mercurio, e ciò indipendentemente dalla teoria della relatività.*

In ultimo ho considerato il parametro e l'eccentricità dell'orbita in un ciclo compreso fra due perieli successivi ed ho rilevato che *il parametro va lentamente crescendo ad ogni ciclo, mentre l'eccentricità va secolar-*

(1) Nell'Adunanza del 17 gennaio 1941-XIX.

(2) C. AGOSTINELLI, *Sui problemi fondamentali della Cosmogonia.* (« Rendiconti » della Reale Accademia d'Italia, fasc. 3-5, serie VII, vol. II, 1941-XIX).

mente diminuendo fino ad annullarsi, ciò che è conforme ad un risultato già ottenuto dal prof. ARMELLINI [1].

2. Ricordiamo intanto che l'equazione vettoriale del moto relativo del pianeta P intorno al baricentro Q_0 del Sole è

$$[1]\quad \frac{d^2(P-Q_0)}{dt^2} = -f\left(1+\frac{m}{m_0}\right)\frac{1}{\rho^3}\left[m_0+\frac{3}{2\rho^2}(2\mathfrak{M}-5\mathfrak{J}+2\sigma)\right](P-Q_0) -$$
$$-\varepsilon f\left(1+\frac{m}{m_0}\right)\left[\left\{\frac{1}{\rho^3}\frac{d\rho}{dt}\left[m_0+\frac{2}{\rho^2}(\mathfrak{M}-6\mathfrak{J}+2\sigma)\right]+\right.\right.$$
$$+\frac{4}{\rho^6}\sigma(P-Q_0)\times\left[\frac{d}{dt}(P-Q_0)-\boldsymbol{\omega}\wedge(P-Q_0)\right]\Big\}(P-Q_0)+$$
$$\left.+\frac{1}{\rho^4}(\mathfrak{M}-\sigma)\left\{\frac{d}{dt}(P-Q_0)-\boldsymbol{\omega}\wedge(P-Q_0)\right\}\right].$$

ove m è la massa del pianeta, m_0 quella del Sole, f il coefficiente di attrazione universale, ε il coefficiente cosmogonico, ρ la distanza PQ_0, σ l'*omografia d'inerzia* del Sole rispetto a Q_0, $\mathfrak{M}$ il momento d'inerzia polare del Sole rispetto a Q_0 ed $\mathfrak{J}$ il momento d'inerzia del medesimo rispetto alla retta Q_0P; infine $\boldsymbol{\omega}$ è il vettore velocità angolare del Sole.

Detto poi $\boldsymbol{K}_{Q_0}=\sigma\boldsymbol{\omega}$ il momento della quantità di moto del Sole rispetto al suo baricentro Q_0, si aveva l'*equazione cardinale*

$$[2]\quad \frac{d\boldsymbol{K}_{Q_0}}{dt}=\frac{3fm}{\rho^5}(P-Q_0)\wedge\sigma(P-Q_0)+\frac{\varepsilon fm}{\rho^4}\left\{\frac{4}{\rho}\frac{d\rho}{dt}(P-Q_0)\wedge\sigma(P-Q_0)+\right.$$
$$\left.+(P-Q_0)\wedge(\mathfrak{M}-\sigma)\left[\frac{d}{dt}(P-Q_0)-\boldsymbol{\omega}\wedge(P-Q_0)\right]\right\}.$$

Dalla [1], moltiplicando vettorialmente a sinistra per $(P-Q_0)$, e indicando con

$$\boldsymbol{A}=(P-Q_0)\wedge\frac{d}{dt}(P-Q_0),$$

il *vettore velocità areolare* del pianeta P nel suo moto intorno a Q_0, si è ricavata l'equazione

$$[3]\quad \frac{d\boldsymbol{A}}{dt}=-\frac{3f\left(1+\frac{m}{m_0}\right)}{\rho^5}(P-Q_0)\wedge\sigma(P-Q_0)-$$
$$-\varepsilon f\left(1+\frac{m}{m_0}\right)\left\{\frac{4}{\rho^5}\frac{d\rho}{dt}(P-Q_0)\wedge\sigma(P-Q_0)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\rho^4}(P-Q_0)\wedge(\mathfrak{M}-\sigma)\left[\frac{d}{dt}(P-Q_0)-\boldsymbol{\omega}\wedge(P-Q_0)\right]\right\},$$

---

[1] G. ARMELLINI, *I problemi fondamentali della Cosmogonia e la legge di Newton*. Nota IV. (« Rendiconti » della R. Accademia dei Lincei, vol. XXIX, ser. 6ª, pag. 649, a. 1939-XVIII).

e dal confronto di questa colla [2] si è dedotto l'integrale primo vettoriale

$$[4] \qquad \boldsymbol{K}_{Q_0} + \frac{m m_0}{m + m_0} \boldsymbol{A} = \boldsymbol{k}_0 \quad \text{(vettore costante)},$$

che non è altro che l'integrale del momento della quantità di moto del sistema Sole–pianeta.

3. Abbiamo dimostrato inoltre che *se l'asse di rotazione del Sole si suppone di direzione invariabile, e coincidente con uno degli assi centrali d'inerzia, il moto del pianeta P è piano e si svolge precisamente nel piano equatoriale del Sole.*

Per le ricerche che ci proponiamo ora di effettuare consideriamo l'asse del Sole di direzione invariabile. Muovendosi allora il pianeta nel piano equatoriale perpendicolare a quest'asse, che assumiamo come asse z, si avrà

$$(P - Q_0) \times \boldsymbol{\omega} = 0.$$

Supponendo inoltre che il Sole abbia struttura giroscopica intorno all'asse di rotazione, indicando con $\mathfrak{C}$ il suo momento d'inerzia rispetto a quest'asse e con $\mathfrak{A}$ quello rispetto a un asse del piano equatoriale, risulterà ancora

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{A} + \frac{1}{2}\mathfrak{C} \quad , \quad \mathfrak{J} = \mathfrak{A} \quad , \quad \sigma (P - Q_0) = \mathfrak{A} (P - Q_0),$$

$$\sigma \left[\frac{d}{dt} (P - Q_0) - \boldsymbol{\omega} \wedge (P - Q_0) \right] = \mathfrak{A} \left[\frac{d}{dt} (P - Q_0) - \boldsymbol{\omega} \wedge (P - Q_0) \right],$$

poichè i vettori

$$P - Q_0 \quad , \quad \frac{d}{dt} (P - Q_0) \quad , \quad \boldsymbol{\omega} \wedge (P - Q_0),$$

sono, nel nostro caso, perpendicolari all'asse z.

L'equazione [1], ove si trascurino i termini che contengono il prodotto $\varepsilon (\mathfrak{C} - \mathfrak{A})$, (essendo molto piccolo lo schiacciamento del Sole, e quindi $\mathfrak{C}$ poco differente da $\mathfrak{A}$), porge pertanto

$$[5] \qquad \frac{d^2 (P - Q_0)}{dt^2} = -f \left(1 + \frac{m}{m_0}\right) \frac{1}{\rho^3} \left[m_0 + \frac{3}{2\rho^2} (\mathfrak{C} - \mathfrak{A}) \right] (P - Q_0) -$$

$$- \varepsilon f \left(1 + \frac{m}{m_0}\right) \left\{ \frac{1}{\rho^3} \frac{d\rho}{dt} \left(m_0 - \frac{\mathfrak{C}}{\rho^2} \right) (P - Q_0) + \frac{\mathfrak{C}}{2\rho^4} \left[\frac{d}{dt} (P - Q_0) - \boldsymbol{\omega} \wedge (P - Q_0) \right] \right\}.$$

Essendo poi in questo caso $\boldsymbol{K}_{Q_0} = \sigma \boldsymbol{\omega} = \mathfrak{C} \boldsymbol{\omega}$, ponendo $\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{k}$, ove $\boldsymbol{k}$ è il *versore* dell'asse di rotazione del Sole, e indicando con Φ l'anomalia del punto P nel piano del moto, risulta

$$\boldsymbol{A} = \rho^2 \dot{\Phi} \cdot \boldsymbol{k}, \quad \text{con} \quad \dot{\Phi} = \frac{d\Phi}{dt}.$$

Le equazioni [2], [3], porgono allora senz'altro le equazioni scalari

$$[6]\quad \frac{d\omega}{dt} = -\frac{\varepsilon f m}{2\rho^2}(\omega - \dot\Phi) \quad , \qquad [7]\quad \frac{d(\rho^2\dot\Phi)}{dt} = \frac{\varepsilon f\left(1+\frac{m}{m_0}\right)\mathcal{C}}{2\rho^2}(\omega - \dot\Phi),$$

e l'integrale [4] dà

$$[8]\qquad \mathcal{C}\omega + \frac{m m_0}{m+m_0}\rho^2\dot\Phi = k_0 \quad \text{(costante)}.$$

Poichè allo stato attuale la velocità angolare ω del Sole è maggiore della velocità angolare $\dot\Phi$ di ciascun pianeta, dalla [6] si deduce che la velocità angolare del Sole va secolarmente diminuendo, mentre per la [7] si ha che la velocità areolare del pianeta va secolarmente aumentando. Le loro variazioni si annullano quando $\omega = \dot\Phi$, cioè quando le due velocità angolari diventano eguali.

Raggiunto questo stato limite la [8] diventa

$$\omega\left[\mathcal{C} + \frac{m m_0}{m+m_0}\rho^2\right] = k_0,$$

che è una relazione fra i valori limiti di ω e di ρ.

4. — Ciò premesso moltiplichiamo ambo i membri della [5] scalarmente per $(P - Q_0)$. Osservando che

$$\frac{d^2(P-Q_0)}{dt^2}\times(P-Q_0) = \frac{d}{dt}\left[\frac{d(P-Q_0)}{dt}\times(P-Q_0)\right] - \left[\frac{d(P-Q_0)}{dt}\right]^2 =$$

$$= \frac{d}{dt}(\rho\dot\rho) - (\dot\rho^2 + \rho^2\dot\Phi^2) = \rho\frac{d\dot\rho}{dt} - \rho^2\dot\Phi^2,$$

dopo facili semplificazioni si ottiene

$$[9]\quad \frac{d\dot\rho}{dt} - \rho\dot\Phi^2 = -\frac{f(m+m_0)}{\rho^2}\left[1 + \frac{3(\mathcal{C}-\mathcal{A})}{2m_0\rho^2}\right] - \frac{\varepsilon f(m+m_0)}{\rho^2}\cdot\frac{d\rho}{dt}\left(1 - \frac{\mathcal{C}}{2m_0\rho^2}\right).$$

Ma

$$\dot\rho = \frac{d\rho}{d\Phi}\dot\Phi = -\frac{d\left(\frac{1}{\rho}\right)}{d\Phi}(\rho^2\dot\Phi)\,; \quad \frac{d\dot\rho}{dt} = -\frac{d^2\left(\frac{1}{\rho}\right)}{d\Phi^2}\cdot\rho^2\dot\Phi^2 - \frac{d\left(\frac{1}{\rho}\right)}{d\Phi}\cdot\frac{d(\rho^2\dot\Phi)}{dt},$$

cioè, in virtù della [7]

$$\frac{d\dot\rho}{dt} = -\frac{1}{\rho^2}\frac{d^2\left(\frac{1}{\rho}\right)}{d\Phi^2}(\rho^2\dot\Phi)^2 + \frac{\varepsilon f(m+m_0)\mathcal{C}}{2m_0\rho^2}(\dot\Phi - \omega)\cdot\frac{d\left(\frac{1}{\rho}\right)}{d\Phi}.$$

Perciò la [9] si può scrivere ancora

$$\frac{1}{\rho^2}(\rho^2\dot{\Phi})^2\left[\frac{d^2\left(\frac{1}{\rho}\right)}{d\Phi^2}+\frac{1}{\rho}\right]+\frac{\varepsilon f(m+m_0)}{\rho^2}\cdot(\rho^2\dot{\Phi})\cdot\left(1+\frac{\mathcal{C}\omega}{2m_0\rho^2\dot{\Phi}}-\frac{\mathcal{C}}{m_0\rho^2}\right)\frac{d\left(\frac{1}{\rho}\right)}{d\Phi}=$$

$$=\frac{f(m+m_0)}{\rho^2}\left[1+\frac{3(\mathcal{C}-\mathcal{A})}{2m_0\rho^2}\right].$$

Ponendo in luogo di ω e di $\rho^2\dot{\Phi}$ i loro valori medi, ω_0, c, tali da soddisfare alla [8], e facendo quindi

$$\frac{1}{\rho}=u\quad,\quad\frac{f(m+m_0)}{c^2}=\frac{1}{p_0}\quad,\quad\frac{\varepsilon f(m+m_0)}{c}=\frac{\varepsilon c}{p_0}=2\alpha,$$

si ottiene

$$[10]\qquad\frac{d^2u}{d\Phi^2}+2\alpha\left(1+\frac{\mathcal{C}\omega_0}{2m_0c}-\frac{\mathcal{C}}{m_0}u^2\right)\frac{du}{d\Phi}+u=\frac{1}{p_0}\left[1+\frac{3(\mathcal{C}-\mathcal{A})}{2m_0}u^2\right].$$

Ma se indichiamo con a_0 il diametro equatoriale del Sole, e con ε_1 lo schiacciamento polare, risulta $\mathcal{C}=\frac{2}{5}m_0a_0^2$, e, a meno di termini di ordine superiore al primo rispetto ad ε_1, si ha

$$\mathcal{C}-\mathcal{A}=\frac{2}{5}\varepsilon_1 m_0a_0^2,$$

perciò la [10] diventa

$$[10']\qquad\frac{d^2u}{d\Phi^2}+2\alpha\left(1+\frac{1}{5}\frac{a_0^2\omega_0}{c}-\frac{2}{5}a_0^2u^2\right)\frac{du}{d\Phi}+u=\frac{1}{p_0}\left(1+\frac{3}{5}\varepsilon_1a_0^2u^2\right),$$

che è un'equazione differenziale del secondo ordine nella funzione incognita u. È opportuno rilevare che, nel caso di un Sole puntiforme, supponendo cioè $a_0=0$, la [10'] si riduce all'equazione [8] della Nota I del professore Armellini [1].

5. Benchè l'equazione [10'] non sia riducibile alle quadrature, per il nostro scopo basta immaginare la u sviluppata in serie di potenze di ε_1 e di α e trascurare in questo sviluppo i termini di ordine superiore al primo rispetto ad ε_1 ed α, essendo queste due costanti estremamente piccole.

[1] G. Armellini, *I problemi fondamentali della Cosmogonia e la legge di Newton*. Nota I. («Rendiconti» della R. Accademia dei Lincei, vol. XXVI, serie 6ª, pag. 209, a. 1937).

Possiamo allora porre

[11] $$u = u_{00} + \varepsilon_1 u_{01} + \alpha u_1 ,$$

ove u_{00} , u_{01} , u_1 sono indipendenti da α e da ε_1 .

Sostituendo nella [10'] e trascurando, come si è detto, i termini di ordine superiore al primo in α, ed ε_1, si ottiene

$$\frac{d^2 u_{00}}{d\Phi^2} + u_{00} - \frac{1}{p_0} + \varepsilon_1 \left(\frac{d^2 u_{01}}{d\Phi^2} + u_{01} - \frac{3}{5} \frac{a_0^2}{p_0} u_{00}^2 \right) +$$

$$+ \alpha \left[\frac{d^2 u_1}{d\Phi^2} + 2 \left(1 + \frac{1}{5} \frac{a_0^2 \omega_0}{c} - \frac{2}{5} a_0^2 u_{00}^2 \right) \frac{du_{00}}{d\Phi} + u_1 \right] = 0 ,$$

la quale si scinde nelle tre equazioni

[12] $$\frac{d^2 u_{00}}{d\Phi^2} + u_{00} - \frac{1}{p_0} = 0 ,$$

[13] $$\frac{d^2 u_{01}}{d\Phi^2} + u_{01} - \frac{3}{5} \frac{a_0^2}{p_0} u_{02}^2 = 0 ,$$

[14] $$\frac{d^2 u_1}{d\Phi^2} + 2 \left(1 + \frac{1}{5} \frac{a_0^2 \omega_0}{c} - \frac{2}{5} a_0^2 u_{00}^2 \right) \frac{du_{00}}{d\Phi} + u_1 = 0 .$$

Determineremo u_{00} in modo che per $\Phi = 0$ sia $\frac{du_{00}}{d\Phi} = 0$; si ha allora dalla [12]

$$u_{00} = \frac{1}{p_0} + \frac{e_0}{p_0} \cos \Phi ,$$

con e_0 costante arbitraria. La costante e_0 è evidentemente l'eccentricità dell'orbita planetaria non perturbata, in presenza di un Sole puntiforme (cioè per $\alpha = 0$ ed $a_0 = 0$) .

Sostituendo nelle [13] e [14] e integrando, colla condizione che per $\Phi = 0$ sia $u_{01} = 0$, $\frac{du_{01}}{d\Phi} = 0$, e $u_1 = 0$, $\frac{du_1}{d\Phi} = 0$, si ricava

$$u_{01} = \frac{3}{5} \frac{a_0^2}{p_0^3} \left[1 + \frac{1}{2} e_0^2 + e_0 \Phi \operatorname{sen} \Phi - \frac{1}{6} e_0^2 \cos 2\Phi - \left(1 + \frac{1}{3} e_0^2 \right) \cos \Phi \right] ,$$

$$u_1 = - \frac{e_0}{p_0} \lambda \Phi \cos \Phi + \frac{4}{15} \frac{a_0^2 e_0^2}{p_0^3} \operatorname{sen} 2\Phi + \frac{1}{40} \frac{a_0^2 e_0^3}{p_0^3} \operatorname{sen} 3\Phi +$$

$$+ \left(\frac{e_0}{p_0} \lambda - \frac{8}{15} \frac{a_0^2 e_0^2}{p_0^3} - \frac{3}{40} \frac{a_0^2 e_0^3}{p_0^3} \right) \operatorname{sen} \Phi ,$$

ove per semplicità si è posto

[15] $$\lambda = 1 - \frac{2}{5} \frac{a_0^2}{p_0^2} \left(1 + \frac{1}{4} e_0^2 - \frac{p_0 \omega_0}{2c} \right) .$$

Perciò per la [11] si deduce

$$[16] \quad u = \frac{1}{p_0} + \frac{e_0}{p_0}\cos\Phi + \frac{3}{5}\varepsilon_1 \frac{a_0^2}{p_0^3}\left[1 + \frac{1}{2}e_0^2 + e_0\Phi\,\mathrm{sen}\,\Phi - \frac{1}{6}e_0^2\cos 2\Phi - \right.$$

$$\left. - \left(1 + \frac{1}{3}e_0^2\right)\cos\Phi\right] + \alpha\frac{e_0}{p_0}\left\{ - \lambda\Phi\cos\Phi + \frac{4}{15}\frac{a_0^2 e_0}{p_0^2}\,\mathrm{sen}\,2\Phi + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{40}\frac{a_0^2 e_0^2}{p_0^2}\,\mathrm{sen}\,3\Phi + \left(\lambda - \frac{8}{15}\frac{a_0^2 e_0}{p_0^2} - \frac{3}{40}\frac{a_0^2 e_0^2}{p_0^2}\right)\mathrm{sen}\,\Phi\right\},$$

e per $\Phi = 0$ risulta $\dfrac{du}{d\Phi} = 0$.

Ponendo

$$[17] \quad \overline{u} = \frac{1}{p_0} + \frac{e_0}{p_0}\cos\Phi + \frac{3}{5}\varepsilon_1 \frac{a_0^2}{p_0^3}\left[1 + \frac{1}{2}e_0^2 - \frac{1}{6}e_0^2\cos 2\Phi - \right.$$

$$\left. - \left(1 + \frac{1}{3}e_0^2\right)\cos\Phi\right] + \alpha\frac{e_0}{p_0}\left\{\frac{4}{15}\frac{a_0^2 e_0}{p_0^2}\,\mathrm{sen}\,2\Phi + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{40}\frac{a_0^2 e_0^2}{p_0^2}\,\mathrm{sen}\,3\Phi + \left(\lambda - \frac{8}{15}\frac{a_0^2 e_0}{p_0^2} - \frac{3}{40}\frac{a_0^2 e_0^2}{p_0^2}\right)\mathrm{sen}\,\Phi\right\},$$

che comprende il complesso dei termini periodici, la [16] diventa

$$[18] \qquad u = \overline{u} + \frac{3}{5}\varepsilon_1 \frac{a_0^2}{p_0^3} e_0\Phi\,\mathrm{sen}\,\Phi - \alpha\lambda\frac{e_0}{p_0}\Phi\cos\Phi.$$

È facile vedere che per le orbite planetarie la quantità λ definita dalla [15] è positiva. Infatti, in tal caso si ha

$$\frac{2}{5}\frac{a_0^2}{p_0^2}\left(1 + \frac{1}{4}e_0^2\right) < \frac{2}{5}\left(1 + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2},$$

e perciò

$$\lambda > \frac{1}{2} + \frac{1}{5}\frac{a_0^2\omega_0}{c} > 0.$$

6. Utilizzando la soluzione approssimata [16] dell'equazione differenziale [10'], possiamo assegnare facilmente una formula che dà lo spostamento del perielio di un'orbita planetaria tenendo conto dello schiacciamento solare e del termine cosmogonico.

Poichè la u è stata determinata in modo che per $\Phi = 0$, sia $\dfrac{du}{d\Phi} = 0$, assumendo come istante iniziale quello per cui è $\Phi = 0$, in quell'istante il pianeta passa per un perielio.

Indicando poi con $\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_i, \cdots$ le anomalie dei successivi perieli dell'orbita del pianeta, nel suo moto di rotazione intorno al Sole, in corrispondenza di essi si avrà sempre

$$[19] \qquad \left(\frac{du}{d\Phi}\right)_{\Phi=\Phi_i} = 0, \qquad (i = 1, 2, \cdots).$$

Per un'orbita non perturbata, cioè per $\varepsilon_1 = 0$ ed $\alpha = 0$, la u e la $\frac{du}{d\Phi}$ risultano funzioni periodiche dell'anomalia Φ, di periodo 2π, e perciò i perieli si presentano esattamente ad ogni rotazione uguale a 2π. Tenendo conto invece dello schiacciamento polare del Sole, e del coefficiente cosmogonico, i perieli, dopo ogni giro, risulteranno spostati di una quantità molto piccola.

Più precisamente, essendo Φ_i e Φ_{i+1} le anomalie di due perieli consecutivi si avrà

$$[20] \qquad \Phi_{i+1} = \Phi_i + 2\pi + \sigma_i, \qquad (i=0, 1, 2, \cdots; \Phi_0=0)$$

ove gli spostamenti σ_i sono dello stesso ordine di grandezza dei coefficienti ε_1 ed α.

Ora dalla [18] si ricava

$$[21] \qquad \frac{du}{d\Phi} = U(\Phi) + \frac{3}{5}\varepsilon_1 \frac{a_0^2}{p_0^3} e_0 \Phi \cos\Phi + \alpha \frac{e_0}{p_0} \lambda\Phi \operatorname{sen}\Phi,$$

ove si è posto

$$[22] \qquad U(\Phi) = \frac{d\bar{u}}{d\Phi} + \frac{3}{5}\varepsilon_1 \frac{a_0^2}{p_0^3} e_0 \operatorname{sen}\Phi - \alpha\lambda \frac{e_0}{p_0} \cos\Phi,$$

essendo $U(\Phi)$ funzione periodica di Φ di periodo 2π.

Dalla [21], per le [19], si ricava

$$[23] \qquad U(\Phi_i) + \frac{3}{5}\varepsilon_1 \frac{a_0^2}{p_0^3} e_0 \Phi_i \cos\Phi_i + \alpha \frac{e_0}{p_0} \lambda\Phi_i \operatorname{sen}\Phi_i = 0,$$

e così pure

$$[23'] \qquad U(\Phi_{i+1}) + \frac{3}{5}\varepsilon_1 \frac{a_0^2}{p_0^3} e_0 \Phi_{i+1} \cos\Phi_{i+1} + \alpha \frac{e_0}{p_0} \lambda\Phi_{i+1} \operatorname{sen}\Phi_{i+1} = 0.$$

Ma per la [20] e la [22], avendo riguardo inoltre alla [17], a meno di termini di ordine superiore al primo rispetto a σ_i, e osservando che σ_i si annulla per $\varepsilon_1 = 0$ ed $\alpha = 0$, risulta

$$U(\Phi_{i+1}) = U(\Phi_i + \sigma_i) = U(\Phi_i) + U_0'(\Phi_i) \cdot \sigma_i = U(\Phi_i) - \frac{e_0}{p_0} \cos\Phi_i \cdot \sigma_i.$$

Sostituendo perciò nella [23'], e trascurando i termini che contengono i prodotti $\varepsilon_1 \sigma_i$, $\alpha\sigma_i$, si ottiene

$$U(\Phi_i) - \frac{e_0}{p_0}\cos\Phi_i \cdot \sigma_i + \frac{3}{5}\varepsilon_1 \frac{a_0^2}{p_0^3} e_0 (\Phi_i + 2\pi)\cos\Phi_i + \\ + \alpha \frac{e_0}{p_0}\lambda(\Phi_i + 2\pi)\operatorname{sen}\Phi_i = 0,$$

dalla quale, avendo riguardo alla [23], segue subito

$$-\frac{e_0}{p_0}\cos\Phi_i \cdot \sigma_i + \frac{6}{5}\pi\varepsilon_1 \frac{a_0^2}{p_0^3} e_0 \cos\Phi_i + 2\pi\alpha \frac{e_0}{p_0}\lambda \operatorname{sen}\Phi_i = 0.$$

Di qui si ricava

$$[24] \qquad \sigma_i = \frac{6}{5}\pi\varepsilon_1 \frac{a_0^2}{p_0^2} + 2\pi\alpha\lambda \tan\Phi_i, \qquad (i = 0, 1, 2, \cdots),$$

ovvero, poichè per la [20] è $\Phi_i = 2\pi i + \sigma_0 + \sigma_1 + \cdots + \sigma_{i-1}$, si ha ancora

$$[24'] \quad \sigma_i = \frac{6}{5}\pi\varepsilon_1 \frac{a_0^2}{p_0^2} + 2\pi\alpha\lambda \tan(\sigma_0 + \sigma_1 + \cdots + \sigma_{i-1}), \quad (i = 1, 2, \cdots),$$

che è la formula che volevamo stabilire. Essa permette di calcolare successivamente ad ogni giro, a partire dall'istante che si è assunto come iniziale, lo spostamento del perielio dell'orbita del pianeta considerato, ove il primo spostamento σ_0 per la [28] è dato da

$$\sigma_0 = \frac{6}{5}\pi\varepsilon_1 \frac{a_0^2}{p_0^2}.$$

Abbiamo già osservato che il coefficiente λ è un numero positivo; perciò la [24'] dimostra che: 1) *lo schiacciamento polare del Sole produce uno spostamento del perielio nello stesso verso in cui il pianeta ruota intorno al Sole, spostamento che si mantiene costante ad ogni giro;* 2) *lo spostamento del perielio dovuto al termine cosmogonico avviene ancora nello stesso verso e va crescendo ad ogni giro.*

Evidentemente la formula [24'] si manterrà valida finchè si applica ad un periodo di anni per cui i corrispondenti valori di σ_i, con essa calcolati, si mantengano sufficientemente piccoli. È da rilevare infine che data l'estrema piccolezza del coefficiente α, l'influenza del termine cosmogonico è inizialmente trascurabile, ma poichè questa influenza va lentamente crescendo col tempo, è probabile che applicando la [24'] ad un dato ciclo di anni, si possa ad esempio confermare lo spostamento del perielio osservato per il pianeta Mercurio, *e ciò indipendentemente da ogni considerazione relativistica.*

7. La soluzione approssimata [18] consente ancora di vedere come il parametro dell'orbita del pianeta va lentamente crescendo, mentre l'eccentricità va secolarmente diminuendo fino ad annullarsi.

Infatti, possiamo definire il valore medio p_i del parametro nel ciclo (Φ_i, Φ_{i+1}), mediante la relazione

$$\frac{1}{p_i} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Phi_i}^{\Phi_i + 2\pi} u(\Phi)\, d\Phi ,$$

la quale in virtù della [18] e della [17], ricordano che $\bar{u}(\Phi)$ è funzione periodica di Φ di periodo 2π, porge

$$\frac{1}{p_i} = \frac{1}{p_0}\left[1 + \frac{3}{5}\varepsilon_1 \frac{a_0^2}{p_0^2}\left(1 + \frac{1}{2}e_0^2\right) - e_0\left(\frac{3}{5}\varepsilon_1 \frac{a_0^2}{p_0^2}\cos\Phi_i + \alpha\lambda \operatorname{sen}\Phi_i\right)\right],$$

e quindi, sempre a meno di termini di ordine superiore al primo rispetto ad ε, e ad α, risulta

[25] $$p_i = p_0\left[1 - \frac{3}{5}\varepsilon_1 \frac{a_0^2}{p_0^2}\left(1 + \frac{1}{2}e_0^2\right) + e_0\left(\frac{3}{5}\varepsilon_1 \frac{a_0^2}{p_0^2}\cos\Phi_i + \alpha\lambda \operatorname{sen}\Phi_i\right)\right].$$

Nel ciclo successivo si avrà

$$p_{i+1} = p_0\left[1 - \frac{3}{5}\varepsilon_1 \frac{a_0^2}{p_0^2}\left(1 + \frac{1}{2}e_0^2\right) + e_0\left(\frac{3}{5}\varepsilon_1 \frac{a_0^2}{p_0^2}\cos\Phi_{i+1} + \alpha\lambda \operatorname{sen}\Phi_{i+1}\right)\right],$$

e pertanto

$$p_{i+1} - p_i = p_0 e_0\left[\frac{3}{5}\varepsilon_1 \frac{a_0^2}{p_0^2}(\cos\Phi_{i+1} - \cos\Phi_i) + \alpha\lambda(\operatorname{sen}\Phi_{i+1} - \operatorname{sen}\Phi_i)\right],$$

cioè, ricordando la [20], e trascurando i termini di ordine superiore al primo rispetto a σ_i, si ha facilmente

[26] $$p_{i+1} - p_i = p_0 e_0 \sigma_i\left(\alpha\lambda\cos\Phi_i - \frac{3}{5}\varepsilon_1 \frac{a_0^2}{p_0^2}\operatorname{sen}\Phi_i\right).$$

Il secondo membro della [26] è certamente positivo, poichè l'angolo Φ_i, per la [20], differisce da un multiplo di 2π di una quantità dell'ordine di σ_i; perciò $\operatorname{sen}\Phi_i$ è dell'ordine di σ_i, mentre $\cos\Phi_i$ è prossimo all'unità.

La [26] mostra allora che *il parametro p_i va crescendo ad ogni ciclo* e con sufficiente approssimazione l'incremento Δp_i di esso risulta

[26'] $$\Delta p_i = p_{i+1} - p_i = p_0 e_0 \alpha\lambda \cdot \sigma_i .$$

8. Detta ora e_i l'eccentricità dell'orbita durante il ciclo (Φ_i, Φ_{i+1}), si può porre

$$e_i = \frac{1}{2} p_i [u(\Phi_i) - u(\Phi_i + \pi)],$$

e durante il ciclo successivo si avrà

$$e_{i+1} = \frac{1}{2} p_{i+1} [u(\Phi_{i+1}) - u(\Phi_{i+1} + \pi)],$$

cioè per la [26'], trascurando l'incremento Δp_i, che è del 2° ordine rispetto ad α e σ_i, si ha

$$e_{i+1} = \frac{1}{2} p_i [u(\Phi_{i+1}) - u(\Phi_{i+1} + \pi)].$$

Ne segue

$$[27] \quad e_{i+1} - e_i = \frac{1}{2} p_i \{ [u(\Phi_{i+1}) - u(\Phi_{i+1} + \pi)] - [u(\Phi_i) - u(\Phi_i + \pi)] \}.$$

Ora per la [18] risulta

$$u(\Phi_i) - u[\Phi_i + \pi) = \overline{u}(\Phi_i) - \overline{u}(\Phi_i + \pi) + \frac{3}{5} \varepsilon_1 \frac{a_0^2}{p_0^3} e_0 (2\Phi_i + \pi) \operatorname{sen} \Phi_i - \\ - \alpha \frac{e_0}{p_0} \lambda (2\Phi_i + \pi) \cos \Phi_i.$$

Analogamente, ricordando la [20], e trascurando i termini di ordine superiore al primo rispetto a σ_i, ε_1 ed α, si ha

$$u(\Phi_{i+1}) - u(\Phi_{i+1} + \pi) = \overline{u}(\Phi_i) - \overline{u}(\Phi_i + \pi) + [\overline{u}'(\Phi_i) - \overline{u}'(\Phi_i + \pi)] \cdot \sigma_i + \\ + \frac{3}{5} \varepsilon_1 \frac{a_0^2}{p_0^3} e_0 (2\Phi_i + 5\pi) \operatorname{sen} \Phi_i - \alpha\lambda \frac{e_0}{p_0} (2\Phi_i + 5\pi) \cos \Phi_i,$$

ove, in virtù della [17], sempre colla stessa approssimazione, risulta

$$[\overline{u}'(\Phi_i) - \overline{u}'(\Phi_i + \pi)] \sigma_i = -2 \frac{e_0}{p_0} \operatorname{sen} \Phi_i \cdot \sigma_i.$$

Sostituendo nella [27] si ottiene allora

$$e_{i+1} - e_i = p_i \left[-\frac{e_0}{p_0} \operatorname{sen} \Phi_i \cdot \sigma_i + 2\pi \cdot \frac{e_0}{p_0} \left(\frac{3}{5} \varepsilon_1 \frac{a_0^2}{p_0^2} \operatorname{sen} \Phi_i - \alpha\lambda \cos \Phi_i \right) \right],$$

cioè, avuto riguardo al valore [24] di σ_i, e al valore [25] di p_i, si deduce facilmente

$$e_{i+1} - e_i = -\frac{2\pi e_0 \alpha\lambda}{\cos \Phi_i};$$

e con molta approssimazione, essendo Φ_i di poco differente da un multiplo di 2π, si ha

$$e_{i+1} - e_i = -2\pi e_0 \alpha\lambda.$$

Il secondo membro di questa relazione è negativo e perciò essa mostra che l'*eccentricità dell'orbita planetaria va diminuendo ad ogni ciclo, fino ad annullarsi.*

Astronomia. — *Sulla possibilità dell'appartenenza del pianeta Plutone al sistema di Nettuno* (1). Nota I di LUCIO GIALANELLA, presentata (2) da GIUSEPPE ARMELLINI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

1. – INTRODUZIONE E GENERALITÀ. – L'orbita del pianeta Plutone presenta notevoli singolarità rispetto alle orbite degli altri pianeti, tra cui principalissima è quella di intersecare l'orbita di Nettuno; onde Plutone – pur essendo un pianeta ultranettuniano – può a volte essere più vicino al Sole dello stesso Nettuno. Se prendiamo per elementi dell'orbita di Plutone quelli determinati da F. ZAGAR (3) tenendo conto delle perturbazioni speciali dei quattro grandi pianeti, e che sono anche in ottimo accordo con quelli, determinati all'incirca alla stessa epoca, da B. NICHOLSON e U. MAYALL (4), si hanno per il semiasse maggiore e per l'eccentricità i seguenti valori (1930,0):

$$\textit{Plutone} \qquad a' = 39{,}58 \text{ u. a.} \qquad e' = 0{,}2472\,;$$

mentre gli analoghi elementi di Nettuno sono (Le Verrier–Gaillot):

$$\textit{Nettuno} \qquad a = 30{,}11 \text{ u. a.} \qquad e = 0{,}0090\,.$$

La singolarità più perspicua che risulta allora per le due orbite è che la distanza perielia di Plutone $a'(1-e')$ è sensibilmente uguale a 30 u. a., cioè proprio alla distanza media di Nettuno. Onde, se le altre condizioni di moto sulle rispettive orbite potessero permetterlo, si potrebbe pensare ad un possibile incontro tra i due pianeti.

Le singolarità dell'orbita di Plutone non erano naturalmente sfuggite ad altri precedenti ricercatori. Così nel 1931 G. FAYET (5) ha esaminato, in

(1) Lavoro eseguito nel R. Osservatorio Astronomico di Roma (su Monte Mario).

(2) Nell'Adunanza del 17 gennaio 1941-XIX.

(3) « Memorie della Società Astronomica Italiana », vol. 5; e « Astronomische Nachrichten », Band 240 (1930).

(4) « Astrophysical Journal », vol. 73, n. 1.

(5) « Comptes Rendus », t. 193, pag. 144.

maniera abbastanza circonstanziata, *ma al di fuori di ogni azione perturbatrice*, le posizioni relative di Nettuno e di Plutone, constatando che per una longitudine eliocentrica λ prossima a 277° le orbite dei due pianeti si avvicinano ad una distanza minima di 2,7 u. a. Considerando i medî movimenti diurni dei due pianeti, rispettivamente $n' = 14''$, 238 (Plutone) e $n = 21''$, 535 (Nettuno), si osserva che essi presentano quasi esattamente una relazione di commensurabilità semplice $\frac{n'}{n} = \frac{2}{3} - \frac{1}{181}$, di guisa che, se i due pianeti decrivessero sull'eclittica delle orbite circolari, le congiunzioni in longitudine si succederebbero a intervalli di poco inferiori ai 500 anni, mentre che i valori di λ corrispondenti a due congiunzioni consecutive differirebbero di un numero esiguo di gradi. Tenendo conto, invece, delle inclinazioni e delle eccentricità delle orbite (notevoli per Plutone), le cose – anche trascurando del tutto ogni azione perturbatrice, come fa il Fayet – non sono così semplici ed eleganti. Tuttavia, dal sèguito dello studio del Fayet, che calcola di 500 in 500 anni, dal 2921 av. Cr. al 7292 d. Cr., le longitudini eliocentriche (non perturbate) e le distanze reciproche dei due pianeti, si rileverebbe che verso l'anno 979 av. Cr. non solamente i due pianeti si sarebbero trovati nella situazione di minima distanza, ma anche che la loro distanza si sarebbe conservata minore di 5 u. a. per un periodo di tempo di poco superiore ai 20 anni.

Più recentemente R. A. Lyttleton [1] ha ripreso in esame la questione, partendo dai valori delle velocità dei due pianeti nei diversi punti dell'orbita, ed esaminando – con ipotesi supplementari sulla massa di Plutone – quali sarebbero i possibili risultati di un incontro di Plutone con il sistema di Nettuno, cioè sia con Nettuno medesimo sia col suo satellite Tritone.

2. Scopo del presente lavoro. – Il problema che adesso ci proponiamo di studiare è alquanto diverso da quelli fin qui esaminati, e sostanzialmente più aderente alla realtà. Dati i valori delle eccentricità delle orbite dei due pianeti, delle loro inclinazioni sull'eclittica, nonchè i valori degli altri elementi, è evidente che si potrà parlare di un loro incontro, o avvicinamento, soltanto nelle prossimità di un perielio di Plutone, supponendo però che questo perielio si sia verificato in prossimità della linea d'intersezione delle due orbite. Pertanto il problema fondamentale, propostomi dal prof. Armellini, mio illustre Maestro, può enunciarsi così: « *Trovare l'epoca T in cui la linea degli apsidi dell'orbita di Plutone coincise con la mutua intersezione (o linea dei nodi) delle due orbite di Plutone e Nettuno* ». Per risolverlo, ho diviso il lavoro in due parti. In questa I Nota ho calcolato le perturbazioni *secolari* (del 1° ordine) degli elementi dell'or-

[1] « Monthly Notices », vol. 97, pag. 108 (1937).

bita di Plutone, che non si conoscevano, separatamente per effetto di ognuno dei quattro pianeti Nettuno, Urano, Saturno, Giove, assumendo come riferimento l'eclittica e l'equinozio medio *fissi* del 1930, 0. Ho inoltre riferiti gli elementi e le perturbazioni secolari di Nettuno (già calcolati da LE VERRIER e GAILLOT, ma *tropici*, cioè con riferimento all'equinozio e eclittica mobile della data) alla medesima eclittica ed equinozio *fissi* del 1930, 0. Nella II Nota determino la posizione della mutua intersezione delle orbite dei due pianeti Nettuno e Plutone e il suo movimento secolare; e poi trovo l'epoca in cui la linea degli apsidi di Plutone, per effetto del suo moto secolare (determinato in questa I Nota), è venuta a incontrare tale linea di intersezione.

Così posto il problema, è evidente che, nell'epoca in cui tale coincidenza della linea dei nodi delle due orbite con la linea degli apsidi di Plutone si verificò, la distanza dei due pianeti diveniva assai piccola, ad ogni congiunzione di Plutone con Nettuno; onde Plutone avrebbe potuto appartenere in antico al sistema di Nettuno come un secondo satellite ed essersi quindi distaccato da esso. E ciò tanto più che la sua massa – sebbene non ancora conosciuta con sicurezza – sembra assai piccola, presso a poco dello stesso ordine di quella di Tritone (o poco più): altra singolarità notevole di questo pianeta. Inoltre, questa affermazione trova una buona convalida anche nelle caratteristiche fisiche di Plutone: la grandezza visuale ($14^m,9$) presso a poco uguale a quella di Tritone se questo fosse trasportato alla medesima distanza, e il diametro apparente di meno che $0'',3$, dell'ordine di un satellite o di un grande asteroide. Si intende poi che per spiegare il violento passaggio dallo stato di satellite a quello di pianeta indipendente, bisognerà ammettere la concausa di un fatto cosmologico straordinario, come per esempio l'urto di Plutone con Tritone. Il LYTTLETON nel lavoro citato discute con molta probabilità e verosimiglianza questa ipotesi, ed anzi fa vedere come quest'urto possa aver sortito contemporaneamente i due effetti: di trasformare Plutone in un pianeta indipendente, e di invertire il senso del moto di Tritone, ciò che inoltre potrebbe dare un'altra plausibile spiegazione del moto retrogrado di questo satellite. Anche il giapponese I. YAMANOTO [1] si è occupato dell'origine di Plutone, supponendo anch'egli che esso sia stato in tempi remoti un satellite di Nettuno, strappato a questo dall'azione perturbatrice di un corpo di massa notevole (forse una stella) che avrebbe avuto un incontro periferico col sistema planetario, avvicinandosi – nel suo nodo ascendente (o discendente) – notevolmente a Nettuno. Tale azione perturbatrice avrebbe ridotto l'asse maggiore dell'orbita di Nettuno (e questo darebbe ragione – secondo YAMANOTO – dell'attuale « non

[1] « Bulletin Observ. Kwasan, Kyōto », n. 238 (1935). V. anche « Coelum », 1935, pag. 184.

validità » della legge di Bode *soltanto* per l'orbita di Nettuno), e sbalzato fuori della sua zona d'attrazione uno dei due satelliti, l'attuale Plutone. Il fatto poi che il sistema di Nettuno fosse così notevolmente sovvertito da quest'incontro, mentre gli altri pianeti non ne furono affetti, potrebbe essere spiegato con le possibili configurazioni dei corpi planetarî in quell'istante.

Ma, naturalmente, uno studio « realistico » di un così interessante problema non può prescindere – cosa che non è mai stata fatta finora – dalla considerazione delle perturbazioni secolari dei principali pianeti (Nettuno, Urano, Saturno, Giove) sui due elementi dell'orbita di Plutone interessati a che la nostra ipotesi possa essersi verificata, e cioè la *longitudine del nodo ascendente* Ω' e la *longitudine del perielio* π'. Pertanto, come abbiamo già accennato, non esistendo ancora una teoria di Plutone – abbiamo cominciato col calcolare le perturbazioni secolari (del 1° ordine) di questi due elementi, determinandone le espressioni analitiche in funzione della prima potenza del tempo t (espresso in secoli giuliani di 36525 giorni). Il metodo adoperato è stato quello esposto da CHARLIER nel volume I della sua *Mechanik des Himmels*, e che qui riprendiamo brevemente adattandolo alla presente ricerca.

3. PERTURBAZIONI SECOLARI DEL 1° ORDINE DELLA LONGITUDINE DEL NODO DI PLUTONE. – Consideriamo *due* pianeti, e precisamente Plutone e Nettuno, e cerchiamo le perturbazioni secolari reciproche dei due elementi *longitudine del nodo ascendente* Ω e *longitudine del perielio* π. Nel seguito segneremo sempre con un apice gli elementi che si riferiscono a Plutone e senza apice quelli di Nettuno (o di ogni altro pianeta). Per scrivere le equazioni differenziali che dànno le perturbazioni secolari del 1° ordine di questi elementi, detta i l'inclinazione dell'orbita, poniamo:

$$[1] \qquad \begin{cases} \operatorname{sen}^2 i = u^2 + v^2 \\ \operatorname{tg} \Omega = \dfrac{v}{u} \end{cases}$$

da cui:

$$[2] \qquad \begin{cases} u = \operatorname{sen} i \cos \Omega \\ v = \operatorname{sen} i \operatorname{sen} \Omega \end{cases}$$

dimodochè le equazioni differenziali che dànno le variazioni secolari del 1° ordine di u, v (Nettuno) e di u', v' (Plutone) possono con molta approssimazione scriversi [1]:

---

[1] CHARLIER, op. cit., pag. 348.

$$[3]\qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} = K_1 (v - v') & \begin{cases} \dfrac{du'}{dt} = K_1' (v' - v) \\ \dfrac{dv}{dt} = K_1 (-u + u') & \begin{cases} \dfrac{dv'}{dt} = K_1' (-u' + u) \end{cases} \end{cases}$$

dove i coefficienti K_1 e K_1' sono espressi da:

$$[4]\qquad \begin{cases} K_1 = n \cdot \dfrac{1}{4} a B_1 \cdot \dfrac{m'}{M} \\ K_1' = n' \cdot \dfrac{1}{4} a' B_1 \cdot \dfrac{m}{M} \end{cases}$$

essendo n , n' i medî movimenti diurni; a , a' i semiassi maggiori; m , m' le masse dei due pianeti considerati; M la massa del Sole. Il coefficiente B_1 che figura in [4] si ricava poi da:

$$[5]\qquad \frac{\pi}{4} a' B_1 = \frac{1}{1-\alpha^2} F(\alpha) + \frac{1+\alpha^2}{(1-\alpha^2)^2} E(\alpha)$$

oppure da:

$$[6]\qquad \frac{\pi}{4} a' B_1 = (1 + 3\,\mathrm{tg}^2\theta + 2\,\mathrm{tg}^4\theta)\, E - (1 + \mathrm{tg}^2\theta)\, F$$

dove π indica il noto rapporto di Archimede ($\pi = 2{,}14159$) e si ha:

$$\alpha = \frac{a}{a'} = \mathrm{sen}\,\theta$$

e $F(\alpha)$, $E(\alpha)$ sono gl'integrali ellittici di LEGENDRE di 1ª e 2ª specie:

$$[8]\qquad F(\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\alpha^2\,\mathrm{sen}^2\varphi}} \quad ; \quad E(\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\alpha^2\,\mathrm{sen}^2\varphi}\; d\varphi\,.$$

Per passare poi dalle variazioni degli elementi u , v a quelle dell'elemento ellittico Ω, differenziando le [1] si ottiene:

$$[9]\qquad \begin{cases} \mathrm{sen}\,i\,\cos i \dfrac{di}{dt} = u \dfrac{du}{dt} + v \dfrac{dv}{dt} \\ \dfrac{u^2}{\cos^2\Omega} \dfrac{d\Omega}{dt} = -\dfrac{dv}{dt}\, du + \dfrac{du}{dt}\, dv \end{cases}$$

da cui, con brevi calcoli tenendo presenti le [2]:

$$[10]\qquad \frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{\mathrm{sen}^2 i} \left[-v \frac{du}{dt} + u \frac{dv}{dt} \right]$$

che esprime la variazione secolare di Ω in *secondi di arco al giorno* (se n è il medio movimento diurno in secondi d'arco). Formula analoga vale per Ω'.

Per il calcolo delle perturbazioni secolari di Plutone, tenendo conto delle sole prime potenze del tempo t, non interessa la conoscenza della

massa m' di Plutone. Come abbiamo detto, assumiamo per Plutone gli elementi determinati da F. Zagar e riferiti all'equinozio ed eclittica 1930,0:

$$T' = 1989 \text{ agosto } 28{,}72$$
$$\pi' = 113^\circ\ 08'\ 00''{,}5$$
$$\Omega' = 109^\circ\ 21'\ 38''.9$$
$$i' = 17^\circ\ 06'\ 50''{,}8$$
$$a' = 39,\ 57944 \text{ u. a.}$$
$$e' = 0{,}247196$$
$$P' = 248{,}858 \text{ anni}$$
$$n' = 14''.25\ .$$

Lo stesso calcolo si può evidentemente ripetere considerando oltre la coppia Plutone–Nettuno, anche quella Plutone–Urano, oppure Plutone–Saturno, e Plutone–Giove. A tale scopo assumiamo gli elementi determinati da Le Verrier e Gaillot e riportati nelle *Memoires* dell'Osservatorio di Parigi, rispettivamente nei volumi XXVIII (Nettuno e Urano), XXIV (Saturno), XXXI (Giove), e che qui per semplicità non ripetiamo.

Alla pagina seguente diamo un cenno del calcolo seguìto per trovare le variazioni secolari della *longitudine del nodo* Ω' di Plutone per effetto dei quattro pianeti Nettuno, Urano, Saturno, Giove, limitandoci a riportare soltanto i caposaldi fondamentali del calcolo stesso. Aggiungiamo che i valori numerici degli integrali ellittici $F(\alpha)$, $E(\alpha)$ sono stati ricavati dalle tavole di Legendre, riportate anche in varî trattati, come ad esempio quello di Hancock [1].

Sicchè, in definitiva, l'espressione della *longitudine del nodo ascendente* di Plutone, contenente le perturbazioni secolari del 1° ordine per effetto di Nettuno, Urano, Saturno, Giove è la seguente:

$$\Omega' = 109^\circ\ 21'\ 38''{,}9 \qquad \textit{al 1930,0}$$
$$-\ 54''{,}81\ t \text{ per effetto di } \textit{Nettuno}$$
$$-\ 26\ ,66\ t \quad » \quad » \quad » \quad \textit{Urano}$$
$$-\ 6\ ,94\ t \quad » \quad » \quad » \quad \textit{Saturno}$$
$$-\ 6\ ,94\ t \quad » \quad » \quad » \quad \textit{Giove}$$

$$\textit{Plutone}\ \Omega' = 109^\circ\ 21'\ 38''{,}9 - 95''{,}3\ t$$

dove t è contato in secoli giuliani di 36525 giorni a partire dalla mezzanotte media del 1° gennaio 1930 (T. U.). – L'espressione di Ω' così trovata è riferita all'equinozio e eclittica *fissa del 1930,0*.

[1] H. Hancock, *Elliptic integrals*, New York, 1917.

Nettuno	*Urano*	*Saturno*	*Giove*
$\alpha = \frac{a}{a'} = 0{,}7607$	$\alpha = 0{,}48555$	$\alpha = 0{,}24140$	$\alpha = 0{,}13144$
$\theta = 49^{\circ},518$	$\theta = 29^{\circ},064$	$\theta = 13^{\circ},969$	$\theta = 7^{\circ},553$
$F = 1{,}9270$	$F = 1{,}67824$	$F = 1{,}59456$	$F = 1{,}57768$
$E = 1{,}3100$	$E = 1{,}47356$	$E = 1{,}54734$	$E = 1{,}56385$
$\frac{1}{4} a' B_1 = 2{,}2527$	$\frac{1}{4} a' B_1 = 1{,}1000$	$\frac{1}{4} a' B_1 = 0{,}0488$	$\frac{1}{4} a' B_1 = 0{,}0133$
$= \frac{1}{19314}$ (Newcomb)	$\frac{m}{M} = \frac{1}{22869}$ (Newcomb)	$\frac{m}{M} = \frac{1}{3502}$ (Newcomb)	$\frac{m}{M} = \frac{1}{1047}$ (Newcomb)
$K_1' = 0{,}00166$	$K_1' = 0{,}000686$	$K_1' = 0{,}000198$	$K_1' = 0{,}000181$
$u = -0{,}0203$	$u = +0{,}00381$	$u = -0{,}01702$	$u = -0{,}00392$
$v = +0{,}0234$	$v = +0{,}01292$	$v = +0{,}0400$	$v = +0{,}02248$
$u' = -0{,}0976$	$u' = -0{,}0976$	$u' = -0{,}0976$	$u' = -0{,}0976$
$v' = +0{,}2776$	$v' = +0{,}2776$	$v' = +0{,}2776$	$v' = +0{,}2776$
$\frac{du'}{dt} = +0{,}00042$	$\frac{du'}{dt} = +0{,}00018$	$\frac{du'}{dt} = +0{,}000047$	$\frac{du'}{dt} = +0{,}000046$
$\frac{dv'}{dt} = +0{,}00013$	$\frac{dv'}{dt} = +0{,}000069$	$\frac{dv'}{dt} = +0{,}000016$	$\frac{dv'}{dt} = +0{,}000017$
$\frac{d\Omega'}{dt} = -0{,}001501$ *al giorno*	$\frac{d\Omega'}{dt} = -0'',00073$ *al giorno*	$\frac{d\Omega'}{dt} = -0'',00019$ *giorno*	$\frac{d\Omega'}{dt} = -0'',00019$ *giorno*
$\frac{d\Omega'}{dt} = -0'',5481$ per *anno Giuliano*	$\frac{d\Omega'}{dt} = -0'',2666$ *anno*	$\frac{d\Omega'}{dt} = -0'',0694$ *anno*	$\frac{d\Omega'}{dt} = -0'',0694$ *anno*
$\frac{d\Omega'}{dt} = -54'',81$ per *secolo Giuliano*	$\frac{d\Omega'}{dt} = -26'',26$ *secolo*	$\frac{d\Omega'}{dt} = -6'',94$ *secolo*	$\frac{d\Omega'}{dt} = -6'',94$ *secolo*

4. PERTURBAZIONI SECOLARI (DEL 1° ORDINE) DELLA LONGITUDINE DEL PERIELIO DI PLUTONE. – Considerando sempre la coppia Plutone–Nettuno ed indicando sempre con apici gli elementi di Plutone e senza apici quelli di Nettuno, poniamo:

$$[11] \qquad \begin{cases} e^2 = r^2 + s^2 \\ \operatorname{tg} \pi = \dfrac{s}{r} \end{cases}$$

dove π è la *longitudine del perielio* ed *e l'eccentricità*; ne segue:

$$[12] \qquad \begin{cases} r = e \cos \pi \\ s = e \operatorname{sen} \pi . \end{cases}$$

Le equazioni differenziali che dànno le variazioni secolari (del 1° ordine) di r e s sono allora [1]:

$$[13] \qquad \begin{cases} \dfrac{dr}{dt} = - K_1 s + K_2 s' \\ \dfrac{ds}{dt} = K_1 r + K_2 r' \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{dr'}{dt} = - K_1' s' + K_2' s \\ \dfrac{ds'}{dt} = K_1' r' - K_2' r \end{cases}$$

delle quali a noi interessano per ora soltanto quelle a destra. In esse K_1' ha l'espressione [4], mentre:

$$[14] \qquad K_2' = n' \cdot \frac{1}{4} a' B_2 \cdot \frac{m}{M};$$

il coefficiente B_2 ricavandosi da:

$$[15] \qquad \frac{\pi}{4} a' \alpha B_2 = - \frac{2 - \alpha^2}{1 - \alpha^2} F(\alpha) + \frac{2 (1 + \alpha^2)^2 - 6 \alpha^2}{(1 - \alpha^2)^2} E(\alpha)$$

oppure da:

$$[16] \qquad \frac{\pi}{4} a' \alpha B_2 = 2 (1 + \operatorname{tg}^2 \theta + \operatorname{tg}^4 \theta) E - (2 + \operatorname{tg}^2 \theta) F$$

dove $\alpha = \operatorname{sen} \theta$; π *non* è la longitudine del perielio, ma la nota costante. Per ottenere poi dalle [13] l'espressione della variazione dell'elemento ellittico π, bisogna differenziare le [11]:

$$[17] \qquad \begin{cases} e de = r dr + s ds \\ \dfrac{r^2}{\cos^2 \pi} d\pi = - s dr + r ds \end{cases}$$

da cui, per le [12]:

$$[18] \qquad \frac{d\pi}{dt} = \frac{1}{e^2} \left[- s \frac{dr}{dt} + r \frac{ds}{dt} \right]$$

la quale esprime la variazione secolare di π del 1° ordine in *secondi d'arco al giorno* (se n è il medio movimento diurno in secondi d'arco). Analoga formula si otterrebbe per $\dfrac{d\pi'}{dt}$. Ripetendo lo stesso ragionamento per le coppie degli altri pianeti Plutone–Urano, Plutone–Saturno, Plutone–Giove, abbiamo il seguente specchietto, che riporta gli elementi fondamentali del calcolo non ricavati prededentemente, e i risultati.

---

[1] Cfr. CHARLIER, op. cit., pag. 348.

Nettuno	*Urano*	*Saturno*	*Giove*
$\alpha = 0{,}7607$	$\alpha = 0{,}48555$	$\alpha = 0{,}24140$	$\alpha = 0{,}13144$
$\frac{\pi}{4} a' \alpha B_2 = 4{,}6607$	$\frac{\pi}{4} a' \alpha B_2 = 2{,}7865$	$\frac{\pi}{4} a' \alpha B_2 = 0{,}0101$	$\frac{\pi}{4} a' \alpha B_2 = 0{,}0010$
$K_2' = 0{,}00144$	$K_2' = 0{,}00114$	$K_2' = 0{,}000054$	$K_2' = 0{,}000033$
$r = + 0{,}00612$	$r = - 0{,}04589$	$r = - 0{,}00164$	$r = + 0{,}04705$
$s = + 0{,}00660$	$s = + 0{,}00645$	$s = + 0{,}05587$	$s = + 0{,}01104$
$r' = - 0{,}09712$	$r' = - 0{,}09712$	$r' = - 0{,}09712$	$r' = - 0{,}09712$
$s' = + 0{,}22730$	$s' = + 0{,}22730$	$s' = + 0{,}22730$	$s' = + 0{,}22730$
$\frac{dr'}{dt} = - 0{,}00037$	$\frac{dr'}{dt} = - 0{,}000148$	$\frac{dr'}{dt} = - 0{,}000042$	$\frac{dr'}{dt} = - 0{,}000041$
$\frac{ds'}{dt} = - 0{,}00017$	$\frac{ds'}{dt} = - 0{,}000014$	$\frac{ds'}{dt} = - 0{,}000019$	$\frac{ds'}{dt} = - 0{,}000016$
$\frac{d\pi'}{dt} = + 0'',00163$ al *giorno*	$\frac{d\pi'}{dt} = + 0'',00049$ *giorno*	$\frac{d\pi'}{dt} = + 0'',00016$ *giorno*	$\frac{d\pi'}{dt} = + 0'',00016$ *giorno*
$\frac{d\pi'}{dt} = + 0'',5302$ per *anno giuliano*	$\frac{d\pi'}{dt} = + 0'',1790$ *anno*	$\frac{d\pi'}{dt} = + 0'',0584$ *anno*	$\frac{d\pi'}{dt} = + 0'',0584$ *anno*
$\frac{d\pi'}{dt} = + 53'',02$ per *secolo giuliano*	$\frac{d\pi'}{dt} = + 17'',90$ *secolo*	$\frac{d\pi'}{dt} = + 5'',84$ *secolo*	$\frac{d\pi'}{dt} = + 5'',84$ *secolo*

In definitiva, l'espressione della *longitudine del perielio* di Plutone contenente le perturbazioni secolari (del 1° ordine) è la seguente:

$$\pi' = 113^\circ\ 08'\ 00'',5 \quad \text{al } 1930{,}0$$
$$+ 53'',02\ t \text{ per effetto di } \textit{Nettuno}$$
$$+ 17\ ,90\ t \text{ » » » } \textit{Urano}$$
$$+ 5\ ,84\ t \text{ » » » } \textit{Saturno}$$
$$+ 5\ ,84\ t \text{ » » » } \textit{Giove}$$

$$\textit{Plutone } \pi' = 113^\circ\ 08'\ 00'',5 + 82'',6\ t$$

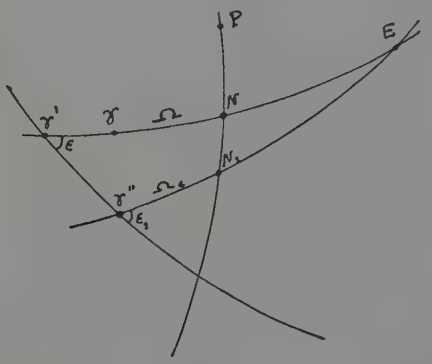
dove t sono secoli giuliani di 36525 giorni a partire dalla mezzanotte media del 1° gennaio 1930 (T. U.). Anche qui π' è riferita all'equinozio e all'eclittica *fissa del 1930,0*.

5. Elementi di Nettuno riferiti all'equinozio fisso e all'eclittica fissa del 1930,0. – Per poter paragonare gli elementi Ω', π' di Plutone, ora trovati, con i corrispondenti Ω, π di Nettuno ricavati dalle tavole di Le Verrier e Gaillot, occorre che i valori degli elementi di Nettuno (con le relative perturbazioni secolari) siano *depurati* dell'importo delle variazioni secolari dovuto al passaggio dall'eclittica ed equinozio mobile della data (per cui questi elementi sono normalmente ricavati, essendo essi *elementi tropici*) all'eclittica ed equinozio *fisso* 1930,0 a cui noi abbiamo riferito gli elementi di Plutone.

Gli elementi di Nettuno da considerare hanno per espressione:

$$[19] \quad \begin{cases} \Omega = 131^\circ\,00'\,39'',86 + 3956'',166\,t + 0'',89952\,t^2 - 0'',016984\,t^3 \\ \pi = 47^\circ\,09'\,17'',05 + 5128'',428\,t + 1'',40694\,t^2 - 0'',002176\,t^3 \end{cases}$$

denotando, al solito, t secoli giuliani a partire dal 1930,0. Gli elementi sono riferiti all'eclittica e all'equinozio mobile della data.



Per passare dal riferimento all'equinozio mobile della data al riferimento all'equinozio fisso 1930,0 bisogna tener conto dei movimenti dell'equatore e dell'eclittica, e determinare le correzioni da apportare alle longitudini. Siano (v. figura, nella quale l'inclinazione dell'orbita di Nettuno N_1 NP è volutamente esagerata per chiarezza):

γE l'eclittica del 1930,0
γ l'equinozio del 1930,0
$\gamma'\,\gamma''$ l'equatore del 1930 + t
$\gamma''\,E$ l'eclittica del 1930 + t
γ'' l'equinozio del 1930,0 + t.

---

(1) « Mémoires Observ. Paris », vol. XXVIII, pag. 150.

La posizione $\gamma'\gamma''$ dell'equatore è definita dalla quantità $\psi = \gamma\gamma'$ (retrogradazione equinoziale sul piano fisso: circa 50″,37 per anno) e dall'obliquità ε dell'eclittica. Sicchè (v. fig.) la *longitudine del nodo ascendente* di Nettuno riferita all'eclittica e all'equinozio fisso 1030,0 è $\Omega = \gamma N$, mentre la stessa quantità riferita all'equinozio e all'eclittica vera è $\Omega_1 = \gamma'' N_1$: la correzione da apportare è $\Omega_1 - \Omega$. Questa quantità si può agevolmente ricavare dalle formule date da LE VERRIER e GAILLOT [1], e se ne ottiene l'espressione:

[20] $$\Omega_1 - \Omega = 3981'',38\, t \qquad (t \text{ secoli giuliani}).$$

Per quanto riguarda poi la *longitudine del perielio* di Nettuno, il valore riferito all'eclittica ed equinozio fissi del 1930,0 è $\pi = \gamma NP$, mentre quello riferito all'eclittica e equinozio mobile è $\pi_1 = \gamma'' N_1 NP$: la correzione da apportare è: $\pi_1 - \pi = \gamma'' N_1 + N_1 N - \gamma N = (\Omega_1 - \Omega) + NN_1$. Anche per calcolare questa quantità sono state date da LE VERRIER e GAILLOT formule opportune [1]; se ne ottiene:

[21] $$\pi_1 - \pi = 5024'',006\, t + 0'',0001157\, t^2 \qquad (t \text{ secoli giuliani}).$$

Pertanto, in conclusione, i valori definitivi di Ω e π di Nettuno, *riferiti ad equinozio ed eclittica fissa 1930,0*, sono i seguenti:

[22] $$Nettuno \begin{cases} \Omega_1 = 131^\circ\, 00'\ 39'',86 - 25'',216\, t \\ \pi_1 = 47^\circ\, 09'\ 17'',05 + 104'',423\, t \end{cases}$$

dove t sono sempre secoli giuliani a partire dal 1930,0 (T. U.).

---

[1] « Memoires Observ. Paris », vol. XXVIII, pag. B9.

Geodesia. — *Sulla determinazione, per via algebrica, degli scostamenti lineari del Geoide da un ellissoide locale* (1). Nota di BENIAMINO GULOTTA, presentata (2) da CORRADINO MINEO, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

È noto come si possa costruire per punti una porzione non molto estesa del Geoide mediante gli *scostamenti* da un certo ellissoide rotondo E_0 di riferimento convenientemente situato. Dette l, λ le coordinate *astronomiche* di un punto A del Geoide, φ, ω le coordinate *ellissoidiche* del punto A' in cui la verticale di A incontra l'ellissoide, e posto

$$\xi = l - \varphi \quad , \quad \eta = (\lambda - \omega)\cos\varphi \quad , \quad h = A'A ,$$

si ha la nota formola

$$[1] \qquad dh = -a\,(\xi\, d\varphi + \eta \cos\varphi d\omega) ,$$

dove a è il semiasse maggiore dell'ellisoide. La [1] è *approssimata* a meno di termini in $\xi^2, \eta^2, \zeta\eta, \xi e^2, \eta e^2, \cdots$, essendo e l'eccentricità di E_0.

Poichè, in pratica, non si possono avere ξ ed η se non in un numero finito di punti A, i valori degli h si otterranno per *quadrature meccaniche*. Le quali saranno tanto meno precise quanto meno fitto è l'insieme dei punti A.

Qui mi propongo di mostrare come, almeno in via teorica, gli scostamenti h possano aversi *direttamente in termini finiti*, mediante formole rigorose, ricavate con procedimento puramente algebrico.

Questo procedimento si fonda sull'introduzione di un ellissoide *ausiliario* E di riferimento per ognuno dei punti A di cui si vuol determinare lo scostamento h dall'ellissoide *principale* E_0. Considerando la deviazione della verticale di A rispetto ad E_0 e quella di A_0 rispetto ad E si riesce facilmente, come vedremo, a calcolare, mediante equazioni lineari, sia lo scostamento h di A da E_0, sia quello h_0 di A_0 da E.

Diciamo subito che, in certi casi, ciò può costituire, nella pratica, il punto debole del metodo, per la mole di calcoli che, in tali casi, esso com-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Geodetico della R. Università di Palermo.

(2) Nell'Adunanza del 17 gennaio 1941-XIX.

porterebbe. In altri, invece, come vedremo, esso può vantaggiosamente sostituire il metodo classico, consentendo una certa economia di osservazioni astronomiche, o servire come controllo ai risultati di quest'ultimo.

Scelto l'ellissoide, rotondo e schiacciato, che meglio si adatta alla regione del Geoide che si vuole studiare, riferiamolo a una terna cartesiana ortogonale x , y , z, con l'origine nel centro e l'asse z secondo l'asse minore; inoltre stabiliamo su esso il solito sistema di coordinate geografiche φ , ω , in modo che si abbia:

$$[2] \qquad x = \frac{a \cos\varphi \cos\omega}{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} \quad , \quad y = \frac{a \cos\varphi \operatorname{sen}\omega}{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} \quad , \quad z = \frac{a(1 - e^2) \operatorname{sen}\varphi}{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} .$$

Se A_0 è un punto del Geoide, di coordinate *astronomiche* l_0 , λ_0, collochiamo l'ellissoide in modo che il suo punto di coordinate $\varphi_0 = l_0$, $\omega_0 = \lambda_0$ coincida con A_0, che le due superficie abbiano ivi la stessa normale e l'asse z risulti parallelo all'asse della rotazione diurna e orientato positivamente come questo. Supporremo anche che le longitudini ellissoidiche siano contate nello stesso verso di quelle astronomiche.

Indichiamo con E_0 l'ellissoide così orientato.

Sia ora A un punto generico del Geoide, di coordinate *astronomiche* l , λ, del quale si vuol determinare lo scostamento h rispetto ad E_0. Consideriamo allora un ellissoide *ausiliario* E (che per semplicità supporremo uguale ad E_0) sul quale sia stato assunto un sistema di coordinate geografiche Φ , Ω, e che sia anche stato riferito a una terna cartesiana ortogonale X , Y , Z, con l'origine nel centro, in modo che per il generico punto di esso si abbia:

$$[3] \qquad X = \frac{a \cos\Phi \cos\Omega}{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \Phi}} \quad , \quad Y = \frac{a \cos\Phi \operatorname{sen}\Omega}{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \Phi}} \quad , \quad Z = \frac{a(1 - e^2) \operatorname{sen}\Phi}{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \Phi}} .$$

Collochiamo quindi questo ellissoide E in modo che il suo punto di coordinate $\Phi = l$, $\Omega = \lambda$ coincida con A, che la sua normale in A coincida con la verticale ecc. *Gli assi omologhi delle sue terne risultano, così, paralleli ed ugualmente orientati.*

Ciò posto indichiamo con A' il punto in cui la verticale di A incontra E_0 e con A'_0 quello in cui la verticale di A_0 incontra E, e poniamo:

$$h_0 = A'_0 A_0 \quad , \quad h = A' A ,$$

cioè indichiamo con h lo *scostamento lineare* di A dall'ellissoide *principale* E_0 (lungo la verticale) e con h_0 quello di A_0 dall'ellissoide *ausiliario* E. Diciamo quindi φ' , ω' le coordinate ellissoidiche di A' (sopra E_0) e Φ'_0 , Ω'_0 quelle di A'_0 (sopra E).

Queste quattro coordinate debbono considerarsi note mediante calcoli. (Come si sa, infatti φ', ω' si ottengono adattando su E_0, in modo conveniente, una poligonale geodetica che congiunge, sul Geoide, i punti A_0 ed A; analogamente per Φ'_0, Ω'_0 sopra E).

Le coordinate $\varphi_0 = l_0$, $\omega_0 = \lambda_0$, $\Phi = l$, $\Omega = \lambda$, sono date da osservazioni. Con evidente significato dei simboli abbiamo:

$$[4] \qquad x_0 - x'_0 + x' - x_0 + x - x' + x'_0 - x = 0.$$

Ma

$$x_0 - x'_0 = h_0 \cos l_0 \cos \lambda_0 \quad , \quad x - x' = h \cos l \cos \lambda ,$$

mentre (per il fatto, testè accennato, che le due terne cartesiane hanno gli assi omologhi paralleli ed ugualmente orientati), si ha:

$$x'_0 - x = X'_0 - X .$$

Dalla [4] allora, e dalle analoghe rispetto agli altri due assi, risulta:

$$[5] \qquad \begin{cases} h_0 \cos l_0 \cos \lambda_0 + h \cos l \cos \lambda = x_0 - X'_0 + X - x', \\ h_0 \cos l_0 \operatorname{sen} \lambda_0 + h \cos l \operatorname{sen} \lambda = y_0 - Y'_0 + Y - y', \\ h_0 \operatorname{sen} l_0 \qquad\quad + h \operatorname{sen} l \qquad\quad = z_0 - Z'_0 + Z - z'. \end{cases}$$

I secondi membri si calcolano, in funzione delle coordinate ellissoidiche dei quattro punti, mediante le [2] e le [3].

Come si vede subito le [5] (a meno degli errori d'osservazione e di calcolo) sono compatibili e determinano h_0 ed h.

Assumiamo come meridiano fondamentale quello di A_0 ($\lambda_0 = 0$). Dalla prima e dalla terza delle [5] si ha per h:

$$[6] \qquad h = \frac{M \operatorname{sen} l_0 - P \cos l_0}{\operatorname{sen} l_0 \cos l \cos \lambda - \cos l_0 \operatorname{sen} l} .$$

Dalla seconda e terza (e anche dalle prime due) si ha invece:

$$[7] \qquad h = \frac{N}{\cos l \operatorname{sen} \lambda} ,$$

dove con M, N, P abbiamo indicato brevemente i secondi membri delle [5], calcolati per $\lambda_0 = 0$.

Sia ZA_0A il triangolo sferico i cui vertici rappresentano, sulla sfera unitaria, la direzione boreale dell'asse del mondo e quelle delle verticali

ascendenti di A_0 ed A. Detto σ il lato $A_0 A$ ed α_0 l'angolo in A_0, la [6] e la [7] si possono scrivere:

$$[8] \qquad \begin{cases} h = \dfrac{M \operatorname{sen} l_0 - P \cos l_0}{\operatorname{sen} \sigma \cos \alpha_0}, \\ h = \dfrac{N}{\operatorname{sen} \sigma \operatorname{sen} \alpha_0}. \end{cases}$$

Ora α_0 e σ ci dànno gli ordini di grandezza dell'azimut della geodetica $A_0 A$ (in A_0) e del rapporto $\frac{s}{a}$ tra la lunghezza s della geodetica e il semiasse a. Vediamo da ciò che è preferibile la [6] quando la geodetica $A_0 A$ corre vicina al meridiano e la [7] quando essa corre vicina al parallelo.

Si vede anche che le nostre formole non si prestano all'uso pratico sia quando si tratta di punti A molto vicini ad A_0 (σ molto piccolo) sia quando si tratta, più in generale, di un insieme molto fitto di punti nei quali *già si conoscono* le deviazioni della verticale, nei quali casi il metodo classico richiede minor mole di calcoli e non presenta grande rischio di errore. Quando invece si vogliano gli h in un numero non molto grande di punti A, non molto vicini ad A_0 (il che può interessare per avere una conoscenza d'insieme della regione) le nuove formole potrebbero prestarsi meglio allo scopo per l'economia, che esse consentono, di un certo numero di osservazioni astronomiche in punti intermedi. E in ogni caso esse possono servire di controllo ai risultati del metodo classico in quei punti A maggiormente lontani da A_0, dove è più temibile l'*accumulo* degli errori.

Dal punto di vista pratico sarebbe necessario un minuto esame della precisione conseguibile con le nostre formole e un paragone con quella del metodo classico. Qui, sia per esigenze di brevità, sia perchè lo scopo principale di questa Nota è, come s'è detto, quello di mostrare la possibilità teorica di determinare gli scostamenti h direttamente in termini finiti, ci limitiamo a enunciare il risultato cui si perviene partendo dalla [6], nell'ipotesi, invero assai schematica, che i due punti A_0 ed A del Geoide siano direttamente collegati da un unico arco di geodetica, poco discosto da un arco di meridiano.

Supponendo che le deviazioni della verticale non superino i 30″, cioè, in radianti , 10^{-4}, che l'arco di geodetica $s = A_0 A$ non sia minore di 61 km., e che gli errori Δl , $\Delta\lambda$, $\Delta\alpha$, $\frac{\Delta s}{a}$ commessi, rispettivamente, nelle misure delle latitudini, longitudini, azimut e lunghezze di archi non superino 10^{-6}, ne deriva, per h, un errore:

$$\Delta h \leq 10^{-8}\, a \cong 6 \text{ cm}.$$

Chimica (Chimica organica). — *Ricerche sui pernitrosoderivati. Sulla cosidetta «mesitilnitrimina» di Harries* (1). Nota I di RAFFAELLO FUSCO e GIOVANNI TRISOGLIO, presentata (2) da GIUSEPPE BRUNI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

L'azione dell'acido nitroso (o dell'ipoazotide) sulle ossime può condurre a risultati diversi in relazione soprattutto alla natura dell'ossima stessa. Mentre infatti molte aldo e cheto-ossime dànno con acido nitroso l'aldeide o il chetone da cui derivano, svolgendo ossidulo di azoto e acqua:

$$R-CH=NOH + HNO_2 = R-CHO + N_2O + H_2O$$

per altre, sopratutto alifatiche e meglio se si opera con N_2O_4 anzichè con HNO_2, si osserva la formazione di pseudonitroli; ad es. l'acetossima (3):

$$\begin{matrix} CH_3 \\ CH_3 \end{matrix}\!\!>\!C=NOH + N_2O_4 = \begin{matrix} CH_3 \\ CH_3 \end{matrix}\!\!>\!C\!<\!\begin{matrix} NO \\ NO_2 \end{matrix} + NO + H_2O$$

Non mancano però esempi di chetossime (4) che reagiscono con l'acido nitroso in modo del tutto particolare formando sostanze recanti un aggruppamento $=CN_2O_2$, sulla cui struttura si è lungamente discusso.

Interessante sarebbe riportare per esteso la storia di questi composti; noi per ragioni di brevità ci limiteremo a tracciarne le linee più salienti.

La scoperta dei primi due rappresentanti di questa nuova classe di corpi risale al 1895 e si deve ad ANGELI (5), che li ottenne dalle ossime della canfora e del canfenone con HNO_2. Egli battezzò le due sostanze col nome

---

(1) Lavoro eseguito presso l'Istituto di Chimica generale del R. Politecnico di Milano.

(2) Nell'Adunanza del 17 gennaio 1941-XIX.

(3) SCHOLL, «Ber.», *21*, 508 (1888); SCHOEFER, «Ber.», *34*, 1911 (1901).

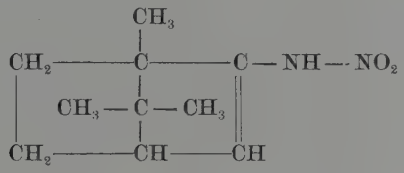
(4) Ad esempio, le ossime della pinacolina, della canfora, del canfenone, del fencone, del mentone, del tanacetone, del cetocineolo, del mesitilossido, della santonina ecc.

(5) ANGELI e RIMINI, «Gazz. Chim. Ital.», *25*, I, 416; «Ber.», *28*, 1077 (1895).

di *pernitrosocanfora* e *pernitrosocanfenone* rispettivamente ma comprese fin da principio le difficoltà che si incontravano nel voler assegnare loro una struttura; si limitò quindi a citarne alcune tra le numerose possibili:

$$:C=N\cdot O\cdot NO \qquad =C\begin{matrix}NO\\NO\end{matrix} \qquad =C\begin{matrix}N-NO\\O\end{matrix} \qquad =C=N\cdot NO_2$$

Quasi contemporaneamente ad Angeli anche Tiemann [1] ottenne la pernitrosocanfora, che ritenne peraltro appartenesse alla classe delle nitramine e che egli formulò come *canfenilnitramina* (I).



(I)

Subito ebbe origine tra i due scienziati una polemica che si protrasse a lungo e a cui parteciparono in seguito numerosi altri Autori.

Nello stesso anno infatti Scholl [2], continuando le sue ricerche sull'azione dell'N_2O_4 sulle chetossime, otteneva dalla pinacolinossima un corpo della stessa natura della pernitrosocanfora cui attribuiva la struttura *nitriminica* (II):

$$(CH_3)_3C{-}C(CH_3):N-NO_2$$

(II)

e nel 1899 Harries [3] preparava dalla mesitilossima con nitrito di amile e acido acetico una sostanza ch'egli formulò prima come nitrosoossima (III), poi come nitrimina (IV) e due anni più tardi [4], ripresone lo studio, in modo alquanto diverso (V):

$$(CH_3)_2C=CH-C(CH_3)=N-O-NO$$

(III)

$$(CH_3)_2C=CH-C(CH_3):N-NO_2$$

(IV)

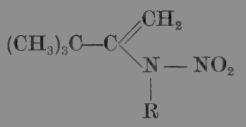
$$(CH_3)_2C=CH-C(CH_3)=N=N:O$$

(V)

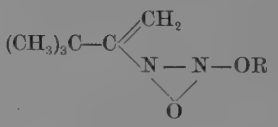
(1) « Ber. », 28, 1081 (1895).
(2) « Ber. », *28*, 1361 (1895).
(3) « Ber. », *32*, 1330 (1899).
(4) « Ann. », *319*, 230 (1901).

Intanto si moltiplicavano, per opera sopratutto di Angeli e dei suoi allievi [1], i rappresentanti della nuova classe di corpi, di cui venivano studiate le numerose trasformazioni, senza che per altro si potesse giungere ad una formula strutturale dell'aggruppamento $= CN_2O_2$ che rendesse conto di tutte le reazioni osservate. Francesconi ed Angelucci [2] descrivono nel 1901 la pernitrososantonina e si dichiarano seguaci della struttura nitrosoossimica. Nel 1903 Angeli [3] accenna per la prima volta a proposito della cloropernitrosocanfora alla possibilità della struttura $= C = N(O) - NO$, sulla quale non ritornerà che 13 anni più tardi in una breve Memoria all'Accademia dei Lincei [4].

Nel 1905 esce sugli «Annalen» un lungo lavoro di Scholl[5]: *Zur Kenntnis der Nitrimine und Nitriminsäuren*, che riesamina da principio la questione della struttura e del modo di formazione delle nitrimine o pernitrosoderivati. Controbattendo molte affermazioni di Angeli e della sua scuola, l'A. riafferma per i nuovi corpi la struttura nitriminica $= C = N - NO_2$ già proposta da Tiemann e da Scholl stesso, appoggiandosi su numerose osservazioni, ma principalmente sull'esistenza di due serie di eteri alchilici isomeri (VI e VII) per la pinacolinnitrimina, ch'egli così formula:

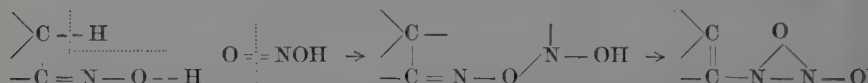


(VI)



(VII)

Venendo a discutere la formazione delle nitrimine o pernitrosoderivati dalle ossime con HNO_2, l'A. immagina un meccanismo quanto mai macchinoso: secondo Scholl le ossime capaci di dare nitrimine devono avere almeno un atomo di idrogeno legato in modo lasco nelle adiacenze del gruppo $= C = NOH$; la reazione avverrebbe allora secondo lo schema:



(1) Angeli, «Gazz. Chim. Ital.», *26*, II, 29; A. e Rimini, id., *26*, II, 34, 45, 228; Rimini, id., *26*, II, 502, 517 (1896); A., id., *28*, I, 11 (1898); Rimini, id., *30*, I, 600 (1900); Angelico e Montalbano, id., *30*, II, 283 (1900).

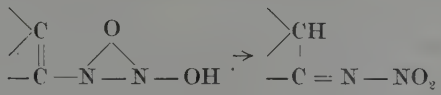
(2) «Gazz. Chim. Ital.», *31*, II, 302 (1901).

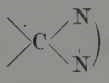
(3) «Rend. Accad. Lincei», I, 428 (1903).

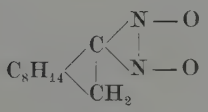
(4) «Rend. Accad. Lincei», II, 7 (1916).

(5) «Ann.», *338*, 1 (1905).

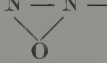
Prenderebbe così origine un acido nitriminico, che si isomerizzerebbe a nitrimina:



Alle affermazioni di Scholl ribatte subito Angeli [1] con nuove osservazioni sui prodotti di riduzione della pernitrosocanfora, alcuni dei quali mostrano ancora il concatenamento C — N — O, assente nella formula nitriminica ed altri si lasciano bene interpretare come derivanti dalla formazione intermedia di un diazo alifatico (per cui si ammetteva allora la struttura ciclica: ) da cui deriverebbe per la pernitrosocanfora la struttura (VIII):



(VIII).

Angeli si sofferma quindi a polemizzare con Scholl sulla struttura degli acidi nitriminici: . . . « Prescindendo dal valore delle argomentazioni sopra le quali lo Scholl basa tale supposizione, farò notare che oramai è diventata problematica l'esistenza dell'anello  il quale più che altro, rappresenta un comodo ripiego » e conclude il suo lavoro con questa frase: « Non crediamo con questo di aver detto l'ultima parola e tanto meno di aver fissato in modo definitivo la formula di struttura della pernitrosocanfora. Una esperienza ormai lunga ci ha imposto un necessario riserbo e ci ha insegnato che si deve essere molto cauti, specialmente quando si vuole dedurre la costituzione dei composti ossigenati dell'azoto, studiando i loro prodotti di trasformazione. In questo caso si incontrano sovente difficoltà tanto maggiori quanto più semplice è il residuo azotato e la chimica dell'acido fulminico ne porge il miglior esempio ».

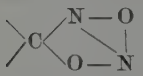
Una nuova critica alle vedute di Scholl compare nello stesso anno (1905) sulla « Gazzetta » ad opera di Angelucci [2] che ottiene la pernitro-

[1] Angeli e Castellana, « Rend. Accad. Lincei » (5), *14*, I, 669 (1905).
[2] « Gazz. Chim. Ital. », *35*, II, 398 (1905); « Ann. », *341*, 172 (1905).

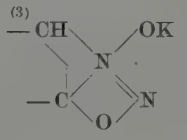
socanfora con rese quantitative da sale sodico della canforossima e NOCl in quantità equimolecolari operando in soluzione cloroformica a freddo, ciò che eviterebbe ogni trasposizione e confermerebbe per i pernitroso la formula nitrosoossimica $=C=N-O-NO$ già sostenuta dallo stesso Autore.

Alle nuove asserzioni di Angeli controbatte ancora Scholl [1] in un secondo lavoro, in cui si sforza di metter d'accordo la struttura nitriminica con quella dei prodotti di riduzione, senza però minimamente tener conto del lavoro di Angelucci, ciò che provoca una breve ma violenta risposta da parte di questo Autore [2].

Dopo più di quindici anni di polemiche, le discussioni sulla struttura dei pernitrosoderivati (o nitrimine) non sono ancora alla fine: Forster [3] propone infatti nel 1911 una nuova struttura della pernitrosocanfora:



e ritiene inoltre che il sale potassico della stessa sostanza ammetta una struttura diversa (IX) in cui intervenga anche l'atomo di carbonio attiguo a quello recante il gruppo pernitrosilico, ciò che renderebbe conto, secondo l'A. stesso, della facilità con cui detto sale si lascia ossidare a canfochinone, copula coi diazo in 3, e si isonitrosa pure in 3.



(IX)

Un breve accenno ai pernitrosoderivati si trova infine in una Memoria di Angeli [4] apparsa sui « Rendiconti » dell'Accademia dei Lincei nel 1916: « Intorno alle esperienze sui pernitrosoderivati riferirò in una prossima comunicazione: per oggi mi limiterò ad accennare che anche le nuove ricerche conducono ad ammettere che in queste sostanze sia contenuto un aggruppamento della forma $>C=N-NO$ (O) vale a dire che si devono considerare come eteri N nitrosi di ossime, perfettamente analoghi agli eteri N alchilici che le stesse ossime possono fornire: $>C=N-CH_3$ (O) ».

---

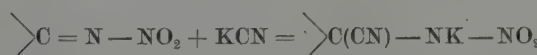
(1) « Ann. », *345*, 363 (1906).
(2) « Gazz. chim. ital. », *36*, I, 627 (1906).
(3) « J. Chem. Soc. », *99*, 1982 (1911).
(4) « Rend. Accad. Lincei », II, 7 (1916).

È questa l'ultima pubblicazione di Angeli sui pernitrosoderivati; ma per ragioni a noi ignote le esperienze a cui l'A. accenna non furono mai pubblicate: è un peccato, perchè queste avrebbero indubbiamente portato un notevole contributo al dibattuto problema della struttura dei pernitrosoderivati; e che queste esperienze fossero di non lieve momento è dimostrato dalle stesse parole di Angeli. Egli infatti non si era mai espresso prima d'allora con tanta certezza sulla struttura dei pernitrosoderivati, giudicando prematura ogni affermazione al riguardo.

Da questo momento in avanti non troviamo più nella letteratura chimica alcuna osservazione di particolare importanza agli effetti della struttura dei pernitroso, se si eccettuano le ricerche di Passerini [1] sull'azione del KCN su alcuni pernitrosoderivati (della canfora, del mentone e del fencone) estese nel 1939 da Gandini [2] al pernitrosocetocineolo. La reazione, consistente in una somma del KCN all'aggruppamento $=C=N_2O_2$, venne interpretata dal Passerini ammettendo vera la formula di Angeli del 1916, e quindi nel senso di formazione di una ciannitrosoidrossilamina (X):

(X)

A questa interpretazione aderirono nel 1931 anche Houben e Pfankuch [3] che in un primo tempo [4] avevano ammesso una formula (XI) derivante dalla struttura nitriminica:



(XI)

Due considerazioni fondamentali risultano dalla rapida rassegna che abbiamo tracciata:

a) che le opinioni sulla struttura e sulla genesi dei pernitrosoderivati (o nitrimine) sono ancora estremamente discordi, tanto che non è

---

(1) « Rend. Accad. Lincei », II, 110 (1924); « Gazz. chim. ital. », *55*, 559 (1925); *57*, 598 (1927).

(2) « Gazz. chim. ital. », *69*, 177, 190 (1939).

(3) « Ann. », *483*, 271 (1930).

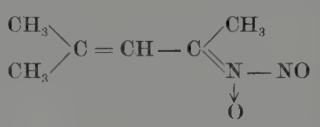
(4) « Ber. », *60*, I, 586 (1927).

neppure ancora ben definito se l'aggruppamento $=CN_2O_2$ presenti la stessa struttura in tutte le sostanze che lo contengono o meno (1);

b) che ancora si devono definire quali sono le caratteristiche strutturali che favoriscono o provocano nelle ossime la formazione di pernitrosoderivati, quando queste vengano poste a reagire con l'acido nitroso (2).

Ci è pertanto sembrato non privo di interesse riprendere lo studio di questa classe di composti organici, a cui insigni autori italiani portarono già sì vasto contributo.

Delle numerose esperienze che abbiamo intrapreso, riferiremo nella Nota successiva quelle che si riferiscono alla «mesitilnitrimina» di HARRIES; possiamo intanto anticipare che tanto da quelle esperienze, quanto dalle considerazioni teoriche che saranno oggetto di questa Nota, risulta in modo indubbio che alla mesitilnitrimina non spetta alcuna delle tre strutture successivamente proposte da HARRIES (form. III, IV e V), bensì la seguente di *pernitrosomesitilossido* o *N–nitrosomesitilossima:* (XII)



(XII)

---

(1) In Italia è generalmente accettata la struttura di ANGELI $>C=\overset{O}{\overset{|}{N}}-NO$ almeno per i pernitrosoderivati della canfora e di altri chetoni che colla canfora presentano qualche analogia o parentela (canfenone, fencone, mentone, cetocineolo ecc.). All'estero, e sopratutto in Germania trova ancora largo favore la formula nitriminica di TIEMANN e SCHOLL. Quest'ultima si era talmente imposta che ad es. i trattati del Beilstein e del Richter-Anschuetz non citano neppure la struttura $>C=N:N=O$ che fu l'ultima di quelle proposte da HARRIES per la sua mesitilnitrimina. Nella monografia francese «Le camphre et ses dérivés» di R. Cornubert (Masson 1933), generalmente abbastanza completa nelle citazioni bibliografiche, la struttura $>C=N-NO$ non è neppure accennata.

(2) Al riguardo si hanno ancora pochi dati: SCHOLL affacciò l'ipotesi che potessero dare nitrimine solo quelle ossime in cui il gruppo $>C=NOH$ fosse legato da un lato o d'ambo i lati con atomi di carbonio quaternari o terziari o recanti doppi legami. Questa condizione non è però essenziale nè generale. Angeli fece osservare che tutti i pernitrosoderivati fino ad allora preparati possedevano l'aggruppamento $-C(CH_3)_2-$.

che corrisponde quasi esattamente (salvo nel doppio legame $\gg N = O$ che noi preferiamo sostituire con un legame semipolare $\gg N \rightarrow O$ [1]) alle vedute di Angeli, esposte nella sua breve Memoria del 1916.

Tra le interessanti reazioni presentate dalla mesitilnitrimina ve n'è una che merita particolare attenzione: Harries [2] ha trovato infatti che scaldando questa sostanza con acqua per due ore a 120°, essa si isomerizza quantitativamente nell'ossima del trimetilisossazolone. L'A. citato, ligio alle vedute di Scholl sulla struttura delle nitrimine, interpretò la reazione a questo modo: *a*) scissione della mesitilnitrimina (IV) in HNO_2 e mesitilossima; *b*) ciclizzazione di quest'ultima a trimetilisossazolina (XIII); *c*) isonitrosazione della trimetilisossazolina a ossima del trimetilisossazolone (XIV):

$$(CH_3)_2C = CH - C(CH_3) : N - NO_2 + H_2O \underset{(a)}{=} HNO_2 + (CH_3)_2C = CH - C(CH_3) : NOH$$

(IV)

$$\xrightarrow{(b)} \underset{(XIII)}{\begin{array}{c} CH_2-C-CH_3 \\ | \quad \| \\ (CH_3)_2C \quad N \\ \diagdown \diagup \\ O \end{array}} + HNO_2 \underset{(c)}{=} H_2O + \underset{(XIV)}{\begin{array}{c} HON = C-C-CH_3 \\ | \quad \| \\ (CH_3)_2C \quad N \\ \diagdown \diagup \\ O \end{array}}$$

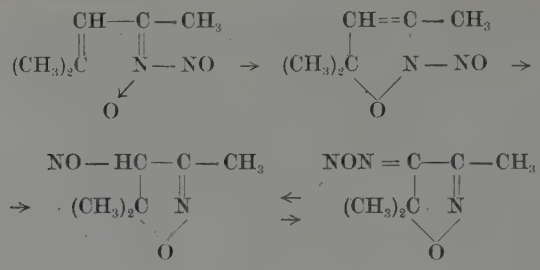
Nel processo immaginato da Harries dovrebbe nella fase *a*) essere assorbita una mol di acqua che verrebbe nuovamente liberata in *c*) e l'opposto accadere per una mol di acido nitroso, che verrebbe liberata in *a*) e riassorbita in *c*). Tale meccanismo non può non apparire artificioso, mentre assai più naturale è la spiegazione che possiamo dare della suddetta trasformazione in base alla nuova struttura di *pernitrosomesitilossido* (XII): è sufficiente in tal caso ammettere un riassestamento dei doppi legami seguìto dalla migrazione del gruppo — NO [3]:

---

[1] In armonia a quanto oggi comunemente si ammette per gli aminoossidi i nitroni, i nitroderivati ecc.

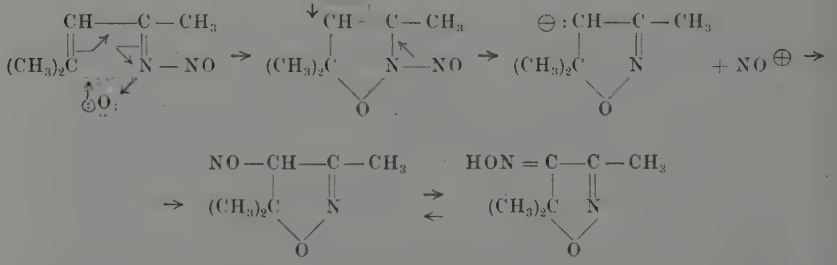
[2] « Ann. », *319*, 230 e sgg. (1901).

[3] Maggiore evidenza acquista il fenomeno se lo si considera dal punto di vista della moderna teoria della cationotropia: nei riassestamenti giocano solo elettroni *p*, notoriamente più eccitabili degli *s*; il gruppo NO migra come catione $NO^{\oplus}$:

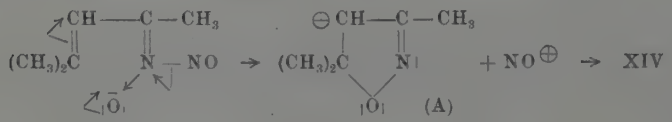


Non mancano, soprattutto nella serie aromatica, esempi di analoghi « salti » del gruppo — NO (e di altri numerosi), dall'azoto al carbonio. Come è noto, queste trasposizioni avvengono sempre in *orto* o in *para* all'atomo di carbonio unito all'azoto portatore del gruppo che migra; ora è facile convincersi che il caso da noi citato corrisponde appunto ad una migrazione in *orto*.

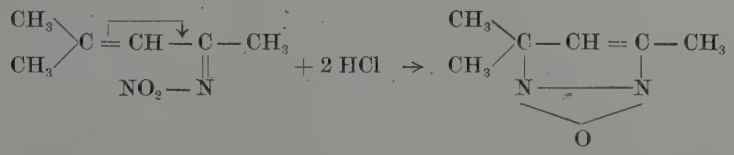
Oltre a questo importante argomento in favore della struttura di *pernitrosomesitilossido*, troviamo una seconda prova della sua esattezza nell'interpretazione che si può dare alla reazione che questa sostanza dà con acido cloridrico. Già HARRIES si era accorto che la formula nitriminica non rendeva facilmente conto di questa reazione particolare e proprio per questa ragione egli aveva proposto per l'aggruppamento



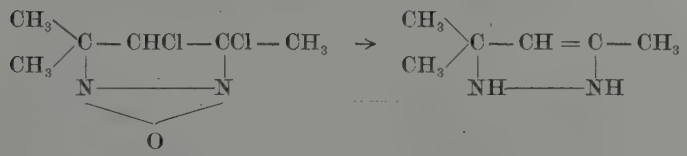
La formazione come fase intermedia della nitrosotrimetilisossazolina ora ammessa, non è però indispensabile per interpretare il processo. Si può pensare che gli spostamenti elettronici conducano direttamente all'anione (A) e al catione nitrosile: dalla cui riunione risulta direttamente l'ossima del trimetilisossazolone:



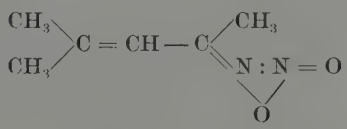
$= CN_2O_2$ la struttura $=C=\overset{O}{\overset{\diagup\diagdown}{N}}:N=O$. Si forma infatti in questo trattamento, come già osservò Harries, un composto clorurato $C_6H_{10}ON_2Cl_2$, molto stabile agli agenti chimici e al calore, che con polvere di zinco si lascia ridurre a trimetilpirazolina. Poichè a questo ultimo prodotto si perviene anche riducendo la mesitilnitrimina, Harries ritenne il composto clorurato come una fase intermedia della riduzione della nitrimina, così esprimendosi sulla sua natura [1]: . . . « Non si sbaglierà quindi di molto considerando il prodotto clorurato già come un derivato della pirazolina, ed ammettendo che l'ossigeno che tanto facilmente viene eliminato, sia legato all'azoto. Difficoltà si trovano solo nella disposizione degli atomi di cloro per i quali esistono molte probabilità. Io ammetto dapprima una ciclizzazione con spostamento del doppio legame, per cui si forma il seguente prodotto intermedio:



A questo doppio legame si addizionano quindi gli atomi di cloro:



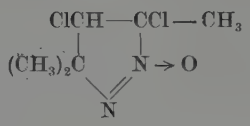
Più semplicemente si può rappresentare la formazione del cloro derivato formulando la nitrimina non come prima ma così:



Certi che lo studio della struttura e del modo di formazione del composto clorurato di Harries avrebbe avuto una notevole importanza per decidere la struttura della « mesitilnitrimina », noi l'abbiamo ripreparato e sottoposto ad una serie di trasformazioni chimiche, che verranno esposte

[1] « Ann. », *319*, 230 e segg. (1901).

in dettaglio nella Nota successiva. Anticipandone le conclusioni, possiamo affermare che ci è stato possibile definire con certezza la struttura cercata (XV) che è risultata invero non molto diversa da quella immaginata da HARRIES:

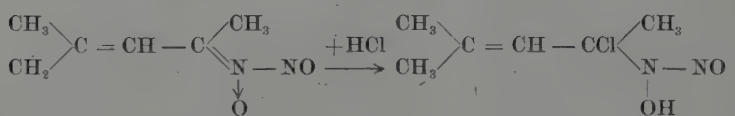


(XV)

L'interpretazione che noi diamo alla formazione di questa sostanza si differenzia però nettamente da quella fornita da HARRIES; basta infatti considerare l'equazione di formazione del composto in esame:

$$C_6H_{10}O_2N_2 + 2\,HCl = C_6H_{10}ON_2Cl_2 + H_2O$$

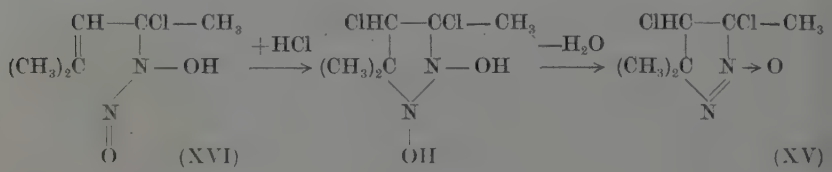
consistente nell'addizione di 2 mol di HCl ed eliminazione di una mol di acqua, per convincersi quanto sia poco probabile una formazione intermedia di cloro, che verrebbe poi sommato al doppio legame. È assai più semplice ammettere che la « mesitilnitrimina » addizioni 2 HCl e poi elimini H_2O. Per analogia con esempi noti si può facilmente supporre che una mol di HCl venga addizionata all'aggruppamento $=C=N\rightarrow O$, presente nella formula di pernitrosomesitilossido da noi proposta:



(XVI)

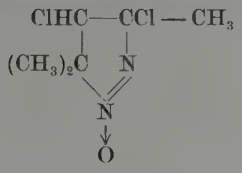
Si formerebbe cioè in un primo tempo una cloronitrosoidrosilamina (XVI) analoga alle ciannitrosoidrossilamine (X) ottenute da PASSERINI per somma di HCN al gruppo pernitrosilico.

La seconda molecola di HCl potrebbe quindi sommarsi alle estremità di un sistema di doppi legami formati dal gruppo $-N=O$ e dal doppio legame etilenico, originando un composto ciclico biossidrilato che perdendo una mol di acqua darebbe luogo al diclorocomposto:



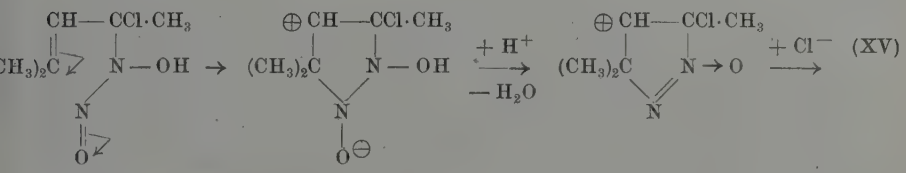
(XVI) (XV)

Introducendo le formule ioniche, come è oggi frequentemente in uso, l'intero processo è ancora più evidente e ci dà inoltre modo di prevedere perchè non abbia origine nella reazione anche l'isomero (XVIII), la cui formazione non è incompatibile collo schema soprariportato (1).



(XVIII)

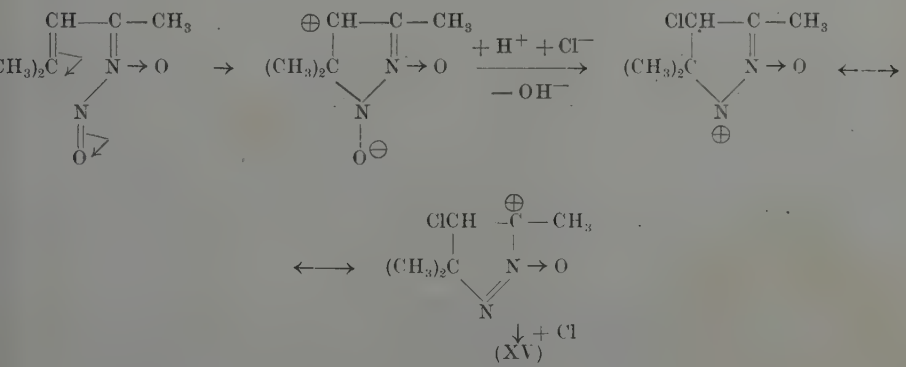
(1) Coll'introduzione delle formule ioniche, gli schemi possibili si moltiplicano; interessante è per noi il fatto che tutti sfociano alla stessa struttura finale per il diclorocomposto (XV). Se restiamo fedeli alla formazione intermedia della cloronitrosoidrossilamina (XVI) lo schema ionico più probabile diventa:



(XVI) (XVII)

Dallo ione anfibio (XVII) si stacca come protone l'idrogeno facilmente ionizzabile dell'OH, si unisce all'ossigeno portatore della carica negativa che si dissocia come ossidrile. Al catione così formato aderisce lo ione Cl^- proveniente dall'HCl.

Non è però necessario ammettere la formazione intermedia della cloronitrosoidrossilamina (XVI); si può anche supporre che il pernitrosomesitilossido stesso reagisca con HCl come ione anfibio secondo lo schema:



Esaurito il còmpito prefissatoci di dimostrare la struttura del pernitrosomesitilossido, non sarà inopportuno spendere ancora qualche parola sulla sua *genesi* e su quella dei pernitrosoderivati in generale.

Tiemann [3] fu il primo ad enunciare un'ipotesi a questo riguardo: egli pensava a proposito della « canfenilnitramina » (pernitrosocanfora) che questo corpo prendesse origine dalla canforossima attraverso i seguenti stadi:

$$\rangle C - NOH \cdot HNO_2 \rightarrow \rangle C = NH \cdot HNO_3 \rightarrow \rangle C = N \cdot NO_2 \rightarrow \rangle C - NH - NO_2$$

ma Angeli [1] dimostrò sperimentalmente che l'ipotesi era infondata. Scholl, il sostenitore più accanito della struttura nitriminica, immaginò un complicato ed artificioso meccanismo, che abbiamo già riportato nella prima parte di questa pubblicazione e che non mancò di suscitare le critiche di Angeli e di altri Autori. Angeli [1] suppose che si formasse in un primo tempo un etere nitroso dell'ossima $= C=N-O-NO$, che avrebbe poi assunto l'assetto definitivo. Secondo Angelucci [2] la nitrosoossima stessa sarebbe la formula definitiva, in base alle condizioni in cui questo A. aveva potuto preparare la pernitrosocanfora (operando a freddo con sale sodico della canforossima ed NOCl). Detta struttura fu però contraddetta da molti fatti. Angeli, nella sua breve Memoria del 1916 più volte citata [3] mise in evidenza l'analogia strutturale dei pernitrosoderivati e degli eteri N alchilici delle ossime, implicitamente riconoscendo un'analogia di formazione.

Noi riteniamo che la struttura $\rangle C = N(\rightarrow O) - NO$ dei pernitrosoderivati appiani ogni difficoltà all'interpretazione della genesi e sia inoltre compatibile con tutti i vari modi di formazione che furono osservati per l'aggruppamento $\rangle CN_2O_2$. Tutti questo metodi si lasciano infatti ricondurre allo stesso schema fondamentale: da una parte il gruppo ossimico perde un idrogeno come protone, generando l'anione $\left[\rangle C - \ddot{N} - \ddot{O}:\right]^{\ominus}$, dall'altra l'agente nitrosante (acido nitroso, nitriti alchilici, NOCl, N_2O_4) fornisce il catione $NO^{\oplus}$. La riunione dei due ioni conduce al pernitrosoderivato attraverso un legame N — N. L'altra possibile alternativa (formazione di un legame N — O, che condurrebbe alla struttura nitrosoossimica $\rangle C - N - O - NO$) non è evidentemente fa-

(1) « Gazz. chim. ital. », *26*, II, 29 (1896).
(2) « Gazz. chim. ital. », *35*, II, 398 (1905).
(3) « Rend. Acc. Lincei », II, 2 (1916).

vorita in pratica, mentre l'alchilazione delle ossime, che procede secondo uno schema affatto analogo, può aver luogo nei due sensi.

Con questo noi non vogliamo affermare con piena certezza che tutti i pernitrosoderivati o nitrimine presentino la stessa struttura $\diagup C{=}N{-}NO$. $\diagdown\!\!\diagdown O$

Ciò è possibile ma non ancora sufficientemente dimostrato. Vogliamo però far notare che se dovesse risultare che alcune di quelle sostanze appartengano realmente alla classe delle nitrimine $\diagup C{=}N{-}NO_2$, si potrebbe tuttavia in tal caso pensare ad un riassestamento del gruppo pernitrosilico, secondo lo schema:

$$\diagup C = \underset{\downarrow}{N} - \underset{\cdot\cdot}{N} = O \rightarrow C = \underset{\cdot\cdot}{N} - \underset{\downarrow}{N} = O$$
$$\qquad\quad O \qquad\qquad\qquad\quad O$$

ben più semplice di quello formulato da Scholl.

Si deve però prima confermare l'esistenza del gruppo nitriminico, ciò che non è ancora stato rigorosamente dimostrato neppure per il composto meglio studiato della serie, la pinacolinnitrimina di Scholl. A questo scopo sono state istituite nuove esperienze.

Chimica. — *Ricerche termodinamiche su soluzioni di alcuni acetoderivati della resorcina in naftalina* (1). Nota di MARIO ROLLA, presentata (2) dall'Accademico GIAN BATTISTA BONINO.

Il fenomeno di « chelazione » presentato da alcuni derivati carbonilici della resorcina è stato oggetto di studio in questi ultimi tre anni da parte di alcuni AA.

W. BAKER (3), poggiandosi specialmente su analogie mostrate da alcune proprietà quali la solubilità, volatilità, punto di fusione, reagibilità ecc., aveva consluso che nella molecola della 2–4 diacetoresorcina doveva sussistere una doppia chelazione, interessante cioè tutte e due le coppie di gruppi OH e CO, mentre per la 4–6 diacetoresorcina la chelazione doveva riguardare una sola delle due coppie di gruppi.

Questa conclusione era anche stata portata da quell'A. in appoggio alla ipotesi di tre doppi legami fissi e localizzati nell'anello benzenico. Secondo W. BAKER cioè alle molecole delle due citate diacetoresorcine avrebbero dovuto competere i seguenti schemi:

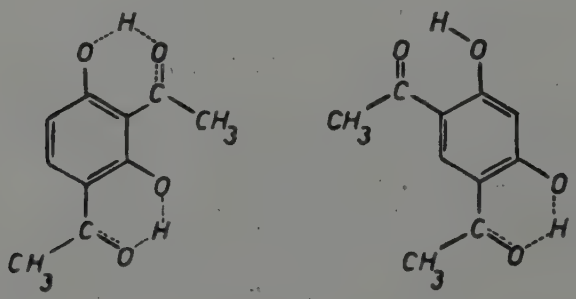


Fig. 1.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica fisica ed Elettrochimica della R. Università di Bologna.

(2) Nell'Adunanza del 17 gennaio 1941-XIX.

(3) W. BAKER, J. Chem. Soc. (Londra), II, 1684 (1934).

Bonino e Manzoni Ansidei (4) (5), da una serie di spettri Raman eseguiti su un gruppo di derivati della resorcina, erano giunti alle seguenti considerazioni:

1° Secondo l'ipotesi di Baker ci si dovrebbero attendere due valori per la frequenza di oscillazione del C — O nel 4–6 diacetoderivato ed un solo valore per il derivato 2–4. Al contrario la riga caratteristica del gruppo C—O tanto nei derivati 2–4 dialdeide e 2–4 diaceto, quanto nel 4–6 diaceto è unica e molto spostata verso le frequenze minori e cioè tanto spostata da raggiungere il valore di 1638 cm^{-1} (v. tabella I) mostrato dall'orto–ossiacetofenone, per il quale il fenomeno di chelazione è particolarmente evidente.

Tabella I.

Sostanza	$\nu_{C=O}$ cm^{-1}
acetofenone	1679 (10 Dif)
m.ossiacetofenone	1671 (3 »)
o.ossiacetofenone	1638 (8 »)
4.acetoresorcina	1629 (5 »)
2–4 diacetoresorcina	1623 (4 »)
2–4 dialdeideresorcina.	1622 (2 »)
4–6 diacetoresorcinica.	1638 (4 »)

2° Negli spettri di tutte le sostanze, che proprietà chimiche indicano essere chelate, appare particolarmente intensa una riga intorno a 1320 cm^{-1}, caratteristica dei derivati eterociclici a nuclei condensati. Tanto le due diacetoresorcine di Baker, quanto la 2–4 dialdeideresorcinica presentano appunto nello spettro Raman una riga in quella regione.

3° Al contrario di quanto avviene nello spettro del 4–6 derivato, i derivati 2–4 carbonilici della resorcina mostrano una riga intorno a

(4) G. B. Bonino e R. Manzoni Ansidei, *Contributo sperimentale al problema della chelazione.* Nota IV; « La Ricerca Scientifica », serie II, anno VIII, vol. II, nn. 5–6 (1937).

(5) G. B. Bonino e R. Manzoni Ansidei, *Contributo sperimentale al problema della chelazione.* Nota IV, « La Ricerca Scientifica », serie II, anno VIII, vol. II, nn. 5–6 (1937).

(6) G. B. Bonino, « Ber. », 71, 129 (1938).

830 cm^{-1} circa, e precisamente 836 nella 2–4 diaceto e 818 cm^{-1} nella 2–4 dialdeideresorcinica. Ora si osserva che una riga a 841 cm^{-1} compare pure nello spettro del fenantrene e non in quello dell'antracene. Bonino fa notare [6] che supponendo completa la chelazione tanto nei derivati 2–4 che in quello 4–6, i primi assumerebbero appunto una configurazione analoga a quella del fenantrene mentre il secondo ne mostrerebbe una paragonabile a quella dell'antracene.

Anzi Bonino [6] mostrò come questo parallelismo di comportamento dei derivati 2–4 e 4–6 della resorcina da una parte e fenantrene ed antracene dall'altra, poteva essere trasportato ad altre proprietà fisiche, quale il punto di fusione, la solubilità, la volatilità in corrente di vapore, come può essere osservato nella tabella seguente:

Tabella II.

Sostanza	Punto di fusione		Solubilità in benzolo (gr/10 gr. di benzolo)	Volatilità in corrente di vapore
	Normale	sotto acqua		
2–4 diac. res.	89°	84°	1.0	molto volatili
fenantrene	99°	97°-98°	4.4	
4–6 diac. res.	182°	159°	0,08	poco volatili
antracene	217°	207°-208°	0.1	

In conseguenza si può supporre che la diversità di comportamento osservata da Baker tra la 2–4 e la 4–6 diacetoresorcina sia probabilmente da riferirsi non tanto ad un diverso comportamento delle due coppie di gruppi chelati nelle due sostanze, quanto invece al fatto che una totale chelazione fa assumere allo scheletro della prima una configurazione a simmetria fenantrenica e alla seconda una a simmetria antracenica.

Mi è sembrato non privo di interesse portare un ulteriore contributo sperimentale a questo problema, rivolgendomi ad esperienze crioscopiche.

In un precedente lavoro io avevo messo in evidenza [7] come con una analisi dei dati sperimentali crioscopici, risalendo dal dato crioscopico al coefficiente di attività e calcolando da questo il valore dei lavori intermolecolari, fosse possibile accertare anche per la ortoossibenzaldeide l'esistenza di un leggero fenomeno chelativo di natura intermolecolare, più evidente invece nel derivato meta ed evidentissimo nel derivato para.

---

[7] M. Rolla, in corso di stampa sul «Boll. Sc. Fac. Chim. Ind.», Bologna, 1941.

Tali azioni intermolecolari nelle soluzioni di o–ossibenzaldeide non si erano potute rilevare con gli spettri Raman nè potevano dedursi da una semplice interpretazione dei dati sperimentali crioscopici seguendo i concetti classici.

A causa della scarsa solubilità della 4–6 diacetoresorcina in benzolo alla temperatura di congelamento, ho adoperato come solvente la naftalina, la quale alla temperatura di fusione di 80° C. circa può sciogliere quantità sufficienti dei detti composti.

La naftalina veniva ripetutamente distillata e poi lasciata in campana su cloruro di calcio per almeno quindici giorni. Con tale cura diversi campioni della stessa porzione distillata presentavano punti di congelamento che differivano di non più di 0,002°.

L'apparecchio usato era un Beckmann ad agitazione elettromagnetica. Particolare attenzione è stata posta al bagno del crioscopio costituito da un termostato munito di termoregolatore e agitatore meccanico. La temperatura del bagno era mantenuta sempre 2° più bassa di quella d'equilibrio della soluzione, e, come consiglia Auwers ([8]), l'agitazione veniva aumentata nell'interno del tubo crioscopico in vicinanza del punto di congelamento. In questo modo il sottoraffreddamento si mantenne intorno al valore di 0°,2–0°,4 anche per le soluzioni più concentrate.

Ogni gruppo, di 2 o al massimo 3 esperienze, eseguite nello stesso pomeriggio, era sempre preceduto e seguìto da determinazioni e verifiche del punto di fusione della naftalina pura.

Le sostanze furono preparate secondo Rosemund, Buchwald e Deligiannis ([9]) per quanto riguarda la 2–4, e secondo Wittig, Bangert e Richter ([10]) per quanto riguarda la 4–6 diacetoresorcina. La 2–4 diacetoresorcina fu purificata con ripetute cristallizzazioni da alcool e da benzolo e poi per ripetute distillazioni. Il suo punto di fusione era di 88°. Il derivato 4–6 fu purificato solo per ripetute cristallizzazioni da benzolo, in quanto esso distilla con moltissime difficoltà. Presentava un punto di fusione a 182°.

Oltre queste due sostanze ho ritenuto opportuno analizzare il comportamento anche della 4–acetoresorcina, composto che le proprietà chimiche e chimico–fisiche dimostrano chelato ([4]). A differenza però delle diacetoresorcine, quest'ultima sostanza ha un gruppo OH libero da ogni influenza chelativa intramolecolare, per cui era da attendersi un comportamento di questo derivato nettamente differente da quello dei prece-

([8]) K. Auwers, « Z. f. Phys. Chemie », *18*, 595 (1895).

([9]) Rosemund, Buchwald e Deligiannis, « Arch. d. Pharm. », *271*, 342 (1933).

([10]) Wittig, Bangert, Richter, « Ann. », *446*, 155 (1925).

denti, nel senso che era logico prevedere valori più alti dell'energia intermolecolare.

La 4–acetoresorcina fu preparata secondo Nencki e Sielber [11] cristallizzata dal benzolo e distillata nel vuoto ripetutamente. Presentava un punto di fusione di 144°.

Nella tabella seguente sono riassunti i valori sperimentali ΔT, corretti dall'errore prodotto dal sottoraffreddamento.

Tabella III.

Sostanza	gr. di soluto	gr. di naftalina	Conc. per 100 gr. solvente	ΔT corretto	P. M. apparente dedotto dalla formula di Raoult
4–acetoresorcina P. M. 152.1	0.1000	17.0000	0.5882	0.292	139.0
	0.2000	»	1.1764	0.512	158.5
	0.3000	»	1.7647	0.737	165.2
	0.5000	»	2.9411	1.127	180.0
	0.8000	»	4.7058	1.575	206.1
	1.0000	»	5.8823	1.854	218.9
2–4 diacetoresorcina P. M. 194.2	0.1000	»	0.5882	0.243	167.0
	0.3000	»	1.7647	0.662	183.9
	0.5000	»	2.9411	1.075	188.8
	0.8000	»	4.7058	1.658	195.8
	1.2000	»	7.0588	2.439	199.7
	1.7000	»	10.0000	3.371	204.6
	2.3000	»	13.5294	4.461	209.2
4–6 diacetoresorcina P. M. 194.2	0.1000	»	0.5882	0.218	186.2
	0.3000	»	1.7647	0.631	193.0
	0.5000	»	2.9411	1.019	199.1
	0.8000	»	4.7058	1.579	205.6
	1.2000	»	7.0588	2.322	209.7

[11] Nencki e Sielber, « J. Prakt. Chem. » [2] *23*, 147 (1881).

Nell'ultima colonna sono presentati i valori del peso molecolare apparente dedotto dalla formula di Raoult, con una costante crioscopica per la naftalina di 69.0 (8).

Sulla base di questi dati sperimentali ho eseguiti per i tre composti il calcolo del coefficiente virtuale di attività del solvente F_0, del coefficiente virtuale di attività del soluto F_1 e dell'energia intermolecolare Y_i, seguendo le vedute e le conclusioni esposte già in un precedente lavoro (7). Avevo allora ricordato come sia possibile calcolare il coefficiente di attività del solvente a partire dall'abbassamento crioscopico mediante l'equazione:

$$[1] \qquad -ln a_0 = -ln\gamma_0 f_0 = \overline{\Delta T}\,\frac{l_0}{RT_0^2} + \overline{\Delta T^2}\left(\frac{l_0}{RT_0^3} - \frac{C_{p,0} - C'_{p,0}}{2RT_0^2}\right)$$

dove

$\Delta T = T_0 - T$ = abbassamento crioscopico;

l_0 = calore di fusione del solvente per mol. grammo;

$C_{p,0}$ = calore specifico del solvente allo stato liquido per mol. grammo;

$C'_{p,0}$ = calore specifico del solvente allo stato solido per mol. grammo;

R = costante dei gas;

a_0 = attività termodinamica del solvente $= \gamma_0 f_0$;

γ_0 = concentrazione termodinamica del solvente $= N_0/(N_0 + N_1)$;

N_0 = nr. di gr. molecole del solvente;

N_1 = nr. di gr. molecole del soluto.

Nota l'attività virtuale termodinamica del solvente definita nel citato lavoro si può da questa calcolare l'attività virtuale del soluto $a_1 = \gamma_1 F_1$ (dove γ_1 è la concentrazione termodinamica del soluto espressa dal rapporto $N_1/(N_0 + N_1)$) mediante la

$$[2] \qquad ln\frac{a_1}{r} = -h - \int_0^r \frac{h}{r}\,dr$$

nella quale

$$h = \frac{ln a_0}{r} + 1 \quad \text{e} \quad r = \frac{N_1}{N_0} = \frac{\gamma_1}{\gamma_0}\,.$$

Infine l'espressione

$$[3] \qquad Y_i = -\int_0^{\gamma_1} \frac{RT\,ln F_0}{\gamma_1}\,d\gamma_1$$

permette il calcolo dell'energia intermolecolare.

Per le precauzioni necessarie al calcolo e per qualche discussione ad esso inerente, rimando al già lavoro citato (7).

Anche per questi tre composti si è potuto semplificare l'equazione [1] avendo trovato che il termine in $\overline{\Delta T^2}$ era trascurabile nelle condizioni di esperienza qui realizzate.

Riporto nelle tabelle IV, V, VI i valori di $\log_{10} F_0$, $\log_{10} F_1$ e di Y_i, dedotti rispettivamente dalla [1], [2], [3].

TABELLA IV.

4-acetoresorcina.

Conc. in gr. per 100 gr. di solvente	m	$\frac{1}{r}$	$\log_{10} F_{\text{naft.}}$	$\log_{10} F_{\text{4 diac.}}$	Y_i cal./mol. gr.
0.5882	0.038643	201.897	— 0.0001949	+ 0.1735068	— 0.418
1.1764	0.077286	100.948	+ 0.0001756	+ 0.1367523	— 0.434
1.7647	0.115992	67.263	+ 0.0004999	+ 0.1067347	— 0.236
2.9411	0.193278	40.366	+ 0.0015934	+ 0.0472359	+ 0.596
4.7058	0.309279	25.226	+ 0.0042538	— 0.0304397	+ 2.682
5.8823	0.386448	20.188	+ 0.0061317	— 0.0742806	+ 4.420

TABELLA V.

2-4 diacetoresorcina.

Conc. in gr. per 100 gr. di solvente	m	$\frac{1}{r}$	$\log_{10} F_{\text{n.f.}}$	$\log_{10} F_{\text{2-4 diac.}}$	Y_i cal./mol. gr.
0.5882	0.0302868	257.603	— 0.0002647	+ 0.2247143	— 0.670
1.7647	0.0908777	85.851	— 0.0002762	+ 0.2320299	— 1.162
2.9411	0.1514602	51.511	— 0.0002669	+ 0.2294515	— 1.389
4.7058	0.2423380	32.195	— 0.0000084	+ 0.2219095	— 1.517
7.0588	0.3634480	21.466	+ 0.0002163	+ 0.2139425	— 1.473
10.0000	0.5149160	15.152	+ 0.0007407	+ 0.2047438	— 1.228
13.5294	0.6966403	11.199	+ 0.0013764	+ 0.1948749	— 0.761

Tabella VI.

4–6 *diacetoresorcina.*

Conc. in gr. per 100 gr. di solvente	m	$\frac{1}{r}$	$\log_{10} F_{n\ ft.}$	$\log_{10} F_{4-6\,diac.}$	Y_i cal./mol. gr.
0.5882	0.030287	257.5991	— 0.000064	+ 0.1036327	— 0.190
1.7647	0.090877	85.8516	— 0.000027	+ 0.0958316	— 0.238
2.9411	0.151460	51.5118	+ 0.000182	+ 0.0814913	— 0.161
4.7058	0.242337	32.1941	+ 0.000625	+ 0.0636711	+ 0.118
7.0588	0.363448	21.4662	+ 0.001154	+ 0.0496831	+ 0.660

Discussione dei risultati.

L'esame dei risultati raggiunti con una tale interpretazione termodinamica dei valori sperimentali (v. tabelle IV, V, VI, e fig. 2) mette in evidenza subito un fatto notevole: tutte tre le sostanze nella zona di bassa concentrazione sono caratterizzate da un valore negativo dell'energia intermolecolare. Si può dunque supporre per questi composti una associazione col solvente che per la 4–acetoresorcina raggiunge (v. fig. 2) un massimo di intensità a $\frac{1}{r} = \div 125$, per la 4–6 diacetoresorcina a $\frac{1}{r} = \div 80$ ed infine per la 2–4 diacetoresorcina a $\frac{1}{r} = \div 30$. La 2–4 diacetoresorcina risente dunque di questo effetto per un più lungo intervallo di concentrazione.

Il fenomeno di un'associazione col solvente non è nuovo in composti di questo genere. Auwers (8) ha mostrato che per i fenoli sostituiti si verifica con una frequenza notevole.

Nel tratto nel quale i lavori intermolecolari tendono ad assumere valori crescenti e positivi con le concentrazioni $\left(\frac{1}{r} \to 0\right)$, i valori presentati dalla 4–acetoresorcina sono alquanto più elevati di quelli relativi ai derivati 2–4 e 4–6. Riesce interessante un confronto di questi con i lavori intermolecolari presentati dalle tre ossibenzaldeidi. Fissandoci ad un valore di $\frac{1}{r} = 25$, si trova per la 4–acetoresorcina un valore $Y_i = \div 3$, dello

stesso ordine di grandezza cioè presentato dalla *m*-ossibenzaldeide ($Y_i = \div$ $\div$ 3.8) e della para ($Y_i = \div 7$), mentre per la 4-6 si trova $Y_i = \div 0.35$, molto più prossimo cioè al valore presentato dalla o-ossibenzaldeide $Y_i =$ $= \div 0.4$. I termini di lavoro intermolecolare corrispondenti al derivato 2-4 sono poi ancora più bassi.

In conseguenza di questo fatto si può concludere che le azioni chelative dei 2-4 e 4-6 diacetoderivati della resorcina dovrebbero espletarsi quasi unicamente per via intramolecolare. Inoltre, poichè i rispettivi

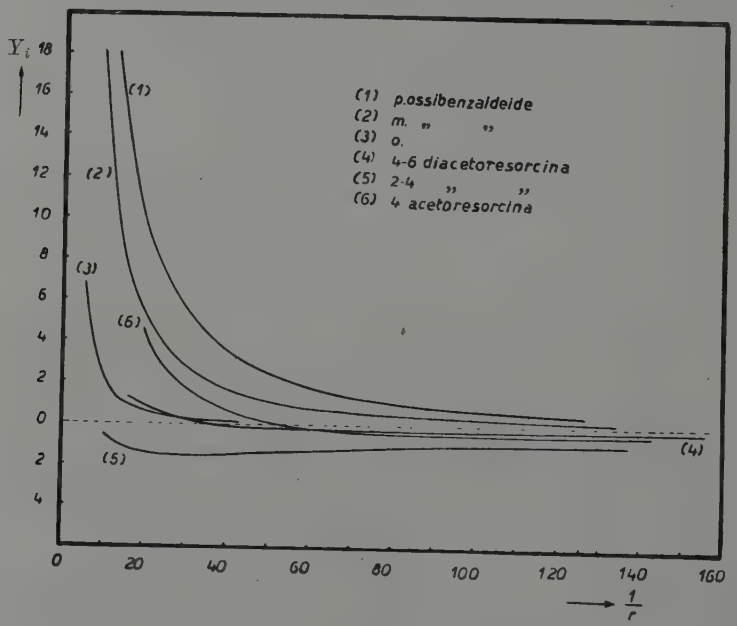


Fig. 2.

termini di energia intermolecolare tendono nei due composti ad assumere valori positivi al crescere della concentrazione, è da prendere in considerazione per essi anche una piccola, se pur non trascurabile, azione chelativa intermolecolare, dipendente dalla concentrazione. Tuttavia il comportamento dei due derivati è da ritenersi essenzialmente parallelo.

Secondo questi risultati, non vi è ragione di supporre, con Baker, una doppia chelazione nel derivato 2-4, interessante ambedue i gruppi carbonilici, ed una chelazione semplice per il derivato 4-6 interessante una sola delle coppie di gruppi C = O e OH. Stando all'ipotesi di Baker, l'analisi termodinamica avrebbe dovuto mettere in rilievo per il derivato

4–6 dei termini di energia intermolecolare molto più alti che non nel 2–4, e molto più prossimi agli alti valori presentati dalla p–ossibenzaldeide, per la quale il fenomeno chelativo intermolecolare è certamente di un ordine di grandezza molto elevato, come dimostrano concordemente le esperienze spettroscopiche e termodinamiche. Tutto ciò non si verifica per il derivato 4–6, o si verifica in una scala assolutamente ridotta. Anche le esperienze spettroscopiche contribuiscono, per quanto ho detto precedentemente, a confermare questo punto di vista.

Ringrazio il prof. Bonino per il vivo interesse mostrato a queste mie ricerche.

Geologia. — *Dell'importanza delle frane nell'origine dei giacimenti di Lignite.* Nota (1) di GUSTAVO BRUNELLI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

Le ligniti, come è noto, si distinguono in ligniti torbolegnose o xiloidi (in cui si distinguono tronchi, rami e radici col nome di piligno dalla pasta di lignite), e in ligniti picee. Mentre poi le ligniti picee si trovano nei terreni più antichi (eocene, miocene), le xiloidi giacciono di preferenza nel pliocene e nel quaternario antico.

L'origine dei giacimenti di lignite ha dato luogo a controverse discussioni e, specialmente in Italia, i caratteristici ed estesi giacimenti di lignite xiloide del Valdarno, hanno offerto argomenti parte contrari, parte favorevoli alle due discordanti ipotesi della fluitazione e della torbazione.

Secondo la dominante ipotesi della fluitazione gli alberi divelti, riuniti in grandi zattere o isole galleggianti, sospinti dai venti e dalle correnti si sarebbero ammassati nei seni di bacini lacustri, come analogamente avviene dei depositi di legname trascinati dalle correnti in alcuni golfi ed estuari marini.

Anche trattati dell'industria mineraria (2) distinguono i giacimenti di lignite in giacimenti lacustri e giacimenti di estuario, ma questa classificazione dimostreremo che è evidentemente errata e sovratutto insufficiente.

L'altra ipotesi è quella della torbazione, e cioè della origine torbosa, palustre o lacustre esposta e precisata in diversi scritti dell'ing. Toso, e che il GRATTAROLA (3) in una sua pregevole Memoria sulle ligniti del Valdarno ha chiamato acquatica.

Bene a ragione il predetto GRATTAROLA, a proposito delle ligniti del Valdarno, contesta la ipotesi della fluitazione, poichè la lignite, ciò che non avviene, dovrebbe presentarsi come un ammasso esclusivamente di tronchi d'albero grandi o piccoli e di rami più o meno grossi o di radici, il tutto confusamente commisto, e coi vani necessariamente lasciati da questa

(1) Presentata nell'Adunanza del 17 gennaio 1941-XIX.

(2) M. GROSSI, *Ricerca dei giacimenti minerali e delle acque sotterranee.* Hoepli, Milano, 1925.

(3) G. GRATTAROLA, *Prime note sulla lignite del Valdarno.* « Atti della R. Accademia dei Georgofili ». Tipografia M. Ricci, Firenze, 1901.

enorme impalcatura riempiti con terra, o pietre, o altre sostanze eterogenee. Invece avviene al contrario che i tronchi della lignite bianca, distanti pochi centimetri, ma talvolta anche più metri, uno dall'altro, sono immersi in una massa fondamentale detta sul posto lignite nera, termine però che può generare confusione, e che chiameremo pasta di lignite.

L'orientamento dei tronchi è poi vario e non quale si dovrebbe attendere dalla teoria della fluitazione.

Gli alberi talvolta sembrano privi di chioma e di radici, ma sovente questa, come dice il Grattarola, è una ingannevole apparenza dovuta al taglio artificiale della parete legnosa che si osserva.

Secondo la ipotesi della torbazione, accettata dal Grattarola, in alcune bassure ostruite per esempio da formazioni alluvionali, in cui si distenda permanentemente o periodicamente una lama d'acqua, viene a cadere o a sommergersi e a conservarvi quella vegetazione prodiera o montana che diventa preda delle acque vettrici che scendono nella bassura. L'origine della così detta pasta torbosa sarebbe allora più facilmente spiegabile.

Le due ipotesi della fluitazione e della torbazione hanno punti di contatto e di notevole divergenza.

Malgrado le critiche già mosse alla ipotesi delle fluitazioni trovasi scritto in pregevoli trattati relativamente recenti, come quelli del Principi [1], a proposito del giacimento lignitifero del Valdarno superiore, che esso è dovuto evidentemente a fenomeno di fluitazione. Quell'« evidentemente » non si accorda coi caratteri dei giacimenti suddetti.

Ma vi è una terza ipotesi da me formulata per osservazioni fatte nello stesso bacino del Valdarno ed è la ipotesi della importanza delle frane [2]. Che queste poi possano essere talvolta avvenute anche ai bordi di un lago, oppure in terreni inondati ai piedi di talune colline, può in singoli casi ammettersi.

Così vi sono certamente punti di contatto tra la ipotesi della torbazione e delle frane, solo questa terza ipotesi serve però a rimuovere le obiezioni alla ipotesi della fluitazione e le insufficienze della ipotesi della torbazione.

Chi, come il sottoscritto ha osservato la natura dei terreni argillosi frananti nel Valdarno, può solo meravigliarsi che una così semplice ipotesi non sia stata enunciata.

Anche a memoria di uomo si ricordano infatti franamenti come quelli descritti da Benedetto Buonmattei avvenuta nel 1611 « che dal Capo d'Arno sopra a Pesciano trascinò nella caduta una gran tenuta di castagni ».

---

[1] P. Principi, *Trattato di geologia applicata*. Vallardi Ed. Milano, 1924.

[2] Questa ipotesi fu da me appena accennata in una Nota della R. Accademia dei Lincei, 1935.

Il fenomeno delle frane da altri punti di vista ha una larghissima bibliografia: basti ricordare oltre i lavori stranieri, lo studio monografico dell'ALMAGIÀ e gli scritti dell'ISSEL, che ne ha dato una lucida classificazione (1).

Tale studio sulle frane è stato posto in relazione collo studio del diboscamento attuale, ma non colla fitopaleontologia, cosicchè non restava che applicare nel tempo passato i risultati della moderna geologia forestale.

Autori americani ammetterebbero che il bosco in certe particolari circostanze, ciò che sembra paradossale, può anche provocare le frane. Certamente i terreni argillosi favoriscono queste frane. Dobbiamo a TREBBI (2) una interessante Memoria sulle foreste come fattore geologico.

Frane superficiali di colata sono caratteristiche dei terreni argillosi miopliocenici del preappennino, mentre frane di cedimento e in parte di scorrimento sono caratteristiche delle zone scisto-argillose dell'Eocene e del Miocene.

La loro importanza è stata dimostrata dal compianto MARTELLI e in un suo lucido scritto (3) sul còmpito delle scienze geologiche negli studi forestali.

Gli scivolamenti spontanei nei terreni argillosi vennero sin da un secolo addietro studiati da COLLIN, ma quello che oggi noi cerchiamo di lumeggiare è lo studio paleontologico delle frane.

Molte discordanze tra la posizione dei tronchi, delle loro radici spezzate e delle loro chiome, in parte infrante, che non si accordano coi caratteri che dovrebbero avere gli accatastamenti per fluitazione, si accordano invece colla caduta per franamento, che ci spiega i diversi orientamenti dei tronchi del piligno.

Un'interessante caduta per franamento sui bordi di un lago, dovuta al mancato equilibrio per la massa d'acqua sottratta dal dislivello creato artificialmente nel lago di Nemi, durante il recupero delle celebri navi imperiali, e che gli idraulici erroneamente non avevano previsto, dimostra quale importanza questo fenomeno delle frane può avere avuto sui bordi

---

(1) Sulla classificazione delle frane vedi i seguenti lavori: BALTZER, *Ueber Bergstürze in den Alpen*. Zürich, 1875; HEIM, *Ueber Bergstürze*. « Neujahrsblatt d. Zür. Naturf. Gen. », 1882; NEUMAYR, *Ueber Bergstürze*. « Zeitschrift des Deutschen u. Osterreichischen Alpenvereins », Bd. *20* (1889); R. ALMAGIÀ, *Studi geografici sulle frane in Italia;* vol. 1, « Memorie della Società Geografica italiana », vol. XIII, 1907; A. ISSEL, *Origine e conseguenze delle frane*. « Natura », Rivista mensile di scienze naturali, vol. 1, Milano, 1909.

(2) G. TREBBI, *La foresta come fattore geologico*. Rivista forestale italiana l'« Alpe », anno 1910.

(3) A. MARTELLI, *Il còmpito delle scienze geologiche negli studi forestali*. Tipografia M. Ricci, Firenze, 1914.

di terreni inondati ed esondati, e mi confermò la ipotesi che avevo già concepita sui franamenti in terreni soggetti a periodiche inondazioni.

È strano ripeto che tanti studi sia sulle frane che sulla foresta, non abbiano condotto alla ipotesi della importanza delle frane nell'origine dei giacimenti di lignite.

Essa di un tratto illumina anche le caratteristiche dei finali, strati argillosi che avrebbero marcato i tempi di successivi franamenti, e spiega i caratteri dello stellicione e dei sovrabanchi. Ci spiega altresì perchè nella pasta di lignite si osservino foglie, assai più sovente e in maggiore quantità di quanto qualche autore abbia osservato e che l'ipotesi delle fluitazioni non saprebbe spiegare.

Uno studio sui pollini fossili della pasta di lignite potrà fornire altre definitive prove contro la teoria della fluitazione, e mi auguro che avvenga da parte dei fitopaleontologi italiani, già benemeriti, come il Della Fiora e il Chiarugi, di tali studi.

Ma anche il legno del piligno resta a studiarsi, e a quello che mi risulta vi è solo qualche ricerca in corso del Chiarugi per le ligniti della Garfagnana.

Ci siamo per ora limitati a considerare l'importanza delle frane nell'origine dei giacimenti di lignite xiloide, sia perchè sono quelli da noi studiati, sia perchè per la loro più recente origine tale fenomeno è più evidente. Ma non escludiamo affatto, anzi tutt'altro, che lo stesso fenomeno serva a illustrare le caratteristiche di alcuni giacimenti di lignite picea.

Le miniere del carbon fossile del piano liburnico nei dintorni di Albona si sviluppano in ordine di banchi sovrapposti intercalati con calcari scuri bituminosi, che si alternano con formazioni marnose arenacee. Ora come giustamente osserva il Sacco nelle sue note di geotettonica dell'Istria « il massimo dei disturbi stratigrafici si osserva generalmente presso il contatto tra tali formazioni marnose arenacee e i sottostanti calcari » [1]. È quindi probabile, come io ritengo, che anche in tali terreni siano stati frequenti fenomeni di franamento, per quanto i caustobioliti delle ligniti picee sembrino di origine autoctona di torbiera, ma anche per essi, almeno in Italia, mancano studi risolutivi.

L'ipotesi da noi esposta è suscettibile di ulteriori sviluppi, ma sovratutto riteniamo che possa offrire qualche orientamento nella ricerca razionale dei carboni fossili in Italia a proposito della quale, in altro suo scritto [2] il prof. Sacco ha scritto: « Purtroppo . . . le ricerche di nuovi

---

[1] F. Sacco, *L'Istria. Cenni geologici generali*, in « Memorie descrittive della carta geologica d'Italia », vol. XIX, Società Tip. Monregalese. Mondovì, 1924.

[2] Idem, *Per la ricerca razionale dei carboni fossili in Italia.* « La Miniera Italiana », 4 giugno 1917. Tipografia Industria Grafica nazionale. Roma, 1917.

giacimenti carboniosi spesso sono talmente febbrili e condotte con criteri così vaghi ed empirici, nonchè su dati tanto incerti, se non erronei da costituire sovente un vero sperpero di forze, di tempo e di denaro, quindi un danno sia particolare sia generale, non solo materiale ma bensì morale, essendo generalmente fonti di delusioni quindi di sfiducia e di scoraggiamento per altre ricerche che potrebbero invece essere produttive ».

L'interesse pertanto che anche per le ricerche di indole pratica può presentare il nostro studio, ci ha indotto, specialmente nell'attuale contingenza del nostro Paese, a pubblicare il nostro studio, lieti se altri, con maggiori conoscenze geologiche e in migliori condizioni per studiarlo, potranno svilupparlo, perchè è veramente da deplorare che gli studi di fitopaleontologia abbiano trascurato così importante oggetto di ricerca, per delucidare tale importante fenomeno geologico.

Geologia. — *Ulteriori ricerche sull'età di un deposito eritreo al margine del Mar Rosso* [1]. Nota di Eugenia Montanaro Gallitelli, presentata [2] dall'Accademico Ramiro Fabiani.

In uno studio compiuto nel 1932 su materiali madreporici dell'Africa Orientale [3] ebbi a dire per la prima volta che al margine del Mar Rosso compaiono faune a coralli « più antiche » di quelle comunemente note per quel territorio, con affinità rispetto a certa fauna miocenica del Golfo di Suez. Trattandosi però di materiale vecchio di Museo, non osai alcuna conclusione più precisa in merito.

Alla fine del 1936 l'A. G. I. P. mi affidò lo studio di altri materiali madreporici. Questi, raccolti scrupolosamente e portanti esattissime indicazioni di località, provenivano dalle Isole Daalac, e, in minor parte, dalla penisola di Buri e dai dintorni di Massaua, precisamente dal cosidetto Sahmar fino all'inizio del deserto del Sahel. Le conclusioni di questo studio [4], pubblicate solo nel 1938, e al quale rimando per più estese notizie, se non portarono nulla di nuovo circa l'età delle Daalac e poco su Buri, rivelarono invece la presenza di una corallofauna tutta miocenica nei calcari formanti alcuni rilievi a NNO di Massaua.

Questo fatto, assai interessante dal punto di vista pratico, presentava anche notevole importanza se inquadrato nel problema della genesi del Mar Rosso, venendo a contrastare con la concezione quasi universalmente accettata, secondo la quale il riempimento indoceanico della fossa eritrea dovrebbe risalire tutt'al più al Pliocene.

Fortunatamente le mie conclusioni poterono appoggiarsi a una importante relazione del Porro, uscita allora allora [5], sopra una esplora-

---

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Geologia della R. Università di Modena.

(2) Nell'Adunanza del 17 gennaio 1941-XIX.

(3) E. Montanaro, *Faune attinologiche pliopleistoceniche dell'Africa Orientale*. « Palaeont. It. », vol. XXXII, pagg. 141-209, tavv. XVIII-XXII, Pisa, 1932.

(4) E. Montanaro Gallitelli, *Ricerche sull'età di alcuni depositi insulari e marginali del Mar Rosso*. « Palaeont. It. », vol. XXXIX, pagg. 215-258, tavv. XV-XVII, Pisa, 1939.

(5) C. Porro, *Esplorazione geologica della zona costiera a nord di Massaua*. « Mem. R. Acc. d. Sc. di Torino », to. 68, 1935-1936, pagg. 243-276. Torino, 1936.

zione geologica nel deserto del Sahel. L'A. percorse per oltre 300 km. a NNO di Massaua tutta una serie di rilievi (che il Porro reputa si spingano anche molto più a nord, lungo la costa sudanese) allineati parallelamente al litorale ed emergenti dalle sabbie quaternarie, costituiti da banchi madreporici, soprastanti a un orizzonte a gessi e arenarie.

In questa relazione l'Autore, basandosi anche sulla determinazione di sei specie di coralli per opera della Zuffardi [1], affermava la miocenicità di queste formazioni e quindi la miocenicità del Mar Rosso.

I calcari da me studiati erano stati raccolti quasi tutti più al sud, nel Sahmar: esiste coincidenza con le raccolte del Porro solo per ciò che riguarda i « Monti Ebud »; essi (a 50 km. da Massaua) segnano il limite nord della raccolta di materiale per opera del Migliorini, proprio dove comincia quella del Porro, il quale considera questo rilievo come il primo della lunga serie stendentesi verso nord. Il materiale da me esaminato, dunque, non solo confermava i dati del Porro, ma li completava, mostrando l'esistenza di questi calcari madreporici miocenici anche più al sud, fino a una ventina di chilometri a NNO di Massaua.

Questo studio mi portò poi ad altre considerazioni. La fauna mostra carattere prevalentemente mediterraneo, con avvicinamenti a quella miocenica egiziana. Ora, pur sfiorando appena la questione data l'esiguità dei mezzi in rapporto alla vastità dell'argomento, osservai che il Miocene marino eritreo potrebbe forse spiegarsi anche senza ricorrere a una invasione così antica per opera delle acque indoceaniche, ammettendo invece un prolungamento verso Sud di quel Golfo mediterraneo miocenico che, secondo alcuni [1], lambì la costa occidentale dell'attuale Mar Rosso fino a Kosseir [2], e del quale sembrano esister tracce anche più al sud.

Ostava tuttavja, contro le conclusioni cronologiche tratte dal mio studio, lo scarso credito che i coralli godono come faune-guida. Per quanto abbia cercato di discutere anche su questo [3], rimane certo che in generale non è possibile considerare seriamente una conclusione stratigrafica basata esclusivamente sopra corallofaune.

Si imponeva dunque una ulteriore ricerca. Era già in pubblicazione il lavoro in parola, quando – avendo preso in esame anche i campioni di roccia sedimentaria delle stesse provenienze – mi si rivelò la presenza di Foraminiferi. Di qui lo scopo della presente Nota.

---

[1] R. Zuffardi Comerci, *Corallari neogenici del Sahel eritreo*. « Atti R. Acc. d. Sc. di Torino », vol. 71 (1935-1936), pagg. 205-217. Torino, 1936.

[2] Cfr. E. Krenkel, *Geologie Afrikas*, I, pag. 90, tav. IX, Berlin, 1925.

[3] Vedasi Montanaro Gallitelli, op. cit., pag. 232 e 233. Kosseir, non Ras Benas, come è ivi indicato.

[4] Montanaro Gallitelli, op. cit., pagg. 230-231.

Si tratta di un calcare raccolto dall'ing. C. I. Migliorini insieme ai calcari madreporici già studiati, durante la Missione A. G. I. P. 1935–1936, a 50 km. NNO di Massaua, sul versante ovest a mezza costa dei cosidetti Monti Ebud sopra ricordati, praticamente modesti spuntoni alti non più di 200 m. s. l. m. Dalla stessa località provengono *Orbicella Reussiana* E. H., *O. Reussiana* var. *minor* Rs., *Orbicella Defrancei* E. H., specie prevalentemente mioceniche e a massima diffusione nel Mediterraneo.

Di questa roccia lo Stefanini aveva fatto a suo tempo un primo esame, definendola come un « calcare compatto subcristallino brunastro con impronta di *Chlamys* sp. e tracce biancastre di natura imprecisata », e « calcare compatto ceroide giallo e rosso » (1).

Macroscopicamente la roccia si presenta come un calcare compatto, tenace, di colore giallastro imbrunito in superficie per alterazione, di aspetto subsaccaroide, a frattura scheggiata e concoide. Con l'aiuto di una lente appare come una brecciolina organogena ad elementi coerenti, minutissimi.

Sulla superficie di uno dei campioni trovasi, con guscio parzialmente ancora intatto, una valva destra che attribuisco in primo esame a *Chlamys* cf. *gloriamaris* (Dub.).

In sezione sottile la roccia si rivela zeppa di tracce di organismi, fra i quali ben visibili Foraminiferi, Corallinacee (litotamni e litofilli), Sifonee (giroporelle ? (2)), Briozoi ecc. Purtroppo la diagenizzazione della roccia è tale che quasi tutti i fossili risultano irriconoscibili nell'impasto ricristallizzato fondamentale. Di qui la necessità di gran numero di sezioni.

La forma dominante, e l'unica, per altro, veramente eccezionale per il perfetto stato di fossilizzazione, è *Operculina complanata* (Defrance) var. *Heterostegina* Silvestri (3), ed è in tale abbondanza che si può ben definire la roccia come un « calcare a Operculine ». La varietà è sicuramente identificabile in tutti i suoi caratteri strutturali. Rimando ad altro luogo la descrizione e l'illustrazione della varietà. Qui mi preme soltanto ricordare che, se *Operculina complanata* è specie a larga diffusione sia nel tempo sia nello spazio – pur presentando sempre il suo apogeo nell'Oligocene e Miocene mediterraneo – la var. *Heterostegina* trovasi limitata, per quanto mi consta (4), tra l'Oligocene e il Miocene, con particolare

(1) Cf. Montanaro Gallitelli, op. cit., pag. 216, nota 1.

(2) *Fide* A. Silvestri, *Foraminiferi dell'Olig. e d. Mioc. della Somalia.* « Palaeontographia Italica », vol. XXXII. suppl. 2, tav. VIII, fig. 6. Pisa, 1939.

(3) A. Silvestri, *Considerazioni paleontologiche e morfologiche sui generi Operculina, Heterostegina, Cycloclypeus.* « Boll. Soc. Geol. It. », vol. XXVI, pagg. 36 37, tav. II, fig. 4. Roma, 1907.

(4) A. Silvestri, *Foram. Olig. Mioc. Somalia*, pag. 107.

abbondanza nel bacino mediterraneo (Oligocene della Sabina, Elveziano dei Colli di Torino, Miocene medio di Biarritz e di Dax). Il SILVESTRI la riconosce (in soli due esemplari) anche nell'Oligocene somalo (1).

Nella varietà presente nel calcare del Sahel eritreo i caratteristici tramezzi secondari formati sui setti e preludenti il gen. *Heterostegina* arrivano in alcuni esemplari a raggiungere i setti successivi, come nelle figure che ne dà SILVESTRI per il tipo dei colli torinesi e per quello somalo. Anche le dimensioni sono le tipiche dimensioni delle Operculine complanate mioceniche: un individuo che ho potuto isolare con fatica dalla roccia madre raggiunge in lunghezza mm. 5,8.

Oltre a questa forma sicuramente identificabile è rappresentata, in buono stato e in discreto numero, *Textularia gibbosa* d'Orb., ben visibile in sezioni longitudinali, spesso secondo il piano di simmetria. È una forma longeva, questa, come è a tutti noto. Ma (riporto quanto ne dice il SILVESTRI (2)) « è una specie essenzialmente neogenica, poichè le sue comparse più frequenti sono avvenute nell'Oligocene della Toscana . . . nel Miocene . . . del Bacino di Vienna, del Piemonte », ecc.

Non mi è consentito, al punto nel quale trovasi in questo momento lo studio, dire con sicurezza nulla delle altre specie contenute nella roccia. I loro contorni lasciano intravvedere forme forse assai interessanti (alcune tracce ricordano certi tipi di Orbitoidinae), ma sono talmente alterati che occorrerà alquanto tempo e una lunga serie di sezioni prima di ottenere qualche buon risultato.

Comunque, mi sembra che questi primi dati confermino le conclusioni raggiunte nello studio precedente. Anzitutto, la roccia stessa nel suo insieme parla per un'età che non può essere pleistocenica e nemmeno pliocenica. Sono ben noti nel Miocene questi calcari compatti, profondamente diagenizzati, zeppi di fossili. Come tipo di roccia, si avvicina moltissimo così mi assicura il prof. ANELLI, ai calcari di Malta.

Più ancora dunque che l'una o l'altra forma – poichè non solo ai coralli, ma a nessuna forma fossile, presa isolatamente, è concesso dare troppo valore stratigrafico, salvo le debite eccezioni – mi pare sia significativo il carattere stesso della roccia e tutto il complesso della fauna che va a mano a mano rivelandosi.

Prima di chiudere, credo poi non inutile riportare un altro dato, ricavato da un campione di roccia raccolto sempre dall'ing. MIGLIORINI a N di quota 145 del Monte Desset, altra collina, posta a km. 3,5 circa in linea d'aria a OSO della confluenza del torrente Edè Cassela col torrente

(1) A. SILVESTRI, *Foram. Olig. Mioc. Somalia*, tav. XIV, fig. 4; tav. XVI, fig. 1.

(2) SILVESTRI, *Foram. Olig. Mioc. Somalia*, pag. 91.

Aila, tra Massaua e i Monti Ebud. Della stessa località riconobbi pure quattro specie di coralli, delle quali una caratteristica della regione e le altre tre – *Orbicella Ellisiana* Defr., *Cyphastraea corrugata* (Michtti), *Plerastraca* aff. *profunda* (Michtti) [1], oligo – mioceniche mediterranee.

La roccia era stata definita come « calcare spatico ocraceo a macchioline nere » [2]. È compatta, soltanto in alcuni punti porosa, di color giallo ocraceo, a punteggiature nere con grossi cristalli a facce di sfaldatura lucenti, attraversata da vene bianche di calcite. Ha frattura scheggiata e concoide.

A un primo saggio ho escluso potersi trattare di un calcare. Ho eseguito quindi l'analisi chimica [3], che mi ha dato i seguenti risultati:

residuo insolubile	0,52 %
$Fe_2O_3 + Al_2O_3$	4,76
CaO	32,90
MgO	16,13
perdita all'arrovent.	45,28
	99,89

Non si tratta dunque semplicemente di un calcare dolomitico, come a un primo saggio avevo supposto, ma addirittura di una vera e propria dolomia. Che non sia un calcare fortemente magnesiaco è provato anche dalla insolubilità della roccia in HCl diluito.

Ora, mentre sono ben noti calcari madreporici anche recenti, più o meno magnesiaci, non mi consta che esistano dolomie plioceniche e tanto meno pleistoceniche. Questo reperto fa pensare, soprattutto se si collega con la presenza di dolomia riscontrata nella formazione petrolifera miocenica del Golfo di Suez [4].

È per lo meno prematura una discussione, a quale orizzonte miocenico si potranno attribuire i sedimenti che ci interessano. Occorre subito notare, che una faunetta come questa, per quanto nota senza eccezione nei nostri mari mediomiocenici, non permette compromessi circoscritti in un àmbito cronologico troppo limitato, tanto più che lievi spostamenti stratigrafici potrebbero spiegarsi con moventi di ordine ambientale, climatologico.

---

[1] Montanaro Gallitelli, op. cit., pagg. 228, 239, 244, 247.

[2] Cfr. Montanaro Gallitelli, op. cit., pag. 216, nota 1.

[3] Eseguita personalmente, sotto la guida di mio Marito (che ringrazio tanto) nell'Istituto di Mineralogia della R. Università di Modena. Una dolomia pura ha composizione teorica: CO_2 47.8%; CaO 30,4%; MgO 21,7%.

[4] Cfr. G. Macovei, *Les gisements de pétrole*, pag. 368. Parigi, Masson ed., 1938.

Del resto, nemmeno sopra i depositi gessoso-saliferi di Suez l'argomento sembra essere esaurito, assegnandoli l'HUME [1] al Miocene superiore, mentre secondo altri Autori essi comparirebbero sia nel Burdigaliano, sia nell'Elveziano e nel Miocene superiore [2],

Ora, PORRO riconobbe sul terreno, nel Sahel eritreo, l'orizzonte gessifero sotto ai calcari madreporici. Stando alla seconda delle interpretazioni citate, dunque, non resulterebbe priva di fondamento una sincronizzazione dei due orizzonti. Ma, come dico, una discussione in merito è per lo meno prematura.

---

[1] Cfr. PORRO, op. cit., pag. 35.

[2] KRENKEL, Op. cit., pag. 153-154.

Patologia. — *Contributo allo studio dell'anafilassi.* – V. *Protezione completa dallo shock anafilattico sperimentale mediante formolo iniettato prima della scatenante* (1). Nota di Antonino Caprì, presentata (2) da Carmelo Ciaccio, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

Lo studio delle eventuali proprietà antianafilattiche del formolo risale a Rosenau ed Anderson (3) che ottennero risultati completamente negativi. Qualche anno dopo Eisler e Lowenstein (4) hanno fatto tentativi in tal senso e riferiscono che avendo preparato e provato tre cavie con siero formolato una di esse si è salvata dalla crisi anafilattica.

In seguito Brodin e Huchet (5) basandosi sul fatto che all'iposolfito di sodio era stata riconosciuta una certa azione proteggente sullo shock anafilattico e che il novarsenobenzolo riesce meno tossico dell'arsenobenzolo – per la sostituzione fatta a quest'ultimo di uno dei radicali amminici con un gruppo composto di formaldeide e idrosolfito sodico – provano questo composto mescolato estemporaneamente alla proteina dell'iniezione scatenante e ottengono una evidente ma non sicura protezione dallo shock in quanto che pur non essendo inibiti costantemente gli accidenti anafilattici di qualsiasi grado – compresi quelli mortali – questi si mantennero in percentuale molto più bassa che nei controlli. In epoca più recente (1926) Petragnani (6) volendo studiare l'azione di alcuni disinfettanti sui sieri curativi ha provato su di essi l'azione del formolo anche per quanto riguarda l'anafilassi.

I risultati di questo A. si possono così riassumere:

---

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Patologia generale dell'Università di Messina.

(2) Nell'Adunanza del 17 gennaio 1941–XIX.

(3) Rosenau e Anderson, « Hjgien. Laborat. Bull. », 1906–1908 (citati da Besdredka in *Le Choc Anafilactique et le principe de la desensibilisation*, Masson et C.ie edit., Paris, 1930, pag. 10).

(4) Eisler e Lowenstein, « Centr. f. Batt. O. », 1912, 63, 261.

(5) P. Brodin e P. Huchet, « C. R. de l'Acad. de Sciences », 1921, 173, 865.

(6) G. Petragnani, « Boll. dell'Ist. Sieroter. Milanese », 1929, 8, 145.

1° Il formolo aggiunto in debite proporzioni al siero adoperato come scatenante ha un indubbio potere protettivo.

2° Che questa protezione è tanto più evidente quanto più il formolo è lasciato preventivamente a contatto col siero (fino a sessanta giorni).

3° Che la protezione è praticamente nulla quando la aggiunta del formolo alla proteina antigene è fatta estemporaneamente alla effettuazione della scatenante. Conclude affermando un'indubbia azione del formolo sull'antigene della scatenante e negando qualsiasi azione di esso « sul plasma o sulle cellule sensibilizzate dell'animale ».

Successivamente Marginesu e Benzi [1] hanno confermato le ricerche suddette, poichè riferiscono di aver ottenuto la completa protezione dopo trattamento del siero scatenante con formolo (aggiunto in quantità del 5 %) per 15 giorni a 37°.

Le applicazioni sperimentali o pratiche, nel campo dell'anafilassi, in seguito a questi studi, sono, allo stato attuale, pressochè nulle. Forse si è aggiunta qualche conoscenza all'azione del formolo sugli antigeni, capitolo studiato oggi molto ampiamente anche per merito di AA. italiani e specialmente di Puccinelli.

È indubbio infatti che gli AA. che fin'ora hanno lavorato sull'argomento hanno cercato di agire solo sull'antigene e mai sul cosidetto anticorpo anafilattico.

Recenti studi dimostrano invece che il formolo è capace di agire, e molto efficacemente, anche sugli anticorpi: H. Braun [2] riferisce sull'azione bloccante del formolo sul siero eterogeneo di Forsmann, su sieri emolitici e su sieri sifilitici.

K. Iwanoff [3], anch'esso con ricerche in vitro, osserva la stessa azione bloccante su altri anticorpi fra cui, – ciò che mi interessa maggiormente – quello anafilattico.

D'altra parte recentissimi lavori di Carmona e di Barresi [4-5] sulle trasfusioni sanguigne eterogenee dimostrano come una preventiva iniezione di formolo, effettuata sul ricevente, possa inibire completamente gli effetti dannosi della trasfusione di forti quantità di sangue eterogeneo. Essendo ormai ritenuti come responsabili degli accidenti gravi, nel campo delle trasfusioni eterogenee, gli anticorpi preesistenti nell'organismo del ricevente, questo dato è quanto mai interessante in rapporto alle mie ricerche.

---

(1) Marginesu e Benzi, « Giornale di Clinica Medica », 1928.
(2) H. Braunn, « Zeistchr. f. Immunität », 1933, 31, 873.
(3) K. Iwanoff, « Zeitschr. f. Hyg. », 1936, 118, 197.
(4) L. Carmona, « Osservatore Medico », 1939, 6.
(5) G. Barresi, « Osservatore Medico », 1940, 7.

Quanto ho detto fin'ora mi ha spinto ad indagare su una eventuale azione protettiva effettuata dal formolo sullo shock anafilattico mediante iniezione eseguita prima della scatenante, ciò che può avere un interesse pratico.

Tecnica delle esperienze.

Un lotto di cavie sane, messo e mantenuto nelle condizioni più opportune suggerite dalla tecnica dell'anafilassi, è stato preparato mediante iniezione endoperitoneale di albume d'uovo all'1 % (sciolto in NaCl 0,9 %) ripetuta per tre giorni di seguito. Per la scatenante si è usata una soluzione di albume di uovo 0,50 % (in NaCl 0,9 %) e lo scoppio è stato sempre provocato per via endocardiaca trenta giorni dopo l'ultima iniezione preparante.

Mi son servito di formolo Schering (40 %) diluito all'1 % con soluzione di 0,9 % NaCl che iniettavo per via endocardiaca.

Le dosi di esso, della proteina scatenante, i tempi intercorsi fra le iniezioni, la sintomatologia e i reperti autoptici sono riassunti nella annessa tabella.

Gli animali furono preparati e rispettivamente provati negli stessi giorni.

Conclusioni.

In base agli esposti risultati credo di poter conchiudere:

1° che il formolo iniettato per via endocardiaca in quantità di cc. 0,5 di una soluzione all'1 %, mentre dà qualche lieve e fugace disturbo all'animale in esperimento, rende completamente innocua la successiva scatenante effettuata con dose sicuramente letale;

2° che per esplicare la sua azione protettiva è necessario che intercorra un certo tempo fra l'iniezione di formolo e la scatenante che, nelle condizioni sperimentali da me adottate, è stato di 10 min.;

3° che la protezione è completa anche dopo un'ora dalla iniezione di formolo.

È probabile pertanto che il formolo agisca in queste condizioni *sull'anticorpo anafilattico in vivo*.

Mi sembra che il fatto possa avere una notevole importanza non solo dal punto di vista biologico ma anche da quello pratico, tanto più che, secondo alcuni risultati di ricerche attualmente in corso, credo di poter presto non solo confermare e chiarire meglio alcuni punti (fra cui la durata della protezione) ma anche di potere eliminare i disturbi, del resto quasi trascurabili, dati dall'iniezione di formolo.

TABELLA

N.	Peso in Kg. e sesso	Formolo 1 % iniettato	Sintomatologia in seguito alla iniez. di form
1	♂ 0,430		
2	♂ 0,435		
3	♀ 0,430		
4	♀ 0,510		
5	♂ 0,440	cc. 1	Lamenti, sussulti, abbattimento in 5 min.
6	♂ 0,450	cc. 0,5	qualche sussulto, pelo arruffato lipnea si rimette in 2 min.
7	♀ 0,430	cc. 0,5	Idem
8	♀ 0,505	cc. 0,5	Idem
9	♂ 0,440	cc. 0,5	Idem
10	♀ 0,510	cc. 0,5	Idem
11	♂ 470	cc . 0,5	Idem
12	♀ 420	cc. 0,5	Idem
13	♀ 550	cc. 0,5	Idem
14	♀ 475	cc. 0,5	Idem

Tabella

o in minuti a iniez. di o ela scaten.	Scatenante in cc.	Sintomatologia in seguito alla scatenante	Reperto autoptico
	0,5	+ in 2 min. classico s. an.	Polmoni forti enfisematosi con vaste emorragie
	0,3	Idem + in 2 min. e mezzo	Idem
	0,2	Idem + in 2 min.	Idem
	0,2	Idem + in 3 min.	Idem
			forte congestione degli organi interni
3	0,3	lieve s. an. si rimette in 10 min. circa	enfisema polmonare con qualche chiazza emorragica.
5	0,3	grattamento del muso – irrequietezza – torna normale in 3 min.	Nulla
10	0,3	Nulla	»
10	0,3	»	»
10	0,3	»	»
20	0,3	»	»
60	0,3	»	»
60	0,3	»	»
60	0,3	»	»

Fisiologia. — *Struttura dell'apparato di Golgi, suoi rapporti col lacunoma, sua funzione.* Nota di MARIO TIRELLI, presentata (1) da LIONELLO PETRI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

In questi ultimi anni vi è stata una fioritura di ricerche sulle fini strutture citoplasmatiche, in particolare sull'apparato di Golgi, sul condrioma e sul lacunoma. Tale complesso di ricerche è stato favorito dalla scoperta di nuove tecniche che hanno permesso l'osservazione delle cellule *in vivo* (colture dei tessuti, colorazioni vitali), o in condizioni particolarmente favorevoli (colorazioni di cellule coltivate *in vitro* e quindi assai appiattite, nuovi metodi di impregnazione e colorazione, ecc.). Grazie a queste nuove tecniche è innegabile che nuovi essenziali progressi sono stati compiuti nel difficile campo degli studi citologici. Si è potuto assodare che il condrioma esiste anche nelle cellule viventi, e presenta le stesse forme che si osservano nelle cellule fissate e colorate con speciali metodi, detti appunto citologici, o, meglio, condriomali. Il condrioma presenta inoltre modificazioni morfologiche nel corso dell'attività cellulare.

Più difficile è apparsa la questione dell'apparato di Golgi e del lacunoma. L'apparato reticolare interno, messo in evidenza, per il primo, dal Golgi, venne da taluni ritenuto come un artefatto, da altri identificato in parte col condrioma, e vennero date anche, di esso, descrizioni morfologiche diverse.

Nella sua forma caratteristica, l'apparato di Golgi si mette in evidenza nelle cellule impregnate con sali di Ag o con Os. Molti ricercatori quindi – analogamente a quanto era stato fatto per il condrioma – affrontarono il problema di stabilire quale forma e struttura avesse tale apparato nelle cellule vive. Le strutture che si mettono in evidenza nelle cellule impregnate, esistono nelle cellule vive? Tali e quali o con quali modificazioni?

Vennero usati i metodi, detti appunto citologici perchè non alterano le strutture cellulari, per quanto almeno consentono di vedere gli ingrandimenti microscopici attuali, nella supposizione che, come tali metodi non alterano le delicate forme condriomali, conservassero anche l'apparato di Golgi. Vennero esaminate anche le cellule vive delle colture di

(1) Nell'Adunanza del 17 gennaio 1941-XIX.

tessuti e provate colorazioni vitali diverse Con questi sistemi non accadde mai di osservare delle strutture paragonabili all'apparato di Golgi, quale si osserva nelle cellule impregnate; fu solo possibile mettere in evidenza dei vacuoli (chiamati lacune da altri AA.) che appaiono, di regola, incolori, come vuoti, nei preparati citologici fissati e colorati, mentre nelle cellule vive prendono taluni coloranti vitali e specialmente il rosso neutro.

L'insieme di questi vacuoli o lacune fu detto vacuoma o lacunoma e, poichè niente altro si vedeva nelle cellule che potesse identificarsi con l'apparato di Golgi (all'infuori del condrioma o di inclusi facilmente individuabili), vari AA. ritennero senz'altro che tali lacune corrispondessero all'apparato di Golgi, tanto più che, di regola, si osservano proprio nella sede dell'apparato. Alcuni AA., anzi, nello studiare cellule vive, sia animali che vegetali, chiamano appunto apparato di Golgi l'insieme dei vacuoli cellulari colorabili col rosso neutro.

Senonchè tali lacune non sono sempre visibili nelle cellule; per quanto ci è dato attualmente conoscere si deve ammettere che i vacuoli o lacune compaiano o scompaiano o varino di dimensioni a seconda dei vari momenti di vita della cellula, mentre l'apparato di Golgi, nella sua forma tipica, impregnabile, è sempre visibile nelle cellule. A questo proposito, più di dodici anni or sono noi scrivevamo, riferendoci a ricerche compiute ancora due anni prima; sulla mucosa intestinale di *Gambusia holbrooki* Grd.: « Per ciò che riguarda il lacunoma esso non si è rivelato come una formazione sempre presente » e nel 1929, in un lavoro più esteso precisavamo: « Il lacunoma non compare che in questa particolare fase . . . La presenza del lacunoma pare quindi subordinata ad un particolare periodo di attività della cellula. Esso non è sempre presente ». Se il lacunoma è temporaneo, non può quindi identificarsi con l'apparato di Golgi, che è permanente. Nel 1929, descrivendo il lacunoma delle cellule della mucosa intestinale di *Bombyx mori L.* colorate vitalmente col rosso neutro, ci guardavamo bene, infatti, di identificare il lacunoma con l'apparato di Golgi. A poco a poco, ed in seguito a numerose ricerche che seguirono le nostre, ci si è orientati verso una distinzione netta fra apparato di Golgi, impregnabile, e le lacune cellulari.

In quanto alla forma dell'apparato di Golgi tipico, impregnabile, oltre la forma reticolare e a quella di masserelle riunite o staccate, è stata descritta recentemente la forma lamellare (Pollister). Comunque, la forma che deve ritenersi più prossima alla realtà è quella che si ottiene dalle impregnazioni osmiche, mentre quelle argentiche dànno figure più grossolane; fenomeno, questo, naturale, dato che l'Os è proprio considerato, anche, fra i migliori, se non il migliore fissativo citologico, mentre le impregnazioni argentiche hanno tendenza a divenire massive, come si verifica appunto nelle impregnazioni delle cellule nervose col classico metodo del Golgi. Il Pollister, di cui abbiamo potuto osservare alla

Columbia University numerosi preparati, trova appunto che l'apparato di Golgi, in cellule epiteliali, impregnate con Os, è sopranucleare, in forma di lamelle che circondano l'estremità distale del nucleo.

Se le lacune o vacuoli (lacunoma o vacuoma) non sono l'apparato di Golgi, che cosa rappresentano, dato specialmente che si osservano proprio nella sede dell'apparato? In un recente lavoro CHRISTIAN HIRSCH (1940) descrive nelle cellule pancreatiche un ciclo strutturale-fisiologico dell'apparato di Golgi. L'apparato avrebbe funzione secretoria, in particolare secernerebbe la vitamina C. In rapporto a tale funzione si nota una serie di cambiamenti morfologici: si notano prima dei corpiccioli (presostanza di Golgi), nei quali si distingue una parte o sostanza interna e una parte o sostanza esterna, tali corpi, poi, si ingrandiscono scavandosi e, nel loro interno, si formano le gocce di secrezione, gocce che costituiscono quindi delle lacune (lacunoma). A secrezione avvenuta, espulse le gocce contenute nelle lacune, rimane un residuo di sostanza di Golgi (sostanza residuale), che si trasforma di nuovo in presostanza e dà origine ad un nuovo ciclo.

I corpi di Golgi si troverebbero inclusi in una zona di Golgi (Golgi Feld), nella quale sarebbero anche compresi frammenti di condrioma. Data la mobilità del condrioma e la sua diffusione in tutte le regioni della cellula, ciò è possibile. Sostanzialmente quindi, secondo l'A. tedesco, esisterebbe una zona di Golgi, nella quale una sostanza di Golgi produrrebbe dei vacuoli o lacune piene di secrezione, svuotati i vacuoli si ripete un nuovo ciclo. Sfrondiamo la esposizione dell'HIRSCH dai particolari più ipotetici, o più difficili da controllare, come la distinzione della sostanza di Golgi, in una sostanza esterna ed una interna, la distinzione fra presostanza e sostanza residuale e la trasformazione di questa in quella, e consideriamo il ciclo descritto unicamente dal punto di vista strutturale, facendo astrazione anche, per ora, da ogni ipotesi sulla funzione dell'apparato. Vediamo, in tal modo, nella cellula, una zona di Golgi, costituita da una sostanza che si impregna con l'Ag e l'Os, in tale zona periodicamente si formano delle lacune che poi si svuotano. Tale concetto corrisponde a quanto già prospettammo in un lavoro del 1939, in cui si legge: « Rispetto alla formazione ed alla presenza delle lacune, non tutto il citoplasma dunque, può considerarsi uguale, ma deve ritenersi . . . che le lacune si formino in una particolare zona di citoplasma, distinta per posizione e forse per struttura dal citoplasma restante. A questa zona dove le lacune si formano, dove . . . diminuiscono di volume sino a scomparire o a rendersi . . . non percepibili; mi sembrerebbe opportuno dare il nome di *zona di Golgi* ». Come si vede: *zona di Golgi*, Golgi Feld, vi è perfetta corrispondenza. Il nostro lavoro, spedito dall'Habana, ove ci trovavamo, si riferiva a ricerche già compiute in Italia, prima della nostra partenza per Cuba, quindi anteriori al 1937.

I risultati, dunque, verso cui, dopo lunghe e talvolta contrastanti ricerche vanno orientandosi i ricercatori, *erano stati già da noi prospettati nelle loro linee essenziali, sia per quanto concerne la non identità fra lacunoma e apparato di Golgi; sia per quanto concerne la temporaneità delle lacune nelle cellule; sia per quanto concerne il meccanismo di formazione delle lacune, in determinati momenti dell'attività cellulare e in quella zona che corrisponde alla sede dell'apparato di Golgi.* La confusione, generata dal fatto che le lacune apparivano proprio nella sede dell'apparato di Golgi, viene così pienamente chiarita.

Stando così le cose, è evidente che nei preparati impregnati, specialmente se i metodi usati (come gli argentici) tendono verso la impregnazione massiva, verrà di regola impregnata tutta la zona di Golgi, e, se le lacune sono presenti nel momento in cui il tessuto è fissato, queste non saranno differenziabili, ma resteranno spesso comprese nella impregnazione generale di tutta la zona, in cui si trovano; in questo caso la impregnazione risulta più voluminosa; meno voluminosa risulta invece se le lacune non esistono. Si spiegano così anche le diverse dimensioni dell'apparato, nelle cellule all'apice o alla base delle *plicae* della mucosa, come risulta dalla fig. 9 del nostro lavoro (1939) e dalle osservazioni di altri AA. (Corti ecc.). In detta figura si nota che l'apparato di Golgi delle cellule apicali è più voluminoso dell'apparato che si nota nelle cellule della base, questo fatto va messo in relazione con quanto scrivevamo già nel 1929 (pag. 439): « Le cellule in cui il lacunoma è maggiormente sviluppato sono quelle che si trovano all'apice delle pieghe mucose, in alcuni preparati sono anzi esclusivamente tali cellule che presentano lacune, le cellule che si trovano al fondo non ne hanno ». Le impregnazioni più voluminose sono perciò quelle che comprendono anche il lacunoma, quelle meno voluminose comprendono il solo apparato di Golgi.

In quanto all'aspetto della zona di Golgi, il Pollister, come si è detto, ha osservato forme lamellari, il che non è contrario alla eventuale formazione, nella zona di Golgi, delle lacune, in quanto le pareti delle lacune possono appunto immaginarsi come lamelle, tanto più se varie lacune sono accollate l'una all'altra. È noto poi che altri AA. descrivono l'apparato di Golgi come un reticolo o una spugna (trofospongio), o come masserelle isolate o addossate l'una all'altra.

A questo riguardo crediamo che la zona di Golgi, in diversi tessuti e in specie diverse, possa avere forma diversa, sia pur caratteristica secondo il tessuto o la specie. Qualche cosa di analogo, insomma, a quanto si verifica per il nucleo. Sono diversissime le forme che presenta il nucleo, che può giungere a ramificarsi sino a costituire nuclei ramificati e diffusi in talune cellule altamente differenziate. Così l'apparato di Golgi, o meglio la zona di Golgi, può presentare forme diverse, in relazione con la forma generale della cellula e la sua differenziazione. Come però il nucleo presenta

una *forma fondamentale*, che è la sferica od ovoidale, dalla quale derivano le molteplici deviazioni morfologiche, analogamente l'apparato di Golgi presenta – e questo risulta dalle numerosissime osservazioni – una forma e disposizione fondamentali, da cui possono derivare variazioni e deviazioni. Questa forma e disposizione fondamentali sono rappresentate da parti di citoplasma, impregnabili con Ag e Os addossate al nucleo e da una sola parte (di preferenza la distale). Queste parti impregnabili appaiono di regola lamellari o reticolari o massiccie e variano probabilmente e lievemente di forma, dimensioni e posizione nelle cellule vive. Sebbene non sia stato ancora scoperto un metodo per mettere in evidenza la zona di Golgi nelle cellule vive, tali modificazioni si desumono facilmente dalle lievi variazioni di aspetto che presentano le impregnazioni delle cellule di

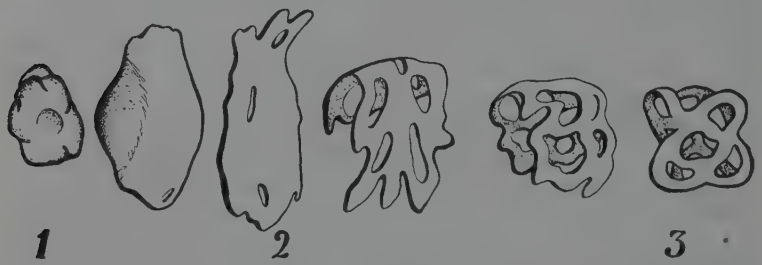


fig. 1. – Le principali forme descritte per i corpi di Golgi: 1 = a masserella, 2 = lamellari, 3 = reticolari, Tra queste forme fondamentali sono state disegnate eventuali forme di passaggio.

uno stesso tessuto e dai movimenti del lacunoma. In seno a questa zona si formano, appunto, le lacune, in determinati momenti della vita cellulare.

In conclusione le forme principali descritte per l'apparato di Golgi, nei preparati impregnati, sono tre: reticolare, lamellare, e a masserelle vicine o addossate. Queste tre forme non si escludono l'un l'altra. Nelle stesse figure, e nei preparati del Pollister che potemmo esaminare, si notano lamelle che presentano fori più o meno ampi e sfrangiature ai margini, se immaginiamo che questi fori possano ampliarsi, le sfrangiature ramificarsi, e la lamella piegarsi su se stessa, si giunge a forme reticolari. D'altra parte se il corpo della lamella si ispessisce, si giunge a forme di masserelle (v. fig. 1). Da queste forme fondamentali possono derivare le forme atipiche che sono state descritte da vari AA.: corpi di Golgi frammentati e diffusi nel citoplasma ecc.

Per chiarezza è bene precisarne ancora i termini che usiamo: in ogni cellula esiste una *zona di Golgi*, la cui sede trovasi, di regola, in prossimità del nucleo. Tale *zona di Golgi* comprende dei *corpi di Golgi*, che possono

mettersi in evidenza, allo stato attuale della tecnica, solo coi metodi di impregnazione con Os e Ag; tali corpi presentano forma varia, ma le forme principali sinora descritte sono le seguenti: lamellare, reticolare, a masserelle. Al complesso di tali corpi, impregnabili, possiamo conservare il nome tradizionale di: *apparato di Golgi*. In cellule speciali si possono osservare deviazioni sia nella sede della zona di Golgi sia nella forma dei corpi di Golgi. La *zona di Golgi* comprende inoltre, ma non sempre, delle *lacune o vacuoli*, che si formano nella zona stessa e che sono visibili nei preparati ottenuti coi metodi condriomali o citologici, talvolta negli stessi preparati impregnati e, nelle cellule vive, con talune colorazioni vitali (specialmente col rosso neutro). Non dobbiamo, ben inteso, confondere le masserelle che rappresentano i corpi di Golgi, quando essi hanno la forma di masserelle, con le masserelle che si formano talvolta in preparati troppo impregnati e che comprendono vacuoli e corpi di Golgi.

Per quanto concerne la modalità precisa, secondo cui si formano i vacuoli nella zona di Golgi e i rapporti fra vacuoli e corpi di Golgi, facciamo notare che i vacuoli potrebbero formarsi o nell'interno dei corpi di Golgi, come ritiene Hirsch, o a contatto dei corpi di Golgi o in ambedue i modi. Noi non riteniamo, per ora, di dover ammettere una sola di queste ipotesi.

Analogamente a quanto è stato osservato per il condrioma, anche l'apparato di Golgi presenta modificazioni con l'età della cellula. Così Warren (1939), con la tecnica di impregnazione argentica di Da-Fano, trova differenze strutturali negli apparati di Golgi delle cellule nervose di topi giovani, adulti e vecchi.

Consideriamo ora la funzione dell'apparato di Golgi. Si devono scartare senz'altro vecchie ipotesi, come quella di una rete di canalicoli a funzione trofica, una specie di sistema circolatorio endocellulare, ed altre.

Nel 1929 prospettavamo il fatto che il lacunoma compariva subito dopo una fase di disidratazione delle cellule e che, in relazione con la comparsa del lacunoma, sopravveniva una fase di idratazione (condrioma filamentoso ecc.), supponevamo quindi che il lacunoma potesse interpretarsi come un deposito di « colloidi fortemente dispersi o di cristalloidi diluiti che a poco a poco verrebbe assorbito dai colloidi cellulari a basso grado di dispersione » contribuendo così a ristabilire l'equilibrio idrico della cellula. Altri AA. vedono nelle lacune un deposito puro e semplice di sostanze prodotte nella zona di Golgi. In realtà le due ipotesi si integrano. Anche nel caso delle cellule intestinali della *Gambusia* (da noi studiato) può ammettersi che il lacunoma contenga sostanze secretizie, è indubbio però che la funzione secretoria coinvolge una complessa attività della cellula ed in particolare modificazioni del suo equilibrio idrico, si tratta, in sostanza, di due aspetti di una medesima funzione complessa, espletata dal lacunoma.

Il Gatenby e collaboratori (1938–39) in *Euglena* e *Copromonas* hanno descritto dei corpi osmiofili attorno al vacuolo pulsante. Tali corpi rappresentano l'apparato di Golgi. Ciò che è interessante è che la formazione dei vacuoli sembra strettamente connessa con l'apparato di Golgi. Si può notare, infatti, che i granuli osmiofili si scavano e vi si raccoglie dentro del liquido che dà origine ai vacuoli. Gli AA. concludono affermando che l'apparato di Golgi interviene nel meccanismo di formazione dei vacuoli, nella idratazione e nella disidratazione della cellula. È questa una conferma ulteriore delle nostre vedute. Non crediamo però che la funzione della zona di Golgi si limiti alla formazione delle lacune e si manifesti solo attraverso le funzioni connesse con la presenza di dette lacune e che abbiamo prospettato. È difficile ancora, a nostra opinione, pronunciarsi con precisione sul vero significato e funzione della zona di Golgi, tuttavia, in questo campo, e sempre strettamente basandoci su quanto è a nostra sicura conoscenza, vorremmo tentare di spingerci un po' più avanti di quanto non abbiano fatto altri AA. Esaminiamo le proprietà della zona di Golgi. Mentre il condrioma viene colorato coi coloranti basici, nucleari, la zona di Golgi, non è basofila, ma acidofila, tanto vero che, nei preparati eseguiti coi metodi condriomali, non riesce a mettersi in evidenza, e si confonde col restante citoplasma; solo se ne può stabilire la sede quando sono presenti le lacune. Almeno dal punto di vista tintoriale la zona di Golgi deve ritenersi che abbia le stesse proprietà del comune citoplasma, che sia acidofila. La zona di Golgi si mette in evidenza bene coi metodi di impregnazione, essa ha quindi delle proprietà riduttrici. D'altra parte molti AA. ritengono che abbia importanza nei fenomeni di secrezione e comunque è certo che la zona di Golgi partecipa attivamente al metabolismo cellulare. Ma forte attività metabolica presuppone scambi respiratorî. Sarebbe quindi azzardato supporre che le proprietà riduttrici della zona di Golgi, sull'Ag e sull'Os, siano indice di una vera e propria attitudine fisiologica? Che cioè la zona di Golgi debba interpretarsi come la sede dei fenomeni di respirazione della cellula e, in via subordinata, come regolatrice dei processi secretivi e dell'equilibrio idrico cellulare, che dobbiamo ammettere legati all'attività respiratoria della cellula stessa?

LAVORI CITATI

Gatenby, J. Bronte, B. N. Singh, K. M. R. Browne, *Further notes on the association between Golgi apparatus and the vacuole system in « Euglena » and Copromonas ».* « Cellule », *47* (2), 227, 1938.

Gatenby, J. Bronte, B. N. Singh, *The Golgi apparatus of « Copromonas subtilis » and « Euglena » sp.* « Quart. Journ. Micr. Science », 80 (4), 567, 1938.

Hirsch, Gottwalt Ch. *Vitamin C. und Golgi Körper. Bemerkungen zur vorstehenden Arbeit von D. Järvi.* « Protoplasma », 34 (3), 377, 1940.

R. Keil, *Sur la polarité de l'appareil de Golgi dans les éléments des tubes sexuels mâles chez les oiseaux.* « C. R. Soc. Biol. », 131 (15), 104, 1939.

A. W. Pollister, *The structure of the Golgi-apparatus in the tissues of Amphibia.* « Quart. Journ. Micr. Sc. », 81 (2), 235, 1939.

M. Tirelli, *Modificazioni del condrioma e del lacunoma nelle cellule intestinali di « Gambusia Holbrooki » durante le diverse fasi dell'attività funzionale e durante il digiuno.* « Atti R. Acc. Naz. Lincei », Classe Sc. Fisiche, Mat. Nat. VII (serie 6), sem. 1 (3) 255, 1928.

Id., *Modificazioni del condrioma e del lacunoma nelle cellule intestinali di « Gambusia Holbrooki » Grd. durante le diverse fasi dell'attività funzionale e durante il digiuno.* « Arch. It. An. ed Embr. », *26* (3), 417, 1929 (con Bibliografia),

Id., *Colorazione vitale del condrioma e del lacunoma nelle cellule intestinali di « Bombyx Mori* L. ». « Atti Pont. Acc. Sc. Nuovi Lincei », anno LXXXII, 374, 1929.

Id., *L'apparato di Golgi nelle cellule della mucosa intestinale di « Gobius paganellus ».* « Arch. Zool. It. », *26*, 57, 1939.

Warren A., *The Golgi apparatus in the nerve-cells of the mouse from youth to senility.* « Amer. Journ. Anat. », *64* (2), 351, 1939).

E. B. Wilson, A. W. Pollister, *Observations on sperm formation in the scorpions with special referenc to the Golgi material.* « Journ. Morphology, *60* (2), 407, 1937.

Fisiologia. — *Rapida azione mascolinizzante del testosterone sulle gonadi di girini di « Rana agilis » in metamorfosi* [1]. Nota di ENRICO VANNINI, presentata [2] da GIUSEPPE GOLA, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

Esperimenti compiuti in questi ultimi anni, hanno dimostrato la possibilità di invertire, almeno parzialmente e transitoriamente, il sesso delle giovani gonadi di Vertebrati, mediante il trattamento dell'embrione con ormoni sessuali dell'adulto.

I risultati positivi più numerosi sono stati ottenuti sull'embrione di pollo (KOZELKA e GALLAGHER; WILLIER, GALLAGHER e KOCH; DANTCHAKOFF; WOLFF e GINGLINGER; LUDWIG e von RIES; HOTTENROTT; GAARENSTROOM; van OORDT e RINKEL); la DANTCHAKOFF ha inoltre riscontrato effetti analoghi sull'embrione di lucertola. Si è visto che l'iniezione di sostanze estrogene (tipo follicolina) femminilizza nettamente le gonadi dei maschi genetici; assai meno intensa e costante è invece l'azione mascolinizzante esercitata sulle gonadi femminili dagli ormoni testicolari sintetici (serie androsterone-testosterone), alcuni dei quali mostrano anche una « paradossale » tendenza femminilizzante sul testicolo sinistro degli embrioni geneticamente maschili.

Nella maggior parte delle ricerche compiute sull'embrione dei Mammiferi, le iniezioni di ormoni sessuali dell'adulto hanno modificato sensibilmente lo sviluppo dei gonodotti e degli organi sessuali accessori, ma non hanno provocato vere e proprie inversioni sessuali delle gonadi (DANTCHAKOFF; RAYNAUD; GREENE, BURRILL e IVY; BURNS *jr.*; TURNER). Soltanto più recentemente, in embrioni geneticamente femminili di cavia, la DANTCHAKOFF ha potuto ottenere una parziale mascolinizzazione delle ovaie, mediante iniezioni assai precoci di una piccola quantità di testosterone.

Ricerche, meno numerose, effettuate su Vertebrati inferiori, hanno dato risultati paragonabili a quelli descritti per i Vertebrati superiori. La follicolina femminilizza le gonadi degli avanotti di *Salmo irideus* (PADOA, 1937, 1939) e quelle di *Lebistes reticulatus* (BERKOWITZ, 1938). Il propionato di testosterone, secondo REGNIER (1937, 1938, 1939) anticipa il differenziamento testicolare nei maschi genetici di una razza indifferenziata di *Xiphophorus helleri*, mentre in *Lebistes reticulatus* determina la degenerazione delle ovaie; secondo WITSCHI e CROWN (1937), lo stesso ormone provoca nelle ovaie adulte di *Xiphophorus helleri* un esteso

---

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto di Zoologia e Anatomia comparata della R. Università di Padova, diretto dal prof. U. D'Ancona.

[2] Nell'Adunanza del 17 gennaio 1941-XIX.

e rapido riassorbimento degli ovociti, senza però modificarle sicuramente in senso testicolare. Somministrando ormone follicolare ad un Teleosteo ermafrodita (*Hepatus hepatus*) Padoa (1939) non ha ottenuto altri effetti che un cospicuo ampliamento della cavità entovarica, una notevole accelerazione della spermatogenesi nella porzione testicolare, e una dilatazione delle vie deferenziali.

Per gli Anfibi Urodeli, l'azione femminilizzante delle iniezioni di estrone e quella mascolinizzante delle iniezioni di propionato di testosterone sono state dimostrate da Burns *jr.* (1938, 1939) per le gonadi larvali di *Amblystoma punctatum*. Nelle larve di una razza semidifferenziata di *Hynobius retardatus*, l'impianto di testicoli adulti, da solo (Uchida, 1937) o associato a quello di ipofisi (Hanaoka, 1938, 1939), provoca una incompleta trasformazione delle ovaie in testicoli; nello stesso animale, ripetute iniezioni di follicolina iniziate fin dallo stato larvale, causano lo sviluppo di numerosi ovociti nei testicoli dei maschi genetici (Hanaoka, 1939).

Nei girini di *Bufo vulgaris*, secondo Padoa (1937), la follicolina rallenta lo sviluppo ovarico dell'organo di Bidder, e, in grado minore, il differenziamento della gonade sottostante.

Riguardano più direttamente il presente studio, le osservazioni compiute su girini di rana.

Su girini di una razza differenziata di *Rana esculenta*, Padoa (1936, 1937, 1938) [1], aggiungendo nelle vasche di allevamento due preparazioni commerciali di follicolina (Cristallovar IBI e Glandubolina Richter), ha ottenuto una intensa mascolinizzazione « paradossale » delle gonadi femminili; una terza sostanza (Follicolina Byla) ha provocato anche una leggera femminilizzazione dei testicoli. Il Cristallovar, utilizzato con la medesima tecnica, ha esercitato un identico « effetto paradossale » (mascolinizzazione delle ovaie) su una razza semidifferenziata della stessa specie di *Rana* (Padoa e Baldasseroni, 1938) [2] e su una differenziata di *Rana pipiens* (Foote, 1938) [3].

---

[1] E. Padoa, *Effetto paradossale (mascolinizzazione) sulla differenziazione sessuale di girini di « Rana esculenta » trattati con ormone follicolare.* « Monit. Zool. It. », vol. XLVII, pag. 285 (1936).

E. Padoa, *La differenziazione sessuale di girini di « Rana esculenta » e di avanotti di « Salmo irideus » trattati con ormone follicolare.* « Boll. Soc. It. Biol. Sper. », vol. XII, pag. 397 (1937).

E. Padoa, *La differenziazione del sesso invertita mediante la somministrazione di ormoni sessuali. Ricerche con follicolina in « Rana esculenta ».* « Arch. Ital. Anat. Embr. », vol. XL, pag. 122 (1938).

[2] E. Padoa e L. Baldasseroni, *La differenziazione del sesso invertita mediante la somministrazione di ormoni sessuali.* – II. *Velocità di accrescimento e sensibilità agli ormoni sessuali in una razza semidifferenziata di « Rana esculenta ».* « Monit. Zool. It. », vol. XLIX, pag. 267 (1938).

[3] C. L. Foote, *Influence of sex hormones on sex differentiation in Amphibia (« Rana pipiens »).* « Anat. Rec. », vol. LXXII, Suppl., pag. 120 (1938).

Non è il caso che mi soffermi sulle varie ipotesi avanzate per spiegare il descritto « effetto paradossale »; ulteriori ricerche hanno però mostrato che altre sostanze estrogene (per esempio diidrofollicolina), iniettate nei girini o aggiunte all'acqua delle vasche, esercitano il normale effetto femminilizzante sulle gonadi (WITSCHI e CROWN, 1937, FOOTE, 1938, per la *Rana pipiens;* GALLIEN, 1938, per la *R. temporaria;* PADOA, 1939, per la *R. esculenta*) (1).

Più costante è l'effetto mascolinizzante esercitato, sulle gonadi femminili, dagli ormoni testicolari sintetici (propionato di testosterone) (GALLIEN, 1937, 1938, per una razza indifferenziata di *Rana temporaria;* WITSCHI e CROWN, 1937, FOOTE, 1938, per una differenziata di *R. pipiens*) (2).

Mentre la maggior parte dei risultati precedenti era stata ottenuta iniziando il trattamento in girini assai giovanili, con gonadi ancora indifferenziate o differenziate da poco tempo, più recentemente PUCKETT (1939) (3), in una razza indifferenziata di *Rana catesbiana*, ha ottenuto modificazioni gonadiche in senso testicolare, iniettando contemporaneamente propionato di testosterone ed estratto ipofisario in girini all'inizio della metamorfosi (presenza delle zampe posteriori), con ovaie già ben sviluppate da lungo tempo. Risultati del medesimo tipo, ma assai più evidenti, sono stati ultimamente raggiunti da FOOTE e WITSCHI (1939) (4) su girini di una razza differenziata di *Rana clamitans*. Anche in questo caso il trattamento ormonale è stato iniziato molto tempo dopo il differenziamento

---

(1) E. WITSCHI e E. N. CROWN, *Hormones and sex determination in fishes and in frogs.* « Anat. Rec. », vol. LXX, Suppl., pag. 121 (1937).

C. L. FOOTE, *Influence of sex hormones on sex differentiation in Amphibia* (« *Rana pipiens* »). « Anat. Rec. », vol. LXXII, Suppl., pag. 120 (1938).

L. GALLIEN, *Action du benzoate de dihydrofolliculine dans la différenciation du sexe chez « Rana temporaria »* L. « C. R. Acad. Sc. Paris », t. CCVI, pag. 282 (1938).

E. PADOA, *Femminizzazione di girini di « Rana esculenta » mediante la somministrazione di diidrofollicolina.* « Monit. Zool. It. », vol. L, pag. 291 (1939).

(2) L. GALLIEN, *Action masculinisante du propionate de testostéron dans la différenciation du sexe, chez « Rana temporaria »* L. « C. R. Acad. Sc. Paris », t. CCV, pag. 375 (1937).

L. GALLIEN, *Action des hormones sexuelles dans la différenciation du sexe chez « Rana temporaria »* L. « Bull. Biol. France et Belg. », vol. LXXII, pag. 269 (1938).

E. WITSCHI e E. N. CROWN, vedi citazione precedente.

C. L. FOOTE, vedi citazione precedente.

(3) W. O. PUCKETT, *Some reactions of the gonads of « Rana catesbiana » tadpoles to injections of mammalian hormonal substances.* « J. of exper. Zool. », vol. LXXXI, pag. 43 (1939).

(4) C. L. FOOTE e E. WITSCHI, *Effect of sex hormones on the gonads of frog larvae (« Rana clamitans »): sex inversion in females; stability in males.* « Anat. Rec. », vol. LXXV, pag. 75 (1939).

sessuale delle gonadi: mentre nei maschi le iniezioni di follicolina non hanno sensibilmente modificato l'aspetto dei testicoli, nelle femmine invece le iniezioni di propionato di testosterone hanno determinato costantemente una mascolinizzazione delle ovaie, che è apparsa quasi perfettamente completa dopo un trattamento di circa quattro mesi.

Le presenti ricerche sono state effettuate su girini di *Rana agilis*, schiusisi in laboratorio nei primissimi giorni di aprile del 1940 da uova raccolte il 20 marzo in fossati dei dintorni di Padova. Tali girini appartengono ad una « razza indifferenziata », cioè ad una di quelle razze nelle quali tutti gli individui in una prima fase giovanile sviluppano gonadi femminili, che, successivamente, nel 50 % dei casi (cioè negli esemplari geneticamente maschili) si trasformano in testicoli. Nel caso presente, alla fine della metamorfosi tutti gli individui conservavano ancora gonadi di aspetto tipicamente ovarico: l'inversione sessuale dei maschi genetici ha luogo in un periodo della vita post-larvale che resta ancora da precisare.

Come nei citati esperimenti di Puckett sulla *Rana catesbiana* e di Foote e Witschi sulla *R. clamitans*, anche io ho voluto saggiare la capacità mascolinizzante di un ormone testicolare sintetico, su ovaie già costituitesi da un tempo relativamente lungo. Si deve rilevare che in confronto alle specie studiate dai suddetti autori, quella da me utilizzata ha un periodo larvale di una durata notevolmente minore. Infatti, nelle condizioni di laboratorio, i girini di *Rana agilis* da me allevati hanno tutti completato la metamorfosi fra i primi giorni di giugno e gli ultimi di luglio, cioè in due-tre mesi dalla nascita; invece, come è noto, la *Rana catesbiana* ha un periodo larvale della durata di due anni, la *R. clamitans* di circa un anno. Data la relativa piccolezza dei girini di *Rana agilis*, ho preferito usare, anzichè il metodo delle iniezioni, quello della semplice aggiunta dell'ormone all'acqua delle vasche.

Per l'esecuzione dell'esperimento sul quale riferisco, il giorno 27 giugno 1940 da una delle vasche di allevamento furono prelevati sessanta girini di *Rana agilis* all'inizio della metamorfosi, di lunghezza totale piuttosto uniforme (mm 31-38), tutti già provvisti di zampe posteriori abbastanza sviluppate (lunghe mm 6-10). Occorre tener presente che nei girini di questa età, le gonadi (ovaie anche nei maschi genetici) sono già alquanto avanzate nel loro sviluppo: la regione midollare si è ridotta ad un semplice strato di cellule tappezzanti le così dette « tasche ovariche », e le cellule germinative sono per la maggior parte rappresentate da ovociti di primo ordine in profase maturativa; nella maggior parte degli esemplari un certo numero (talora cospicuo) di ovociti ha raggiunto la fase della deutoplasmogenesi e della scomparsa dei filamenti cromatici nucleari (2° periodo di accrescimento).

I sessanta esemplari prelevati per l'esperimento, furono divisi in gruppi di dieci individui, che vennero collocati in ciotole di uguali dimen-

sioni, ciascuna delle quali conteneva un litro di acqua. Per tutte le ciotole, le condizioni di illuminazione e di temperatura sono state, per tutto il periodo dell'esperimento, perfettamente identiche e corrispondenti a quelle naturali (temperature dell'acqua da 18° a 21° C.). Anche il vitto (consistente in lattuga scottata) è stato di ugual quantità in tutte le ciotole.

L'acqua veniva cambiata ogni secondo giorno. In tre ciotole, ogni volta che cambiavo l'acqua aggiungevo 2 mg di ormone testicolare sintetico, sciolti in 0,2 cc di soluzione oleosa. Nelle altre tre ciotole, che servivano di controllo, non facevo nessuna aggiunta all'acqua.

Come ormone testicolare sintetico, ho utilizzato il *testosterone* messo in commercio dall'Istituto Terapeutico Romano col nome di « Neo-Testis » (1).

Per la voracità e per le condizioni di accrescimento e di sviluppo, non ho notato nessuna differenza fra i girini in esperimento e quelli di controllo. La mortalità è stata nulla in tutte le ciotole. Tutti gli esemplari hanno completato, con perfetta regolarità, la metamorfosi in un periodo di dieci-ventisei giorni. Anche le dimensioni, sono state uguali negli animali metamorfosatisi in condizioni normali e sperimentali (lunghezza del corpo, escluso il moncone caudale, mm 12-14).

Da ciascuna ciotola, gli animali venivano raccolti e fissati in Zenker acetico via via che avevano completato la metamorfosi (emissione delle zampe anteriori e avanzato riassorbimento della coda).

Per tutti gli esemplari, sia di controllo che sottoposti all'azione dell'ormone maschile, ho eseguito sezioni seriali della regione delle gonadi, in fette di 10 μ; come colorazione, ho usato sempre l'ematossilina ferrica di Heidenhain.

I risultati dell'esame microscopico delle gonadi, sono riassunti nelle Tabelle I e II. Dall'esame di esse, si rileva come l'effetto mascolinizzante del testosterone sia stato assai evidente e rapido in tutti gli animali trattati. Mentre gli esemplari di controllo sono tutti tipicamente femminili, con ovaie piene di ovociti in più o meno avanzato sviluppo, gli animali sottoposti all'effetto del testosterone si sono tutti trasformati in « intersessuati », le cui gonadi sono ovaie in più o meno avanzata trasformazione testicolare. Evidentemente la mascolinizzazione delle ovaie si è verificata sia negli esemplari geneticamente maschili che in quelli geneticamente femminili.

---

(1) Ringrazio vivamente l'Istituto Terapeutico Romano, per il cortese dono del quantitativo necessario di ormone.

Tabella I

Esemplari trattati con ormone testicolare sintetico (testosterone). Esperimento iniziato il 27 giugno 1940 (presenza delle sole zampe posteriori).

Data dell'uccisione degli animali (fine della metamorfosi)	Quantità di ormone impiegata (per litro di acqua)	Femmine	Intersessuati			Maschi
			Iniziali	Medi	Terminali	
8 luglio 1940	12 mg	—	2	—	—	—
10 luglio 1940	14 mg	—	1	—	—	—
12 luglio 1940	16 mg	—	—	2	—	—
14 luglio 1940	18 mg	—	3	—	1	—
15 luglio 1940	18 mg	—	1	1	—	—
17 luglio 1940	20 mg	—	—	3	2	—
19 luglio 1940	22 mg	—	—	—	4	—
21 luglio 1940	24 mg	—	—	3	7	—

Tabella II

Esemplari di controllo, allevati in condizioni normali.

Data dell'uccisione degli animali (fine della metamorfosi)	Femmine	Intersessuati	Maschi
7 luglio 1940	1	—	—
8 luglio 1940	1	—	—
11 luglio 1940	2	—	—
13 luglio 1940	1	—	—
15 luglio 1940	5	—	—
17 luglio 1940	4	—	—
19 luglio 1940	4	—	—
20 luglio 1940	2	—	—
23 luglio 1940	10	—	—

Nella compilazione della Tabella I, per rendere più evidente il risultato ottenuto, ho ritenuto opportuno dividere le gonadi intersessuate in tre categorie: ovaie all'inizio dell'inversione (fig. 1), ovaie in inversione già molto avanzata (fig. 2), e ovaie al termine dell'inversione (fig. 3). Queste ultime sono più precisamente da definire come testicoli già completamente costituiti, che conservano però ancora qualche raro ovocita, per lo più in corso di degenerazione. Come si ricava dall'esame della Tabella I, il processo di inversione sessuale gonadica appare, in generale, tanto più progredito quanto più prolungata è stata l'azione ormonale. Alcune irregolarità in questo andamento complessivo, dipendono sicuramente dal grado diverso di evoluzione dell'ovaia nei singoli esemplari

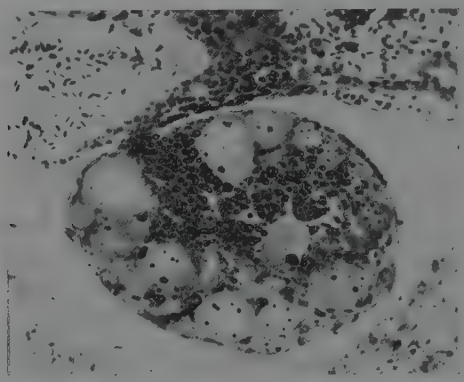


Fig. 1. – Ovaia all'inizio dell'inversione sessuale. Attraverso l'ilo dell'organo è penetrato un abbondante « tessuto midollare », nel quale non sono però ancora migrati elementi germinativi. Esemplare ucciso dopo un trattamento ormonale di diciassette giorni. Ingrandimento 170 × .

all'inizio dell'esperimento: le ovaie con un minor numero di ovociti in deutoplasmogenesi (come vedremo meglio più avanti) si mascolinizzano infatti assai più rapidamente delle altre.

Il non aver ottenuto nessun esemplare con testicoli perfettamente privi di tracce, sia pur minime, della trascorsa intersessualità, dipende evidentemente dalla breve durata dell'esperimento.

Con l'esame istologico dei singoli esemplari, mi è stato facile seguire nei suoi vari stadi il processo di inversione sessuale sperimentale della gonade. La più precoce modificazione dell'ovaia, consiste nel riempimento delle sue cavità centrali (tasche ovariche) da parte di un compatto « tessuto midollare », costituito di piccole cellule somatiche a nucleo inten-

samente colorabile. Tale « tessuto midollare » appare in forma di grossi cordoni che, partendo dall'ilo della gonade, si addentrano profondamente in essa, fino ad infiltrarsi nel tessuto ovarico corticale (fig. 1).

I cordoni di tessuto midollare (« cordoni della rete », secondo la nota nomenclatura di Witschi) inizialmente appaiono del tutto privi di cellule germinative; ben presto però, non appena si sono addentrati nella *cortex* ovarica disintegrandola, attraggono nel loro spessore gli elementi germinativi meno differenziati dell'ovaia (ovogoni primari e secondari, ovociti di primo ordine che non hanno ancora iniziato la profase della prima divisione maturativa), che assumono così il valore di elementi

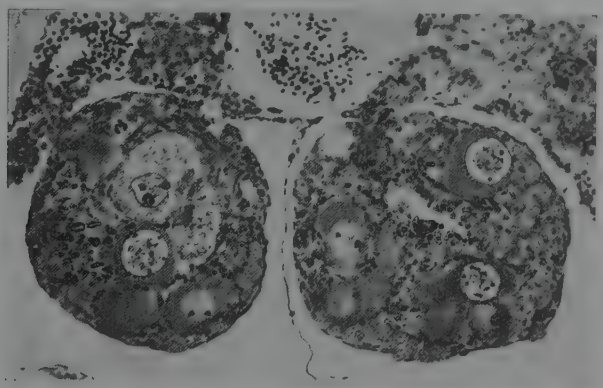


Fig. 2. – Ovaie in più avanzata inversione sessuale. Il tessuto midollare si è profondamente infiltrato nella *cortex* ovarica, disintegrandola. Gli ovociti profasici in primo periodo di accrescimento sono ormai quasi tutti scomparsi, quelli in secondo periodo di accrescimento sono all'inizio della degenerazione. A destra, si nota un residuo della cavità entovarica. Esemplare ucciso dopo un trattamento ormonale di venti giorni. Ingrandimento 170 ×.

germinativi testicolari (spermatogoni) (fig. 2). Questi ultimi appaiono dapprima sparsi nel tessuto testicolare di nuova formazione e isolati singolarmente da cellule avvolgenti; più tardi, però, molti di questi spermatogoni isolati entrano in cariocinesi e generano nuovi gruppi isogeni (nidi), i più voluminosi dei quali, negli esemplari studiati, contengono al massimo quattro–sei cellule (fig. 3).

Le cellule germinative ovariche più progredite nel loro differenziamento (ovociti di primo ordine in profase maturativa) non vengono invece incorporate nel tessuto midollare di nuova formazione, e sono destinate ad una degenerazione e ad un riassorbimento, rapidi per gli ovociti in primo periodo di accrescimento (stadi dal leptotene al pachitene

compreso), relativamente lenti per quelli in secondo periodo di accrescimento (stadio della scomparsa dei filamenti cromatici nucleari e dell'accumulo di materiali deutoplasmatici).

Il descritto comportamento delle cellule germinative durante il processo di inversione sperimentale dell'ovaia, corrisponde perfettamente a quello osservato nelle inversioni sessuali spontanee dei maschi genetici, in una razza indifferenziata della medesima specie di *Rana* (1).

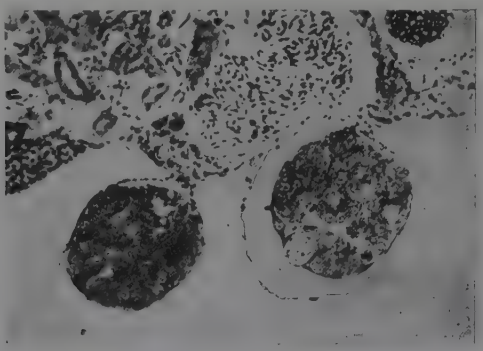


Fig. 3. – Inversione sessuale quasi completa. Ambedue le gonadi hanno aspetto nettamente testicolare; quella di destra presenta però, nella sua parte più periferica, un piccolo ovocita in secondo periodo di accrescimento, ancora ben conservato. Esemplare ucciso dopo un trattamento ormonale di ventiquattro giorni. Ingrandimento 170 ×.

Un problema che merita di essere preso in esame è quello dell'origine del tessuto midollare (testicolare) della gonade durante i processi di mascolinizzazione spontanea o sperimentale dell'ovaia. Come è noto (2), si ritiene che esso si formi per proliferazione delle cellule residuali di quel tessuto midollare dell'abbozzo primordiale indifferente della gonade (tessuto dei « cordoni della rete »), che si origina assai precocemente dalla regione dei blastemi mesonefrici e che nell'ulteriore differenziamento dell'ovaia si riduce a costituire le pareti delle tasche ovariche e la così detta *rete ovarii*.

---

(1) E. Vannini, *Nuove osservazioni sullo sviluppo delle gonadi e sul comportamento delle cellule germinative in una razza indifferenziata di « Rana agilis »*. « Rend. R. Accad. d'Italia », Classe Sc. fis. mat. e nat., ser. VII, vol. I, pag. 790 (1940).

(2) Vedi sopratutto i numerosi lavori di Witschi.

Soltanto Swingle (1921, 1926) (1) accenna, assai brevemente, alla possibilità che in questo processo intervenga parzialmente anche il mesonefro, ormai perfettamente differenziato e funzionante, con l'invio di qualche cellula verso la gonade.

Nei casi di intersessualità sperimentale da me ottenuti, mi è apparso evidente il contrasto fra la rapidità di sviluppo di un abbondante tessuto midollare e la scarsità di figure cariocinetiche nelle cellule che lo costituiscono. Già questa constatazione mi ha fatto sembrare poco probabile una prevalente origine del tessuto midollare stesso da cellule preesistenti nell'interno della gonade; lo studio accurato di tutti gli esemplari mi ha poi convinto che esso si origina (almeno prevalentemente) sotto forma di compatti zaffi cellulari, che proliferano dalla regione del mesonefro (che a questo stadio è già da lungo tempo funzionante) e penetrano nell'ilo dell'ovaia attraverso il suo ligamento peritoneale, con un processo analogo a quello della formazione dei primitivi « cordoni della rete » nella gonade primordiale sessualmente indifferente.

Esaminando inoltre numerosi esemplari di *Rana agilis* (da me raccolti in altre occasioni) in corso di inversione sessuale spontanea giovanile, ho potuto rilevare che anche in questi casi la neoproduzione di un tessuto midollare di natura testicolare si effettua, almeno prevalentemente, mediante un identico processo di proliferazione dalla regione mesonefrica.

È però interessante notare che, sia nei casi di intersessualità spontanea che in quelli di intersessualità provocata, i suddetti cordoni midollari non provengono dal mesonefro propriamente detto, ma da quel tessuto situato medialmente al mesonefro, a contatto della vena cava, che costituisce l'organo surrenale (vedi le figure annesse). Su questa quistione ritornerò in una prossima nota.

La scoperta delle inversioni sessuali indotte, negli embrioni dei Vertebrati superiori e nelle larve dei Vertebrati inferiori, da quei medesimi ormoni che nell'adulto provocano la comparsa dei caratteri sessuali secondari, ha fatto sorgere in molti studiosi la convinzione che vi sia una identità chimica, o almeno una stretta parentela, fra gli ormoni sessuali dell'adulto e i differenziatori primari del sesso, di origine cromosomica. Questa opinione è, fra gli altri, strenuamente sostenuta dalla Dantchakoff. Poco propenso a tale unificazione si mostra invece Witschi, che in numerosi recenti scritti prospetta anche le difficoltà che si incontrano quando si voglia ammettere una identità chimica fra gli « induttori secon-

(1) W. W. Swingle, *The germ cells of anurans. I. The male sexual cycle of « Rana catesbeiana » larvae.* « J. of exper. Zool. », vol. XXXII, pag. 235 (1921).

W. W. Swingle, *The germ cells of anurans. – II. An embryological study of sex differentiation in « Rana catesbeiana ».* « J. Morph. Physiol. », vol. XLI, pag. 441 (1926).

dari del sesso » (*cortexina* e *medullarina*) e gli ormoni sessuali dell'adulto (o ormoni sessuali propriamente detti). Padoa (1938) fa giustamente osservare che, allo stato attuale delle nostre conoscenze, lo scegliere fra l'una o l'altra delle due alternative è, più che altro, « questione di opinione personale » non basata su serie argomentazioni scientifiche.

Nella presente Nota, ho fatto osservare la *rapidità dell'azione mascolinizzante del testosterone su ovaie già ben differenziate e la perfetta identità dei processi organogenetici che intervengono (nei girini di Rana) nell'inversione sessuale spontanea e sperimentale dell'ovaia.* Tutto ciò non mi sembra tuttavia sufficiente per affermare una sicura identità fra i determinatori primari del sesso, di origine cromosomica, e gli ormoni sessuali dell'adulto: somiglianza di azione non significa necessariamente somiglianza chimica. *I fatti osservati ci possono tutt'al più permettere di prospettare la possibilità che gli ormoni sessuali dell'adulto esercitino normalmente un'attività stabilizzatrice della struttura gonadica*, accanto a quella morfogenetica e stabilizzatrice esercitata sui gonodotti, sugli organi sessuali accessori e sui caratteri sessuali secondari.

Matematica (Teoria delle funzioni). — *Prolungamento analitico mediante permutazione dei termini di una serie.* Nota di SIXTO RIOS, presentata (1) dall'Accademico FRANCESCO SEVERI.

1. In questa Nota vogliamo esporre un metodo per prolungare analiticamente una funzione, rappresentata in un certo semipiano da una serie di Dirichlet, metodo consistente nel cambiamento dell'ordine dei termini della serie stessa.

Si abbia perciò una serie di Dirichlet

$$[1] \qquad f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$$

con ascissa di convergenza nulla, e assolutamente convergente, in un certo semipiano.

Consideriamo ora la serie

$$[2] \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a'_n e^{-\lambda'_n s}$$

con gli stessi termini della [1], ma in ordine diverso. Nel semipiano di convergenza assoluta questa nuova serie converge evidentemente verso la stessa funzione $f(s)$. Ma per il principio del prolungamento analitico la [2] rappresenterà la funzione analitica $f(s)$ in tutto il suo campo di convergenza semplice, che potrebbe anche estendersi al di là del semipiano di convergenza della serie primitiva. Vedremo più avanti effettivamente un esempio di serie di Dirichlet, dalla quale alterando l'ordine dei termini si ottiene una nuova serie, uniformemente convergente verso la stessa funzione analitica, in un campo più ampio di quello della serie primitiva.

Se però la serie data non possiede campo di convergenza assoluta, lo scambio dei termini della serie può far cambiare la funzione analitica da essa rappresentata.

Al n. 4 si dà poi un esempio di serie di polinomi, da cui, alterando l'ordine dei termini, si può ottenere un'altra serie di polinomi uniformemente convergente verso una qualunque funzione analitica, arbitraria-

(1) Nell'Adunanza del 17 gennaio 1941-XIX.

mente prefissata, risultato che apre una nuova via per la possibile generalizzazione al campo funzionale dei teoremi classici di Riemann-Dini sulle serie numeriche condizionalmente convergenti.

2. Cominciamo a considerare la serie seguente

$$[3]\quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} = e^{-s} + e^{-s} - e^{-s} - e^{-s} + e^{-2s} + e^{-2s} + e^{-2s} +$$
$$+ e^{-2s} - e^{-2s} - e^{-2s} - e^{-2s} - e^{-2s} + \cdots +$$
$$+ \underbrace{e^{-ns} + e^{-ns} + \cdots + e^{-ns}}_{2^n} - \underbrace{e^{-ns} - e^{-ns} - \cdots - e^{-ns}}_{2^n} - \cdots$$

La successione delle sue somme parziali è

$$e^{-s}, 2e^{-s}, e^{-s}, 0, \cdots, e^{-ns}, 2e^{-ns}, \cdots, 2^n e^{-ns}, (2^n - 1) e^{-ns}, \cdots, 0, \cdots$$

e si vede immediatamente che converge uniformemente a zero in ogni dominio limitato, contenuto nel semipiano $R(s) > \log 2$ ma non converge fuori di questo semipiano.

Cambiando l'ordine dei termini si ottiene la serie

$$[4]\quad \sum_{n=1}^{\infty} a'_n e^{-\lambda'_n s} = e^{-s} - e^{-s} + e^{-s} - e^{-s} + e^{-2s} - e^{-2s} + e^{-2s} -$$
$$- e^{-2s} + e^{-2s} - e^{-2s} + e^{-2s} - e^{-2s} + \cdots + e^{-ns} -$$
$$- e^{-ns} + \cdots + e^{-ns} - e^{-ns} + \cdots$$

per la quale la successione delle somme parziali è

$$e^{-s}, 0, e^{-s}, 0, \cdots, e^{-ns}, 0, \cdots, e^{-ns}, 0, \cdots$$

e questa converge uniformemente a 0 in ogni dominio limitato, contenuto nel semipiano $R(s) > 0$, mentre non converge fuori di questo semipiano.

Nessuna di queste due serie è una serie di Dirichlet, poichè i loro esponenti non formano successioni crescenti.

Consideriamo ora i numeri ε_n definiti nel seguente modo

$$\varepsilon_{2^n+1-3} = 2^{-2^{n+2}}, \quad \varepsilon_{2^n+2-2} = 2^{-(2^{n+2}-1)}, \cdots, \varepsilon_{2^n+2-4} = 2^{-2^{n+1}+1},$$

La serie

$$[5]\qquad \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n e^{-\lambda_n s}$$

è assolutamente convergente in tutto il piano, poichè

$$\sum_{n=1}^{\infty} | \varepsilon_n e^{-\lambda_n s} | \leq \sum_{m=0}^{\infty} | 2^{-(2^{m+1}-1)} \cdot (2^{m+1}-1) e^{-ms} |$$

e gli esponenti λ_n della [3] sono

$$\lambda_{2^m+1} = \lambda_{2^m+2} = \cdots = \lambda_{2^{m+1}} = m .$$

La serie

$$[6] \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-(\lambda_n+\varepsilon_n)s}$$

è una serie di Dirichlet, poichè i suoi esponenti formano una successione crescente: infatti, se $\lambda_n = \lambda_{n+1}$, essendo in corrispondenza $\varepsilon_n < \varepsilon_{n+1}$, risulta $\lambda_n + \varepsilon_n < \lambda_{n+1} + \varepsilon_{n+1}$, e se $\lambda_n < \lambda_{n+1}$, essendo in questo caso $\lambda_{n+1} - \lambda_n = 1$ e $\varepsilon_n < 1$, risulta pure $\lambda_n + \varepsilon_n < \lambda_{n+1} + \varepsilon_{n+1}$.

Ora la differenza

$$[7] \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-(\lambda_n+\varepsilon_n)s} - \sum_{n+1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n [e^{-\lambda_n+\varepsilon_n)s} - e^{-\lambda_n s}]$$

è una serie assolutamente convergente in tutto il piano, anzi totalmente convergente in ogni insieme limitato, che definisce quindi una funzione intera di s. Infatti si ha [1]

$$| a_n [e^{-(\lambda_n+\varepsilon_n)s} - e^{-\lambda_n s}] | < | a_n | \cdot | e^{-\lambda_n s} | \cdot \varepsilon^n \cdot | s | \cdot e^{|s\varepsilon_n|}$$

e poichè ε_n tende a zero, fissato un R conveniente, tale che per ogni punto s dell'insieme risulti $| s | < R$ da un certo valore di n in poi sarà $| s | e^{|s\varepsilon_n|} < Re$, e quindi

$$| a_n [e^{-\lambda_n+\varepsilon_n)s} - e^{-\lambda_n s}] | < | e^{-\lambda_n s} | \cdot \varepsilon_n \cdot R \cdot e$$

---

[1] Utilizziamo perciò la seguente limitazione:

$$| e^z - e^{z'} | < | e^{z'} | \cdot | z - z' \cdot e^{z-z'}$$

valida per tutti i valori complessi di z e z' essendo:

$$| e^z - e^{z'} | = | e^{z'} | \cdot | e^{z-z'} - 1 | \leq | e^{z'} | \cdot \left[| z - z' | + \frac{| z - z' |^2}{2!} + \cdots \right] =$$

$$= | e^{z'} | \cdot | z - z' | \left[1 + \frac{| z - z' |}{2!} + \frac{| z - z' |^2}{3!} + \cdots \right] \leq$$

$$\leq | e^{z'} | \cdot | z - z' | \left[1 + | z - z' | + \frac{| z - z' |^2}{2!} + \cdots \right] = | e^{z'} | \cdot | z - z' | \cdot e^{| z - z' |} .$$

giacchè è $|a_n| = 1$. Ma abbiamo già dimostrato che la serie [5] è assolutamente convergente in tutto il piano, quindi la serie [7] converge totalmente in ogni insieme limitato.

Da tutto ciò risulta allora che la serie di Dirichlet [6], come somma della serie [7] e della serie [3], avrà come semipiano di convergenza lo stesso di quest'ultima, cioè

$$R(s) > \log 2 .$$

Consideriamo invece la serie

$$[8] \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a'_n e^{-(\lambda'_n + \varepsilon'_n)s}$$

in cui i coefficienti a'_n e gli esponenti λ'_n sono gli stessi di quelli della serie [4], e che ha quindi anche gli stessi termini della serie [6], ma in ordine diverso. Come nel caso precedente, risulta

$$\sum_{n=1}^{\infty} a'_n e^{-(\lambda'_n + \varepsilon'_n)s} - \sum_{n=1}^{\infty} a'_n e^{-\lambda'_n s} = \sum_{n=1}^{\infty} a'_n \left[e^{-(\lambda'_n + \varepsilon'_n)s} - e^{\lambda'_n s} \right]$$

e poichè la serie [5] è assolutamente convergente in tutto il piano, quindi indipendentemente dall'ordine dei termini, tale risulta anche la serie ora ottenuta.

Ma la [8] è somma di questa e della [4], che ha per semipiano di convergenza il semipiano $R(s) > 0$. quindi tale semipiano sarà pure il semipiano di convergenza della serie [8]. Ma nel semiplano $R(s) > \log 2$ questa serie ha la stessa somma della [6], poichè è formata con gli stessi termini, solo in ordine diverso, e la [6] vi è assolutamente convergente; dunque in tutta la striscia $0 < R(s) \leq \log 2$ la serie [8], che è convergente, ci dà il prolungamento analitico della funzione che è definita dalla serie di Dirichlet [6] nel solo semipiano $R(s) > \log 2$.

Abbiamo visto così come da una serie di Dirichlet [6] se ne possa ottenere un'altra [8], alterando solo l'ordine dei termini, che converga in un campo più ampio e effettui così il prolungamento analitico della funzione precedente.

3. – Chiamiamo *serie di Dirichlet generalizzata* una serie del tipo

$$[9] \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$$

in cui i λ_n sono numeri reali positivi, che non formano necessariamente una successione monotona, ma aventi come unico punto limite l'infinito (1).

(1) Alcune delle proprietà seguenti valgono però anche per successioni di esponenti ancora più generali.

Supponiamo poi che la successione delle λ_n sia tale che la serie

$$[10] \qquad \sum_{n=1}^{\infty} [e^{-\lambda_n s} - e^{-\lambda_{n+1} s}]$$

sia assolutamente convergente nel semipiano $R(s) > 0$. Con queste ipotesi si dimostrano le seguenti proprietà:

I. – *Se la serie di Dirichlet generalizzata* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ *converge nel punto* s_0, *converge in ogni punto* s *tale che* $R(s) > R(s_0)$ *e di più la convergenza è uniforme in ogni insieme limitato completamente interno a questo semipiano.*

Per la dimostrazione basta applicare la trasformazione di Abel, utilizzando la convergenza assoluta della serie [10] e la proprietà $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$.

Da questo teorema, con un ragionamento ormai classico risulta allora che si verifica sempre una delle seguenti eventualità:

a) *la serie converge per ogni valore di* s

b) *la serie non converge per nessun valore di* s;

c) *esiste un numero* C *tale che la serie converge nel semipiano* $R(s) > C$ *ma non converge nel semipiano* $R(s) < C$.

Se si prescinde dall'ipotesi della convergenza assoluta della serie [10] non è certa, in generale, la proprietà I. Così, per esempio, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{-\lambda_n s}$$

ove sia $\lambda_{2n} = \log\log(2n)$, $\lambda_{2n+1} = 2n+1$ verifica la condizione $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$; essa però converge per $s = 0$ senza convergere nel semipiano $R(s) > 0$.

Analogamente a quanto si fa per le serie di Dirichlet ordinarie si possono poi definire anche per queste serie di Dirichlet generalizzate le ascisse di convergenza assoluta, uniforme, di ultraconvergenza, di olomorfia, ecc.

La proprietà dell'esistenza di un semipiano di convergenza assoluta vale però per serie molto più generali di quelle considerate, poichè è una conseguenza della sola diseguaglianza

$$|a_n e^{-\lambda_n s}| < |a_n e^{-\lambda_n s_0}| \qquad \text{per } R(s) > R(s_0)$$

e vale quindi anche indipendentemente da qualunque ipotesi circa la successione λ_n.

II. – *Se la ascissa di convergenza di una serie di Dirichlet generalizzata è* $C > 0$, *si ha*

$$C = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log \left| \sum_{m=1}^{n} a_m \right|}{\lambda_n}$$

La dimostrazione si fonda sulla trasformazione di Abel e sulla convergenza assoluta della serie [10] per $R(s) > 0$.

Questa formula ci permette di ottenere in ogni caso il campo di convergenza di una serie ottenuta da una serie di Dirichlet, cambiando l'ordine dei termini, e di vedere quindi se tale serie effettua o no un prolungamento analitico della funzione, rappresentata dalla serie primitiva. Applicata all'esempio del n. 2, risultano subito le proprietà prima dedotte direttamente.

Osserviamo però che affinchè la nuova serie sia convergente in un campo più esteso, in questo campo il termine generale deve tendere a zero, e quindi il prolungamento analitico potrà ottenersi al più in tutto il semipiano in cui ciò accade, che, come è noto (1), non si estende al di là del semipiano di convergenza assoluta più la cosidetta striscia di convergenza condizionale, la cui ampiezza è

$$A = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log n}{\lambda_n}$$

In particolare, le serie di potenze trasformate in serie di Dirichlet $\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-ns}$ non hanno striscia di convergenza condizionale e *non è quindi possibile ottenerne dei prolungamenti analitici, mediante scambio nell'ordine dei termini.*

Ciò pone in evidenza una nuova notevole differenza, da aggiungere alle molte già note, tra le serie di Taylor e le serie generali di Dirichlet.

4. – Quando la serie iniziale non ha un campo di convergenza assoluta, non si può esser sicuri, almeno in generale, che la nuova serie riordinata converga verso la stessa funzione analitica. Un caso in cui ciò accade si presenta quando la nuova serie possiede una successione di somme parziali che coincide con una successione di somme parziali della serie primitiva.

Partendo però da una serie analoga alla [3], che abbia termini di valore assoluto $|e^{-ns}|$, con un procedimento analogo a quello prima seguìto si può costruire una serie di Dirichlet, dalla quale, alterando l'ordine dei termini, si ottengono serie uniformemente convergenti verso limiti diversi.

Così pure, mediante la considerazione delle serie di polinomi senza campo di convergenza assoluta, si può vedere facilmente come, alterando

(1) E. Landau, *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*. Berlin, 1909, Bd. II, pag. 734.

l'ordine dei termini, si può alterare la funzione analitica somma della serie. Si prenda infatti, per esempio, l'insieme numerabile di tutti i polinomi a coefficienti complessi con la parte reale e il coefficiente dell'immaginario razionale: $P_1(z), P_2(z), \cdots, P_n(z), \cdots$ e sia

$$\operatorname{Max}_{|z|<n} |P_n(z)| = M_n;$$

posto

$$Q_n(z) = \frac{P_n(z)}{nM_n}$$

in tutto il circolo $|z| < n$ risulterà allora

$$Q_n(z) < \frac{1}{n}.$$

Formiamo ora la serie di polinomi

$$\begin{aligned}
&Q_1(z) - Q_1(z) + \cdots + Q_1(z) - Q_1(z) + \\
&+ Q_2(z) - Q_2(z) + \cdots + Q_2(z) - Q_2(z) + \\
&+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+ Q_n(z) - Q_n(z) + \cdots + Q_n(z) - Q_n(z) + \\
&+ \cdots\cdots \\
&+ \cdots\cdots
\end{aligned}$$

in cui il numero dei termini della fila n^{esima} è il doppio della parte intera di $nM_n + 1$. Poichè le somme parziali di questa serie sono $Q_1, 0, Q_2, 0, \cdots, 0, Q_n, 0, \cdots$ si vede che in ogni dominio finito la serie converge sempre uniformemente a zero. Utilizzando invece il teorema classico di Runge–Hilbert si dimostra che, data una qualsiasi funzione olomorfa in un dominio limitato D, mediante un'alterazione conveniente dell'ordine dei termini della serie stessa, si ottiene un'altra serie che converge uniformemente verso la funzione data nell'interno di D.

Matematica. — *Sulla convergenza delle serie doppie* (1). Nota di Luigi Amerio, presentata (2) dall'Accademico Francesco Severi.

Data la serie doppia

$$[1] \qquad \sum_{m,n}^{0\cdots\infty} a_{m,n}$$

si dice che essa converge al valore finito S, secondo la definizione di Stolz e Pringsheim (3), se risulta

$$S = \lim_{\substack{M \\ N}\{\to\infty} \sum_0^N{}_n \sum_0^M{}_m \, a_{m,n}$$

dove M e N tendono contemporaneamente, ma indipendentemente, a $+\infty$.

Scritta poi la serie [1] nella forma

$$\begin{aligned} & a_{0,0} + a_{0,1} + \cdots + a_{0,n} + \cdots \\ & + a_{1,0} + a_{1,1} + \cdots + a_{1,n} + \cdots \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + a_{m,0} + a_{m,1} + \cdots + a_{m,n} + \cdots \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

si dice che essa è sommabile per righe se convergono, per $m = 0, 1, \cdots$, le serie $\sum_0^\infty{}_n \, a_{m,n}$ e se, inoltre, risulta convergente la serie $\sum_0^\infty{}_m \left(\sum_0^\infty{}_n \, a_{m,n} \right)$.

In modo analogo si definisce la sommabilità per colonne.

È noto che una serie doppia può essere convergente senza essere sommabile per righe o per colonne. È pure noto che una serie doppia può essere

(1) Lavoro eseguito nel Reale Istituto Nazionale di Alta Matematica.

(2) Nell'Adunanza del 21 febbraio 1941–XIX.

(3) O. Stolz, *Ueber unendliche Doppelreihen*, « Math. Ann. », Bd. 24, 1884, pagg. 157–171; A. Pringsheim, *Elementare Theorie der unendlichen Doppelreihen*, « Sitz. d. Bayer. Akad. d. Wiss., Math.-phy. Kl. », Bd. 27, 1897, pagg. 101–152.

sommabile tanto per righe quanto per colonne, e avere le due somme uguali senza essere convergente (1).

Inoltre può darsi che la serie [1] sia convergente secondo la definizione di Stolz e Pringsheim e che non lo sia la serie $\sum_{m,n}^{0\cdots\infty} a_{m,n}\, x^m y^n$ per nessun valore delle variabili x e y, supposte non contemporaneamente nulle (e non contemporaneamente $= 1$) (2).

Per poter estendere perciò alle serie doppie i più notevoli teoremi noti per le serie semplici, si debbono aggiungere alla definizione di Stolz e Pringsheim condizioni supplementari oppure si possono dare altre definizioni per la convergenza della serie [1].

Tra queste è, a mio credere, troppo restrittiva quella di considerare convergente una serie doppia se è assolutamente convergente.

Quanto a due altre definizioni, introdotte da Bouquet e Briot e da Jordan è stato dimostrato da Severi (3), in una sua trattazione della teoria delle serie doppie, che si riducono alla convergenza assoluta.

Scopo di questa Nota è di indicare una definizione di convergenza per la serie [1] che è, secondo me, una naturale estensione della definizione relativa alle serie semplici e che, analogamente alla definizione di Stolz e Pringsheim, è basata sulla considerazione di un solo limite, senza imporre ulteriori condizioni.

Si dimostrano, con tale definizione, gli analoghi di alcuni teoremi già noti per le serie semplici e si confrontano i risultati così ottenuti con quelli

---

(1) Vedasi, ad es., L. Tonelli, *Serie Trigonometriche*, Zanichelli, Bologna, 1928, pag. 474.

(2) Per esempio la serie doppia

$$\begin{aligned}
&0! + 1! + 2! + \cdots + n! + \cdots \\
&+ 1! - 1! - 2! - \cdots - n! - \cdots \\
&+ 2! - 2! + 0 \ + \cdots + 0 \ + \cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+ m! - m! + 0 + \cdots + 0 + \cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

converge al valore 2, mentre per la corrispondente serie $\sum_{m,n}^{0\cdots\infty} a_{m,n}\, x^m y^n$ risulta, per $M \geq 2$, $N \geq 2$,

$$\sum_0^N{}_n \sum_0^M{}_m\, a_{m,n}\, x^m y^n = 1 + x + y - xy + (1-y) \sum_2^M{}_m\, m!\, x^m + (1-x) \sum_2^N{}_n\, n!\, y^n$$

da cui la tesi.

(3) F. Severi, *La teoria elementare delle serie doppie*. « Periodico di Matematiche », serie IV, vol. III, 1923, pagg. 233–237.

ricavabili quando si supponga la serie [1] convergente secondo STOLZ e PRINGSHEIM e soddisfacente inoltre a una delle condizioni seguenti:

a) esiste una costante $K > 0$ tale che risulti

$$|a_{m,n}| < K$$

per $m = 0, 1, \cdots$; $n = 0, 1, \cdots$

b) esiste una costante $K > 0$ che tale risulti

$$|\sum_0^N{}_n \sum_0^M{}_m a_{m,n}| < K$$

per $M = 0, 1, \cdots$; $N = 0, 1, \cdots$

* * *

1. Data la serie semplice

[2] $$\sum_0^\infty{}_n c_n$$

e posto

$$s_n = \sum_0^n{}_m c_m$$

è ben noto che si dice somma della serie il $\lim_{n\to\infty} s_n$, se esiste finito.

Si considerano, secondo questa definizione, tutte e sole quelle somme parziali di termini della [2] tali che se a s_n appartiene il termine c_p, vi appartengono anche i termini c_m, con $0 \leq m < p$.

L'analoga somma nel caso delle serie doppie è del tipo

[3] $$\sum_0^N{}_n \sum_0^{M_n}{}_m a_{m,n}$$

dove i numeri M_n, finiti, soddisfano alla condizione

$$M_0 \geq M_1 \geq \cdots \geq M_N \geq 0$$

È evidente infatti che, se $a_{r,s}$ è un termine della somma [3], alla somma stessa appartengono tutti i termini $a_{m,n}$, con $m \leq r$, $n \leq s$.

Chiameremo, in quanto segue, tutte le somme del tipo [3], ridotte della serie [1], e ne indicheremo con $\bar{S}$ la generica; porremo poi

$$S_{r,s} = \sum_0^s{}_n \sum_0^r{}_m a_{m,n}$$

Ciò premesso, daremo per le serie doppie la seguente definizione che, per maggior chiarezza, diremo di *stretta convergenza*.

Si dice che la serie $\sum_{m,n}^{0\cdots\infty} a_{m,n}$ *converge strettamente al valore finito* S *se, fissato* $\varepsilon > 0$, *è possibile determinare un intero positivo* r *tale che, per tutte le ridotte* $\bar{S}$ *contenenti il termine* $a_{r,r}$, *risulti*

$$|S - \bar{S}| < \varepsilon .$$

Condizione necessaria e sufficiente perchè la serie $\sum_{m,n}^{0\cdots\infty} a_{m,n}$ *sia strettamente convergente è che, fissato* $\varepsilon > 0$, *si possa determinare un intero positivo* R *tale che risulti, per tutte le ridotte* $\bar{S}$ *contenenti il termine* $a_{R,R}$,

$$|\bar{S} - S_{R,R}| < \varepsilon .$$

La condizione è necessaria. Infatti se la serie $\sum_{m,n}^{0\cdots\infty} a_{m,n}$ è strettamente convergente, fissato $\varepsilon > 0$, si può determinare un intero positivo R tale che risulti, per tutte le ridotte $\bar{S}$ contenenti il termine $a_{R,R}$,

$$|\bar{S} - S| < \frac{\varepsilon}{2} .$$

In particolare sarà anche

$$|S_{R,R} - S| < \frac{\varepsilon}{2}$$

e quindi

$$|\bar{S} - S_{R,R}| < \varepsilon .$$

La condizione è sufficiente. Infatti, supposto che, fissato $\varepsilon > 0$, si possa determinare R in modo che risulti per ogni ridotta $\bar{S}$ contenente il termine $a_{R,R}$,

[4] $$|\bar{S} - S_{R,R}| < \varepsilon$$

sarà anche, per $Q \geqq R$,

$$|S_{Q,Q} - S_{R,R}| < \varepsilon$$

e quindi la successione $S_{n,n}$, tende, per $n \to \infty$, a un limite finito S, tale che risulti

$$|S - S_{R,R}| \leq \varepsilon .$$

Ne segue, per la [4],

$$|\bar{S} - S| < 2\varepsilon$$

da cui la tesi.

2. Indicheremo ora alcune proprietà delle serie doppie strettamente convergenti e confronteremo i risultati così ottenuti con quelli desumibili dalla definizione di STOLZ e PRINGSHEIM.

a) È chiaro che *una serie assolutamente convergente è anche strettamente convergente, ma non sempre è vero il contrario.*

Poniamo infatti $a_{m,n} = b_m c_n$ e supponiamo che convergano le serie $\sum_0^\infty{}_m b_m$, $\sum_0^\infty{}_n |c_n|$, ma diverga la serie $\sum_0^\infty{}_m |b_m|$.

In tal caso la serie $\sum_{m,n}^{0\cdots\infty} a_{m,n}$ non è assolutamente convergente, ma si può dimostrare che essa converge strettamente al valore BC, con $B = \sum_0^\infty{}_m b_m$, $C = \sum_0^\infty{}_n c_n$.

Infatti, posto

$$\sigma_m = \sum_0^m{}_\mu b_m ,$$

si ha

$$[5] \qquad \begin{aligned} \bar{S} &= \sum_0^N{}_n c_n \sum_0^{M_n}{}_m b_m = \sum_0^N{}_n c_n \sigma_{M_n} = \\ &= B \sum_0^N{}_n c_n - \sum_0^N{}_n c_n (B - \sigma_{M_n}) \end{aligned}$$

e il primo termine della [5] $\to BC$.

Fissato $\varepsilon > 0$, indicato con K l'estremo superiore dei numeri $|\sigma_m|$ e posto $A = 2K + \sum_0^\infty{}_n |c_n|$, si determini l'intero positivo r in modo che per $M_n \geq r$ risulti

$$|B - \sigma_{M_n}| < \frac{\varepsilon}{A}$$

e inoltre

$$\sum_r^\infty{}_n |c_n| < \frac{\varepsilon}{A} .$$

Si ricava allora, se la ridotta $\bar{S}$ contiene il termine $a_{r,r}$,

$$\left| \sum_0^N{}_n c_n (B - \sigma_{M_n}) \right| \leq \sum_0^r{}_n |c_n (B - \sigma_{M_n})| + \sum_{r+1}^N{}_n |c_n (B - \sigma_{M_n})| \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{A} \left(\sum_0^\infty{}_n |c_n| + 2K \right) = \varepsilon$$

da cui la tesi.

Osserviamo anche che la proposizione dimostrata contiene, come caso particolare corrispondente al porre $M_n = N - n$, il teorema di MERTENS sul prodotto delle serie $\sum_0^\infty{}_m b_m$ e $\sum_0^\infty{}_n c_n$.

b) Se la serie $\sum_{m,n}^{0\cdots\infty} a_{m,n}$ *è strettamente convergente, esiste una costante* $K > 0$ *tale che risulti, per tutte le ridotte* $\bar{S}$,

$$|\bar{S}| < K.$$

Infatti si determini l'intero positivo r in modo che sia, per tutte le ridotte $\bar{S}$ contenenti il termine $a_{r,r}$,

[6] $$|\bar{S} - S_{r,r}| < 1$$

e quindi

[7] $$|\bar{S}| < 1 + |S_{r,r}| \leq 1 + \sum_0^r{}_n \sum_0^r{}_m |a_{m,n}| = K$$

Considerando poi una ridotta $\bar{S}$ che non contenga il termine $a_{r,r}$, la si divida in due parti; una $\bar{S}_1$, formata dai termini di $\bar{S}$ che appartengono a $S_{r,r}$; l'altra, T, formata dai rimanenti termini di $\bar{S}$.

Per $\bar{S}_1$ risulta

$$|\bar{S}_1| \leq \sum_0^r{}_n \sum_0^r{}_m |a_{m,n}|$$

e, per T, osservando che $T + S_{r,r}$ è una ridotta della serie data,

$$|T_2| = |(T_2 + S_{r,r}) - S_{r,r}| < 1$$

per la [6].

In ogni caso vale perciò la [7].

c) Se la serie $\sum_{m,n}^{0\cdots\infty} a_{m,n}$ *è strettamente convergente, è anche uniformemente sommabile per righe e per colonne.*

Fissato $\varepsilon > 0$, si determini l'intero positivo r in modo che risulti, per tutte le ridotte $\bar{S}$ contenenti il termine $a_{r,r}$,

[8] $$|\bar{S} - S_{r,r}| < \varepsilon$$

Considerando dapprima la sommabilità per righe e posto, per $p \leq q$,

$$s_{p,q}^{(\mu)} = \sum_p^q{}_n a_{\mu,n}$$

si ha poi, per $p > r$,

$$s_{p,q}^{(\mu)} = \left\{ \left(\sum_0^{p-1}{}_n \sum_0^{r+\mu}{}_m a_{m,n} + \sum_p^q{}_n \sum_0^{\mu}{}_m a_{m,n} \right) - S_{r,r} \right\} -$$

$$- \left\{ \left(\sum_0^{p-1}{}_n \sum_0^{r+\mu}{}_m a_{m,n} + \sum_p^q{}_n \sum_0^{\mu-1}{}_m a_{m,n} \right) - S_{r,r} \right\}$$

e quindi, per la [8],

$$|s^{(\mu)}_{p,q}| < 2\varepsilon$$

da cui segue l'uniforme convergenza delle serie

$$A_m = \sum_0^\infty{}_n \, a_{m,n}$$

per $m = 0, 1, \cdots$.

Si ricava inoltre, indicando con S la somma della serie [1], per la [8],

$$|S - S_{r,r}| \leq \varepsilon$$

e, per $N \geq r$, $M \geq r$,

$$|S - S_{M,N}| \leq |S - S_{r,r}| + |S_{M,N} - S_{r,r}| < 2\varepsilon .$$

Per $N \to \infty$ si ottiene perciò

$$\left| S - \sum_0^M{}_m \, A_m \right| \leq 2\varepsilon$$

e quindi la serie $\sum_0^\infty{}_m \, A_m$ è convergente e vale S.

Allo stesso modo si dimostra l'uniforme sommabilità per colonne.

d) Se la serie $\sum_{m,n}^{0\cdots\infty} a_{m,n}$ *è strettamente convergente si ha*

$$\lim_{m+n\to\infty} a_{m,n} = 0$$

e) Se la serie $\sum_{m,n}^{0\cdots\infty} a_{m,n}$ *è strettamente convergente, preso* h, *con* $0 < h < 1$, *la serie* $\sum_{m,n}^{0\cdots\infty} a_{m,n}\, x^m y^n$ *è uniformemente e assolutamente convergente per* $|x| \leq h$, $|y| \leq h$.

f) Vale per le serie doppie strettamente convergenti l'analogo del teorema di MERTENS relativo alle serie semplici.

Se la serie $\sum_{m,n}^{0\cdots\infty} a_{m,n}$ *è strettamente convergente e la serie* $\sum_{m,n}^{0\cdots\infty} b_{m,n}$ *assolutamente convergente, posto*

$$A = \sum_{m,n}^{0\cdots\infty} a_{m,n}$$

$$B = \sum_{m,n}^{0\cdots\infty} b_{m,n}$$

$$c_{m,n} = \sum_0^n{}_\nu \sum_0^m{}_\mu \, a_{\mu,\nu}\, b_{m-\mu,n-\nu}$$

la serie $\sum_{m,n}^{0\cdots\infty} c_{m,n}$ *è strettamente convergente al valore* $A\,B$.

Per dimostrare il teorema cominciamo con l'osservare che, per una data ridotta $\bar{S}$, invertendo l'ordine di sommazione, si ottiene

$$\bar{S} = \sum_0^N{}_n \sum_0^{M_n}{}_m a_{m,n} = \sum_0^M{}_m \sum_0^{N_m}{}_n a_{m,n}$$

dove è $M = M_0$ e i numeri N_m soddisfano alla condizione

$$0 \leq N_M \leq N_{M-1} \leq \cdots \leq N_0 = N .$$

Si ha poi

[9]
$$\sum_0^N{}_n \sum_0^{M_n}{}_m c_{m,n} = \sum_0^N{}_n \sum_0^{M_n}{}_m \sum_0^n{}_\nu \sum_0^m{}_\mu b_{\mu,\nu}\, a_{m-\mu,\,n-\nu}$$

$$= \sum_0^N{}_\nu \sum_0^{M_\nu}{}_\mu b_{\mu,\nu} \sum_\nu^{N_\mu}{}_n \sum_\mu^{M_n}{}_m a_{m-\mu,\,n-\nu}$$

$$= \sum_0^N{}_\nu \sum_0^{M_\nu}{}_\mu b_{\mu,\nu} \sum_0^{N_\mu - \nu}{}_q \sum_0^{M_{\nu+q}-\mu}{}_p a_{p,q}$$

$$= \sum_0^N{}_\nu \sum_0^{M_\nu}{}_\mu b_{\mu,\nu} \sum_0^N{}_q \sum_0^{M_q}{}_p a_{p,q} - \sum_0^N{}_\nu \sum_0^{M_\nu}{}_\mu b_{\mu,\nu}\, \rho_{\mu,\nu}$$

dove si è posto

[10]
$$\rho_{\mu,\nu} = \sum_0^N{}_q \sum_0^{M_q}{}_p a_{p,q} - \sum_0^{N_\mu - \nu}{}_q \sum_0^{M_{\nu+q}-\mu}{}_p a_{p,q} .$$

Il primo termine della [9] $\to A\,B$. Dimostriamo che il secondo $\to 0$.

Per la proprietà b) esiste una costante $K > 0$ tale che risulti, per ogni ridotta $\bar{S}$ delle serie $\sum_{m,n}^{0\cdots\infty} a_{m,n}$,

$$|\bar{S}| < K$$

e quindi, per la [10], qualunque siano μ e ν,

[11]
$$|\rho_{\mu,\nu}| < 2K .$$

Poniamo poi

[12]
$$D = \sum_{m,n}^{0\cdots\infty} |b_{m,n}|$$

e osserviamo che, indicato con s il massimo intero positivo tale che il termine $a_{3s,3s}$ sia contenuto nella ridotta

$$\sum_0^N{}_q \sum_0^{M_q}{}_p a_{p,q} ,$$

la somma $\rho_{\mu,\nu}$ non contiene, per $\mu \leq s$, $\nu \leq s$, nessun termine di $S_{s,s}$.

Fissato $\varepsilon > 0$, si determini l'intero positivo r in modo che risulti

[13]
$$\sum_{m,n}^{0\cdots\infty} |b_{m,n}| - \sum_0^r{}_n \sum_0^r{}_m |b_{m,n}| < \frac{\varepsilon}{4K}$$

e inoltre, per tutte le ridotte S contenenti il termine $a_{r,r}$,

$$|\bar{S} - S_{r,r}| < \frac{\varepsilon}{4D}$$

Ne segue, per $s \geq r$, $\mu \leq s$, $\nu \leq s$,

$$[14] \quad |\rho_{\mu,\nu}| \leq \left| \sum_0^N{}_q \sum_0^{M_n}{}_p a_{p,q} - S_{r,r} \right| + \left| \sum_0^{N_\mu - \nu}{}_q \sum_0^{M_{\nu+q-\mu}}{}_p a_{p,q} - S_{r,r} \right| < \frac{\varepsilon}{2D}.$$

Si ricava allora, indicando con T la parte della somma

$$\sum_0^N{}_\nu \sum_0^{M_\nu}{}_\mu b_{\mu,\nu}\rho_{\mu,\nu}$$

costituita dai termini soddisfacenti a una, almeno, delle condizioni $\mu > r$, $\nu > r$, e supposto $s \geq r$,

$$\left| \sum_0^N{}_\nu \sum_0^{M_\nu}{}_\mu b_{\mu,\nu}\rho_{\mu,\nu} \right| \leq |T| + \left| \sum_0^r{}_\nu \sum_0^r{}_\mu b_{\mu,\nu}\rho_{\mu,\nu} \right| < 2K\frac{\varepsilon}{4K} + \frac{\varepsilon}{2D}D = \varepsilon$$

per le [11], [12], [13], [14].

Il teorema è perciò dimostrato.

Osservazione. — Dalla dimostrazione precedente segue che il teorema di Mertens vale anche se si suppone che la serie $\sum_{m,n}^{0\cdots\infty} a_{m,n}$ sia convergente secondo la definizione di Stolz e Pringsheim, e se vale inoltre la limitazione

$$[15] \quad \left| \sum_0^n{}_\nu \sum_0^m{}_\mu a_{\mu,\nu} \right| < K$$

con K costante positiva indipendente da m e da n.

In tal caso la serie $\sum_{m,n}^{0\cdots\infty} c_{m,n}$ converge al valore AB.

Mostriamo con un esempio che questo non può affermarsi se in luogo della [15] vale la condizione meno restrittiva

$$[16] \quad |a_{m,n}| < K$$

con K costante positiva indipendente da m e da n.

Si supponga infatti $b_{m,n} = 0$ per $m = 1, 2, \cdots$; $\sum_0^\infty{}_n |b_{0,n}|$ convergente.

Assumiamo poi come serie $\sum_{m,n}^{0\cdots\infty} a_{m,n}$ la seguente

$$\begin{aligned}
&1-1+0+0+0+0+\cdots\\
&+1-1+0+0+0+0+\cdots\\
&-1+1+0+0+0+0+\cdots\\
&+1-1+0+0+0+0+\cdots\\
&+1-1+0+0+0+0+\cdots\\
&-1+1+0+0+0+0+\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Per tale serie vale la limitazione [16]; si ha poi, per $M \geq 0$, $N \geq 1$, $S_{M,N} = 0$ e quindi la serie converge al valore 0.

Non è però soddisfatta la condizione [15] perchè si ha, per $M \geq 1$, $S_{3M-1,0} = M$.

Si ricava poi dalla [10], in cui si ponga $N_m = N$, $M_n = 3M-1$,

$$\rho_{\mu,\nu} = \sum_0^N{}_n \sum_0^{3M-1}{}_m a_{m,n} - \sum_0^{N-\nu}{}_n \sum_0^{3M-1-\mu}{}_m a_{m,n}$$

e quindi, essendo $b_{m,n} = 0$ per $m \geq 1$, si ottiene, per $N \geq 1$, $M \geq 1$,

$$\sum_0^N{}_\nu \sum_0^{3M-1}{}_\mu b_{\mu,\nu}\rho_{\mu,\nu} = \sum_1^N{}_\nu b_{0,\nu} \sum_0^{3M-1}{}_m \sum_{N-\nu+1}^N{}_n a_{m,n} =$$

$$= b_{0,N} \sum_0^{3M-1}{}_m \sum_1^N{}_n a_{m,n} + b_{0,N-1} \sum_0^{3M-1}{}_m \sum_2^N{}_n a_{m,n} + \cdots = -Mb_{0,N}$$

che non ammette limite per $\left.\begin{matrix} M \\ N \end{matrix}\right\} \to \infty$.

g) Estendiamo alle serie doppie strettamente convergenti il teorema di ABEL sulle serie di potenze.

Se la serie $\sum_{m,n}^{0\cdots\infty} a_{m,n}$ *è strettamente convergente, presi due numeri* ϑ *e* h, *con* $0 \leq \vartheta < \frac{\pi}{2}$, $0 < h < 1$, *la serie* $\sum_{m,n}^{0\cdots\infty} a_{m,n} x^m y^n$ *converge strettamente e uniformemente nel campo D definito dalle condizioni*

a) $\quad R(1-x) > |1-x| \cos\vartheta \qquad R(1-y) > |1-y| \cos\vartheta$

b) $\quad |1-x| \leq 2h \cos\vartheta \qquad |1-y| \leq 2h \cos\vartheta$.

Posto

$$S(x,y) = \sum_0^N{}_n \sum_0^{M_n}{}_m a_{m,n} x^m y^n$$

$$S_{M,N}(x,y) = \sum_0^N{}_n \sum_0^M{}_m a_{m,n} x^m y^n$$

e fissato $\varepsilon > 0$, bisogna determinare l'intero positivo r in modo che risulti

$$[17] \qquad \left| \sum_{m,n}^{0\cdots\infty} a_{m,n} x^m y^n - \bar{S}(x,y) \right| < \varepsilon$$

per (x, y) in D e per tutte le ridotte $\bar{S}(x, y)$ contenenti il termine $a_{r,r} x^r y^r$.

Per questo cominciamo con l'osservare che, data la forma del campo D, esiste una costante positiva A tale che risulti, per (x, y) in D,

$$[18] \qquad \frac{|(1-x)(1-y)|}{(1-|x|)(1-|y|)} < A .$$

Si prenda poi l'intero positivo r in modo che risulti

$$[19] \qquad |\bar{S}(1,1) - S_{r,r}(1,1)| < \frac{\varepsilon}{2A}$$

per tutte le ridotte $\bar{S}(1, 1)$ contenenti il termine $a_{r,r}$.

Considerando una ridotta $\bar{S}(1, 1)$ cui appartenga il termine $a_{r,r}$, poniamo poi $b_{p,q} = 0$ per $0 \leq q \leq N$, $0 \leq p \leq M_q$, $b_{p,q} = a_{p,q}$ per gli altri valori degli indici p e q.

La serie

$$[20] \qquad T(x,y) = \sum_{p,q}^{0\cdots\infty} b_{p,q} x^p y^q = \sum_{m,n}^{0\cdots\infty} a_{m,n} x^m y^n - \bar{S}(x,y)$$

converge assolutamente, per la proprietà e), per $|x| < 1$, $|y| < 1$.

Posto allora

$$s_{p,q} = \sum_{0}^{q}{}_{\beta} \sum_{0}^{p}{}_{\alpha} b_{\alpha,\beta}$$

si ricava, per $|x| < 1$, $|y| < 1$,

$$[21] \qquad T(x,y) = (1-x)(1-y) \sum_{p,q}^{0\cdots\infty} s_{p,q} x^p y^q .$$

Ora se è $0 \leq q \leq N$, $0 \leq p \leq M_q$, risulta $s_{p,q} = 0$; per gli altri valori degli indici p e q, indicando con $\bar{S}_0(1, 1)$ la ridotta che si ottiene aggiungendo ad $\bar{S}(1, 1)$ i termini di $s_{p,q}$ non contenuti in $\bar{S}(1, 1)$, si ricava, per la [19],

$$[22] \qquad |s_{p,q}| = |\bar{S}_0(1,1) - \bar{S}(1,1)| \leq |\bar{S}_0(1,1) - S_{r,r}(1,1)| + |\bar{S}(1,1) - S_{r,r}(1,1)| < \frac{\varepsilon}{A} .$$

Per (x, y) in D si ottiene perciò, dalle [18], [20], [21], [22],

$$\left| \sum_{m,n}^{0\cdots\infty} a_{m,n} x^m y^n - S(x,y) \right| < \frac{|(1-x)(1-y)|}{(1-|x|)(1-|y|)} \frac{\varepsilon}{A} < \varepsilon$$

e quindi la [17] è dimostrata.

Osservazione. — Proviamo con un esempio che il teorema dimostrato può non esser valido se si suppone la serie $\sum_{m,n}^{0\cdots\infty} a_{m,n}$ convergente secondo Stolz e Pringsheim e inoltre soddisfacente alla limitazione [15].

Prendiamo infatti come serie $\sum_{m,n}^{0\cdots\infty} a_{m,n}$ la seguente

$$\begin{array}{r} 1-1+1-1+1-\cdots \\ -1+1-1+1-1+\cdots \\ +0+0+0+0+0+\cdots \\ +0+0+0+0+0+\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

per la quale risulta $S_{M,N} = 0$ per $M \geq 1$, $N \geq 0$; $|S_{M,N}| \leq 1$ per tutti i valori di M, N. La serie è perciò convergente e vale 0.

Per $|x| < 1$, $|y| < 1$ la serie $\sum_{m,n}^{0\cdots\infty} a_{m,n} x^m y^n$ converge assolutamente e si ha

$$S(x,y) = \sum_{m,n}^{0\cdots\infty} a_{m,n} x^m y^n = \frac{1-x}{1+y}.$$

Supposto di dare a x e y due valori reali, con $0 < x < 1$, $0 < y < 1$, si ricava, per $N \geq 1$, $M \geq 1$

$$S(x,y) - S_{M,2N-1}(x,y) = \frac{1-x}{1+y} y^{2N}.$$

Facciamo vedere che, comunque si fissi $N \geq 1$ ed ε, con $0 < \varepsilon < \frac{1}{3}$, si possono determinare due numeri x_1, y_1 con $0 < x_1 < 1$, $0 < y_1 < 1$, in modo che risulti, per $M \geq 1$,

$$S(x,y) - S_{M,2N-1}(x,y) > \varepsilon$$

Infatti si ha, per quel dato N,

$$\lim_{y \to 1} \frac{y^{2N}}{1+y} = \frac{1}{2}$$

e quindi può prendersi y_1, con $0 < y_1 < 1$, in modo che sia

$$\frac{y_1^{2N}}{1+y_1} > \frac{1}{3}$$

e, successivamente, x_1, con $0 < x_1 < 1$, in modo che risulti anche

$$\frac{1-x_1}{1+y_1} y_1^{2N} > \frac{1}{3} > \varepsilon.$$

3. Indichiamo una generalizzazione del teorema di ABEL nell'ipotesi che la serie $\sum_{m,n}^{0\cdots\infty} a_{m,n}$ sia convergente secondo STOLZ e PRINGSHEIM e, inoltre, soddisfi alla limitazione [15].

Se la serie $\sum_{m,n}^{0\cdots\infty} a_{m,n}$ *è convergente e soddisfa alla limitazione*

$$\left| \sum_{0}^{N}{}_n \sum_{0}^{M}{}_m a_{m,n} \right| < K$$

con K *costante positiva indipendente da* M *e da* N, *presi due numeri* ϑ *e* h, *con* $0 \leq \vartheta < \frac{\pi}{2}$, $0 < h < 1$ *e indicata con* $f(t)$ *una funzione positiva e non decrescente, definita per* $t > 0$ *e tale che risulti*

$$f(t) \leq t$$

$$f(0+) = 0 ,$$

la serie $\sum_{m,n}^{0\cdots\infty} a_{m,n} x^m y^n$ *converge uniformemente per* (x, y) *appartenente al campo* C *definito dalle condizioni*

$$a) \quad R(1-x) > |1-x| \cos\vartheta \qquad R(1-y) > |1-y| \cos\vartheta$$

$$b) \quad |1-x| \leq 2h\cos\vartheta \qquad |1-y| \leq 2h\cos\vartheta$$

$$c) \quad |1-x| \geq f(|1-y|) \qquad |1-y| \geq f(|1-x|) .$$

Preso $\varepsilon > 0$, si determini l'intero positivo T in modo che risulti, per $M \geq T$, $N \geq T$

$$[23] \qquad |S_{M,N} - S_{T,T}| < \frac{\varepsilon}{4A}$$

dove A è la costante positiva definita dalla [18].

Siccome risulta

$$[24] \quad |a_{m,n}| = |S_{m,n} + S_{m-1,n-1} - S_{m,n-1} - S_{m-1,n}| < 4K$$

la serie $\sum_{m,n}^{0\cdots\infty} a_{m,n} x^m y^n$ converge assolutamente per $|x| < 1$, $|y| < 1$.

Posto poi, per due dati valori M e N, con $M \geq T$, $N \geq T$, $b_{p,q} = 0$ per $0 \leq p \leq M$, $0 \leq q \leq N$, $b_{p,q} = a_{p,q}$ per gli altri valori di p e q, si ha

$$[25] \quad \sum_{m,n}^{0\cdots\infty} a_{m,n} x^m y^n - \sum_{0}^{N}{}_n \sum_{0}^{M}{}_m a_{m,n} x^m y^n = \sum_{p,q}^{0\cdots\infty} b_{p,q} x^p y^q = \varphi(x, y) .$$

Si ricava allora, posto

$$s_{p,q} = \sum_{0}^{q}{}_{\beta} \sum_{0}^{p}{}_{\alpha} b_{\alpha,\beta},$$

[26] $$\varphi(x,y) = (1-x)(1-y) \sum_{p,q}^{0\cdots\infty} s_{p,q} x^p y^q =$$

$$= (1-x)(1-y) \left\{ \sum_{p,q}^{(T+1)\cdots\infty} s_{p,q} x^p y^q + \sum_{0}^{T}{}_{q} \sum_{T+1}^{\infty}{}_{p} s_{p,q} x^p y^q + \right.$$

$$\left. + \sum_{0}^{T}{}_{p} \sum_{T+1}^{\infty}{}_{q} s_{p,q} x^p y^q \right\}$$

perchè, per $0 \leq p \leq T$, $0 \leq q \leq T$, si ha $s_{p,q} = 0$.

Osserviamo ora che per $p \geq T$, $q \geq T$ si ha anche

[27] $$|s_{p,q}| < \frac{\varepsilon}{2A}.$$

Infatti la [27] è evidente per $T \leq p \leq M$, $T \leq q \leq N$; inoltre se è, ad esempio, $q \geq T$, $p > M$, risulta

$$|s_{p,q}| \leq \left| \sum_{0}^{q}{}_{\beta} \sum_{0}^{p}{}_{\alpha} a_{\alpha,\beta} - \sum_{0}^{T}{}_{\beta} \sum_{0}^{T}{}_{\alpha} a_{\alpha,\beta} \right| + \left| \sum_{0}^{q}{}_{\beta} \sum_{0}^{M}{}_{\alpha} a_{\alpha,\beta} - \sum_{0}^{T}{}_{\beta} \sum_{0}^{T}{}_{\alpha} a_{\alpha,\beta} \right| < \frac{\varepsilon}{2A}$$

per la [23].

Dalle [24], [25], [26], [27] si ottiene allora, per $|x| < 1$, $|y| < 1$,

$$|\varphi(x,y)| < \frac{|(1-x)(1-y)|}{(1-|x|)(1-|y|)} \left\{ \frac{\varepsilon}{2A} + 4K[1-|x|^{T+1} + 1 - |y|^{T+1}] \right\}$$

e quindi, per (x,y) soddisfacente alle condizioni a) e b),

$$|\varphi(x,y)| < \frac{\varepsilon}{2} + 4KA(1-|x|^{T+1} + 1 - |y|^{T+1}).$$

Si determini ora $\delta_\varepsilon > 0$ in modo che per

$$0 < |1-x| \leq \delta_\varepsilon, 0 < |1-y| \leq \delta_\varepsilon$$

risulti

$$4KA\{1-|x|^{T+1} + 1 - |y|^{T+1}\} < \frac{\varepsilon}{2}$$

e quindi

[28] $$|\varphi(x,y)| < \varepsilon.$$

Siccome è $f(\delta_\varepsilon) > 0$, la serie $\sum_{m,n}^{0\cdots\infty} a_{m,n} x^m y^n$ è uniformemente convergente per (x, y) soddisfacente alle condizioni $a), b)$ e alle condizioni

$$|1-x| \geq f(\delta_\varepsilon) \qquad |1-y| \geq f(\delta_\varepsilon)$$

e quindi si può determinare $R \geq T$ in modo che, in tale ipotesi, sia, per $M \geq R$, $N \geq R$,

$$|\varphi(x, y)| < \varepsilon .$$

La [28] vale perciò per $M \geq R$, $N \geq R$ e per (x, y) soddisfacente alle condizioni $a)$, $b)$ e inoltre per $0 < |1-x| \leq \delta_\varepsilon$, $0 < |1-y| \leq \delta_\varepsilon$ oppure $|1-x| \geq f(\delta_\varepsilon)$, $|1-y| \geq f(\delta_\varepsilon)$ e siccome, data la natura della $f(t)$, questo avviene sicuramente se (x, y) è un punto di C, la tesi è dimostrata.

Matematica. — *Sulle famiglie di insiemi* (1). Nota di LUIGI AMERIO, presentata (2) da LEONIDA TONELLI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

Scopo di questa breve Nota è la dimostrazione di una proposizione relativa agli insiemi limitati di punti, che costituisce una estensione del teorema di BOLZANO–WEIERSTRASS.

Tale proposizione permette poi di generalizzare le condizioni di validità del noto teorema di ASCOLI (3) sull'esistenza di una funzione di accumulazione per una famiglia di funzioni egualmente continue ed egualmente limitate.

* * *

1. Se I è un insieme di punti del piano (x, y) e ρ un numero positivo, diremo intorno (ρ) di I il luogo dei punti aventi da I distanza $< \rho$. Data poi nel piano (x, y) una famiglia C di insiemi di punti, diremo che $\bar{I}$ è un insieme di accumulazione per C se, fissato $\rho > 0$, esiste almeno un insieme J di C appartenente all'intorno (ρ) di $\bar{I}$ e tale che per ogni punto P di $\bar{I}$ ne esista uno almeno, Q, in J per cui risulti $\overline{PQ} < \rho$.

Ciò premesso dimostriamo il seguente

TEOREMA I. — *Se C è una famiglia di insiemi chiusi, tutti appartenenti a un quadrato Q, esiste in Q almeno un insieme chiuso, di accumulazione per gli insiemi di C.*

Dimostrazione. – Sia I un generico insieme di C; definiamo in tutti i punti $P(x, y)$ del quadrato Q una funzione $f(x, y) = f(P)$, ponendo $f(P) = 0$ nei punti di I, $f(P) = \delta$, dove δ è la distanza di P da I, se P non appartiene a I.

---

(1) Lavoro eseguito presso il Seminario Matematico della R. Scuola Normale Superiore di Pisa.

(2) Nell'Adunanza del 21 febbraio 1941–XIX.

(3) G. ASCOLI, *Le curve limiti di una data varietà di curve*, « Mem. della Reale Acc. dei Lincei », 1883–1884. Una dimostrazione del teorema indipendente dal postulato di ZERMELO trovasi in L. TONELLI: *Sul valore di un certo ragionamento*, « Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino », 1913.

Supponendo di compiere la stessa operazione per tutti gli insiemi di C, si ricava una famiglia F di funzioni $f(x, y)$ definite in tutti i punti del quadrato Q.

Le funzioni di F sono egualmente limitate in Q perchè se d è la lunghezza della diagonale di Q, si ha

$$[1] \qquad 0 \leq f(x, y) \leq d$$

per tutte le funzioni di F.

Esse sono inoltre egualmente continue perchè, se P_1 e P_2 sono due punti di Q, risulta

$$f(P_1) \leq f(P_2) + \overline{P_1 P_2}$$
$$f(P_2) \leq f(P_1) + \overline{P_1 P_2}$$

e quindi

$$[2] \qquad |f(P_1) - f(P_2)| \leq \overline{P_1 P_2}$$

Si può allora, per il teorema di Ascoli, estrarre da F una successione di funzioni $f_1(x, y), f_2(x, y), \cdots, f_n(x, y), \cdots$ convergente uniformemente in Q a una funzione $f_\infty(x, y)$, la quale risulterà continua e soddisfacente alle condizioni [1], [2].

Indichiamo con $I_1, I_2, \cdots, I_n, \ldots$ gli insiemi di C corrispondenti rispettivamente alle funzioni $f_1(x, y), f_2(x, y), \cdots f_n(x, y), \cdots$ di F, e sia I_∞ l'insieme chiuso in cui è $f_\infty(x, y) = 0$.

L'insieme I_∞ contiene almeno un punto. Infatti sia

$$P_1, P_2, \cdots P_n, \cdots$$

una successione di punti, appartenenti rispettivamente a $I_1, I_2, \cdots, I_n, \cdots$ e sia P un punto di accumulazione di tali punti. In P_n sarà $f_n(P_n) = 0$ e sarà, in $\bar{P}$, $f_\infty(\bar{P}) = 0$ perchè se fosse $f_\infty(\bar{P}) > 0$, sarebbe, per la continuità, $f_\infty(P) > \frac{f_\infty(\bar{P})}{2}$ in un certo intorno di $\bar{P}$, e, per la convergenza uniforme, $f_n(P) > \frac{f_\infty(\bar{P})}{4}$ nello stesso intorno, per $n > n_0$ sufficientemente grande.

Dimostriamo che, fissato $\rho > 0$, si può determinare n_1 in modo che per $n > n_1$, gli insiemi I_n appartengano all'intorno (ρ) di I_∞. Infatti, se così non fosse, esisterebbero infiniti insiemi $I_{m_1}, I_{m_2}, \cdots, I_{m_n}, \cdots$ ciascuno avente almeno un punto $P_{m_1}, P_{m_2}, \cdots, P_{m_n}, \cdots$ non interno all'intorno (ρ) di I_∞. Se allora P_0 è un punto di accumulazione di tali punti, in P_0 risulta $f_\infty(P_0) = 0$, ciò che è assurdo perchè P_0 non è interno all'intorno (ρ) di I_∞.

Inoltre, per n sufficientemente grande, in corrispondenza di ogni punto P_0 di I_∞ ne esiste almeno uno, P_n, in I_n avente da P_0 distanza $< \rho$.

Infatti, per la convergenza uniforme delle funzioni $f_n(x, y)$, si può determinare n_2 in modo che, qualunque sia P_0 in I_∞, risulti

$$[3] \qquad 0 \leq f_n(P_0) < \rho$$

per $n > n_2$.

Dalla [3] si ricava allora che il punto P_0 di I_∞ dista dall'insieme I_n meno di ρ; siccome poi l'insieme I_n è chiuso, esisterà in I_n un punto $\bar{P}_n$ tale che risulti

$$\overline{P_0 \bar{P}_n} < \rho$$

ciò che prova le tesi.

Il teorema ora dimostrato, che è una generalizzazione agli insieni chiusi e limitati del teorema di BOLZANO–WEIERSTRASS, vale evidentemente anche se gli insiemi considerati appartengono a uno spazio a p dimensioni, con p finito.

OSSERVAZIONE I. – Se si suppone che la famiglia C di insiemi sia *chiusa, cioè contenga tutti i suoi insiemi di accumulazione, il procedimento con cui si è ottenuto I_∞ permette di individuare un insieme I_∞ di C.*

OSSERVAZIONE II. – *Se si suppone che C sia una famiglia di insiemi, tutti contenuti nel quadrato Q ma non necessariamente chiusi, esiste in Q un insieme chiuso di accumulazione per gli insiemi di C.*

Infatti se si aggiungono ad ogni insieme di C i propri punti di accumulazione, si ottiene una famiglia $\bar{C}$ di insiemi per la quale vale il teorema I e ogni insieme di accumulazione per gli insiemi di $\bar{C}$ è anche un insieme di accumulazione per gli insiemi di C.

2. – Dimostriamo ora la seguente generalizzazione del teorema di ASCOLI.

TEOREMA II. — *Se K è una famiglia di funzioni $f(x, y)$ egualmente continue ed egualmente limitate, definite ciascuna in un insieme chiuso contenuto in Q, esiste almeno una funzione $\varphi(x, y)$, definita in un insieme chiuso appartenente a Q e ivi continua, la quale è funzione di accumulazione per K.*

Dimostrazione. – Se indichiamo nello spazio (x, y, z) con I il luogo dei punti $(x, y, f(x, y))$, alla famiglia K di funzioni continue $f(x, y)$ corrisponderà una famiglia C di insiemi chiusi I, i quali saranno tutti appartenenti a un cubo sufficientemente grande contenente nel suo interno, o su una faccia, il quadrato Q.

Sia I_∞ un insieme di accumulazione per gli insiemi di C; tale insieme è chiuso e potrà porsi nella forma $z = z_\infty(x, y)$, con (x, y) appartenente alla proiezione S_∞ di I_∞ sul piano (x, y) e $z_\infty(x, y)$ funzione continua in S_∞,

se sarà incontrato in un sol punto da ogni parallela all'asse z passante per un punto di S_∞.

Sia $R\ (x_0\ ,\ y_0\ ,\ z_0)$ un punto di I_∞ e supponiamo che a I_∞ appartenga anche il punto $T\ (x_0\ ,\ y_0\ ,\ z_1)$ con $z_1 \neq z_0$.

Indichiamo con $I_1\ ,\ I_2\ ,\cdots,\ I_n\ ,\cdots$ una successione di insiemi di C convergenti all'insieme I_∞ e con $f_1\ (x\ ,\ y)\ ,\ f_2\ (x,\ y)\ ,\cdots,f_n(x\ ,\ y)\ ,\cdots$ le corrispondenti funzioni di K, sicchè I_n sarà il luogo dei punti $(x\ ,\ y,\ f_n\ (x\ ,\ y))$.

Siccome le funzioni $f_1\ (x\ ,y),\ f_2\ (x\ ,\ y),\ \cdots,\ f_n\ (x\ ,\ y),\cdots$ sono egualmente continue, possiamo determinare il numero positivo $\delta < \dfrac{|\ z_0 - z_1\ |}{4}$ in modo che per due punti $P_1\ (x_1\ ,\ y_1)$, $P_2\ (x_2\ ,\ y_2)$, con $\overline{P_1\ P_2} < 2\ \delta$, risulti

$$|\ f_n\ (P_1) - f_n\ (P_2)\ | < \frac{|\ z_0 - z_1\ |}{2}\ .$$

Ora per $n > n_0$ sufficientemente grande, ad ogni funzione $f_n\ (x\ ,\ y)$ corrisponde almeno un punto $R'_n\ (x'_n\ ,\ y'_n\ ,\ f_n\ (x'_n\ ,\ y'_n))$ contenuto nella sfera $(R,\ \delta)$ di centro R e raggio δ, e quindi non ne possono corrispondere di interni alla sfera $(T\ ,\ \delta)$ perchè se $T'_n\ (x''_n\ ,\ y''_n\ ,\ f_n\ (x''_n\ ,\ y''_n))$ fosse un tale punto, risulterebbe

$$|\ f_n\ (x'_n\ ,y'_n) - f_n\ (x''_n\ ,\ y''_n)\ | > \frac{|\ z_0 - z_1\ |}{2}$$

ciò che è assurdo.

Ne segue che il punto $T\ (x_0\ ,\ y_0\ ,\ z_1\ )$ non può appartenere all'insieme I_∞.

Anche questo teorema vale evidentemente se le funzioni considerate appartengono ad uno spazio a un numero p, finito, di dimensioni.

Matematica. — *Interpretazione geometrica delle caratteristiche di un'equazione a derivate parziali del 1° ordine.* Nota di PIERO BUZANO, presentata (1) da ENRICO BOMPIANI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

§ 1. – LE CARATTERISTICHE COME SISTEMI ∞^1 DI ELEMENTI (STRISCIE).

Consideriamo un'equazione a derivate parziali del 1° ordine in una funzione incognita z di n variabili $x_1, x_2, \cdots x_n$:

$$z = z\,(x_1, x_2, \cdots x_n)\,. \tag{1.1}$$

Introducendo le notazioni abituali:

$$\frac{\partial z}{\partial x_k} = p_k \qquad (k = 1, 2, \cdots n) \tag{1.2}$$

l'equazione suddetta potrà scriversi brevemente così:

$$F\,(x_1, x_2, \cdots x_n\,;\, z\,;\, p_1, p_2, \cdots p_n) = 0\,. \tag{1.3}$$

Osserviamo anzitutto che l'equazione [1.3] si può anche considerare indipendentemente dalle [1.1] e [1.2], però essa *riceve il significato* di equazione a derivate parziali del 1° ordine solo quando la si consideri *associata* a quelle due. Ora è noto (2) come il problema dell'integrazione dell'equazione a derivate parziali porti alla considerazione delle *caratteristiche* le quali però risultano poi indipendenti dall'integrazione nel senso che si costruiscono unicamente a partire da [1.3]. Si comprende quindi come agli effetti di una *trattazione geometrica* abbia interesse anteporre la teoria delle caratteristiche dell'equazione [1.3] al problema della sua integrazione, vale a dire fare uno studio delle caratteristiche legato unicamente a [1.3] e non a [1.1] e [1.2]. Seguendo tale punto di vista perverremo in

(1) Nell'Adunanza del 21 febbraio 1941-XIX.

(2) Cfr. E. GOURSAT, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre.* (Paris, Hermann, 1921). Supporremo verificate per le nostre funzioni le stesse ipotesi ivi ammesse.

questo paragrafo alla definizione delle caratteristiche attraverso ragionamenti che non hanno sostanzialmente nulla di nuovo ma che vengono qui svolti in forma strettamente geometrica. Nei successivi paragrafi vedremo come tale ordinaria teoria delle caratteristiche si possa trasformare in un'altra geometricamente più perspicua che costituirà la parte più originale di questo lavoro.

Si potrà avere *una prima idea dei risultati raggiunti* leggendo subito, indipendentemente dalla lettura dei paragrafi precedenti, l'ultimo paragrafo dove essi sono riassunti per il caso particolare $n = 2$.

Ritorniamo dunque alla [1.3] prescindendo completamente da [1.1]. e [1.2] e consideriamo nello spazio proiettivo a $n + 1$ dimensioni Ω_{n+1} il punto O avente le coordinate proiettive omogenee:

$$[1.4] \qquad \xi_0 = 1 \quad , \quad \xi_1 = x_1 , \cdots , \xi_n = x_n \quad , \quad \xi_{n+1} = z$$

e per O l'iperpiano Ω_n avente le coordinate proiettive omogenee:

$$[1.5] \qquad \eta_0 = p_0 \quad , \quad \eta_1 = p_1 , \cdots , \eta_n = p_n \quad , \quad \eta_{n+1} = -1 ,$$

dove la 1ª coordinata p_0, che non figura in [1.3], è determinata dalla condizione:

$$[1.6] \qquad \sum_0^{n+1} \xi_h \eta_h = 0 ,$$

esprimente che l'iperpiano Ω_n passa per O. Infatti da [1.6] si ricava:

$$[1.7] \qquad p_0 = z - p_1 x_1 - p_2 x_2 \cdots - p_n x_n .$$

La *coppia* costituita dal punto O e dall'iperpiano Ω_n passante per esso prende il nome di *elemento* dello spazio Ω_{n+1}. Diremo che O è il *centro* dell'elemento e che Ω_n ne è la *faccia*. È ovvio che gli elementi di Ω_{n+1} formano un sistema ∞^{2n+1}. Allora la [1.3] si può interpretare come equazione di un *sistema parziale* di ∞^{2n} elementi contenuto entro la totalità degli ∞^{2n+1} elementi di Ω_{n+1}. Entro il sistema [1.3] le facce degli ∞^{n-1} elementi aventi un dato centro inviluppano un *cono* avente quel centro come vertice: ogni faccia tocca il cono lungo una retta che chiameremo *retta caratteristica* (1) dell'elemento a cui appartiene. Inoltre sempre entro il sistema di elementi [1.3] i centri degli elementi aventi una data faccia (2) descrivono una *varietà a* $n-1$ *dimensioni* giacente in quella faccia:

(1) Intersezione di quella faccia con $n-1$ infinitamente vicine e facenti parte dell'inviluppo. La nomenclatura qui introdotta non trovasi in Goursat dove l'interpretazione geometrica è sviluppata a fondo solo per $n = 2$.

(2) Tali centri soddisfano oltre che a [1.3] anche a [1.7], in entrambe essendo fisse le p_k.

per ogni centro vi è uno spazio a $n-1$ dimensioni Ω_{n-1} ivi tangente a quella varietà e lo chiameremo *spazio* Ω_{n-1} *caratteristico* dell'elemento a cui appartiene.

Così entro ogni elemento di [1.3] sono definiti una retta caratteristica e un Ω_{n-1} caratteristico appartenenti entrambi all'elemento (cioè al suo centro e alla sua faccia). Notiamo esplicitamente che per $n = 2$ la [1.3] definisce ∞^4 elementi dello spazio ordinario, costituiti ciascuno da un punto e da un piano per esso, e che ad ogni elemento appartengono due rette caratteristiche (poichè in questo caso anche lo spazio caratteristico Ω_{n-1} si riduce ad una retta).

Estendendo ora agli iperspazi una nomenclatura in uso nell'ordinaria geometria differenziale [1], chiamiamo *striscia* ogni sistema ∞^1 di elementi tale che le facce siano tangenti nei rispettivi centri alla curva luogo di questi. In una striscia le coordinate del centro e della faccia di un elemento sono funzioni di uno stesso parametro t. Tali funzioni non si possono dare ad arbitrio; infatti oltre alla condizione di appartenenza [1.7] esse devono verificare la condizione seguente la quale esprime che la faccia di ogni elemento contiene pure il centro dell'elemento infinitamente vicino:

$$p_0 + \sum_1^n p_i (x_i + \delta x_i) - (z + \delta z) = 0$$

ossia per [1.7]:

$$\delta z = \sum_1^n p_i \delta x_i . \tag{1.8}$$

Inoltre in una striscia il centro di un elemento appartiene all'intersezione della faccia di quell'elemento con la faccia dell'elemento infinitamente vicino. Ossia il centro di un elemento appartiene pure alla faccia dell'elemento infinitamente vicino; infatti la condizione perchè ciò avvenga è:

$$p_0 + \delta p_0 + \sum_1^n x_i (p_i + \delta p_i) - z = 0$$

ossia per [1.7]:

$$\delta p_0 = - \sum_1^n x_i \delta p_i , \tag{1.9}$$

ma [1.8] e [1.9] *si equivalgono* perchè differenziando [1.7] si ha:

$$\delta p_0 = \delta z - \sum_1^n p_i \delta x_i - \sum_1^n x_i \delta p_i$$

e sommando questa con [1.8] si ha [1.9]. Da queste proprietà risulta che la nozione di striscia è autoduale in Ω_{n+1}.

---

[1] Cfr. W. BLASCHKE, *Vorlesungen über Differentialgeometrie* I (Berlin, Springer, 1930) 3. Kapitel. Il nome « striscia » ci sembra più appropriato che non quello di « sviluppabile » usato dal Goursat (a proposito delle caratteristiche).

A ogni elemento di una striscia appartengono dunque una *retta* e uno *spazio* Ω_{n-1} *speciali*: la retta come congiungente il centro dell'elemento al centro dell'elemento infinitamente vicino e lo spazio Ω_{n-1} come intersezione della faccia dell'elemento con la faccia dell'elemento infinitamente vicino. Cosicchè se di una striscia si dà un elemento con la retta e l'Ω_{n-1} speciali ad esso appartenenti è come se si dessero due elementi infinitamente vicini.

Diremo allora che una striscia appartenente al sistema di elementi [1.3] è una STRISCIA CARATTERISTICA di tale sistema quando per ogni suo elemento la retta e l'Ω_{n-1} speciali coincidono rispettivamente con la retta e lo spazio caratteristici [1].

In una striscia caratteristica le coordinate del centro e della faccia di un suo elemento siano funzioni di un parametro t e si indichino con d i loro differenziali. Per scrivere le equazioni differenziali a cui soddisfano tali funzioni avremo bisogno delle derivate della funzione F per cui ci serviremo delle classiche notazioni:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = X_i \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial z} = Z \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial p_i} = P_i \, .$$

Per definizione di striscia valgono anzitutto le [1.8] e [1.9] Se poi la striscia è una caratteristica devono esser verificate altre condizioni. Anzitutto la retta che unisce un centro di un elemento al centro infinitamente vicino deve esser la retta caratteristica appartenente a quell'elemento e quindi deve appartenere a tutti gli iperpiani infinitamente vicini alla faccia di quell'elemento che soddisfano a [1.3] e [1.7] restando fissi x_i e z. Quindi il punto:

$$[1.10] \qquad 1 \, , \, x_1 + dx_1 \, , \cdots , x_n + dx_n \, , \, z + dz$$

deve appartenere a tutti gli iperpiani:

$$[1.11] \qquad p_0 + \delta p_0 \, , \, p_1 + \delta p_1 \, , \cdots , p_n + \delta p_n \, , \, -1$$

dove δp_0 e δp_i $(i = 1 \, , \cdots , n)$ sono vincolati da [1.7] e [1.3] essendo fissi x_i e z, ossia:

$$[1.12] \qquad \delta p_0 = - \sum_1^n x_i \, \delta p_i \, ,$$

$$[1.13] \qquad \sum_1^n P_i \, \delta p_i = 0 \, .$$

---

[1] Per $n = 2$ si veda il § 5 di questo lavoro.

La condizione di appartenenza fra [1.10] e [1.11], tenuto conto di [1.12] diventa:

$$p_0 - \sum_1^n x_i \delta p_i + \sum_1^n x_i p_i + \sum_1^n x_i \delta p_i + \sum_1^n p_i dx_i + \sum_1^n dx_i \delta p_i - z - \delta z = 0$$

che per [1.17] e [1.18] si riduce a:

$$\sum_1^n dx_i \delta p_i = 0$$

la quale deve essere verificata per tutte le δp_i che soddisfano a [1.13]. Quindi le dx sono proporzionali alle P_i e tenuto conto anche di [1.8] si ha:

$$[1.14] \qquad \frac{dx_1}{P_1} = \frac{dx_2}{P_2} = \cdots = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{dz}{p_1 P_1 + p_2 P_2 + \cdots + p_n P_n} = \psi .$$

Il sistema [1.14] traduce già una proprietà delle striscie caratteristiche. Occorre ora completarlo ragionando sulle facce in modo analogo a come abbiamo ragionato sui centri. Lo spazio–intersezione della faccia di un elemento con la faccia infinitamente vicina deve esser lo spazio caratteristico di quell'elemento e quindi deve contenere tutti i punti infinitamente vicini al centro dell'elemento che soddisfano a [1.13] e [1.7] restando fissi p_0 e p_i. Quindi l'iperpiano:

$$[1.15] \qquad p_0 + dp_0 , p_1 + dp_1 , \cdots , p_n + dp_n , - 1$$

deve contenere i punti:

$$[1.16] \qquad 1 , x_1 + \delta x_1 , \cdots , x_n + \delta x_n , z + \delta z$$

dove δx_i e δz sono vincolati da [1.7] e [1.3] essendo fissi p_0 e p_i, ossia:

$$[1.17] \qquad \delta z = \sum_1^n p_i \delta x_i ,$$

$$[1.18] \qquad \sum_1^n X_i \delta x_i + Z \delta z = 0 .$$

La condizione di appartenenza fra [1.15] e [1.16] tenuto conto di [1.17] diventa:

$$p_0 + dp_0 + \sum_1^n p_i x_i + \sum_1^n x_i dp_i + \sum_1^n p_i \delta x_i + \sum_1^n dp_i \delta x_i - z - \sum_1^n p_i \delta x_i = 0$$

che per [1.17] e [1.9] si riduce a:

$$\sum_1^n dp_i \delta x_i = 0$$

la quale deve essere verificata per tutte le δx_i che soddisfano a [1.17] e [1.18] ossia

$$[1.19] \qquad \frac{dp_1}{X_1 + p_1 Z} - \frac{dp_2}{X_2 + p_2 Z} = \cdots - \frac{dp_n}{X_n + p_n Z} \qquad \psi^* .$$

Da [1.13] si trae inoltre:

$$\sum_1^n X_i \, dx_i + Z \, dz + \sum_1^n P_i \, dp_i = 0$$

che tenuto conto di [1.14] e [1.9] diventa:

$$\psi \sum_1^n P_i (X_i + p_i Z) + \psi^* \sum_1^n P_i (X_i + p_i Z) = 0$$

da cui $\psi^* = -\psi$ e quindi le [1.14] e [1.19] si completano nell'unico sistema:

$$[1.20] \qquad \frac{dx_i}{P_i} = \frac{dz}{p_1 P_1 + p_2 P_2 + \cdots + p_n P_n} = \frac{dp_k}{X_k + p_k Z} .$$

Le [1.20] sono le equazioni differenziali delle striscie caratteristiche.

Se ora all'equazione [1.3] associamo la [1.1] che rappresenta un'ipersuperficie di $\Omega_{n,1}$ verremo a concepire questa ipersuperficie come sistema ∞^{2n-1} di elementi appartenenti al sistema [1.3] (i loro centri essendo i punti dell'ipersuperficie): se poi a [1.13] e [1.1] associamo ancora [1.2] veniamo a chiedere che entro il suddetto sistema ∞^{2n-1} di elementi sia contenuto il sistema ∞^n degli elementi costituiti dai punti dell'ipersuperficie e dai relativi iperpiani tangenti. Con ciò la [1.3] assume il significato di equazione a derivate parziali del 1° ordine e le ipersuperficie che soddisfano alla precedente condizione ne sono le *ipersuperficie integrali*. L'importanza delle caratteristiche per quanto concerne le ipersuperficie integrali sta notoriamente nel fatto che ogni integrale è un luogo di caratteristiche e che se due integrali hanno un elemento in comune, hanno in comune tutta la caratteristica passante per quell'elemento.

La teoria delle caratteristiche, pur nell'elaborazione ora esposta, non dà una semplice e immediata interpretazione geometrica delle equazioni [1.20]: si manifesta quindi l'opportunità di trasformarla in un'altra geometricamente più suggestiva. In tal senso si è avuto un recente lavoro del TERRACINI [1]: in esso si considera il caso $n = 2$ e si interpretano gli elementi di Ω_3 (considerati come fasci di rette) mediante rette della Γ_1^2 di

---

[1] *Sur l'interprétation géométrique des caractéristiques des équations aux dérivées partielles du premier ordre.* «Bull. Soc. Royale Liège», 1939.

KLEIN: su di questa le caratteristiche vengono rappresentate da superficie rigate geometricamente ben definite. Però lo studio del TERRACINI è legato al caso $n = 2$ e ad una interpretazione degli elementi che non sembra la più naturale.

In questo lavoro stabiliremo invece una nuova teoria geometrica delle caratteristiche valendoci della rappresentazione degli elementi di Ω_{n+1} sui punti di una varietà di SEGRE (1).

§ 2. – GLI ELEMENTI DI Ω_{n+1} COME PUNTI DI UNA VARIETÀ DI SEGRE.

Come si è detto nel paragrafo precedente gli elementi di Ω_{n+1} sono costituiti da un punto e da un iperpiano appartenentisi. Prescindendo dalla condizione di appartenenza, le coppie punto-iperpiano di Ω_{n+1} si possono notoriamente rappresentare coi punti di una V_{2n+2} di SEGRE appartenente a uno spazio a $(n+2)^2 - 1$ dimensioni (2) e rappresentata in tale spazio dalle equazioni parametriche (w_{hk} coordinate proiettive omogenee):

$$[2.1] \qquad w_{hk} = \xi_h \eta_k \qquad (h, k = 0, 1, \cdots, n+1)$$

dove le ξ_h, η_k si possono pensare date da [1.4] e [1.5]. A noi però interessano solo gli *elementi* di Ω_{n+1} ossia le coppie punto-iperpiano per cui è verificata la condizione [1.6] di appartenenza; tale condizione diventa ora:

$$\sum_{0}^{n+1} w_{hh} = 0$$

e si può interpretare come equazione di un iperpiano dello spazio a cui appartiene V_{2n+2}: tale iperpiano sega su V_{2n+2} una V_{2n+1} *che rappresenta senza eccezioni la varietà degli elementi di* Ω_{n+1}. Tutto quanto segue è fondato sul ricorso sistematico a tale V_{2n+1}. Un generico punto A di V_{2n+1} è immagine di un elemento (O, Ω_n). Da note proprietà delle varietà di SEGRE (3) e dalle stesse equazioni [2.1] risulta che per ogni punto $A \equiv (O, \Omega_n)$ di V_{2n+1} passano uno S_n rappresentante gli ∞^n elementi di Ω_{n+1} che hanno il centro in comune con (O, Ω_n) e un R_n rappresentante gli ∞^n elementi di Ω_{n+1} che hanno la faccia in comune con (O, Ω_n).

---

(1) Tale problema è stato proposto da E. BOMPIANI nella rubrica *Problemi, discussioni, risultati* del R. Ist. Naz. di Alta Matematica. Cfr. « Rendiconti di Matematica » (V), *2* (1941).

(2) L'ordine di V_{2n+2} risulta essere $\dfrac{(2n+2)!}{(n+1)!\,(n+1)!}$ ma non ha interesse nella presente ricerca.

(3) Cfr. E. BERTINI, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi* (Principato, Messina, 1923). Cap. 9, n. 15. Cap. 14, nn. 25–30.

Su V_{2n+1} le x_i , z , p_i $(i = 1, \cdots, n)$ si possono considerare come coordinate curvilinee del punto A (p_0 su V_{2n+1} è esprimibile in funzione di x_i , z , p_i mediante [1.7]). Quindi i differenziali δx_i , δz , δp_i $(i = 1, \cdots, n)$ sono *coordinate proiettive omogenee di retta tangente a* V_{2n+1}: lo spazio tangente a V_{2n+1} *pensato come stella di rette tangenti* è uno spazio a $2n$ dimensioni τ_{2n} [1].

L'equazione [1.3] definisce su V_{2n+1} una sottovarietà V_{2n}: lo spazio tangente a V_{2n} è (come stella di rette tangenti) un τ_{2n-1} definito entro τ_{2n} dall'equazione:

$$[2.2] \qquad \sum_1^n X_i \delta x_i + Z \delta z + \sum_1^n P_i \delta p_i = 0$$

ottenuta differenziando [1.3] e ponendo, come già nel paragrafo precedente:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = X_i \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial z} = Z \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial p_i} = P_i .$$

Vediamo ora come si rappresentano su V_{2n} la retta e lo spazio Ω_{n-1} caratteristici di un dato elemento (O , Ω_n). Basterà ricordare come vi siamo pervenuti nel paragrafo precedente. Abbiamo considerato il cono inviluppo delle facce degli ∞^{n-1} elementi di [1.3] aventi il centro O in comune con (O , Ω_n). A tale cono corrisponde su V_{2n} la W_{n-1} segata dallo S_n [2] passante per $A \equiv (O , \Omega_n)$. Abbiamo poi considerato la *retta caratteristica* secondo cui Ω_n tocca il cono suddetto. A tale retta corrisponderà dunque lo spazio tangente in A a W_{n-1} [3]: questo spazio considerato come stella di rette è un σ_{n-2} e le sue equazioni entro τ_{2n} si ottengono subito differenziando la [1.3] col tener costanti x_i , z:

$$[2.3] \qquad \delta x_i = 0 \ (i = 1, \cdots, n) \ , \ \delta z = 0 \ , \ \sum_1^n P_i \delta p_i = 0 .$$

Abbiamo inoltre considerato, sempre nel paragrafo precedente, la varietà luogo dei centri degli ∞^{n-1} elementi di [1.3] aventi la faccia Ω_n in comune con (O , Ω_n). A tale varietà corrisponde su V_{2n} la U_{n-1} segata dallo R_n passante per $A \equiv (O , \Omega_n)$. Abbiamo poi considerato lo *spazio*

---

[1] Indichiamo con lettere latine maiuscole, S_n , R_n , gli spazi esistenti sulla varietà pensati come luoghi di punti; indichiamo invece con lettere greche minuscole, $\tau_{2n}, \cdots$ gli spazi tangenti alla varietà e pensati come stelle di rette tangenti. Così τ_0 sarà una tangente.

[2] S_n e V_{2n} stanno entrambi su V_{2n+1} e perciò si segano in una W_{n-1}.

[3] Perchè alla retta caratteristica pensata come sistema (intersezione) di Ω_n e di $n-1$ facce infinitamente vicine corrisponde il sistema costituito da A e $n-1$ punti infinitamente vicini su W_{n-1} (ossia lo spazio tangente in A a W_{n-1}).

Ω_{n-1} *caratteristico* tangente in O alla varietà luogo dei centri. A tale spazio corrisponderà dunque lo spazio tangente in A a U_{n-1} [1]: questo spazio considerato come stella di rette tangenti è un ρ_{n-2} e le sue equazioni entro τ_{2n} si ottengono subito differenziando [1.3] e [1.7] col tener costanti p_i:

$$[2.4] \qquad \delta p_i = 0 \ (i = 1, \cdots, n) \ , \ \delta z = \sum_1^n p_i \delta x_i \ , \ \sum_1^n (X_i + p_i Z) \delta x_i = 0 \ .$$

Quindi alla retta e allo spazio Ω_{n-1} *caratteristici* di un elemento $(O \ , \Omega_n)$ corrispondono un σ_{n-2} e un ρ_{n-2} tangenti a V_{2n} nel punto A immagine di quell'elemento: tali spazi (come stelle di tangenti) sono dati dalle equazioni [2.3] e [2.4]. Gli spazi σ_{n-2}, ρ_{n-2} individuano a loro volta uno spazio minimo che li contiene entrambi. Tale spazio è un π_{2n-3} (sempre considerato come stella di tangenti) ed è rappresentato dalle seguenti equazioni:

$$[2.5] \qquad \delta z = \sum_1^n p_i \delta x_i \quad , \quad \sum_1^n (X_i + p_i Z) \delta x_i = 0 \quad . \quad \sum_1^n P_i \delta p_i = 0 \ .$$

Infatti queste sono le equazioni di un π_{2n-3} e sono conseguenze sia di [2.3] che di [2.4].

In conclusione alla retta e all'Ω_{n-1} caratteristici di un elemento $(O \ , \Omega_n)$ corrisponde uno spazio π_{2n-3} tangente a V_{2n} in $A \equiv (O \ , \Omega_n)$ e rappresentato dalle [2.5]: noi lo chiameremo SPAZIO CARATTERISTICO tangente in A a V_{2n}.

Ora è ovvio che una *striscia caratteristica*, essendo una ∞^1 di elementi, deve dar luogo su V_{2n} a una curva che diremo *curva caratteristica*, avente le equazioni differenziali [1.20]. Quello a cui noi miriamo è l'interpretazione geometrica di tali equazioni su V_{2n}: ossia vogliamo *costruire geometricamente* in ciascun punto A di V_{2n} la *tangente* alla curva caratteristica uscente da quel punto [2]. Tale tangente pensata come congiungente A con un punto infinitamente vicino della curva caratteristica è immagine di una coppia costituita dall'elemento $(O \ , \Omega_n)$ e da quello infinitamente vicino sulla striscia caratteristica: a sua volta questa coppia si identifica con l'ente costituito da $(O \ , \Omega_n)$ e dalla retta e dallo spazio Ω_{n-1} caratteristici in esso contenuti. Avendo trovato che a questi ultimi corrispondenti un π_{2n-3} tangente a V_{2n} in A, si presume che la costruzione della tangente caratteristica per A richiederà appunto l'intervento di tale spazio.

---

[1] Perchè allo spazio caratteristico pensato come sistema (congiungente) di O e di $n-1$ centri infinitamente vicini corrisponde il sistema costituito da A e $n-1$ punti infinitamente vicini su U_{n-1} (ossia lo spazio tangente in A a U_{n-1}).

[2] Le equazioni [1.20] ci dicono che da ogni punto di V_{2n} esce *una* curva caratteristica.

Occorrerà però, come vedremo, anche un altro elemento e precisamente un *cono* luogo di spazi tangenti a V_{2n} (di cui fanno parte ρ_{n-2} e σ_{n-2}) a cui perverremo nel paragrafo seguente.

§ 3. — Le rette e gli Ω_{n-1} di un elemento di Ω_{n+1} interpretati sulla varietà di Segre.

A un elemento (O, Ω_n) di Ω_{n+1} appartengono ∞^{n-1} rette (stella di rette passanti per O e giacenti in Ω_n). Ognuna di queste rette si può pensare come sostegno di ∞^n elementi che le appartengono (ossia aventi i centri su di essa e le facce passanti per essa): come tale essa è rappresentata su V_{2n+1} da una varietà di Segre V_n^n [1] passante per il punto A immagine di (O, Ω_n). Le ∞^{n-1} rette dell'elemento (O, Ω_n) sono quindi rappresentate su V_{2n+1} da ∞^{n-1} V_n^n. Volendo limitarci ai soli elementi che soddisfano all'equazione [1.3], ogni retta di (O, Ω_n) sarà sostegno di ∞^{n-1} elementi rappresentati da una V_{n-1} sezione di V_{2n} con la precedente V_n^n. Si hanno così per ogni punto A di V_{2n} ∞^{n-1} V_{n-1}. A noi interessa per il seguito la *varietà luogo degli spazi tangenti in A alle* ∞^{n-1} V_{n-1}. Ciascuno di tali spazi, pensato come stella di tangenti è un λ_{n-2} e la varietà costituita dagli ∞^{n-1} λ_{n-2} per A è un cono di cui è facile trovare la rappresentazione analitica. Infatti le tangenti appartenenti a tale cono si possono pensare come immagini su V_{2n} degli elementi $(x_i + \delta x_i, z - \delta z, p_i + \delta p_i)$ infinitamente vicini ad (O, Ω_n) e il cui centro $(x_i + \delta x_i, z + \delta z)$ è un punto infinitamente vicino [2] ad O ed appartiene a Ω_n. Traducendo analiticamente tutto ciò si hanno le condizioni.

$$\begin{cases} \sum_1^n X_i \delta x_i + Z \delta z + \sum_1^n P_i \delta p_i = 0 \\ p_0 + \sum_1^n (x_i + \delta x_i) p_i - (z + \delta z) = 0 \\ p_0 + \delta p_0 + \sum_1^n (x_i + \delta x_i)(p_i + \delta p_i) - (z + \delta z) = 0 \end{cases}$$

esprimenti le ultime due che le facce p_i e $(p_i + \delta p_i)$ appartengono entrambe al centro $(x_i + \delta x_i, z + \delta z)$ e la 1ª che gli elementi appartengono a [1.3]

---

[1] La varietà di Segre costituita dalle coppie punto-iperpiano dove il punto e l'iperpiano appartengono a una retta è di dimensione $(n-1)+1 = n$ e di ordine $\frac{n!}{1!\,(n-1)!} = n$.

[2] È ovvio che qui, come in altri punti di questo lavoro, la frase « infinitamente vicini » non è che una forma abbreviata di esposizione.

(equazione del τ_{2n-1} tangente a V_{2n}). Sviluppando e tenendo conto di [1.7] si ha:

$$\begin{cases} \sum_1^n X_i \delta x_i + Z \delta z + \sum_1^n P_i \delta p_i = 0 \\ \sum_1^n p_i \delta x_i - \delta z = 0 \\ \sum_1^n (x_i + \delta x_i) \delta p_i + \delta p_0 = 0 \end{cases}$$

ma da [1.7] differenziando si ha:

$$\delta p_0 = \delta z - \sum_1^n x_i \delta p_i - \sum_1^n p_i \delta x_i$$

e quindi il sistema precedente si riduce a:

$$[3.1] \qquad \begin{cases} \sum_1^n p_i \delta x_i - \delta z = 0 \\ \sum_1^n (X_i + p_i Z) \delta x_i + \sum_1^n P_i \delta p_i = 0 \\ \sum_1^n \delta p_i \delta x_i = 0 \end{cases}$$

Le [3.1] sono le equazioni del cono che risulta essere un *cono quadrico*. Esse vanno interpretate nella stella delle tangenti a V_{2n} e ivi il cono va considerato come una *quadrica-nucleo* (1). Siccome due delle [3.1] sono lineari nei differenziali δ, il cono appartiene a un τ_{2n-2} (stella) (2) e in esso si può pensare come una Γ^2_{2n-3} *non specializzata*. Gli $\infty^{n-1}\ \lambda_{n-2}$ generatori sono *spazi di dimensione massima* (3) esistenti su Γ^2_{2n-3}: essi però ricoprono il cono semplicemente e quindi, se $n > 2$, non esauriscono il sistema degli spazi di dimensione massima di Γ^2_{2n-3} (4).

Allo *stesso* cono si perviene partendo anzichè dalle rette, dagli ∞^{n-1} Ω_{n-1} appartenenti all'elemento (O, Ω_n) (passanti per O e giacenti in Ω_n) (5).

---

(1) Cfr. E. BERTINI, op. cit., cap. 6°, n. 6.

(2) Rappresentato entro il τ_{2n-1} tangente a V_{2n} dalla 1ª delle [3.1].

(3) Cfr. E. BERTINI, op. cit., cap. 6°, n. 18. Si tenga presente nell'applicare le formule del Bertini che qui la quadrica va pensata come luogo di rette (ossia entro la stella) perchè come luogo di punti è specializzata.

(4) Tali spazi (cfr. E. BERTINI, op. cit., cap. 6, n. 17–18) formano un *unico* sistema $\infty^{\frac{n(n-1)}{2}}$ cosicchè per ogni retta del cono ne passano $\infty^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$ (uno solo se $n = 2$).

(5) Se $n = 2$ il ragionamento che segue è superfluo perchè gli Ω_{n-1} sono in tal caso le rette di (O, Ω_n).

Ognuno di questi Ω_{n-1} si può pensare come sostegno di ∞^n elementi che gli appartengono e come tale è rappresentato su V_{2n+1} da una varietà di Segre V_n^n passante per il punto A immagine di (O, Ω_n). Volendo anche qui limitarci ai soli elementi che soddisfano all'equazione [1.3], ogni Ω_{n-1} di (O, Ω_n) sarà sostegno di ∞^{n-1} elementi rappresentati da una V_{n-1} sezione di V_{2n} con la precedente V_n^n. Si hanno così per ogni punto A di V_{2n} ∞^{n-1} V_{n-1}. A noi interessa come prima la varietà luogo degli spazi tangenti in A alle ∞^{n-1} V_{n-1}. Ciascuno di tali spazi pensato come stella di tangenti è un μ_{n-2} e la varietà costituita dagli ∞^{n-1} μ_{n-2} per A è un CONO che dico essere lo stesso [3.1]. Infatti le tangenti appartenenti a tale cono si possono pensare come immagini su V_{2n} degli elementi $(x_i + \delta x_i, z + \delta z, p_i + \delta p_i)$ infinitamente vicini ad (O, Ω_n) e la cui faccia $(p_i + \delta p_i)$ è un iperpiano infinitamente vicino ad Ω_n ed appartiene ad O. Traducendo analiticamente tutto ciò si hanno le condizioni:

$$\begin{cases} \sum_1^n X_i \delta x_i + Z \delta z + \sum_1^n P_i \delta p_i = 0 \\ p_0 + \delta p_0 + \sum_1^n x_i (p_i + \delta p_i) - z = 0 \\ p_0 + \delta p_0 + \sum_1^n (x_i + \delta x_i)(p_i + \delta p_i) - (z + \delta z) = 0 \end{cases}$$

(la 1ª non è altro che l'equazione del τ_{2n-1} tangente a V_{2n}) e tenuto conto di [1.7] si vede facilmente che tale sistema si riduce al [3.1]. Quindi anche gli ∞^{n-1} μ_{n-2} appartengono al sistema degli spazi di dimensione massima del cono Γ_{2n-3}^2.

Notiamo ancora che gli spazi σ_{n-2} e ρ_{n-2} incontrati nel § 2 appartengono al cono Γ_{2n-3}^2 come si vede subito osservando che tanto i differenziali che soddisfano le [2.3], quanto quelli che soddisfano le [2.4] soddisfano pure le [3.1].

Vedremo nel paragrafo successivo come si utilizzi tale cono per lo scopo prefissatoci.

§ 4. — Interpretazione delle striscie caratteristiche sulla varietà di Segre.

Come abbiamo già accennato alla fine del § 2, si avrà l'interpretazione richiesta quando per ogni punto A di V_{2n} si sappia costruire la tangente caratteristica avente le equazioni [1.20]. Ora ciò diventa facilissimo mercè l'intervento del cono Γ_{2n-3}^2 considerato nel paragrafo precedente. Dico infatti che *la tangente caratteristica in A non è altro che la retta polare rispetto al cono Γ_{2n-3}^2 dello spazio τ_{2n-3} tangente caratteristico in A a V_{2n}.*

Per verificare tale asserzione, essendo evidente che tanto la retta [1.20] quanto lo spazio [2.5] appartengono al τ_{2n-2} rappresentato dalle prime due delle [3.1], basterà verificare che fra i differenziali d soddisfacenti le [1.1] e i differenziali δ soddisfacenti le [2.5] è soddisfatta la seguente *relazione di coniugio* rispetto al cono [3.1]:

$$\sum_1^n \delta x_i \, dp_i + \sum_1^n \delta p_i \, dx_i = 0$$

ma tale condizione è manifestamente verificata come risulta senz'altro da [1.20] e [2.5] ed è quindi provato l'asserto (1).

Ritornando infine al problema dell'integrazione dell'equazione a derivate parziali, ossia facendo intervenire accanto alla [1.3] anche le [1.1] e [1.2], possiamo trovare una semplice relazione fra le ipersuperficie integrali e gli spazi τ_{2n-2} a cui appartengono i coni Γ^2_{2n-3}. Infatti, come si è già accennato alla fine del § 1, una ipersuperficie di Ω_{n+1} si può pensare come sistema ∞^{2n-1} di elementi soddisfacenti a [1.3]: essa è allora rappresentata sulla nostra V_{2n} da una V_{2n-1}. L'ipersuperficie è un'ipersuperficie integrale solo se in ogni punto della corrispondente V_{2n-1} lo spazio tangente è proprio il τ_{2n-2} che contiene il cono Γ^2_{2n-3}.

§ 5. — Il caso $n = 2$.

Il caso $n = 2$ è particolarmente frequente nella pratica e perciò riassumeremo in tal caso i risultati raggiunti.

Per $n = 2$ l'equazione a derivate parziali definisce un sistema Σ di ∞^4 elementi dello spazio ordinario, costituiti ciascuno da un punto (centro) e da un piano per esso (faccia). Le facce degli ∞^1 elementi del sistema Σ aventi dato centro inviluppano un cono avente quel centro come vertice: ogni faccia tocca il cono lungo una retta che diremo *1ª retta caratteristica* dell'elemento a cui appartiene. Inoltre i centri degli ∞^1 elementi aventi data faccia descrivono una curva su quella faccia: per ogni centro passa una tangente a quella curva, che diremo *2ª retta caratteristica* dell'elemento a cui appartiene.

Striscia è un sistema ∞^1 di elementi tale che la faccia di ogni elemento contiene anche il centro dell'elemento infinitamente vicino. A ogni elemento di una striscia appartengono una *1ª retta speciale*, congiungente il

(1) Lo spazio caratteristico π_{2n-3} è stato definito come congiungente gli spazi ρ_{n-2}, σ_{n-2} giacenti su Γ^2_{2n-2}: perciò la tangente caratteristica, sua polare, appare anche come intersezione degli spazi $\rho^*_{n-1}, \sigma^*_{n-1}$ polari (tangenti) di ρ_{n-2}, σ_{n-2}.

centro al centro infinitamente vicino, e una *2ª retta speciale*, intersezione della faccia con la faccia infinitamente vicina.

Una striscia è *striscia caratteristica* quando appartiene al sistema Σ e per ogni suo elemento la 1ª e 2ª retta speciale coincidono rispettivamente con la 1ª e 2ª retta caratteristica.

Gli elementi del sistema Σ si rappresentano coi punti di una V_4 contenuta nella varietà di Segre V_6^{20} di S_{15} rappresentante le coppie punto–piano dello spazio ordinario. Anzi la V_4 è contenuta nella sottovarietà V_5^{20} di S_{14} rappresentante la totalità degli elementi dello spazio ordinario (ossia le coppie punto–piano appartenentisi). Per ogni punto A di V_4 passano due piani appartenenti a V_5^{20} e immagini degli elementi che hanno il centro o rispettivamente la faccia in comune con l'elemento di cui A è è l'immagine. Tali piani segano su V_4 due curve uscenti da A, di cui chiamiamo σ e ρ le tangenti in A. Il piano $(\sigma\rho)$ dicesi *piano caratteristico* uscente da A (e tangente a V_4).

Preso poi l'elemento dello spazio ordinario avente l'immagine A su V_4 e presa una retta che gli appartenga, a questa pensata come ∞^1 di elementi del sistema Σ corrisponde su V_4 una curva per A. Così alle ∞^1 rette (fascio) appartenenti a un elemento corrispondono su V_4 ∞^1 curve uscenti dal punto A immagine dell'elemento: risulta poi che le tangenti in A alle ∞^1 curve formano un *cono quadrico ordinario* Γ^2. Sul cono giacciono pure le rette σ, ρ, suddette, corrispondenti alle rette caratteristiche dell'elemento di cui A è immagine.

La striscia caratteristica uscente da un dato elemento è rappresentata su V_4 da una *curva caratteristica* uscente dal corrispondente punto A: essa è definita geometricamente quando si assegni la costruzione della sua tangente ossia della *tangente caratteristica* in A. Ebbene: *la tangente caratteristica in A non è altro che la polare del piano caratteristico* $(\rho\sigma)$ *rispetto al cono* Γ^2.

Inoltre una superficie dello spazio ordinario pensata come ∞^3 di elementi del sistema Σ è rappresentata su V_4 da una V_3. Ebbene: la superficie è una superficie integrale dell'equazione a derivate parziali solo se in ogni punto della corrispondente V_3 lo spazio tangente è lo spazio (a 3 dimensioni) di appartenenza del cono Γ^2.

Matematica (Analisi). — *Sulla rappresentazione conforme delle superficie a connessione multipla.* Nota di Antonio Colucci, presentata (1) da Mauro Picone, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

In una Nota del 1936, pubblicata nei « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », Caccioppoli (2) ha esteso alle superficie curve il classico teorema di Osgood–Caratheodory (3) relativo alla rappresentazione conforme di due domini piani semplicemente connessi limitati da curve di Jordan.

Mentre nel caso di due campi piani la rappresentazione conforme tra le regioni costituite dai punti interni può prolungarsi in un omeomorfismo intercedente anche tra i punti frontiera, le cose non stanno sempre allo stesso modo quando ad una almeno delle due regioni piane si sostituisce una superficie curva.

Caccioppoli riesce, nel caso generale, a stabilire la biunivocità della corrispondenza anche sui bordi facendo leva sopra un'ipotesi di espressivo significato geometrico. A breve distanza di tempo G. Scorza–Dragoni (4) ha dimostrato la necessità di quest'ipotesi mediante la costruzione di un ingegnoso esempio.

Il procedimento ideato da Caccioppoli può applicarsi *mutatis mutandis* a due superficie curve a connessione multipla ma di ordine finito; nel caso delle superficie a connessione di ordine infinito l'estensione sembra non facile.

In questa Nota mi occupo di tale ultimo problema nel caso di superficie i cui contorni ammettono un numero finito di punti di accumulazione.

---

(1) Nell'Adunanza del 21 febbraio 1941–XIX.

(2) R. Caccioppoli, *Sulla rappresentazione conforme delle superficie.* « Rend. R. Accademia dei Lincei », 1° semestre 1936.

(3) C. Caratheodory, *Über der gegenseitige Beziehung der Ränder bei der Konformen Abbildung des Inneren einer Jordanschen kurve auf einen Kreis.* « Mathematische Annalen », vol. 73 (1913), pagg. 305–30.

(4) G. Scorza–Dragoni, *A proposito di un teorema di Caccioppoli sulla rappresentazione conforme delle superficie.* « Rend. R. Accademia dei Lincei », 1° semestre 1936.

Anche qui per potere giungere ad un risultato analogo a quello di CACCIOPPOLI occorre, come vedremo, aggiungere qualche altra ipotesi (circa l'addensamento dei contorni della superficie in prossimità dei loro punti di accumulazione).

Come modello conforme scegliamo un campo limitato da cerchi.

L'esistenza di siffatti modelli, limitatamente alla rappresentazione degli interni, è stata dimostrata da KOEBE nel caso della connessione finita. Egli ha inoltre congetturato che un risultato analogo potrebbe stabilirsi nel caso generale (1). Tale problema viene quindi qui risolto in un caso particolare, più generale però – credo – di quelli trattati finora.

1. Consideriamo nello spazio ordinario una superficie S di equazioni

$$x = x(u, v), \; y = y(u, v), \; z = z(u, v).$$

immagine topologica di un dominio $\mathcal{T}$ del piano (u, v) limitato da un contorno esterno τ_1 e da infiniti contorni interni $\tau_2, \tau_3, \cdots$ costituiti da curve semplici di JORDAN a due a due senza punti comuni e con un numero finito di punti di accumulazione; supponiamo inoltre che S sia a punti semplici, internamente regolare (2) e di area finita.

Ciò premesso, detta $\tau_n^*\,(n = 1, 2, \cdots)$ una curva analitica chiusa, esterna a $\mathcal{T}$ e prossima a τ_n e $\mathcal{T}_n^*$ la regione da essa racchiusa, definiamo in $\mathcal{T}_1^*\; C(\mathcal{T}_2^*) \cdots C(\mathcal{T}_n^*)$ (3) una superficie analitica S_n di equazioni

$$x = x_n(u, v), \; y = y_n(u, v), \; z = z_n(u, v)$$

di cui indichiamo i contorni con $\sigma_{n1}, \sigma_{n2}, \cdots, \sigma_{nn}$.

Ammettiamo che per n divergente:

1) S_n tenda ad S, cioè

$$\lim x_n(u, v) = x(u, v), \lim y_n(u, v), \lim z_n(u, v) = z(u, v)$$

uniformemente in $\mathcal{T}$, i contorni σ_{ni} tendendo rispettivamente ai contorni σ_i di S,

2) tre punti P_n, Q_n, R_n di σ_{n1}, tendano a tre punti distinti P, Q, R di σ_1,

3) l'area di S_n tenda all'area di S.

Poniamo in rappresentazione conforme S_n con un dominio piano D_n limitato da un cerchio esterno $\gamma_{n1} = \gamma_1$, che si può supporre fisso e scegliere

---

(1) V. *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*, Band II_3-3-N. 44.

(2) Con ciò vogliamo intendere, secondo la nomenclatura seguita da PICONE e dalla sua Scuola, che $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ sono dotate di derivate parziali seconde continue internamente a $\mathcal{T}$, e con le usuali notazioni è $EG - F^2 > 0$.

(3) Col simbolo $C(\mathcal{T})$ indichiamo il complementare di $\mathcal{T}$ rispetto all'intero piano (u, v).

arbitrariamente e da certi $n-1$ cerchi interni $\gamma_{n2}, \gamma_{n3}, \cdots, \gamma_{nn}$. È noto che tale rappresentazione si può realizzare con tre equazioni del tipo

$$x = \varphi_n(u, v), \quad y = \psi_n(u, v), \quad z = \chi_n(u, v)$$

dove $\varphi_n, \psi_n, \chi_n$ denotano certe funzioni regolari, anzi analitiche del punto (u, v) variabile in D_n, e che di tre punti del contorno γ_1 si possono fissare a piacere i punti corrispondenti su σ_{n1}, poniamo P_n, Q_n, R_n.

Facciamo ora divergere la variabile intera n prescrivendole di percorrere una successione di valori tali che $\gamma_{n2}, \gamma_{n3}, \cdots$ tendano a dei cerchi limiti ben determinati $\gamma_2, \gamma_3, \cdots$, e diciamo D il dominio limite di D_n per $n \to \infty$.

Si vede facilmente che $\varphi_n, \psi_n, \chi_n$ forniscono per $n = 1, 2, \cdots$, tre successioni di funzioni egualmente continue [1]; da ciò e dall'ulteriore circostanza che tali successioni sono equilimitate segue che ammettono una terna di accumulazione, sia:

[1] $$\varphi = \lim \varphi_n, \quad \psi = \lim \psi_n, \quad \chi = \lim \chi_n.$$

Queste funzioni risultano definite nel dominio D, ivi dotate di derivate parziali di quadrato sommabile e assolutamente continue rispetto ad u ed a v per quasi tutti i valori di v ed u rispettivamente.

Le relazioni [1] debbono evidentemente coesistere con la tendenza sopra postulata dell'area di S_n a quella di S e con la tendenza dell'integrale $\iint_D \left[\left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial v}\right)^2\right] du\, dv$ e dei due analoghi in ψ_n e χ_n ai rispettivi minimi limiti (a causa della semicontinuità di tali integrali); segue che le derivate parziali di $\varphi_n, \psi_n, \chi_n$ tendono in media d'ordine due a quelle di φ, ψ, χ. E poichè $E_n = G_n$, $F_n = 0$, si ha che sussistono quasi ovunque in D le relazioni:

[2] $$E = G, \quad F = 0$$

Passando ad esaminare la frontiera di D osserviamo che due cerchi γ_i, γ_j non possono avere punti comuni. Invero, se così non fosse per ogni $\varepsilon > 0$ e per n sufficientemente grande si potrebbero trovare sui contorni γ_{ni}, γ_{nj} di D_n due punti a distanza minore di ε, il che è in contrasto con la uniforme continuità di $\varphi_n, \psi_n, \chi_n$ e col fatto che i punti corrispondenti di S_n, situati sui σ_{ni}, σ_{nj} si troverebbero ad una distanza minore di qualunque numero positivo assegnabile. Essa si compone quindi degli infiniti contorni $\gamma_1, \gamma_2, \cdots$ e dei loro punti di accumulazione.

---

[1] Invero l'ipotesi della non equicontinuità porterebbe come conseguenza – tenendo conto della conformità della rappresentazione – che le aree delle superficie approssimanti crescono oltre ogni limite.

Le formole:

$$x = \varphi(u, v), \; y = \psi(u, v), \; z = \chi(u, v)$$

definiscono intanto una rappresentazione di ogni regione di D sulla corrispondente regione di S; tale corrispondenza non è, in generale, biunivoca ad un punto di S potendo corrispondere un intero continuo di D oppure un unico punto.

A cagione delle [2] daremo ad essa il nome di rappresentazione *quasi-conforme.*

2. Se ad un punto Q di S, che non sia punto di accumulazione dei contorni $\sigma_1, \sigma_2, \cdots$, corrispondono più punti di D si dimostra che detta $A(\rho', \rho'')$ l'area della porzione di S racchiusa tra le sfere aventi i centri in Q e per raggi ρ' e ρ'', la serie

$$[3] \qquad \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{(\rho_{2i-1} - \rho_{2i})^2}{A(\rho_{2i-1}, \rho_{2i})}$$

risulta convergente per qualunque successione *decrescente* (ρ_n) [1].

Tale proprietà è dovuta al fatto che alle curve di intersezione della sfera di centro Q e raggio ρ con le superficie di approssimazione della S corrispondono in D curve chiuse, o rese tali col contributo di una parte del contorno di D, la cui lunghezza complessiva è inferiormente limitata da un numero fisso $l > 0$ [1].

Pertanto se la superficie è *omogenea* in Q, cioè *se il rapporto* $\frac{A(\rho)}{\rho^2}$ *fra l'area della parte di S interna alla sfera di centro Q ed il quadrato del raggio di questa è superiormente limitato per* $\rho \to 0$, [2] *allora a Q corrisponde un solo punto di D.*

Se Q è punto di accumulazione per i contorni di S, sempre nell'ipotesi che a Q corrispondono più punti di D, si giunge parimenti alla convergenza della [3], e quindi a tutte le sue conseguenze, *facendo l'ulteriore ipotesi che una sfera di centro Q e raggio* ρ *arbitrario incontri un numero superiormente limitato di contorni di S.*

Infatti, l'intersezione della S_n, con tale sfera si compone di un certo numero di archi saldati fra loro con porzioni dei contorni σ_{nk} $(1 \leq k \leq n)$;

---

[1] Infatti ciò implica la disuguaglianza:

$$M(\rho_1, \rho_2) > l^2 \frac{(\rho_1 - \rho_2)^2}{A(\rho_1, \rho_2)}$$

dove $A(\rho_1, \rho_2)$ rappresenta l'area della porzione di S limitata dall'intersezione di questa superficie con la sfera di centro Q e raggi ρ_1, ρ_2, con l'eventuale contributo di archi dei contorni di S, e $M(\rho_1, \rho_2)$ denota l'area del campo di D cui corrisponde su S la precedente regione. (Cfr. loc. cit.).

[2] Ipotesi questa, *essenziale* per i soli punti del contorno di S stante che essa si trova verificata nei punti interni, a causa della regolarità della superficie in questi ultimi.

ai primi corrispondono archi interni a D_n ed ai secondi parti delle circonferenze γ_k, la lunghezza complessiva di tutti questi archi di curve piane dovendo risultare maggiore di un numero fisso $l > 0$. Ma al tendere di n all'infinito, la somma degli archi di circonferenza, il cui numero è superiormente limitato, tende a zero (le circonferenze dovendo tendere ad un punto); perciò se n è abbastanza grande la somma delle lunghezze degli archi interni a D_n si mantiene maggiore di l. Tanto basta per concludere che la [3] è convergente. Ne segue che se la S è omogenea in *tutti* i suoi punti la corrispondenza tra S e D è biunivoca *senza eccezioni*.

Per provare ora che la corrispondenza tra le due superficie è conforme nei punti interni osserviamo quanto segue: una regione convenientemente ristretta di S può rappresentarsi conformemente sopra un piano ξ, η, queste variabili riuscendo funzioni di u, v assolutamente continue rispetto ad u e a v per quasi tutti i valori di v ed u ordinatamente, e dotate di derivate di quadrato sommabile.

A causa delle [2], una regione interna a D risulta riferita con rappresentazione quasi conforme ad una porzione del piano ξ, η; pertanto riescono verificate quasi ovunque le relazioni:

$$\frac{\partial \xi}{\partial u} - \varkappa \frac{\partial \eta}{\partial v} = \frac{\partial \xi}{\partial v} + \varkappa \frac{\partial \eta}{\partial u} = 0 \qquad (\varkappa = \pm 1).$$

Da note proprietà segue che la rappresentazione delle due regioni piane in esame è conforme; conclusione questa che si trasporta subito alla corrispondenza fra i punti interni di D e quelli di S.

Conseguentemente $\varphi, \psi; \chi$ ammetteranno derivate parziali seconde continue in $D - \mathfrak{F}D$, e sarà $EG - F^2 > 0$.

Riassumendo quanto si è osservato finora possiamo dire che: *una superficie dello spazio euclideo, immagine topologica di un dominio piano limitato da infinite curve semplici di Jordan a due a due senza punti comuni e con un numero finito di punti di accumulazione, omogenea in tutti i suoi punti e tale che una sfera di raggio $\rho \to 0$ con centro in un punto di accumulazione dei suoi contorni incontri un numero superiormente limitato di tali contorni, può essere riferita con corrispondenza omeomorfica e conforme nei punti interni con un dominio piano limitato da cerchi.*

3. Le considerazioni svolte nel n. 1 restano valide se all'ipotesi che S sia a punti semplici si sostituisce l'altra, meno restrittiva, che la superficie non presenti *strozzature* [1].

Una successiva generalizzazione si può conseguire supponendo la S *generalmente regolare*, cioè formata da un numero finito di porzioni omogenee, regolari nei punti interni e separate da curve rettificabili.

---

[1] Caccioppoli, loc. cit.

Matematica. — *Sulle trasformate multiple di Laplace* (1). Nota di SANDRO FAEDO, presentata (2) da MAURO PICONE, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

In alcuni recenti lavori M. PICONE (3) ha dato nuovi metodi di ricerca per la teoria delle equazioni a derivate parziali, basati sulla trasformata di LAPLACE a intervallo finito d'integrazione da Lui introdotta. È fondamentale in questi metodi un teorema di crescenza del PICONE, relativo a questa trasformata, che permette di dedurre, ad esempio, larghi teoremi di determinazione per gli integrali delle equazioni a derivate parziali.

In questa Nota si dimostra che il teorema di crescenza del PICONE sussiste anche per le trasformate multiple e per ottenere ciò si estende un importante teorema di PHRAGMEN (4) relativo all'ordinaria trasformata di LAPLACE.

Tali risultati permettono di allargare notevolmente il campo di applicabilità dei metodi del PICONE e ne mettono in luce la grande generalità.

---

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(2) Nell'Adunanza del 21 febbraio 1941-XIX.

(3) M. PICONE, *Nuove determinazioni per gl'integrali delle equazioni lineari a derivate parziali*, « Rend. Acc. Naz. dei Lincei », vol. XXVIII, ser. VI, fasc. II, 1938; ID., *Nuovi metodi d'indagine per la teoria delle equazioni lineari a derivate parziali*. « Rend. Semin. Mat. e Fis. di Milano », vol. XIII, 1939; ID., *Nuovi metodi risolutivi per i problemi d'integrazione delle equazioni lineari a derivate parziali e nuova applicazione della trasformata multipla di Laplace nel caso delle equazioni a coefficienti costanti*. « Atti R. Acc. delle Scienze di Torino », vol. 75, 1939-40. Tali risultati sono organicamente esposti nel recente trattato di M. PICONE, *Appunti di Analisi superiore*, Rondinella, Napoli, 1940, cap. VII, pag. 718; (cfr. anche D. MANGERON, *L'applicazione del metodo di Picone, della trasformata di Laplace ad intervallo d'integrazione finito, alla teoria delle equazioni a derivate parziali d'ordine qualunque*. « Rend. R. Acc. d'Italia », Classe delle Scienze fisiche, matematiche e naturali, ser. VII, vol. I, fasc. 1°, 1939; C. TOLOTTI, *Applicazione di un nuovo metodo di M. Picone all'integrazione delle equazioni dell'elasticità in un parallelepipedo rettangolo*. « Rend. R. Acc. d'Italia », ser. VII, vol. I, fasc. 10.

(4) Cfr. D. DOETSCH, *Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation*, Springer, Berlin, 1937, pagg. 133-135.

1. Per semplicità di scrittura ci riferiremo a funzioni di due variabili, ma quanto si dirà sussiste ovviamente per n variabili.

Sia data una funzione $f(t, \tau)$ (reale o complessa) delle variabili reali t, τ, quasi continua e integrabile su un rettangolo $R \equiv (a, c; b, d)$, a lati paralleli agli assi. Comunque si fissino i numeri complessi $z = x_1 + iy_1$, $v = x_2 + iy_2$, esiste finita

$$f^*(z, v) = \int_a^b \int_c^d f(t, \tau)\ e^{-(zt+v\tau)}\, dt\, d\tau .$$

La $f^*(z, v)$ si dirà *trasformata doppia di Laplace della* $f(t, \tau)$ a *regione finita d'integrazione*. Tale funzione è ovviamente una funzione intera dei parametri z e v.

Ogni $f(t, \tau)$ è individuata dalla propria trasformata $f^*(z, v)$ a meno di un insieme di punti di misura nulla.

E infatti se $f_1(t, \tau)$ e $f_2(t, \tau)$ hanno la stessa trasformata, per la differenza $f = f_1 - f_2$ si ha

$$\frac{\partial^{n+s}}{\partial z^n\, \partial v^s} f^*(z, v) = (-1)^{n+s} \int_a^b \int_c^d f(t, \tau)\, t^n\, \tau^s\, e^{-(zt+v\tau)}\, dt\, d\tau = 0 ,$$

ed integrando per parti

$$\int_a^b \nu^{n-1}\, d\nu \int_c^d \sigma^{s-1}\, d\sigma \int_a^\nu \int_c^\sigma f(t, \tau)\, e^{-(zt+v\tau)}\, dt\, d\tau = 0 ;$$

essendo ν^n e σ^s un sistema di funzioni completo in R, ne segue che

$$\int_a^\nu \int_c^\sigma f(t, \tau)\, e^{-(zt+v\tau)}\, dt\, d\tau = 0 ,$$

e quindi che $f(t, \tau)$, è quasi ovunque nulla in R.

2. Sia $f(t)$ una funzione (reale o complessa) della variabile reale t ed esista una costante x_0 tale che sia assolutamente integrabile in $(0, \infty)$ il prodotto $f(t)\, e^{-x_0 t}$; se $z = x + iy$ è un numero complesso, nel semipiano $x \geq x_0$ è definita l'ordinaria trasformata di LAPLACE

$$F(z) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-zt}\, dt .$$

Un importante teorema di PHRAGMEN (5) afferma che, per ogni $\tau > 0$ è

$$\int_0^{\tau} f(t)\,dt = \lim_{x \to -\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k!}\, e^{kx\tau}\, F(kx)\,.$$

Se ne deduce immediatamente un teorema analogo per la trasformata di LAPLACE a intervallo finito d'integrazione.

Posto infatti

$$f^*(z) = \int_0^{T} f(t)\, e^{-zt}\,dt \quad , \quad G(z) = \int_0^{\infty} g(t)\, e^{-zt}\,dt$$

e $g(t) = f(t)$ per $0 \leq t \leq T$, $g(t) = 0$ per $t > T$, è

$$\int_0^{\tau} g(t)\,dt = \lim_{x \to -\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k!}\, e^{kx\tau}\, G(kx)$$

e quindi

$$\int_0^{\tau} f(t)\,dt = \lim_{x \to +\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k!}\, e^{kx\tau}\, f^*(kx)\,, \qquad (0 < \tau < T)$$

che prova il teorema di PHRAGMEN per le trasformate f^*.

3. Andiamo ora ad estendere il teorema di PHRAGMEN alle trasformate doppie di LAPLACE, seguendo un cammino diverso da quello che si fa per una variabile. Più precisamente stabiliremo prima il teorema per le trasformate a regione d'integrazione finita, da cui seguirà facilmente il teorema per le trasformate doppie ordinarie.

È data una funzione $f(t\,,\tau)$ ed esistono due costanti x_0 e ξ_0 tali che è finito

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} |f(t\,,\tau)|\, e^{-(x_0 t + \xi_0 \tau)}\,dt\,d\tau\,.$$

Se $z = x + iy$, $v = \xi + i\eta$ sono tali che è $x \geq x_0$, $\xi \geq \xi_0$, allora esistono finite la trasformata doppia di LAPLACE

$$F(z\,,v) = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} f(t\,,\tau)\, e^{-(zt+v\tau)}\,dt\,d\tau$$

(5) Loc. cit. in (4).

e la trasformata a regione finita d'integrazione

$$f^*(z,v) = \int_0^P \int_0^Q f(t,\tau)\, e^{-(zt+v\tau)}\, dt\, d\tau .$$

La funzione $f^*(z,v)$ è inoltre assolutamente integrabile in $(0,0;P,Q)$. Consideriamo la funzione

$$g_{z,v}(t,\tau) = 1 - e^{-e^{z(p-t)}} - e^{-e^{v(q-\tau)}} + e^{-[e^{z(p-t)}+e^{v(q-\tau)}]},$$

dove p e q sono due numeri tali che $0 < p \leq P$, $0 < q \leq Q$.

È:

$$\lim_{\substack{z\\v}\{\to+\infty} g_{z,v}(t,\tau) = \begin{cases} 1 \quad \text{per} \quad t < p \ , \ \tau < q \\ = 0 \ \text{per} \begin{cases} t > p \quad \tau > q \\ t > p \quad \tau < q \\ t < p \quad \tau > q , \end{cases} \end{cases}$$

ed integrando per serie, com'è lecito per un noto teorema, è

[1] $$\lim_{\substack{z\\v}\{\to+\infty} \int_0^P \int_0^Q f(t,\tau)\, g_{z,v}(t,\tau)\, dt\, d\tau = \int_0^p \int_0^q f(t,\tau)\, dt\, d\tau .$$

Si ha poi

$$g_{z,v}(t,\tau) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n}}{m!\,n!}\, e^{mz(p-t)+nv(q-\tau)}$$

e questa serie, per z e v fissati, converge uniformemente per t e τ variabili rispettivamente in $(0,P)$ e $(0,Q)$; è quindi

[2] $$\int_0^P \int_0^Q f(t,\tau)\, g_{z,v}(t,\tau)\, dt\, d\tau =$$

$$= \int_0^P \int_0^Q f(t,\tau) \left[\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n}}{m!\,n!}\, e^{mz(p-t)+nv(q-\tau)} \right] dt\, d\tau =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n}}{m!\,n!} \int_0^P \int_0^Q f(t,\tau)\, e^{mz(p-t)+nv(q-\tau)}\, dt\, d\tau =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n}}{m!\,n!}\, e^{mzp+nvq}\, f^*(mz, nv)$$

e quindi per la [1] è

$$[3] \qquad \lim_{\substack{z \\ v}} \to +\infty \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n}}{m!\,n!} e^{mzp+nvq} f^*(mz\,nv) = \int_0^p \int_0^q f(t,\tau)\,dt\,d\tau .$$

Il teorema di PHRAGMEN è così dimostrato per le trasformate a regione finita di integrazione.

Tenuto conto che è convergente la serie

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m!\,n!} e^{mx_0 p+n\xi_0 q} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} |f(t,\tau)|\, e^{-[mx_0 t+n\xi_0 \tau]}\,dt\,d\tau ,$$

segue che per z e v di parti reali sufficientemente grandi esiste finito

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} |f(t,\tau)|\, g_{z,v}(t,\tau)\,dt\,d\tau .$$

Perciò, prefissato $\varepsilon > 0$ ad arbitrio si possono determinare P_0 e Q_0 tali che per $P \geq P_0$, $Q \geq Q_0$, sia

$$\left| \int_0^P \int_0^Q f(t,\tau)\, g_{z,v}(t,\tau)\,dt\,d\tau - \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(t,\tau)\, g_{z,v}(t,\tau)\,dt\,d\tau \right| < \varepsilon ,$$

uniformemente rispetto a z e v.

Quindi dalle [2] e [3] segue che è

$$\lim_{\substack{z \\ v}} \to +\infty \sum_{m+1}^{\infty} \sum_{n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n}}{m!\,n!} e^{mzp+nvq} F(mz\,,nv) = \int_0^p \int_0^q f(t,\tau)\,dt\,d\tau ,$$

che esprime il teorema di PHRAGMEN per le trasformate doppie di LAPLACE.

Si è così completamente dimostrato il

TEOREMA. — *Se esistono due costanti x_0 e ξ_0 per cui risulti finito*

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} |f(t,\tau)|\, e^{-[x_0 t+\xi_0 \tau]}\,dt\,d\tau ,$$

allora è

$$\lim_{\substack{z \\ v}} \to +\infty \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n}}{m!\,n!} e^{mzp+nvq} F(mz\,,nv) = \int_0^b \int_0^q f(t,v)\,dt\,dv ,$$

dove p e q sono due qualunque numeri positivi.

4. Passiamo ora all'estensione del teorema di crescenza del PICONE.

TEOREMA. — *Sia* $f(t,\tau)$ *integrabile in* $R \equiv (a,c;b,d)$ $[b>a;\ d>c]$; *sia inoltre per* z *e* v *reali e positivi*

$$[4]\quad |e^{zb+vd} f^*(z,v)| = \left| \int_a^b \int_c^d f(t,\tau)\, e^{z(b-t)+v(d-\tau)}\, dt\, d\tau \right| < k z^m v^n e^{rz+sv},$$

con K, m, n, r, s *costanti ed* $r < b-a$, $s < d-c$.

Ne segue che se $f(t,\tau)$ *è analitica in* R *è sempre* $f \equiv 0$.

Se non si suppone l'analiticità di $f(t,\tau)$, *ma la* [4] *sussiste anche per* $r=0$, $s=o$, *allora* $f(t,\tau)$ *è quasi ovunque nulla in* R.

Si considerino due numeri $\bar{p}, \bar{q}$ con $a < \bar{p} < b$, $c < \bar{q} < d$ e tali che sia $r + p - b < 0$, $s + q - d < 0$.

Si ha

$$|e^{z\bar{p}+v\bar{q}} f^*(z,v)| \leq k z^m v^n e^{z(r+p-b)+v(s+q-d)},$$

da cui segue

$$\lim_{\substack{z\\v}\{\to+\infty} e^{z\bar{p}+v\bar{q}} f^*(z,v) = 0.$$

Ma per il teorema di PHRAGMEN relativo alla trasformata $f^*(z,v)$, si ha

$$\int_0^{\bar{p}} \int_0^{\bar{q}} f(t,\tau)\, dt\, d\tau = \lim_{\substack{z\\v}\{\to+\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n}}{m!\,n!}\, e^{mz\bar{p}+nv\bar{q}} f^*(mz, nv),$$

ed essendo

$$\lim_{\substack{z\\v}\{\to+\infty} e^{mz\bar{p}+nv\bar{q}} f^*(mz,nv) = 0$$

è

$$[5]\qquad \int_a^p \int_c^q f(t,\tau)\, dt\, d\tau = 0, \qquad \text{per} \quad a \leq p \leq \bar{p},\ b \leq q \leq \bar{q},$$

Si conclude quindi che se $f(t,\tau)$, è analitica, è senz'altro nulla in tutto R. Se invece è $r=0$, $s=0$, allora la [5] sussiste per ogni p, q con

$$a \leq p \leq b, \quad c \leq q \leq d,$$

e quindi $f(t,\tau)$ è quasi ovunque nulla in R.

Meccanica. — *Sulle proprietà di media comuni a tutti i sistemi continui.* Nota (1) di ANTONIO SIGNORINI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

1. Le condizioni di stabilità che la Scienza delle Costruzioni ricava dalla Teoria dell'Elasticità all'atto pratico si ritengono solo *necessarie*: per avere condizioni *sufficienti* il carico al limite di elasticità viene sostituito con un carico notevolmente minore – carico di sicurezza – in base a criteri più o meno nitidi, ma comunque non aderenti alla Teoria dell'Elasticità.

Rinunziando a ogni speciale ipotesi sulla costituzione e sullo stato fisico dei materiali, condizioni necessarie di stabilità possono ancora (in vario modo) esser dedotte dalle proprietà di media dello stress che richiamerò nel n. 2: e neppure è detto che tali condizioni necessarie di stabilità debbano sempre riuscire tanto poco restrittive da non potere assolutamente competere con le abituali, anche se queste appaiano viziate da troppe ipotesi di carattere semplicista (perfetta elasticità, omogeneità e magari isotropia, uniforme distribuzione della temperatura, ecc.).

Agli esempi che al riguardo già altrove ho indicati, mi sembra di poterne ora aggiungere uno particolarmente espressivo, riguardante la più elementare delle formole di Scienza delle Costruzioni.

Prendiamo in esame una trave prismatica orizzontale semplicemente appoggiata agli estremi, ma comunque caricata, intendendo che per la generica sua sezione normale A l'asse baricentrale orizzontale n sia asse centrale. Indichiamo con ρ e $I = A\rho^2$ il raggio di girazione e il momento d'inerzia di A rispetto a n, con m_* il valor medio del momento flettente

$$m \geqq 0$$

lungo l'intera trave. In corrispondenza al generico punto P della trave sia poi σ la tensione normale (specifica) sull'elemento di sezione normale cui appartiene P.

---

(1) Presentata nell'Adunanza del 21 febbraio 1941-XIX.

Accennando con σ_{max} il massimo di $|\sigma|$ nell'intera trave, da una dalle formole che richiamerò nel n. 2 risulta [V. n. 3]

$$[1] \qquad \sigma_{max} > \frac{m_* \rho}{I} .$$

Invece – indicando con M il massimo di m e con y la massima distanza di un punto di A da n – le numerose ipotesi implicite nell'adattamento della soluzione del problema di DE SAINT VENANT alla Scienza delle Costruzioni notoriamente portano alla uguaglianza

$$[2] \qquad \sigma_{max} = \frac{My}{I} > \frac{m_* \rho}{I} .$$

Ma può anche darsi che My superi di poco $m_* \rho$: comunque *il limite inferiore imposto a* σ_{max} *dalla* [1] *ha proprio il* **massimo** *valore compatibile con la condizione di restare indipendente da ogni speciale ipotesi sulla natura e sullo stato fisico del materiale costituente la trave.*

Invero per una sezione a doppio T (doppiamente simmetrica) all'impiccolire dello spessore della costola e delle ali ρ va sempre più approssimandosi a y: mentre, stante la condizione di semplice appoggio, certo è

$$\frac{M}{2} \leq m_* < \frac{M}{2} .$$

A questo riguardo il caso più sfavorevole,

$$m_* = \frac{M}{2} ,$$

è quello di un unico carico concentrato. All'opposto m_* quasi raggiunge M se la sollecitazione aggiuntiva si riduce a due soli carichi uguali, simmetricamente concentrati nell'immediata prossimità dei due estremi della trave (purchè in confronto alla sollecitazione aggiuntiva sia trascurabile il peso proprio della trave).

Si possono dunque immaginare dei casi in cui il valore di σ_{max} fornito dalla [2] (cioè da ipotesi particolari sulla costituzione della trave) si approssima quanto si vuole al limite inferiore incondizionatamente imposto dalla [1].

2. RICHIAMO DELLE FORMOLE GENERALI.

Sia S un qualunque sistema continuo in quiete rispetto alla terna trirettangola $x_1\ x_2\ x_3$.

Accenniamo con C la configurazione attuale di S; con c il contorno completo e con $P \equiv (x_1 . x_2 . x_3)$ il punto generico di C; con $\boldsymbol{F}\, dC$ e $\boldsymbol{f}\, dc$ la

forza di massa e la forza superficiale esterna agenti (attualmente) sull'elemento di volume dC circostante a P e sul generico elemento di c; con

$$X_{rs} \qquad (r, s = 1, 2, 3; X_{rs} = X_{sr})$$

le caratteristiche dello stress in P.

Poniamo anche

$$[3] \qquad \begin{cases} a_{pq} = -\frac{1}{C}\left\{\int_C x_q \cdot F_p \, dC + \int_\sigma x_q \cdot f_p \, d\sigma\right\} \\ b_{pqr} = -\frac{1}{C}\left\{\int_C x_p \, x_q \cdot F_r \, dC + \int_\sigma x_p \, x_q \cdot f_r \, d\sigma\right\} \end{cases} \qquad (p, q, r = 1, 2, 3).$$

I prodotti $-Ca_{pq}$, $-Cb_{pqr}$ rispettivamente coincidono con le coordinate astatiche e con le coordinate iperastatiche [1] della sollecitazione totale (forze di massa + forze al contorno, attive e vincolari).

Detta $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ una qualunque funzione di P uniforme, finita e continua in C insieme alle sue derivate parziali prime rispetto alle x, le equazioni fondamentali di Cauchy (equazioni indefinite + equazioni al contorno) possono sostituirsi [2] con le tre uguaglianze

$$[4] \qquad -\sum_1^3{}_s \int_C \frac{\partial \varphi}{\partial x_s} X_{rs} \, dC = \int_C \varphi F_r \, dC + \int_c \varphi f_r \, d\sigma \qquad (r = 1, 2, 3),$$

purchè queste s'intendano valide per una qualunque scelta della φ.

Da esse, specializzando φ in x_q ($q = 1, 2, 3$) e convenendo, una volta per tutte, di accennare col soprassegno il valor medio in C della generica funzione di P, immediatamente risulta [3]

$$[5] \qquad \bar{X}_{pq} = a_{pq} \qquad (p, q = 1, 2, 3):$$

per ogni sistema continuo in quiete i valori medi delle singole caratteristiche dello stress (moltiplicati per $-C$) *ordinatamente coincidono con le coordinate astatiche della sollecitazione totale*. In particolare si annullano tutti i $\bar{X}_{pq}$ solo quando la sollecitazione è astatica.

---

[1] *Sollecitazioni iperastatiche.* (« Rend. del R. Istituto Lombardo », (2), LXV, 1932).

[2] V. ad es., *Sopra alcune questioni di Statica dei sistemi continui.* (« Annali della R. Scuola Normale Sup. di Pisa », (2), II, 1933) I, n. 1.

[3] *Alcune proprietà di media nell'Elastostatica ordinaria.* (« Rend. della Reale Acc. Naz. dei Lincei » (6), XV, 1932). V. anche *Valori medi delle caratteristiche dello stress in Stereodinamica* (id. id. (6), XXIX, 1939).

Sempre dalle [4], ma specializzando φ in $x_p x_q$ $(p, q = 1, 2, 3)$ risulta

$$[6] \qquad \overline{X_{pq} x_r} = c_{pqr} \qquad (p, q, r = 1, 2, 3)$$

con

$$[6'] \qquad c_{pqr} = \frac{1}{2} \{ b_{prq} + b_{qrp} - b_{pqr} \};$$

la legge di formazione dei secondi membri è facile a ricordarsi, perchè è analoga a quella dei simboli di CHRISTOFFEL di 1ª specie.

Le [5] e [6] implicano che se la sollecitazione totale è iperastatica (1) si annulla ciascuno dei $\overline{X_{pq}}$, $\overline{X_{pq} x_r}$: e viceversa. Più in particolare i $\overline{X_{pq}}$, $\overline{X_{pq} x_r}$ si annullano tutti quanti per ogni tipo di autotensioni.

Di recente, in una comunicazione al secondo congresso della U. M. I. e in una conferenza al Seminario matematico e fisico di Milano (2) il CISOTTI ha ripreso le [4] e [5], insistendo specialmente sulle loro applicazioni nell'ambito della Elastostatica. Per dimostrare la [1] conviene invece prender le mosse da una certa disuguaglianza di carattere generale, che resta ancora da richiamare.

Introduciamo le notazioni abbreviative

$$\begin{cases} X_r = X_{rr} \ , \quad X_4 = X_{23} \ , \quad X_5 = X_{31} \ , \quad X_6 = X_{12} \\ a_r = a_{rr} \ , \quad a_4 = a_{23} \ , \quad a_5 = a_{31} \ , \quad a_6 = a_{12} \qquad (r, t = 1, 2, 3). \\ c_{rrt} = c_{rt} \ , \quad c_{4t} = c_{23t} \ , \quad c_{5t} = c_{31t} \ , \quad c_{6t} = c_{12t} \end{cases}$$

Poniamo anche

$$[7] \qquad \rho_t = \sqrt{\overline{x_t^2}} \qquad (t = 1, 2, 3)$$

aggiungendo la condizione che la terna $x_1 x_2 x_3$ sia terna centrale del volume C (proprio pensato come omogeneo).

Basta allora che la forma quadratica a coefficienti costanti

$$\sum_1^6{}_{rs} \, m_{rs} X_r X_s$$

sia definita positiva o almeno semidefinita positiva, perchè debba risultare (3)

$$[8] \qquad \frac{1}{C} \int_C dC \sum_1^6{}_{rs} \, m_{rs} X_r X_s \geq \sum_1^6{}_{rs} \, m_{rs} \left\{ a_r a_s + \sum_1^3{}_t \frac{c_{rt} c_{st}}{\rho_t^2} \right\}.$$

---

(1) Cfr. loc. cit. (1) a pag. prec.

(2) CISOTTI, *Elementi di media nella meccanica dei sistemi continui.* (« Rend. del Seminario matematico e fisico di Milano », XIV, 1940).

(3) Cfr. loc. cit. (2) a pag. prec., I, n. 4.

In particolare, qualunque sia la costituzione e lo stato fisico del corpo schematizzato in S, valgono le limitazioni

$$[8'] \qquad \overline{X_s^2} \geq a_s^2 + \sum_1^3{}_t \frac{c_{st}^2}{\rho_t^2} \qquad (s = 1, 2, \cdots, 6);$$

anzi la s^{ma} si riduce a un'uguaglianza solo se X_s è funzione lineare (1) di x_1, x_2, x_3.

3. Dimostrazione della [1].

Prendiamo ormai in diretto esame il caso di una trave orizzontale, nelle condizioni e con le notazioni specificate fin dal n. 1. In più sia $2l$ la lunghezza della trave e μ la sua densità in P.

Naturalmente assumeremo come asse x_1 la verticale pel baricentro dell'attuale C, come asse x_2 l'asse geometrico della trave. Queste convenzioni rendono legittima la diretta applicazione della [8]: al tempo stesso, insieme alla limitazione

$$-l \leq x_2 \leq l \cdots C,$$

ovviamente dànno luogo all'uguaglianza (cfr. [7])

$$\rho_1^2 = \frac{1}{A} \int_A x_1^2 \, dA,$$

cioè riducono ρ_1 a ρ.

Le stesse convenzioni – intendendo x_1 orientato come la verticale discendente – implicano

$$F_2 = F_3 = 0 \quad , \quad F_1 = \mu g \cdots C$$

e

$$f_2 = f_3 = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots c$$

Da queste (cfr. [3] e [6']) immediatamente risulta

$$a_{22} = 0 \quad , \quad c_{221} = -\frac{b_{221}}{2} \quad , \quad c_{222} = c_{223} = 0;$$

ciò che intanto permette di dedurre dalla seconda delle [8']

$$\overline{\sigma^2} > \left(\frac{b_{221}}{2\rho_1}\right)^2$$

---

(1) Cfr. ancora loc. cit. nella nota precedente.

e quindi anche

[9] $$\sigma_{max} > \frac{|b_{221}|}{2\varrho},$$

con

$$b_{221} = -\frac{1}{C}\left\{\int_C x_2^2 \cdot \mu g \, dC + \int_c x_2^2 \cdot f_1 \, dc\right\}.$$

Accenniamo con $p(x_2)\,dx_2$ la somma delle grandezze del carico e del peso proprio pel tratto elementare $(x_2 \,.\, x_2 - dx_2)$ della trave; e quindi con

$$P = \int_{-l}^{l} p(x_2)\, dx_2$$

la somma delle grandezze del carico totale e del peso dell'intera trave.

Trascurando la *lunghezza* degli appoggi il contributo delle reazioni vincolari al valore dell'integrale

$$-\int_c x_2^2 \cdot f_1 \, dc$$

si riduce a $l^2 P$; onde risulta

$$Cb_{221} = l^2 \int_{-l}^{l} p(x_2)\, dx_2 - \int_{l}^{l} x_2^2 \cdot p(x_2)\, dx_2,$$

ovvero

[10] $$Cb_{221} = \int_{-l}^{l} (l^2 - \xi^2)\, p(\xi)\, d\xi.$$

D'altra parte, per la sezione normale della trave corrispondente al generico valore x di x_2, si può assumere come espressione del momento flettente

$$m(x) = (l + x)\, R - \int_{-l}^{x} (x - \xi)\, p(\xi)\, d\xi,$$

purchè s'intenda per R la grandezza della reazione vincolare all'estremo $x_2 = -l$; cioè s'intenda

$$2lR = \int_{-l}^{l} (l - \xi)\, p(\xi)\, d\xi.$$

Onde in definitiva si ha

[11] $$2lm(x) = (l + x)\int_{-l}^{l} (l - \xi)\, p(\xi)\, d\xi - 2l\int_{-l}^{x} (x - \xi)\, p(\xi)\, d\xi.$$

Ricaviamo di qui il valore medio m_* di $m(x)$ nell'intero intervallo $(-l, l)$. Basta rilevare che è

$$2\int_{-l}^{x}(x-\xi)\,p(\xi)\,d\xi=\frac{d}{dx}\int_{-l}^{x}(x-\xi)^2\,p(\xi)\,d\xi,$$

per dedurre da (11)

$$4l^2\cdot\frac{1}{2l}\int_{-l}^{x}m(x)\,dx=\frac{(l+x)^2}{2}\int_{-l}^{l}(l-\xi)\,p(\xi)\,d\xi-l\int_{-l}^{x}(x-\xi)^2\,p(\xi)\,d\xi;$$

e quindi

$$4l^2\,m_*=2l^2\int_{-l}^{l}(l-\xi)\,p(\xi)\,d\xi-l\int_{-l}^{l}(l-\xi)^2\,p(\xi)\,d\xi,$$

ovvero

$$4\,lm_*=\int_{-l}^{l}\{2l(l-\xi)-(l-\xi)^2\}\,p(\xi)\,d\xi,$$

Sussistendo l'identità

$$2l(l-\xi)-(l-\xi)^2=l^2-\xi^2,$$

si conclude (cfr. [10])

$$Cb_{221}=4\,lm_*.$$

Vuol dire che la [9] può sostituirsi con

$$\sigma_{\max}>\frac{2\,lm_*}{C\rho}=\frac{2l}{C\rho^2}\cdot m_*\,\rho;$$

dopodichè, per giungere alla [1], basta osservare che le nostre notazioni implicano

$$I=A\rho^2=\frac{C\rho^2}{2l}.$$

Astronomia. — *Sull'opportunità di un calcolo più completo dell'aberrazione annua per le coppie di stelle del Servizio Internazionale delle Latitudini.* Nota di Paolo Vocca, presentata (1) da Luigi Carnera, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

1. In un recente lavoro (2) il prof. Zagar – impostando il problema dell'aberrazione annua nella forma più rigorosa e completa consentita dalle nostre attuali conoscenze sui corpi componenti il Sistema solare – ne propone un nuovo metodo di calcolo che, a differenza di quello abitualmente adoperato, non solo tiene contò dei termini stabiliti supponendo circolare il moto kepleriano della Terra intorno al Sole, ma considera anche quelli, usualmente trascurati, dovuti al moto del Sole stesso intorno al centro di gravità del Sistema solare, alle perturbazioni della Luna e dei pianeti sul moto della Terra, e all'èccentricità dell'orbita effettivamente percorsa da quest'ultima.

Sebbene la considerazione di questi ultimi termini sia già stata esaurientemente sviluppata dai metodi classici (3), con la conclusione di poter trascurare i primi due e di non esservi alcuna necessità di tener conto del terzo, il metodo dello Zagar appare tuttavia interessante per la semplicità, l'eleganza e la completezza con cui il problema viene risolto. Esso, pur senza omettere nessun termine, non porta alcun aumento di lavoro nell'applicazione, poichè le formule concluse dall'A. sono in tutto analoghe alle ben note besseliane, essendo come queste costituite da somme di prodotti di quantità variabili di giorno in giorno, ma costanti per tutte le stelle, per quantità dipendenti unicamente dalle posizioni di queste ultime.

---

(1) Nell'Adunanza del 21 febbraio 1941–XIX.

(2) *Sopra un problema relativo all'aberrazione annua.* « Mem. Soc. Astr. Ital. », vol. XII, 1 (1939).

(3) Ved., ad es., per l'uno o per l'altro dì quei termini: F. Brünnow, *Traité d'astronomie sphérique et d'astronomie pratique*, vol. I, pag. 257 (1869); Villarceau, *Théorie de l'aberration*, ecc., « Conn. des Temps » 1878, pag. 18; H. Battermann, *Beiträge zur Astronomischen Aberrationslehre*, pagg. 28–29 (1881); W. M. Smart, *Spherical astronomy*, pagg. 184–187 (1936); ecc.

Una maggiore complicazione e un maggior lavoro sono soltanto nel calcolo delle prime quantità, che, in luogo delle analoghe besseliane, dovrebbero esser fornite dagli *Annuari*, e che lo ZAGAR, in due successivi lavori [1], calcola per ciascun giorno dell'anno indicato.

Le considerazioni tuttavia, svolte anche dallo ZAGAR, circa gli ordini di grandezza delle *correzioni* risultanti dal suo metodo rispetto a quello abituale, e il dubbio in merito alla reale convenienza del maggior lavoro suddetto nella preparazione delle costanti generali, hanno indotto questo *Ufficio Centrale del Servizio internazionale delle latitudini* a ricercare quale precisamente fosse l'importo di quelle correzioni per le stelle dei programmi adoperati nelle sue Stazioni, e se eventualmente si manifestasse l'opportunità – ai fini di un migliore accordo nei risultati della Polodia – di adottare d'ora in avanti, per il calcolo dell'aberrazione, le nuove formule in luogo delle precedenti.

Ovviamente, in caso affermativo, si sarebbe anche dovuta considerare l'opportunità di procedere, per la necessaria omogeneità e l'indispensabile raccordo progressivo, a una generale revisione e correzione di tutti i calcoli già fatti; lavoro certo di tutt'altro che lieve momento, trattandosi di *molte centinaia di migliaia* di posizioni stellari osservate in tutte le Stazioni, nel cinquantennio da che funziona il Servizio. Forse si sarebbe anche potuto stabilire di limitare tale revisione soltanto ai cinque anni in cui il detto Servizio è disimpegnato dall'Italia; ma, pur così, la fatica sarebbe sempre stata ben rilevante, avendosi in media, fra le otto Stazioni dei tre paralleli, una mole di *undici* o *dodici mila* coppie di stelle osservate ogni anno!

Fortunatamente, tuttavia, non sembra sia il caso di preoccuparsi di ciò, come ora intendo mostrare esaminando separatamente sia i termini correttivi indipendenti dall'eccentricità dell'orbita terrestre, sia quelli che ad essa si riferiscono. Naturalmente, nel nostro problema, basterà considerare soltanto gli effetti dell'aberrazione in *declinazione*, non avendo nella pratica alcuna importanza quelli *in ascensione retta*.

2. Come è noto, la parte che, nel calcolo abituale della declinazione apparente di una stella, compete all'aberrazione è quella espressa dalla somma dei due termini:

$$[1] \qquad (\Delta\delta)_B = Cc' + Dd'$$

dove C e D sono le *costanti besseliane* indipendenti dalla stella stessa, e che, fornite giorno per giorno dai principali Annuari astronomici e relative al

---

[1] *Tavole per l'aberrazione annua totale 1940.* « Mem. della R. Accademia delle Scienze di Bologna », ser. IX, to. VII (1939); *Tavole per l'aberrazione annua totale 1941.* « Mem. della R. Accademia delle Scienze di Bologna », ser. IX, to. VIII (1940).

moto puramente kepleriano della Terra, *non ne comprendono* però l'effetto dovuto all'eccentricità; mentre

$$[2] \qquad \begin{cases} c' = \operatorname{tg}\varepsilon \cos\delta - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\delta \\ d' = \cos\alpha \operatorname{sen}\delta \end{cases}$$

sono invece le quantità da calcolarsi per ogni stella (ε obliquità dell'eclittica; α e δ ascensione retta e declinazione della stella).

Lo Zagar, seguendo il suo procedimento, giunge invece alla formula [1]:

$$[3] \qquad (\Delta\delta)_Z = Hh' + Kk' - Ll'$$

in cui H K ed L sono delle quantità analoghe alle precedenti C e D e, come esse, date dallo Zagar giorno per giorno, ma nelle quali sono contenuti non solo gli effetti del vero moto kepleriano terrestre (*compreso* quindi quello dovuto all'eccentricità) ma anche gli effetti dipendenti dal moto baricentrico del Sole e dalle perturbazioni della Luna e dei pianeti.

Ovemai, per uniformità col metodo abituale o per confrontare posizioni calcolate coi due procedimenti, si volesse anche nel secondo *trascurare il termine dovuto all'eccentricità* dell'orbita terrestre, lo Zagar suggerisce di sostituire alla [3] – per la δ – la formula

$$[4] \qquad (\Delta_0\delta)_Z = H_0 h' + K_0 k' - L_0 l'$$

nella quale H_0 K_0 ed L_0 sono le quantità precedenti rispettivamente epurate delle componenti i j n relative al detto termine. Queste componenti che, com'è noto [2] si mantengono press'a poco costanti per molti anni, vengono date, nel primo lavoro dello Zagar, di cento in cento anni dal 1800 al 2000. Per il 1940 si ha:

$$[5] \qquad i = -0'',336 \qquad j = -0'',065 \qquad n = -0'',028$$

sì che, per qualunque data di esso, si farà:

$$[6] \qquad H_0 = H - 0'',336 \qquad K_0 = K - 0'',065 \qquad L_0 = -0'',028.$$

In quanto poi alle quantità costanti per ogni stella, tanto nella [3] che nella [4] si ha, secondo lo Zagar:

$$[7] \qquad \begin{cases} h' = \cos\alpha \operatorname{sen}\delta = d' \\ k' = \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\delta = \operatorname{tg}\varepsilon \cos\delta - c' \\ l' = \cos\delta . \end{cases}$$

---

[1] Per uniformità di simboli, ho preferito qui porre $l' = \cos\delta$ in luogo della $l = -\cos\delta$ usata dallo Zagar.

[2] Ved., ad esempio: W. M. Smart, loc. cit.

Ciò posto, se ora, per esprimere la *parte correttiva* complessivamente introdotta dalle nuove formule nel calcolo dell'aberrazione, facciamo la differenza fra la [3] e la [1], otteniamo, tenendo presenti le [2] e le [7]:

$$\begin{aligned} \Delta(\Delta\delta) &= (\Delta\delta)_Z - (\Delta\delta)_B \\ &= (H-D)\,h' + (K+C)\,k' - (L+C\,\mathrm{tg}\varepsilon)\,l' \\ &= (H-D)\,d' - (K+C)\,c' + (K\,\mathrm{tg}\varepsilon - L)\,l' \end{aligned} \qquad [8]$$

e, analogamente, fra la [4] e la [1]:

$$\begin{aligned} \Delta_0(\Delta\delta) &= (\Delta_0\delta)_Z - (\Delta\delta)_B \\ &= (H_0-D)\,h' + (K_0+C)\,k' - (L_0+C\,\mathrm{tg}\varepsilon)\,l' \\ &= (H_0-D)\,d' - (K_0+C)\,c' + (K_0\,\mathrm{tg}\varepsilon - L_0)\,l'. \end{aligned} \qquad [8']$$

Naturalmente quando, come nel notro caso, si tratta di posizioni già calcolate col vecchio metodo (e si è quindi già in possesso delle costanti stellari besseliane), converrà, tanto nella [8] che nella [8'], adoperare la espressione dell'ultimo rigo.

In un'altra prossima Nota, approfondendo l'esame del metodo dello Zagar allo scopo di dedurne qualche risultato non privo di interesse, mostrerò come variano di giorno in giorno i coefficienti dei primi due termini di quella espressione, e farò vedere come il coefficiente del terzo termine, sia nella [8] che nella [8'], assuma sempre un valore piccolissimo *assai prossimo a zero*, tanto che il termine stesso potrebbe anche, in ogni caso, essere trascurato. La [8] o la [8'] si trasformerebbero così in una semplice somma di soli *due* termini, allo stesso modo di quando accade per l'α. Qui, tuttavia, preferirò ora eseguire il calcolo completo.

La quantità $\Delta_0(\Delta\delta)$ data dalla [8'] esprime dunque *la parte correttiva dovuta unicamente al moto baricentrico del Sole e alle perturbazioni lunare e planetarie*. Volendo invece esprimere *quella dipendente soltanto dall'eccentricità dell'orbita terrestre*, non v'è che da fare la differenza tra la [8'] e la [8], tenendo presenti le [5] e [6], e ottenendo:

$$\begin{aligned} \Delta_e(\Delta\delta) &= \Delta_0(\Delta\delta) - \Delta(\Delta\delta) \\ &= -id' + jc' + (n - j\,\mathrm{tg}\varepsilon) \end{aligned} \qquad [9]$$

che si riduce semplicemente a:

$$\Delta_e(\Delta\delta) = -id' + jc' \qquad [10]$$

dovendosi considerar *nullo*, come è facile verificare ($\mathrm{tg}\varepsilon = 0{,}4337$), il terzo termine racchiuso in parentesi.

Servendomi dunque della [8'] e della [10], calcolerò ora separatamente le suddette correzioni per le coppie di stelle dei nostri programmi. Esporrò qui soltanto i risultati relativi al programma per le *cinque Stazioni del parallelo nord*, essendo esso, fra i tre, quello di gran lunga più importante; ma,

come sarebbe facile vedere, le conclusioni a cui si giungerà non sono sostanzialmente diverse per gli altri due: quello delle *due Stazioni del parallelo sud* e quello della *Stazione di Batavia*.

3. Poichè la quantità $(H_0—D)$ oscilla, col periodo di circa una lunazione, tra valori vicinissimi a *zero* e un *massimo negativo* (compreso, nel 1940, fra — 0″,013 e — 0″,016 a seconda dei mesi), mentre, con lo stesso periodo, ma *sfasato* da 7 a 10 giorni rispetto al precedente, la quantità (K_0+C) varia invece tra valori pure prossimi a *zero* e un *massimo positivo* (compreso, sempre nel 1940, fra + 0″,014 e + 0″,018 nei diversi mesi), e inoltre, per entrambe le quantità, i *massimi* e i *minimi* sono assai larghi; e poichè d'altra parte, come ho già detto, $(K_0 \operatorname{tg}\varepsilon — L_0)$ si conserva sempre *quasi nullo*, si trova che il valore numerico della correzione $\Delta_0(\Delta\delta)$ sarà *massimo*: o per quelle coppie di stelle del programma i cui d' e c' siano *ugualmente grandi e di ugual segno*, e per quelle date in cui tanto $(H_0—D)$ che (K_0+C) siano *prossime al massimo*; ovvero per quelle coppie aventi d' e c' l'uno *grande* e l'altro *assai piccolo* numericamente, e per quelle date in cui le precedenti quantità siano pure, corrispondentemente e in valore assoluto, l'una *grande* e l'altra *molto piccola*.

Tra le coppie del parallelo nord, le seguenti – specialmente le ultime due – sono quelle che meglio rispondono all'uno o all'altro di tali requisiti. Le indico qui, segnando a fianco di ciascuna il periodo dell'anno in cui la stessa viene osservata [1] e le quantità d' c' l' ad essa relative [2].

Coppia	mesi d'osservazione	d'	c'	l'
31	febbr.–marzo	— 0,574	+ 0,077	+ 0,776
37	marzo–aprile	— 0,619	+ 0,369	+ 0,764
53	maggio–giugno	— 0,090	+ 0,960	+ 0,775
68	agosto–sett.	+ 0,582	+ 0,575	+ 0,775

[1] Come è noto, ogni *gruppo di sei coppie* viene osservato dalle nostre Stazioni internazionali *per due mesi*: nel primo, insieme col gruppo che *precede*; nel secondo, insieme con quello che *segue*.

[2] Tali quantità, come è ovvio e come usiamo fare in questo Ufficio, vengono calcolate, per ciascuna coppia, come *media* fra le analoghe corrispondenti ad ogni singola stella della coppia stessa. È noto, d'altra parte, che la *declinazione media* di ogni coppia del parallelo nord si aggira sempre, entro pochi *primi*, intorno a + 39°8′.

Per meglio far vedere le *variazioni* della correzione $\Delta_0(\Delta\delta)$ corrispondente ad ogni coppia, durante il periodo osservativo d'ognuna di esse scelgo ora *quattro date* – sempre nel 1940 – tali che: nella prima, il valore assoluto della quantità $(H_0—D)$ sia *piccolo* e quello di (K_0+C) *prossimo al massimo*; nella seconda, entrambi i detti valori siano *grandi* e *press'a poco uguali*; nella terza, l'uno e l'altro ancora *quasi uguali* ma *piccoli*; nella quarta, il primo sia *vicino al massimo* e l'altro *piccolo*.

Nel quadro seguente riporto, a fianco delle rispettive date, i valori di tali grandezze e della terza [1], nonchè i corrispondenti prodotti parziali per d' c' l' e la loro somma secondo la [8']:

Coppia	data 1940	$(H_0—D)$	$—(K_0+C)$	$(K_0 \operatorname{tg}\varepsilon—L_0)$	prodotti parziali per d'	prodotti parziali per c'	prodotti parziali per l'	$\Delta_0(\Delta\delta)$
31	febbraio 10	—0″.001	—0″.018	+0″.001	+0″.001	—0″.001	+0″.001	+0″.001
	» 17	— 12	— 16	+ 1	+ 7	— 1	+ 1	+ 7
	» 28	— 2	— 3	— 1	+ 1	0	— 1	0
	marzo 21	— 10	— 3	+ 1	+ 6	0	+ 1	+ 7
37	marzo 8	—0″.002	—0″.018	+0″.001	+0″.001	—0″.007	+0″.001	—0″.005
	» 16	— 13	— 12	+ 1	+ 8	— 4	+ 1	+ 5
	» 26	— 1	— 3	0	+ 1	— 1	0	0
	aprile 17	— 11	— 4	0	+ 7	— 1	0	+ 6
53	aprile 30	—0″.001	—0″.016	+0″.001	0″.000	—0″.015	+0″.001	—0″.014
	maggio 9	— 14	— 13	+ 1	+ 1	— 12	+ 1	— 10
	» 20	0	— 3	— 1	0	— 3	— 1	— 4
	giugno 12	— 10	— 2	— 1	+ 1	— 2	— 1	— 2
68	agosto 18	—0″.001	—0″.014	0″.000	—0″.001	—0″.008	0″.000	—0″.009
	» 25	— 13	— 13	0	— 8	— 7	0	— 15
	settembre 6	— 2	0	+ 1	— 1	0	+ 1	0
	» 27	— 14	— 3	+ 1	— 8	— 2	+ 1	— 9

[1] Poichè lo ZAGAR dà le sue quantità a *tre* cifre decimali, mentre quelle besseliane son riportate a *due* negli *Annuari*, io ho dovuto, allo scopo di assicurare qui la *terza* cifra, ricalcolare indipendentemente le seconde.

Come appare dall'ultima colonna, i valori della correzione $\Delta_0(\Delta\delta)$, mentre variano sensibilmente durante il periodo d'osservazione di una stessa coppia, risultano d'altro canto assai esigui, specialmente se si considera che – come mostrerò meglio nel prossimo lavoro – nel 1940 l'effetto del moto baricentrico del Sole ha dovuto essere assai vicino al massimo possibile (1). Il *più grande importo* di quella correzione (che, per le cose dette, deve dunque esser considerato come *il più grande* fra quelli corrispondenti, per qualsiasi data, *a tutte le 72 coppie di stelle del programma del parallelo nord*) supera di poco il *centesimo di secondo*, come si verifica, *per qualche particolare data*, per le coppie 53 e 68, mantenendosi per le altre date e le altre coppie sensibilmente inferiore a tal valore.

Se ora si rifiette che, pei nostri scopi, di tutti i valori della latitudine ricavati dalle osservazioni di ogni coppia *in un mese* noi facciamo la media, e che in un mese, a seconda delle date, possono anche aversi per il $\Delta_0(\Delta\delta)$ valori piccolissimi o di segno opposto; che, inoltre, la *polodia* vien fondata su medie mensili di *gruppo* – ciascuno composto di 6 coppie – e che fra queste ultime ben difficilmente possono aversi correzioni $\Delta_0(\Delta\delta)$ tutte elevate, ma senza dubbio si avranno, al contrario, valori alti e bassi e, anche, di segno opposto; si può con sicurezza concludere che l'effetto di tale correzione – al massimo ammontante a poco più di *mezzo centesimo di secondo in un mese*, per una determinata *coppia* – non potrà superare, per ogni *gruppo*, l'importo di *qualche millesimo di secondo*; mentre è assai probabile che il suo effetto *complessivo* sulla determinazione della *polodia* (fondata per di più, come noi usiamo fare, sull'insieme delle osservazioni compiute nelle Stazioni del parallelo nord e in quelle del parallelo sud) finisca col diventare *praticamente nullo*, o, almeno, *trascurabile*.

Ad ogni modo, seppure in qualche caso – ad esempio, per circostanze concordanti fra tutte le coppie di un gruppo osservate in un mese alle diverse date – si dovesse raggiungere un ammontare di $\Delta_0(\Delta\delta)$ pari a $\pm$ 0″,01, nemmeno quest'ultimo sarebbe il caso di prendere in considerazione, quando si pensi: 1) che le declinazioni di partenza delle nostre stelle sono appunto date al 0″,01 e la loro incertezza è sovente ben superiore a tal valore (si hanno errori medi che oscillano fra un $\pm$ 0″,05 e un $\pm$ 0″,20 !); 2) che l'error medio che affetta in generale la media mensile delle osservazioni di una *coppia* è di $\pm$ 0″,06, e quello sulla media di un *gruppo* è superiore a $\pm$ 0″,02.

Da tutto ciò, e specialmente se si tiene ancora presente l'enorme lavoro che una generale revisione in tal senso richiederebbe e a cui ho già accennato, sembra dunque lecito concludere che – *per quanto riguarda le corre-*

(1) Si pensi anche, fra l'altro, alla *congiunzione* di Giove e Saturno nel corso di tale anno.

zioni dipendenti dal moto baricentrico del Sole e dalle perturbazioni lunare e planetarie, e nonostante che il metodo dello ZAGAR sia scientificamente più rigoroso dell'usuale – *non sia assolutamente il caso di pensare a modificare gli attuali procedimenti nel calcolo dell'aberrazione*, per le stelle dei nostri programmi di latitudine.

4. Resta ora da considerare l'opportunità di introdurre invece, nel calcolo dell'aberrazione, l'effetto del termine dipendente dall'eccentricità dell'orbita terrestre.

Questo termine è stato sempre trascurato dagli astronomi poichè è ovvio che, essendo il suo importo pochissimo variabile nel corso di molti anni per una stessa stella, si è ritenuto più comodo e pratico prescindere da esso e considerarlo *conglobato* con la coordinata dell'astro non ancora corretta dell'aberrazione.

In effetti, se nel nostro caso, adottando le notazioni precedenti, indichiamo con δ_{pn} la declinazione di una stella epurata solo della precessione e della nutazione, col $(\Delta\delta)_Z$ la sua correzione per effetto dell'*aberrazione totale* calcolata con metodo dello ZAGAR secondo la [3], con $(\Delta\delta)_B$ quella semplificata dal BESSEL con la [1], con $\Delta_0(\Delta\delta)$ la parte correttiva da aggiungere a quest'ultima per tener conto del moto baricentrico del Sole e delle perturbazioni lunare e planetarie secondo la [8′], e con $\Delta_e(\Delta\delta)$ quella dovuta all'eccentricità dell'orbita terrestre secondo la [10], la *declinazione apparente* effettiva δ_a sarà data da:

$$[11] \qquad \begin{aligned} \delta_a &= \delta_{pn} + (\Delta\delta)_Z \\ &= \delta_{pn} + (\Delta\delta)_B + \Delta_0(\Delta\delta) + \Delta_e(\Delta\delta) . \end{aligned}$$

Ma, considerando l'ultima correzione come una quantità *costante* che affetta la declinazione di ogni stella, si è preferito riunirla con la δ_{pn}, convenendo di definire la

$$[12] \qquad \delta_v = \delta_{pn} + \Delta_e(\Delta\delta)$$

come la *declinazione vera* dell'astro; e analogamente per ciò che riguarda l'α.

Nel caso tuttavia delle nostre ricerche di precisione per gli spostamenti del Polo, può forse valere la pena di approfondire un po' meglio le cose ed esaminare più da vicino quale precisamente sia l'importo della correzione trascurata.

Poichè, come ho già detto, nei nostri calcoli le osservazioni mensili delle coppie di stelle vengono riunite in medie di *gruppo*, e per ciascuno di questi la correzione suddetta può ben ritenersi, nei due mesi d'osservazione, rigorosamente costante, ho calcolato la quantità $\Delta_e(\Delta\delta)$ per ognuno

dei 12 gruppi del parallelo nord, servendomi della [10] e attribuendo a ciascun gruppo le costanti d'_m e c'_m rispettivamente uguali alla media delle singole d' e c' relative alle 6 stelle del gruppo stesso.

Il calcolo – per il 1940 – è riportato nella tabella seguente, dove, a fianco di ciascun gruppo, ho indicati i mesi in cui esso viene osservato, le costanti d'_m e c'_m, i corrispondenti prodotti parziali secondo la [10], assumendo per i e j i valori dati dalla [5], e infine, nella penultima colonna, la loro somma, ossia la correzione $\Delta_e(\Delta\delta)$. Come si vede, gli importi di quest'ultima sono rilevanti, raggiungendo e oltrepassando persino, in valore assoluto, i 0″,2.

Gruppo	mesi d'osservazione	(1940)		prodotti parziali (1940)		$\Delta_e(\Delta\delta)$ (1940)	*Variazione* di $\Delta_e(\Delta\delta)$ (dal 1940 al 1990)
		d'_m	c'_m	$-id'_m$	$+jc'_m$		
I	sett.–ott.	+ 0.591	+ 0.163	+ 0″.199	— 0″.011	+ 0″.188	— 0″.001
II	ott.–nov.	+ 0.436	— 0.096	+ 0 .146	+ 0 .006	+ 0 .152	+ 0 .001
III	nov.–dic.	+ 0.138	— 0.263	+ 0 .046	+ 0 .017	+ 0 .063	+ 0 .001
IV	dic.–genn.	— 0.171	— 0.249	— 0 .057	+ 0 .016	— 0 .041	+ 0 .001
V	genn.–febbr.	— 0.435	— 0.097	— 0 .146	+ 0 .006	— 0 .140	+ 0 .001
VI	febbr.–mar.	— 0.588	+ 0.185	— 0 .198	— 0 .012	— 0 .210	0 .000
VII	mar.–apr.	— 0.588	+ 0.492	— 0 .198	— 0 .032	— 0 .230	— 0 .001
VIII	apr.–mag.	— 0.291	+ 0.774	— 0 .098	— 0 .050	— 0 .148	— 0 .003
IX	mag.–giug.	— 0.154	+ 0.918	— 0 .052	— 0 .060	— 0 .112	— 0 .004
X	giug.–lugl.	+ 0.161	+ 0.922	+ 0 .054	— 0 .060	— 0 .006	— 0 .004
XI	lugl.–ago.	+ 0.435	+ 0.760	+ 0 .146	— 0 .049	+ 0 .097	— 0 .004
XII	ago.–sett.	+ 0.591	+ 0.492	+ 0 .199	— 0 .032	+ 0 .167	— 0 .003

Ma quel che interessa al nostro scopo è evidentemente, per un dato gruppo, la *variazione* della correzione $\Delta_e(\Delta\delta)$ nel corso del tempo, e non già il suo valore. Prescindendo perciò – com'è ovvio – dalle variazioni delle corrispondenti costanti d'_m e c'_m [1], al fine di dedurre l'errore che si com-

[1] Tali variazioni sono, del resto, assai piccole per le nostre stelle, limitandosi generalmente a poche unità della 5ª decimale ogni anno, e giungendo solo in qualche caso a 1 o 2 unità della 4ª.

mette trascurando la detta correzione, per ognuno dei precedenti gruppi ho calcolata la *variazione* di $\Delta_e(\Delta\delta)$ durante i *50 anni* successivi al 1940, ammettendo – come risulta dai valori indicati dallo ZAGAR nel suo primo lavoro già citato – che in tale mezzo secolo la componente i vari di $-0'',0007$ e quella j di $-0'',0047$.

La detta variazione – tra il 1940 e il 1990 dunque – è riportata, per ogni gruppo del parallelo nord, nell'ultima colonna del quadro precedente, dalla quale si vede come essa sia sempre assai esigua e come effettivamente gli errori che, *pur dopo un cinquantennio*, potrebbero alterare i risultati del nostro calcolo della *polodia* per il fatto di trascurare l'eccentricità dell'orbita terrestre, siano in ogni caso sensibilmente inferiori ai limiti già detti e consentiti sia dalle osservazioni, sia da tutte quelle cause – quali la imperfetta conoscenza delle costanti strumentali, l'incertezza delle posizioni stellari fondamentali, ecc. – che sempre infirmano e infirmeranno i risultati stessi.

Come del resto era da prevedere dunque, *neanche per quanto riguarda la correzione dipendente dall'eccentricità dell'orbita terrestre converrà indursi a modificare il semplice e abituale calcolo dell'aberrazione*, per le stelle dei nostri programmi di latitudine.

Chimica. — *Studi su gli indoni. Sintesi del 2–3–6–Trimetil–Indone–1* (1). Nota XVIII (2) di Remo de Fazi e Cesare Savi, presentata (3) da Guido Bargellini, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

In precedenti esperienze (4) abbiamo osservato un singolare comportamento di alcuni indoni all'azione del cloro, e cioè, sono stati ottenuti oltre che ai normali composti, per l'addizione dell'alogeno al doppio legame, anche corpi che hanno *un solo atomo di cloro di addizione.*

Con vari metodi, dall'α–metil–β–fenil–indone (2–metil–3–fenil–indone–1) (form. I) si sono avuti due dicloro–idrindoni e quattro monocloro–derivati (5), e dall'α–etil–β–fenil–indone (2–etil–3–fenil–indone–1) (form. II) due dicloro–idrindoni e cinque monocloro–derivati (6). Questo inatteso risultato, assai interessante non può essere chiarito senza un notevole materiale sperimentale; e perciò, da qualche anno, abbiamo affrontato un piano di ricerche che speriamo ci permetta di giungere presto a delle conclusioni. Gli indoni che sono stati da noi impiegati finora, hanno nelle posizioni α (2) un alchile, e in β (3) un fenile, e poichè crediamo che questi gruppi influenzino l'andamento della reazione, inizieremo esperienze con indoni aventi nelle posizioni α e β due fenili (form. III), o due alchili eguali (form. IV), ed anche con alchili nel nucleo benzenico (form. V)

---

(1) Ricerca eseguita nell'Istituto di Chimica farmaceutica e tossicologica della Regia Università di Pisa.

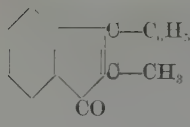
(2) La nota XVII è in corso di stampa sulla « Gazzetta Chimica Italiana ».

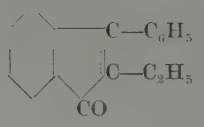
(3) Nell'Adunanza del 21 febbraio 1941–XIX.

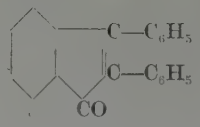
(4) R. de Fazi e F. Pirrone, « Gazz. Chim. Ital. », *60*, 277 (1930); *62*, 101 (1932); *66*, 757 (1936); *67*, 128, 207 (1937) e *69*, 166 (1939).

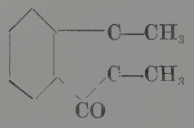
(5) R. de Fazi e F. Pirrone, « Gazz. Chim. Ital. », *66*, 757 (1936) e *67*, 128 (1937).

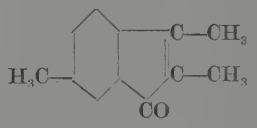
(6) R. de Fazi e F. Pirrone, « Gazz. Chim. Ital. », *67*, 207 (1937); *69*, 166 (1939).


I


II

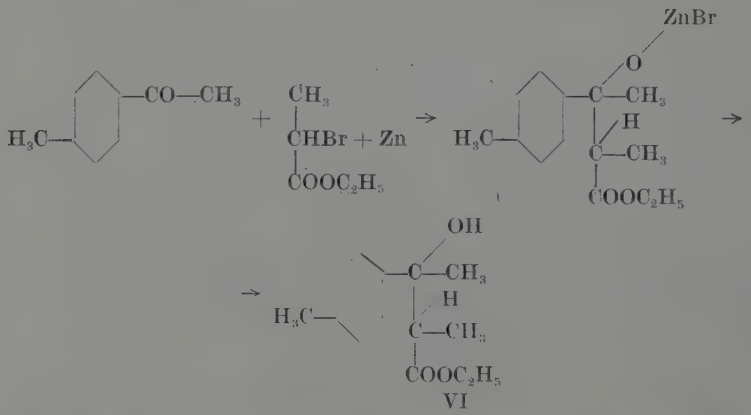

III


IV


V

L'α–β–difenil–indone (2–3–difenil–indone–1) (7) e l'α–β–dimetil–indone (2–3–dimetil–indone–1) (8) sono già noti, ma non il 2–3–6–trimetil–indone–1 (form. V), ed in questa Nota riferiamo appunto sulla sintesi di questo indone.

Applicando il metodo trovato da uno di noi (9) si è fatto reagire secondo Reformatsky (10) il p–metil–acetofenone e l'α–bromo–propionato d'etile con zinco in piccoli granuli e con tracce di iodio, ed è stato così ottenuto l'estere etilico dell'acido α–metil–β–metil–β–p–tolil–β–ossi–propionico (form. VI):


VI

Questo estere, per azione dell'acido solforico concentrato, dà direttamente il 2–3–6–trimetil–indone–1, ma il rendimento è piccolissimo. Non

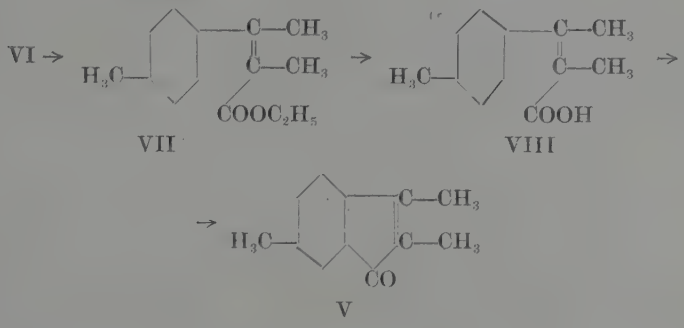
(7) R. de Fazi, « Rend. R. Acc. Lincei », *24*, ser. V, 439 (1915) e « Gazz. Chim. Ital. », *45* (I), 552 (1915).

(8) H. Burton; C. Shoppee, « Journ. Chem. Soc. », pag. 1156 (1935).

(9) R. de Fazi, « Rend. R. Acc. Lincei », *24*, ser. V, 150 (1915) e « Gazz. Chim. Ital. », *45* (II), 143, (1915); *54*, 996 (1924).

(10) Reformatsky, « Ber. », *20*, 1210 (1887) e *28*, 2463 (1895).

bisogna dimenticare però, che prima di giungere all'indone si passa attraverso l'estere acrilico e poi all'acido, che possono essere presenti nelle due forme trans e cis (form. VII) e che soltanto dalla cis è possibile ottenere il 2–3–6–trimetil–indone–1 (form. V):



Anche in questa sintesi si nota che, se l'estere lattico e quello acrilico corrispondenti dànno con acido solforico concentrato la colorazione verde smeraldo [11] si riesce ad ottenere il 2–3–6–trimetil–indone–1, altrimenti questa reazione non avviene. Partendo però dall'estere lattico, il rendimento è piccolissimo; migliori rendimenti, benchè sempre piccoli, si ottengono facendo agire l'acido solforico concentrato, a temperatura ordinaria, sull'estere etilico dell'acido α–metil–β–metil–β–p–tolil–acrilico. Questo composto si ha facilmente per azione dell'anidride fosforica su una soluzione benzenica di estere etilico dell'acido α–metil–β–metil–β–p–tolil–β–ossi–propionico (form. VI), composto oleoso giallo che a 7 mm. bolle a 146°. Se la reazione si eseguisce a più alta temperatura, adoperando come solvente gli xileni, si ha insieme all'estere acrilico un poco di 2–3–6–trimetil–indone–1.

Dall'estere etilico dell'acido α–metil–β–metil–β–p–tolil–acrilico (olio giallo che a 6 mm. bolle a 134°), con acido solforico concentrato, si ha immediata colorazione verde smeraldo e gettando la soluzione in ghiaccio si separa un olio, dal quale si hanno cristalli giallo arancio che fondono a 69–71° e che sono costituiti dall'indone impuro. Nei vari tentativi eseguiti per separare la sostanza oleosa dall'indone non hanno dato buoni risultati, la piastra porosa, la separazione cromatografica e neppure il reattivo P. di GIRARD [12]; il miglior mezzo si è dimostrato la distillazione in corrente di vapore. In tutte le condizioni in cui si è operato è stato notato che sia partendo dall'estere lattico, come dall'acrilico, puri, nella preparazione

---

[11] R. DE FAZI, « Gazz. Chim. Ital. », *51*, 164 (1921).

[12] GIRARD e SANDULESCO, « Helv. Chim. Acta », *19*, 1095 (1936).

dell'indone si ottiene sempre del p-metil-acetofenone, scissione già osservata in altri esteri lattici e acrilici [13]. Il 2-3-6-trimetil-indone-1, si presenta in fini aghetti giallo arancio fondenti a 72-73°, il suo semicarbazone è in aghi gialli che fondono a 224-225°, con decomposizione. Il rendimento di questo indone dall'estere etilico dell'acido α-metil-β-metil-β-p-tolil acrilico, è soltanto del 4 % circa.

Ringraziamo sentitamente la Società Montecatini che ci ha gentilmente donato il chetone necessario al raggiungimento di questi risultati.

Parte sperimentale.

Estere etilico dell'acido α-metil-β-metil-β-p-tolil-β-ossi-propionico.

In un pallone da 300 cc., ben disseccato, si introducono 27 gr. di p-metil-acetofenone (p. eb. 222°), 40 gr. di α-bromo-propionato d'etile, 14 gr. di zinco in granuli, o meglio in foglie sottili, 25 cc. di benzolo anidro e un cristallino di iodio. Si riscalda all'ebollizione a b. m., e subito ha luogo, specialmente con lo zinco in foglie, una reazione abbastanza vivace; il colore della soluzione passa dal giallo al bruno, con riflessi verde. In un'ora la reazione è quasi terminata, ma si scalda ancora per circa un'ora e poi si lascia raffreddare. La massa, di consistenza pastosa, si decompone con acido solforico diluito in un separatore e si raffredda con ghiaccio; si separa poi lo strato benzenico giallo, da quello acquoso, e si lava il primo con acqua fino a reazione neutra, si secca su cloruro di calcio e si distilla il solvente a b. m.: rimane un olio giallo scuro. Questo si distilla e a 7 mm. si ottengono le seguenti frazioni: 1ª fino a 135° gr. 6 circa; 2ª da 135-140° gr. 6; 3ª 144-146° gr. 20 circa (nella quasi totalità a 146°); 4ª 148-200° gr. 5. La terza frazione dà, con acido-solforico concentrato, colorazione verde smeraldo; le altre invece dànno una colorazione mista, in cui predomina il rosso.

La frazione terza viene analizzata con il seguente risultato:

	trovato	C % 70,78	H % 8,46
per $C_{14}H_{20}O_3$	calcolato	C % 71,18	H % 8,54

Estere etilico dell'acido α-metil-β-metil-β-p-tolil-acrilico.

A 10 gr. di estere etilico dell'acido α-metil-β-metil-β-p-tolil-β-ossi-propionico, ottenuto col metodo precedentemente descritto, si aggiun-

---

[13] Stoermer e Friederici, « Ber. », *41*, 324 (1908); Banchetti A., « Gazz. Chim. Ital. », *69*, 398 (1939) e Arcangeli E. F., « Rend. R. Acc. Italia », ser. VII (1), 55 (1939).

gono 200 cc. di benzolo anidro e 20 gr. di anidride fosforica: la soluzione si colora in giallo, giallo verde e infine in verdastro. Si fa bollire a ricadere per tre ore e dopo raffreddamento si decanta la soluzione benzenica, che viene lavata con una soluzione acquosa di carbonato sodico e poi con acqua; infine, disseccata su cloruro di calcio, è privata del solvente a b. m. Il residuo viene distillato: a 6 mm. ed a 134° si raccolgono circa gr. 7 di olio giallo oro che viene analizzato (semi-microanalisi):

	trovato	C % 77,66	H % 7,81
per $C_{14}H_{18}O_2$	calcolato	C % 77,03	H % 8,31

Questo estere, con acido solforico concentrato, a temperatura ordinaria, dà un'immediata colorazione verde smeraldo.

Sono stati fatti altri tentativi per ottenere questo estere acrilico e l'indone, bollendo l'estere lattico, disciolto in xileni, con anidride fosforica, ma si sono avuti, con pessimi rendimenti, degli oli rosso bruni dai quali è stato possibile, con difficoltà, separare soltanto pochi cristalli di colore giallo arancio, fondenti fra 68° e 71°, costituiti da 2-3-6-trimetil-indone-1.

2-3-6-*trimetil-indone*-1:

a) Dall'estere etilico dell'acido α-metil-β-metil-β-p-tolil-β-ossi-propionico: 3 gr. di questo estere si aggiungono a poco a poco a 30 cc. di acido solforico concentrato, raffreddando; si ottiene una soluzione di colore verde smeraldo intenso, che dopo 15 minuti si getta, con precauzione, su ghiaccio pestato; si separano delle gocce di olio giallo scuro, si estrae con etere, si lava l'etere con carbonato sodico 2/N, poi con acqua, si secca su cloruro di calcio e si distilla. Rimane un olio giallo, che non si riesce a cristallizzare dai comuni solventi organici; alcool metilico ed etilico, etere etilico, cloroformio, benzolo. Dopo parecchi giorni, si depositano dall'olio rari aghi giallo arancio, che si separano meccanicamente, e fondono così impuri a 70-72° (2-3-6-trimetil-indone-1). Dalle acque madri alcaline, per acidificazione con acido cloridirico, si ottiene una sostanza oleosa che non è stata studiata;

b) dall'estere etilico dell'acido α-metil-β-metil-β-p-tolil-acrilico: 7 gr. di questo estere si aggiungono a poco a poco in 70 cc. di acido solforico concentrato, raffreddando con ghiaccio ed agitando; si ha così una soluzione di colore verde smeraldo. Dopo mezz'ora, si getta in ghiaccio e si estrae con etere l'olio giallo formatosi; la soluzione eterea viene lavata con carbonato sodico 2/N e con acqua, seccata su K_2CO_3 e privata per distillazione, a b. m., del solvente. Il residuo separa dei cristalli giallo arancio, misti ad olio. I tentativi di togliere l'olio per cristallizzazione, con i solventi organici usuali, sono rimasti infruttuosi. Dopo aver fatto assorbire la maggior parte dell'olio su piastra porosa rimangono circa gr. 0,25

di sostanza, fondente a 70–72°, che viene seccata nel vuoto, su $CaCl_2$, ed analizzata:

trovato C % 82,50 H % 6,88

per $C_{12}H_{12}O$ calcolato C % 83,67 H % 7,02.

Per purificare il 2–3–6–trimetil–indone–1, così ottenuto, si è provato il reattivo P di GIRARD, senza risultati soddisfacenti, benchè si sia riusciti a separare una resina di color giallo rosso, di costituzione non chetonica ed in quantità relativamente grande, che non è stata studiata. La parte chetonica disciolta in alcool etilico deposita dei cristalli tabulari di colore arancio, sempre impuri per olio (p–metil–acetofenone), e fondenti a 70–72°. Disseccati nel vuoto, su $CaCl_2$, vengono analizzati:

(semimicroanalisi) trovato C % 82,44 H % 7,29

Anche la via cromatografica non ha dato risultati utili. Una purificazione si raggiunge con la distillazione in corrente di vapore eseguita sia sul liquido acido della decomposizione in ghiaccio della soluzione solforica concentrata, sia sui residui dell'estrazione di essa, con solventi. In questo modo si ottengono delle croste giallo arancio e dei fiocchetti che filtrati, lavati con acqua e seccati, odorano nettamente di p–metil–acetofenone, ma sono facilmente cristallizzabili da etere di petrolio. Si hanno in questo modo dei fini aghi giallo arancio, fondenti a 72–73°, alla terza cristallizzazione; disseccati nel vuoto, su P_2O_5, dànno alla semimicroanalisi i seguenti risultati: C % 82,76 e H % 6,88.

Il 2–3–6–trimetil–indone–1 è solubilissimo in alcool metilico, etilico, etere, cloroformio, benzolo e diossano, meno in etere di petrolio; con acido solforico concentrato dà, a t. o., una colorazione blu verdastra.

Semicarbazone del 2–3–6–trimetil–indone–1.

Gr. 0,8 di indone, non purificato, disciolti in poco alcool etilico, vengono addizionati di gr. 0,8 di cloridrato di semicarbazide e di 1 gr. di acetato di potassio; si aggiunge poi acqua ed alcool fino a completa soluzione e si lascia reagire a t. o. per quattro giorni. Si ottengono dei cristalli gialli che vengono filtrati e lavati con alcool ed acqua e poi ricristallizzati da alcool metilico; fondono a 224–225° con decomposizione.

Il semicarbazone viene disseccato su $CaCl_2$: si determina l'azoto (semimicroanalisi):

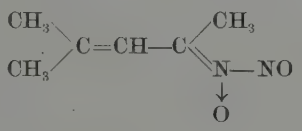
trovato N % 18,49

per $C_{13}H_{15}N_3O$ calcolato N % 18,33

Tutti i punti di fusione sono stati determinati all'apparecchio KOFLER.

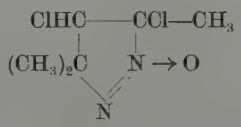
Chimica (Chimica organica). — *Ricerche sui pernitrosoderivati. Sulla cosidetta «mesitilnitrimina» di Harries.* Nota II di Raffaello Fusco e Giovanni Trisoglio, presentata (1) da Giuseppe Bruni, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

Nella Nota precedente (2) è stata discussa la costituzione della « mesitilnitrimina » e si è dimostrato che a questo corpo si deve invece assegnare la struttura I di *pernitrosomesitilossido* o *N nitrosomesitilossima*:



(I)

Uno degli argomenti che ci hanno permesso di giungere a questa conclusione si basava sulla assegnazione della struttura II al composto clorurato $C_9H_{10}ON_2Cl_2$ fondente a 48°, ottenuto da Harries facendo agire l'HCl conc. sulla « mesitilnitrimina » (3)



(II)

In questa Nota descriveremo appunto le esperienze da noi condotte su questa sostanza, nell'intento di chiarirne la struttura. Nel corso di queste indagini, oltre ad aver raggiunto lo scopo che ci eravamo prefisso, abbiamo anche preparato dei rappresentanti di nuove classi di composti organici (azo e azossichetoni ciclici) di cui sono state studiate le proprietà:

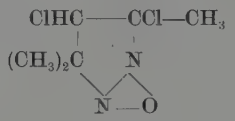
(1) Nell'Adunanza del 21 febbraio 1941-XIX.

(2) Questi « Rendiconti », ser. VII, vol. II, fasc. 8, pag. 618.

(3) « Ann. », *319*, 230 e sgg. (1901); « Ber. » *32*, 1337 (1899).

si è potuto inoltre fare un interessante raffronto tra il gruppo azossi e il nitrogruppo.

Sul composto $C_6H_{10}ON_2Cl_2$ si avevano, oltre ai dati analitici e la determinazione del peso molecolare, solo poche altre notizie: HARRIES ne aveva rivelata la straordinaria stabilità all'ammoniaca, all'idrato sodico, agli acidi nitrico e solforico concentrati anche a caldo, e al calore; aveva osservato che conteneva il cloro legato molto stabilmente e che si poteva ridurre con zinco a trimetilpirazolina, ciò che lo aveva indotto a ritenerlo un composto ciclico di struttura III



(III)

Parve a noi, in base alle considerazioni teoriche riguardanti il modo di formazione del composto, già svolte nella Nota precedente ed in base ad altre ragioni di carattere generale (1), doversi rigettare la struttura con l'ossigeno a ponte proposta da HARRIES, e doversi sostituire con una delle due strutture divenute possibili (II) e (IV), supponendo esatta la

---

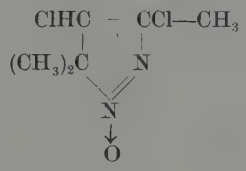
(1) Azossiderivati alifatici sono stati ottenuti recentemente per riduzione con $SnCl_2+HCl$ di alcuni nitrosoderivati dimeri, ai quali per questa ragione si propende ad assegnare la struttura $R-N(\rightarrow O)=N(\rightarrow O)-R$. Sono così stati preparati alcuni azossiderivati simmetrici del tipo: $R-N(\rightarrow O)=N-R$, dove R può essere

$(CH_3)_2CH-CO-CH_3$; $(CH_3)_2CH-CO-C_2H_5$; $(CH_3)_2CH-CO-CH_2-CH(CH_3)_2$;

$(CH_3)_2CH-CN$; $(CH_3)_2CH-COOC_2H_5$; $(CH_3)_2CH-COOH$

(ASTON e coll. « J. Am. Chem. Soc. », *54*, 1530 (1932); *56*, 1387 (1934); *60*, 1930 (1938); AILMAN (« J. Am. Chem. Soc. », *60*, 1933 (1938)) ha determinato la rifrazione molecolare ed il paracoro di alcune tra queste sostanze, giungendo alla conclusione che i dati fisici non sono sufficienti per decidere se si debba assegnare ai composti stessi la struttura ciclica $R-N(\rightarrow O)-N-R$ oppure quella aperta $R-N(\rightarrow O)=N-R$. Dal canto nostro riteniamo di aver sufficientemente dimostrata per via chimica la seconda delle due strutture per gli azossiderivati ciclici descritti in questa Nota. Se poi si considera che per gli azossiderivati aromatici, dopo le classiche ricerche di ANGELI, confermate e completate da numerosi altri

disposizione degli atomi di cloro considerata da Harries, ed assumendo che l'atomo di ossigeno sia legato all'uno o all'altro dei due atomi di azoto



(IV)

La conferma che la formula (II) fosse la vera spettante al composto di Harries ci venne fornita dalla serie di trasformazioni chimiche che ci accingiamo a descrivere.

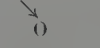
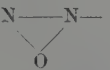
Ripreparata dunque la sostanza $C_6H_{10}ON_2Cl_2$ e confermate le osservazioni di Harries, ne abbiamo saggiato il comportamento agli alcoolati alcalini: contrariamente a quanto ci si poteva attendere dalla decantata stabilità agli alcali del corpo stesso, osservammo che già a freddo si aveva una reazione (1).

Operando con una molecola di metilato od etilato sodico per una di dicloroderivato si ottenne un composto monoclorurato, risultante dall'eliminazione di una mol di HCl; facendo agire su questo una seconda molecola di metilato a caldo, oppure trattando direttamente il composto biclorurato con due molecole di metilato, ottenemmo una nuova sostanza esente da cloro $C_7H_{12}O_2N_2$, in cui l'alogeno era stato rimpiazzato da un gruppo metossilico. Le reazioni avvengono dunque in accordo alle equazioni seguenti:

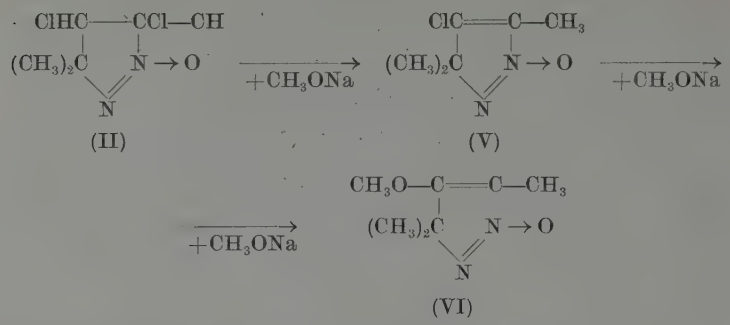
$$C_6H_{10}ON_2Cl_2 + CH_3ONa = C_6H_9ON_2Cl + CH_3OH + NaCl$$
$$C_6H_9ON_2Cl + CH_3ONa = C_7H_{12}O_2N_2 + NaCl$$

Queste trasformazioni si lasciano evidentemente interpretare tanto dalla struttura II quanto dalla III e dalla IV del diclorocomposto; nella prima ipotesi avremo:

---

studi più recenti, la struttura  è ormai universalmente riconosciuta, si conclude che l'aggruppamento ciclico:  ha ben poche probabilità di esistenza.

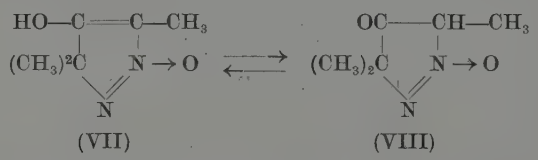
(1) La stabilità agli alcali acquosi, anche concentrati, già osservata da Harries risiede nel fatto che il composto $C_6H_{10}ON_2Cl_2$ è affatto insolubile in questi reattivi: se si aggiunge alcol, la reazione non tarda a manifestarsi.



(II) (V) (VI)

Mentre il cloroderivato $C_6H_9ON_2Cl$ (V) è una sostanza p. f. 117° molto simile nell'aspetto e nei caratteri chimici al dicloroderivato di partenza, offrendo la stessa resistenza agli acidi, al cloro, al calore, ecc., altrettanto non si può dire per il metossiderivato (VI) che presenta il caratteristico comportamento degli eteri enolici. Detto composto resiste infatti abbastanza bene all'azione degli alcali, ma facilmente viene idrolizzato dagli acidi minerali a caldo in alcool metilico e in una nuova sostanza $C_6H_{10}O_2N_2$ che presenta reazioni e proprietà molto interessanti.

Diciamo subito che queste si lasciano bene interpretare solo ammettendo che sia esatta la struttura (II) assunta per il dicloroderivato. Risulterà allora per la sostanza $C_6H_{10}O_2N_2$ la struttura (VII) che non è altro che la forma enolica della (VIII):



(VII) (VIII)

L'esame della formula (VIII) ci permette di osservare che il gruppo —CH— in essa contenuto si trova legato a due aggruppamenti *acidificanti* (o « negativi » secondo un'espressione meno esatta ma più comune): da un lato il carbonile —CO— e dall'altro il gruppo azossi —N=N→O. L'analogia strutturale di quest'ultimo aggruppamento col nitrogruppo lascia infatti prevedere che esso possieda analoghe proprietà e che possa esplicare analoga azione sui gruppi atomici vicini.

Ed in realtà le proprietà della sostanza in questione confermano completamente questa supposizione: il composto ha carattere spiccatamente acido, sciogliendosi in alcali e riprecipitando inalterato con acidi; svolge copiosamente azoto in contatto col diazometano, copula facilmente ed istantaneamente coi sali di diazonio anche in soluzione acetica; reagisce

con HNO_2 sostituendo l'idrogeno mobile con un gruppo —NO ecc. reazioni tutte che sono presentate anche da β–nitrochetoni.

D'altra parte il composto presenta un comportamento anomalo ai reattivi del gruppo carbonilico: non siamo infatti riusciti a trasformarlo con idrossilamina, fenilidrazina e semicarbazide nei corrispondenti derivati funzionali. Questa mancata reattività del gruppo —CO—, che è stata riscontrata anche nel nitroacetone (1), non si lascia ricondurre a ragioni di indole sterica ma deve prendere origine dalla presenza del gruppo azossi o del nitrogruppo rispettivamente e costituisce, qualunque ne sia la causa, un'altra proprietà presentata dalla sostanza in questione comune ai β–nitrochetoni (2).

Infine anche il comportamento del composto $C_6H_{10}O_2N_2$ all'HCl conc. rispecchia una salientissima analogia con quello dei β–nitrochetoni: è noto infatti che l'ω–nitroacetofenone reagisce con HCl originando cloroisonitrosoacetofenone ed acqua (3) secondo un meccanismo che solitamente si esprime facendo intervenire la forma « aci » del nitrochetone:

$$C_6H_5—CO—CH=NOOH+HCl \rightarrow [C_6H_5—CO—CHCl—N(OH)_2] \rightarrow$$
$$\rightarrow C_6H_5—CO—CCl=NOH+H_2O$$

In modo affatto simile la sostanza $C_6H_{10}O_2N_2$ si lascia trasformare dall'HCl con grande facilità in un nuovo composto clorurato (X) eliminando una molecola di acqua:

$$C_6H_{10}O_2N_2+HCl=C_6H_9ON_2Cl+H_2O$$

Se il prodotto clorurato (X) così ottenuto prendesse origine dalla sostituzione di un atomo di cloro all'ossidrile enolico della sostanza $C_6H_{10}O_2N_2$ (form. VII), esso dovrebbe essere identico al monocloroderivato (V) già descritto in precedenza. Il prodotto (X) mostra invece caratteri assai diversi ed un comportamento chimico che non lascia dubbio alcuno che gli si debba attribuire la struttura (X), come sarà detto più oltre.

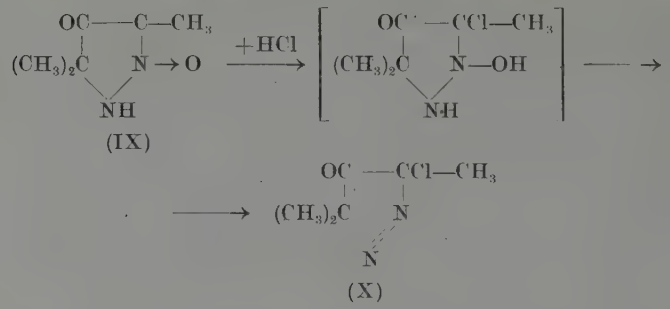
Quindi la spiegazione più naturale che noi possiamo fornire alla sua formazione consiste nell'ammettere che la sostanza $C_6H_{10}O_2N_2$ possa reagire in una terza forma tautomera (IX) esattamente corrispondente alla forma « aci » dell'ω–nitroacetofenone:

---

(1) Almeno per quanto riguarda l'idrossilamina e la fenilidrazina: Lucas, « Ber. », *32*, 605, 606 (1899).

(2) Lucas (loc. cit.) ritenne che queste sostanze (nitroacetone, nitroacetofenone) non reagissero con idrossilamina a causa della loro struttura enolica.

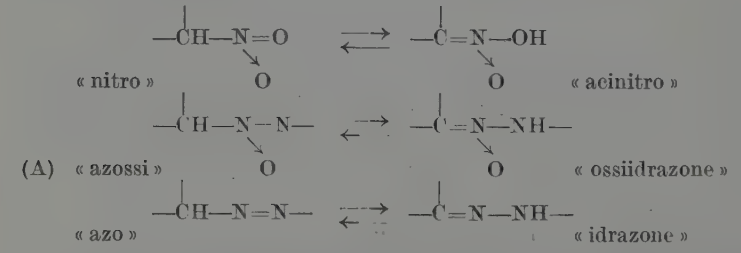
(3) Steinkopf, Jürgens, « J. prakt. Chem. » (2), *84*, 712.



(IX)

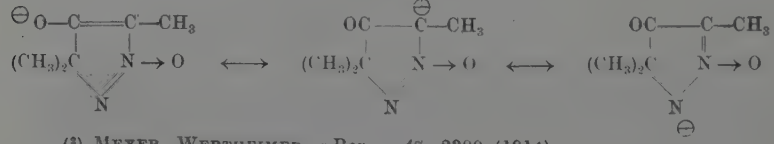
(X)

Questa ammissione è del resto ben giustificata dagli innumerevoli esempi di analogie tra composti ossigenati ed azotati che la chimica fornisce. Nel nostro caso specifico la tautomeria tra forma « azossi » (A) e forma « ossiidrazone » (B) costituisce come l'anello di giunzione tra la tautomeria del nitrogruppo ad es. nei nitroderivati alifatici e quella del gruppo azoico, ad es. negli eteri arilazoacetacetici, come appare dal seguente schema:

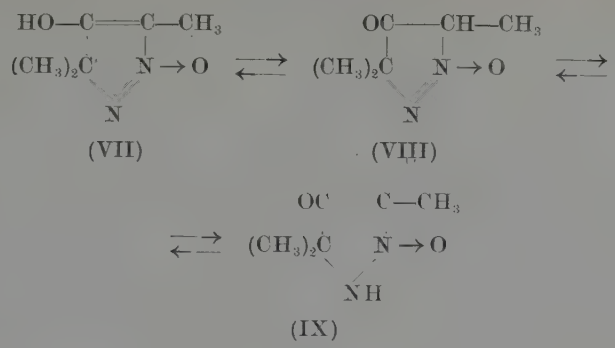


Si noterà inoltre che con l'ammissione della forma tautomera (IX) [1] per la sostanza $C_6H_{10}O_2N_2$ si completa anche il parallelo coi β-nitrochetoni, per i quali pure si ammettono tre forme tautomere [2]:

[1] Resta naturalmente ancora da definire quale delle tre strutture (VII–IX) competa al composto allo stato cristallino. Per analogia coi β-nitrochetoni, per i quali è ammessa allo stato solido la struttura nitrochetonica R—CO—CH_2—NO_2, si può ritenere che la formula (VII) sia da preferirsi alle altre due. Nelle soluzioni della sostanza in solventi ad alta costante dielettrica e nei sali (ad es. il sale sodico), si deve invece pensare alla presenza di un anione mesomero:



[2] MEYER, WERTHEIMER, « Ber. », *47*, 2380 (1914).



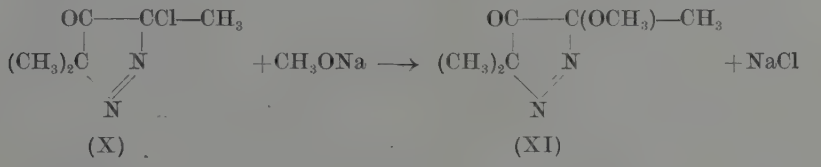
(VII) (VIII)

(IX)

$$R{-}C(OH){=}CH{-}NO_2 \rightleftarrows R{-}CO{-}CH_2{-}NO_2 \rightleftarrows R{-}CO{-}CH{=}NOOH$$

Interessanti sono anche le reazioni presentate dal cloroazochetone ciclico (X), che ne dimostrano la struttura. Esso è un corpo ben cristallizzato – caratteristica comune a tutti i composti descritti in questa Nota – assai volatile anche a temperatura ambiente, dotato di un particolare odore canforeo pungente. Contiene l'atomo di cloro facilmente spostabile dagli alcali [1]: se però si riscalda la sostanza con questi reattivi, si nota un copioso svolgimento di azoto e si formano sostanze liquide scure non facilmente purificabili. Agli acidi anche concentrati, agli ossidanti, agli alogeni, il corpo resiste bene.

Una trasformazione assai netta esso fornisce quando lo si tratti con metilato sodico in quantità equimolecolare a freddo: si riesce in tal modo ad isolare, presso al cloruro sodico, una nuova sostanza poco stabile, molto solubile in acqua, esente da cloro, che all'analisi dà valori in accordo a quelli previsti per un metossiderivato (XI), isomero col VI, originatosi per sostituzione di un gruppo $-OCH_3$ all'atomo di cloro del composto (X):



(X) (XI)

[1] L'alogeno è reso mobile dalla contemporanea presenza dei gruppi —CO— ed —N=N—; si confronti al proposito la mobilità dell'alogeno negli α-clorochetoni R—CO—CHCl—R, negli alogenuri idrazonici:

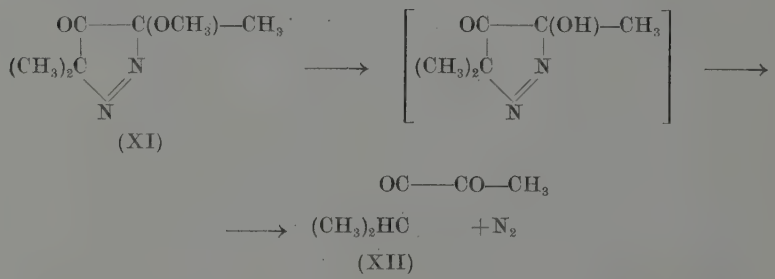
$$R{-}CCl{=}N{-}NH{-}R' \rightleftarrows R{-}CHCl{-}N{=}N{-}R'$$

e negli arilazoclorochetoni:

$$R{-}CO{-}CCl{=}N{-}NH{-}A \rightleftarrows R{-}CO{-}CHCl{-}N{=}N{-}Ar\,.$$

Il nuovo composto è facilmente conservabile solo allo stato molto puro; in soluzione si scompone già a freddo in presenza di una traccia di alcali o di acidi. Svolge azoto anche allo stato secco per sbattimento con CuO (1).

Interessanti sono i prodotti di idrolisi in ambiente acido del composto (XI) perchè ne confermano rigorosamente la struttura: scaldando infatti qualche grammo di sostanza con acido solforico diluito si nota dapprima che quella passa in soluzione colorando il liquido in giallo sempre più intenso; contemporaneamente ha inizio un regolare svolgimento di azoto e si separano quindi grosse gocce di un liquido giallo, pesante di odore piccante assai caratteristico, presentante le note reazioni degli α-dichetoni. Senza difficoltà questo potè essere riconosciuto identico nelle sue proprietà e in quelle dei suoi derivati, con l'acetilisobutirrile (XII) che ripreparammo per confronto secondo i metodi della letteratura (2). La sua formazione per idrolisi di (XI) si lascia evidentemente interpretare dallo schema seguente:



Con quest'ultima trasformazione, a completamento della dimostrazione che ci eravamo proposti di dare alla struttura II, si perviene dal pernitrosomesitilossido nuovamente a un composto a catena aperta, l'acetilisobutirrile (XII), passando attraverso a ben sei prodotti intermedi recanti una struttura nucleare. Se riassumiamo schematicamente tutti questi passaggi (3):

---

(1) Di questa curiosa proprietà, posseduta anche da alcuni diazochetoni: R—CO—CH=N_2, ci accorgemmo nell'eseguire la determinazione dell'azoto col micrometodo di Dumas: per ottenere valori prossimi al teorico si dovette introdurre nel tubo a combustione la sostanza in una fialettina di vetro senza mescolarla con CuO.

(2) « Ber. », *33*, 500 (1900).

(3) I passaggi VI → (VII–IX) e XI → XII si effettuano più opportunamente in pratica con acido solforico diluito; avvengono però anche con HCl come è indicato nello schema.

(I) $\xrightarrow{\text{HCl conc.}}$ (II) $\xrightarrow{CH_3ONa}$ (V) $\xrightarrow{CH_3ONa}$ (VI) $\xrightarrow{\text{HCl dil}}$

$\longrightarrow$ (VII–IX) $\xrightarrow{\text{HCl conc.}}$ (X) $\xrightarrow{CH_3ONa}$ (XI) $\xrightarrow{\text{HCl dil.}}$ (XII)

possiamo subito rilevare la circostanza abbastanza singolare che queste varie trasformazioni si ottengono applicando alternativamente sempre gli stessi reattivi: l'HCl e il CH_3ONa. Mentre l'azione esplicata dal metilato è quella normale di eliminare una molecola di HCl oppure di sostituire un atomo di cloro con un gruppo $—OCH_3$, l'HCl non agisce inversamente sul metossile o sull'ossidrile sostituendolo con un atomo di cloro, ma si esplica in altri punti della molecola. Così dal metossiderivato (VI) l'HCl non rigenera il clorocomposto (V) da cui quello proveniva per azione del metilato, bensì il cloroderivato (X), isomero di (V); ed ancora l'azione dell'HCl sopra il metossiderivato (XI) provoca l'apertura dell'anello formando acetilisobutirrile (XII) e azoto, anzichè ricondurre al cloroderivato (X) sostanza stabile agli acidi che una volta formata non avrebbe alcuna tendenza ad aprirsi e non può quindi ritenersi termine di passaggio tra (XI) e (XII).

Lo studio di questi azo e azossicomposti ciclici, di cui abbiamo ora mostrato alcune singolari trasformazioni, sarà ripreso. In particolare sarà riferito sulla loro riduzione per opera del cloruro stannoso, che si connette con una interessante trasposizione del tipo retropinacolinico.

PARTE SPERIMENTALE.

Per la preparazione della mesitilossima e del pernitrosomesitilossido abbiamo seguìto le indicazioni di Harries [1], ottenendo approssimativamente anche gli stessi rendimenti. La trasformazione in dicloroderivato (II) è stata effettuata con qualche modificazione al procedimento indicato da quell'Autore e perciò la descriviamo:

Azione dell'HCl sul pernitrosomesitilossido.

3, 5,5 trimetil 3, 4 dicloro Δ^1*–pirazolina 2 ossido* (form. II) [2].

Gr. 65 di pernitrosomesitilossido sono addizionati a freddo a cc. 330 di HCl conc. in cui facilmente si disciolgono. Il liquido assume tosto una colorazione azzurra che presto scompare, si riscalda spontaneamente e poco dopo si intorbida per separazione di gocce oleose pesanti che si raccolgono

[1] « Ber. », *32*, 1330 e sgg. (1899).

[2] Per la nomenclatura dei composti descritti in questa Nota, mancando ogni riferimento a prodotti noti di struttura simile (azo e azossi derivati ciclici)

al fondo del recipiente. Quando il liquido tende a raffreddarsi, si completa la reazione riscaldando per pochi minuti su b. m. bollente; poi si raffredda agitando bene, si filtra il dicloroderivato e lo si macina in un mortaio con acqua per eliminare tutto l'HCl. Le acque di lavaggio, unite al liquido madre, abbandonano ancora qualche grammo di prodotto. Si secca in essicatore a vuoto. Rendimento gr. 85 in prodotto grezzo (= 94,5 % del teorico) adatto per le successive trasformazioni senza purificazioni.

Azione del metilato sodico sul composto II.

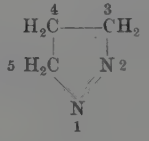
3, 5,5 trimetil 4 cloro $\Delta^{1,3}$*-isopirazolo 2 ossido* (form. V)
e *3, 5,5 trimetil 4 metossi* $\Delta^{1,3}$*-isopirazolo 2 ossido* (form. VI) [1].

Si sciolgono gr. 2,3 di sodio metallico in cc. 50 di alcool metilico od etilico e si aggiunge la soluzione ben raffreddata ad una soluzione pure fredda di gr. 19,7 di dicloroderivato (II) in 50 cc. di alcool metilico (od etilico). Si lascia reagire a temperatura ambiente per qualche ora poi si completa scaldando a b. m. per un'ora a ricadere. Si distilla a b. m. buona parte del solvente e si riprende con acqua il residuo. Si filtra alla pompa e si lava ancora con poca acqua. Rendimento gr. 11,5 di monocloroderivato (V) grezzo (circa 72 % del teorico). Il prodotto è molto solubile nei comuni solventi, poco in acqua fredda. Cristallizza dall'alcool diluito in fogliette splendenti, dall'esano in magnifici prismi allungati che fondono a 117°-118°. È stabile agli acidi, agli ossidanti, non assorbe bromo in CCl_4. Analisi:

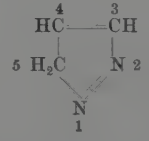
	trov.	N	17,7	Cl	22,2
per $C_6H_9ON_2Cl$	calc.		17,4		22,1

---

abbiamo preferito attenerci ai seguenti criteri: tutte le sostanze in questione si possono considerare come derivanti dai due nuclei fondamentali (A) e (B) dei quali il primo è una pirazolina col doppio legame tra gli atomi di azoto 1,2 e pertanto una Δ^1*-pirazolina*; il secondo invece è una forma tautomera del pirazolo, di cui non siamo riusciti a trovare alcun derivato descritto in letteratura, e per la quale proponiamo perciò la denominazione *isopirazolo*. Specificando la posizione dei doppi legami, avremo la dicitura: $\Delta^{1,3}$*-isopirazolo*, da noi adottata.



(A)



(B)

(1) Loc. cit. in (2) a p. 9.

Per azione di una seconda molecola di metilato sodico sul composto (V) o direttamente dal composto (II) con 2 mol di metilato si prepara il metossiderivato (VI). Questo secondo procedimento è in pratica il più conveniente:

Si sciolgono gr. 98,5 (= 0,5 mol) del dicloroderivato (II) in 170 cc. di alcol metilico e si aggiunge la soluzione gradualmente ad una soluzione di metilato sodico ottenuta da gr. 25,3 di Na (= 1,1 mol) in 370 cc. di alcol metilico, trovantesi in un pallone munito di ricadere. Ogni aggiunta provoca una ebollizione del liquido per il calore di reazione. Si scalda quindi per 3 ore a b. m. a ricadere; si raffredda in ghiaccio e si filtra alla pompa il cloruro sodico separatosi che viene lavato due volte con 50 cc di alcol metilico. I liquidi riuniti vengono distillati a b. m. fino a ad eliminare buona parte dell'alcool, quindi ripresi collo stesso volume di acqua e raffreddati in ghiaccio. Cristallizza così per la maggior parte il metossiderivato (VI) già abbastanza puro, che viene filtrato. Il rimanente, contenuto nelle acque madri, viene estratto con etere, e resta come residuo scacciando l'etere. In totale si ottengono gr. 62,5 di prodotto grezzo (= 80 % del teorico). Il composto è notevolmente solubile nei comuni solventi organici ed anche in acqua calda, poco nella fredda. Cristallizza molto bene dall'esano, in aghi incolori lunghi qualche centimetro. Fonde a 71°–72°. Scaldato nel vuoto sublima facilmente. Analisi:

	trov. %	C	53,6	H	7,7	N	17,4
per $C_7H_{12}O_2N_2$	calc.		53,8		7,7		17,9

peso mol trov. 145, 148 (sec. Rast) calc. 156

La sostanza è stabile agli alcali, ma facilmente viene idrolizzata dagli acidi. Con HJ svolge copiosamente jodio; decolora istantaneamente il permanganato in soluzione acida.

Idrolisi del composto VI.

3, 5,5 trimetil 4 ossi $\Delta^{1,3}$*–isopirazolo 2 ossido* (form. VII) oppure *3, 5,5 trimetil 4 cheto* Δ^{1}*–pirazolina 2 ossido* (form. VIII) oppure *3, 5,5 trimetil 4 cheto* Δ^{2}*–pirazolina 2 ossido* (form. IX). [1].

Gr. 49 di metossiderivato (VI) si introducono in un pallone con 250 cc. di acido solforico al 5 %. Si riscalda agitando: a 35°–40° il composto si scioglie completamente; si porta il liquido all'ebollizione e lo si mantiene a questa temperatura per circa 20 minuti. Raffreddando in ghiaccio, si separa buona parte del prodotto di idrolisi (form. VII, VIII opp. IX), che

[1] Loc. cit. in [2] a p. 9.

si filtra alla pompa; il rimanente si ricupera dal liquido madre per estrazione con etere ed evaporazione del solvente. Si ottengono in totale gr. 35 di prodotto grezzo (= 78 % teorico). Esso si scioglie facilmente in acqua, poco negli acidi minerali diluiti e freddi, molto nei comuni solventi organici e negli alcali. La soluzione acquosa ha leggero sapore acidulo. Si purifica nel miglior modo per cristallizzazione dall'esano da cui si separa per raffreddamento in meravigliosi cristalli aghiformi assai allungati. Fonde senza decomposizione a 98°-99°. Analisi:

	trov. %	C	50,4	H	6,8	N	20,6
per $C_6H_{10}O_2N_2$	calc.		50,7		7,0		19,7

Il composto presenta le seguenti reazioni:

a) con joduro di metilmagnesio in soluzione eterea svolge metano, formando un composto contenente magnesio [1] che con acidi rigenera la sostanza di partenza;

b) se a una soluzione acquosa del composto si aggiunge $NaNO_2$ in quantità equimolecolare, quindi etere e poi si acidifica cautamente con acido solforico diluito, raffreddando con ghiaccio e sbattendo vigorosamente, si nota che nell'etere passa una sostanza che lo colora in azzuro. Decantando lo strato acquoso e sostituendolo con alcali diluito la colorazione azzurra non scompare (assenza di ossidi dell'azoto). Svaporando l'etere resta un residuo di odore molto pungente che contiene il nitrosoderivato. Non si riuscì a separarlo in forma pura analizzabile, trattandosi di sostanza molto facilmente alterabile;

c) con diazometano in soluzione eterea si ha intenso svolgimento di azoto. Per distillazione del solvente resta un piccolo residuo costituito di una miscela di eteri metilici facilmente alterabili all'aria, che non è stata ulteriormente presa in considerazione;

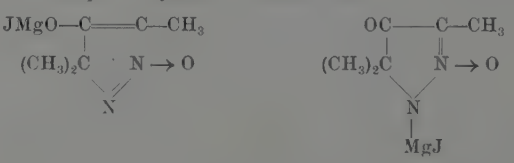
d) coi reattivi del gruppo carbonile il composto non reagisce anche per prolungata azione (saggiati: p. nitrofenilidrazina in soluzione acetica idrossilamina, semicarbazide);

e) coi sali di diazonio il composto dà in soluzione alcalina o acida per acido acetico dei caratteristici prodotti di copulazione:

Gr. 4,2 di sostanza si disciolgono in poca acqua, si aggiungono gr. 5-6 di acetato sodico, quindi raffreddando a 0° una soluzione di diazo di

---

[1] A detto composto spetterà verosimilmente una delle due strutture:



p·cloroanilina ottenuta diazotando gr. 4 di questa base. Si separa rapidamente il prodotto di copulazione sotto forma di un liquido giallo, vischiosissimo che rapidamente cristallizza per sfregamento con poco etere. Il *3 (p·clorofenilazo) 3, 5,5 trimetil 4 cheto* Δ^1*–pirazolina 2 ossido* [1] così ottenuto pesa gr. 10,2 ed è già abbastanza puro. Lo si purifica ulteriormente per cristallizzazione da alcool metilico, da cui si ottiene in aghetti sottili color giallo zolfo, fondenti a 88°–89° con svolgimento gassoso. Analisi:

	N %	trov.	20,1
per $C_{12}H_{13}O_2N_4Cl$		calc.	20,0

Per riscaldamento con alcol etilico diluito o in seno all'acqua bollente, in cui il corpo suddetto è insolubile, esso svolge gas trasformandosi in una nuova sostanza assai meno solubile in alcool, pure colorata in giallo che opportunamente purificata per cristallizzazione da questo solvente, mostra un p. f. 122° con dec. e dà alla determinazione dell'azoto valori che sarebbero in accordo con una formula $C_{12}H_{15}O_3N_4Cl$ derivante da quella del prodotto di copulazione più una mol di acqua. La riduzione con $SnCl_2$ del composto p. f. 88° e di quello p. f. 122° fornirono p·cloroanalina. Il loro studio non è stato esteso più oltre.

Operando con diazo di p·nitroanilina in modo affatto analogo a quanto descritto per il diazo di p·cloroanilina, fu preparato con ottimo rese il corrispondente *3 (p·nitrofenilazo) 3, 5,5 trimetil 4 cheto* Δ^1*–pirazolina 2 ossido* [1] in aghetti gialli, solubili in alcali con intensa colorazione rosso–fucsina e fondenti a 148° in un liquido rosso con svolgimento gassoso. Analisi:

	trov. % N		24,2
per $C_{12}H_{13}O_4N_5$	calc.		24,06

Per azione prolungata dell'alcool diluito bollente anche questo prodotto sembra subire una trasformazione analoga a quella citata per il composto p. f. 88°.

Azione dell'HCl sul composto VII–IX.

3, 5,5 trimetil 2 cloro 4 cheto Δ^1*–pirazolina* (form. X) [1].

Se si sciolgono alcuni grammi di composto VII–IX in HCl conc e si riscalda leggermente, si nota in breve che il liquido si intorbida separando gocce oleose che si rapprendono in cristalli per raffreddamento. Il nuovo composto (X) è una sostanza incolora allo stato purissimo, di solito però

[2] Loc. cit. in [2] a p. 9.

gialla per leggera decomposizione, assai volatile anche a temperatura ambiente, fondente a 46° senza alterazione, di odore canforeo pungente assai caratteristico. In acqua è poco solubile, molto invece nei solventi organici in generale. Cristallizza molto bene dall'esano in lunghi aghi splendenti. Più rapidamente si può preparare dal metossiderivato VI con HCl: Una parte di metossiderivato si tratta con tre parti di HCl conc riscaldando debolmente fino a dissoluzione completa. Dopo qualche tempo il liquido si intorbida separando gocce oleose e la reazione ha tendenza a divenire esotermica, svolgendo fumi di HCl che trascinano un po' di prodotto. Si lascia raffreddare e solidificare l'abbondante strato oleoso pesante che si filtra alla pompa e si lava con acqua. Le acque madri cloridriche diluite con quelle di lavaggio abbandonano ancora un po' di prodotto meno puro. Si filtra e si distillano le acque: in testa si raccoglie ancora un po' di prodotto facilmente trascinato in vapore. Si spreme bene su piatto poroso e si secca lasciando in essicatore su KOH senza praticare il vuoto. Si purifica per cristallizzazione dall'esano o dall'etere di petrolio bassobollente. Rendimenti 80 % circa di prodotto puro. Analisi:

	trov.	C	44,9	H	5,7	N	17,8	Cl 22,2
per $C_6H_9ON_2Cl$	calc.	C	44,8;	H	5,6;	N	17,4;	Cl 22,1

Il composto X è abbastanza stabile al calore e per cauto riscaldamento può essere facilmente sublimato senza alterazione. Riscaldato in un solvente inerte altobollente, come la tetralina, non si decompone apprezzabilmente. Con HJ svolge copiosamente jodio; con p-nitrofenilidrazina in acido acetico non reagisce a freddo: bollito svolge gas, colorandosi intensamente in rosso. Diluendo la soluzione, precipita prima un corpo oleoso poi una sostanza solida rossa ancora impura, verosimilmente il bis p-nitrofenilidrazone dell'acetilisobutirrile. Non è attaccato dall'acido nitrico conc. nè dal $KMnO_4$ in soluzione acetica calda; non reagisce con bromo in CS_2 e non dà semicarbazone. È rapidamente attaccato dagli alcali diluiti caldi con svolgimento di azoto e formazione di sostanza liquide scure, in parte di natura acida ed in parte neutre, di odore di menta, che non si lasciarono purificare.

Azione del metilato sodico sul composto X.

3, 5,5, trimetil 3 metossi 4 cheto Δ^1*-pirazolina* (form. XI) [1].

Gr. 1,5 di sodio si sciolgono in 30 cc. di alcool metilico anidro purissimo. Alla soluzione fredda si aggiungono gr. 10 di clorocomposto X, cristallizzato puro; a freddo non si nota reazione, scaldando debolmente a b. m.

[1] Loc. cit. in [8] a p. 9.

rapidamente la reazione si innesca. Si cura che non svolgano bollicine gassose, indizio di decomposizione, nel qual caso si raffredda subito in acqua corrente. Si lascia a sè per qualche ora in recipiente ben tappato a temperatura ambiente, poi si diluisce con 100 cc. di etere anidro e si filtra la soluzione etereo–alcoolica dal cloruro sodico precipitato. Si elimina il solvente nel vuoto e si ottiene così un residuo vischioso quasi incoloro che per sfregamento cristallizza rapidamente. Si purifica per cristallizzazione da etere di petrolio p. e. 40°–50°, ottenendo cristalli incolori p. f. 81°. Rendimento gr. 5 in prodotto puro. Il composto è solubilissimo in acqua, alcol etere anche a freddo, poco in etere di petrolio freddo. Analisi:

	trov. %	N 17,2
per $C_7H_{12}O_2N_2$	calc.	17,9

È facilmente alterabile al calore e non si conserva neppure a temperatura ambiente se non è molto puro.

Idrolisi del composto XI con acidi.

Acetilisobutirrile (XII).

Gr. 1 di composto (XI) si pongono in una beuta collegata con refrigerante a ricadere con 20 cc. di H_2SO_4 di titolo e 20 cc. di acqua. Si riscalda debolmente: il prodotto si scioglie colorando la soluzione in giallo che gradualmente incupisce; ben presto ha inizio un regolare svolgimento di azoto e si separa un olio giallo di odore pungente assai volatile. Si riscalda su b. m. finchè non sia cessato lo sviluppo gassoso, indi si raffredda, si estrae con etere, si secca su cloruro di calcio e si scaccia il solvente su b. m. Distillando l'olio giallo residuo, questo passa quasi totalmente a 117°–118°. Il punto di ebollizione e le proprietà fisiche e chimiche corrispondono bene a quelle dell'acetilisobutirrile, già noto nella letteratura chimica. Per confronto sono stati preparati anche l'osazone e la chinossalina (per condensazione con ortofenilendiamina) e trovati identici agli stessi composti preparati secondo i metodi della letteratura [1].

---

[1] Pauly e Lieck, « Ber. », *33*, 503.

Geologia (Petrografia). — *Appunti geologico-petrografici su alcuni problemi dello zoccolo cristallino dell'Eritrea* (1). Nota di CIRO ANDREATTA, presentata (2) dall'Ecc. FEDERICO MILLOSEVICH.

Nella bibliografia geologico-petrografica relativa alla parte settentrionale della nostra Africa Orientale si può osservare che le notizie petrograficamente e geologicamente meno esaurienti si notano a proposito dei cosidetti « scisti cristallini » che costituiscono, assieme alle numerose masse di rocce intrusive, l'imbasamento fondamentale su cui poggiano i sedimenti e le colate effusive.

La vera insufficienza di dati si nota esattamente quando si vogliano tentare applicazioni o deduzioni geologiche dalle descrizioni petrografiche. L'inconveniente è esclusivamente dovuto al fatto che i nostri valorosi Petrografi, che studiarono e descrissero molte rocce eritree, eseguirono il proprio lavoro scientifico in massima parte su materiale raccolto da altri, in generale da Geologi. Questa è un'altra prova, se non bastassero le infinite lampanti dimostrazioni fornite durante gli ultimi decenni di sviluppo della scienza petrografica, che l'interpretazione della geologia degli scisti cristallini non può essere eseguita che con metodi, criteri e ricerche di petrografia direttamente dal Petrografo, o dal Geologo e Petrografo associati, esecutori del rilevamento, delle osservazioni sul terreno, della raccolta del materiale e del suo studio in laboratorio.

Quasi tutti gli Autori sono d'accordo nell'affermare che le facies metamorfiche che si possono osservare negli scisti cristallini della zona sono almeno di due tipi nettamente distinti e, diremo, quasi opposti. Nelle regioni più orientali, verso la zona costiera eritrea, pare prevalgano scisti cristallini ad alta cristallinità e tipica struttura di rocce metamorfiche. Altrettanto sembra che tali schiette rocce metamorfiche affiorino nel lembo più settentrionale della Colonia Eritrea, verso il medio corso del Barca. Dovrebbe trattarsi di ortogneis di vario tipo, di anfiboliti, di micascisti, di paragneis e, ritengo, anche di metagneis.

---

(1) Istituto di Mineralogia e Petrografia della R. Università di Bologna.

(2) Nell'Adunanza del 21 febbraio 1941-XIX.

A questa limitata zona, o irregolari plaghe, di scisti cristallini di *mesozona* fa da contrapposto una grande regione, comprendente tutto l'altopiano eritreo ed il bassopiano occidentale, nella quale si trovano, assieme alle larghe masse intrusive, degli scisti che qualche Autore ha indicato come « a basso metamorfismo ». Si tratta qui di scisti sericitici e cloritici di variabile composizione che si vedono affiorare nelle zone suddette. Anche nel Tigrai tali rocce di *epizona* pare che siano particolarmente diffuse ovunque affiori l'imbasamento cristallino.

Molti Autori hanno ritenuto che la grande maggioranza di tali scisti cristallini, che per ora indicherò come di epizona, siano derivati per metamorfismo di rocce sedimentarie, anche perchè associate con essi sono talora delle rocce metamorfiche di evidente origine « para », quali calcari cristallini, rocce carboniose, conglomerati, ecc.

Nella presente nota voglio solo accennare alle idee che mi sono fatto del problema durante visite locali. All'Ecc. Sen. Federico Millosevich ed ai dirigenti di Asmara dell'A. M. A. O. vadano i miei sensi di gratitudine per avermi offerto possibilità e mezzi per condurre varie escursioni e visite in località dell'altopiano eritreo e del bassopiano occidentale eritreo.

Non posso dare una trattazione più precisa perchè non dispongo ora dell'abbondante materiale da me raccolto, materiale che avevo intenzione di studiare esaurientemente in laboratorio e che invece si trova ancora fermo in Colonia. Dato il carattere assolutamente preliminare e preventivo della presente nota non ritengo utile di accennare alle idee di altri Autori con una disamina della letteratura sull'argomento; benchè sia completamente consapevole che le mie idee sono alquanto diverse da quelle di altri Autori che si occuparono della zona. Quando potrò disporre del mio materiale, spero di poter pubblicare un lavoro esauriente, nel quale potrò documentare dettagliatamente il mio punto di vista, che potrebbe anche alquanto modificarsi dopo lo studio di laboratorio.

Origine delle rocce scistose a clorite.

Queste rocce sono per lo più definite come scisti cloritici, cloritoscisti, scisti verdi, prasiniti normali e quarzifere, ecc. e riferite da vari Autori a rocce originariamente sedimentarie, parzialmente oppure in massima parte. La derivazione di rocce a clorite talmente abbondanti e con abbondante clorite da rocce sedimentarie è spiegata da qualcuno col fatto che gli originari ipotetici sedimenti argillosi sarebbero stati ricchi di calcio. Come si possa ammettere una simile spiegazione è incomprensibile. La grande quantità di clorite deve derivare logicamente da prodotti di origine eruttiva: biotite, anfiboli ed eventualmente pirosseni. La geochimica e la chimica-fisica dei silicati ci dimostrano che la clorite può derivare

da elementi femici di rocce eruttive e, molto più raramente, pare che possa formarsi anche da ricristallizzazioni di colloidi entro rocce argillose. Dallo studio dei veri scisti cloritici delle tipiche regioni a rocce metamorfiche, come le Alpi, si deduce che anche volendo ammettere una origine para di molti scisti cloritici le ipotesi sono limitate a poche, e precisamente a queste due: 1° cloritizzazione di un sedimento contenente minerali femici provenienti da rocce eruttive; 2° cloritizzazione per genesi dei minerali cloritici dai colloidi contenuti in sedimenti prevalentemente argillosi.

Nel primo caso si possono formare dei cloritoscisti in masse molto limitate: piccole lenti, sottili lame, fini intercalazioni in un complesso di rocce para povere o prive di clorite. Questo perchè i sedimenti molto ricchi di elementi femici sono molto rari ed in ogni caso assai limitati, data anche la facile alterabilità della biotite e degli anfiboli ferro–magnesio–alluminiferi.

Nel secondo caso le rocce così cloritizzate verrebbero a contenere clorite assai scarsa, e ad ogni modo mai in quantità simili a quelle che si riscontrano negli scisti verdi dell'altopiano e del bassopiano occidentale eritrei.

La derivazione da rocce para di alcuni tipi di scisti a clorite non è ammessa da qualche Petrografo che, però, condusse le sue ricerche su materiale raccolto da altri e non potè dare un significato geologico alle sue deduzioni, non conoscendo nè l'estensione nè le condizioni di giacitura di queste rocce. Il Manasse, nel suo pregevole grosso lavoro *Contribuzioni allo studio petrografico della Colonia Eritrea* (Siena, 1909) condotto sui materiali raccolti da Dainelli e Marinelli nel 1905–1906, ammette esplicitamente una origine da primitive rocce eruttive basiche di molte rocce scistose del tipo anfibolico e « prasinitico ». Del parere di questo Petrografo si tenne ben poco conto nelle trattazioni geologiche della zona.

Nel caso specifico io ritengo che la maggior parte delle rocce scistose verdi di queste regioni, che si trovano intimamente associate a rocce granitiche, sia da ritenere derivata da rocce eruttive mesosiliciche o basiche.

In diversi casi tale derivazione ho potuto constatare direttamente sul terreno seguendo i passaggi graduali fra la roccia eruttiva e lo scisto cloritico. Nella zona delle miniere di Sciumagallè e Medri Zien si possono trovare fra le rocce laminate alcuni tipi nei quali sono riconoscibili ancora i grossi fenocristalli plagioclasici lamellari e ben orientati, per cui tali rocce sono da classificare, tenute presenti anche altre caratteristiche, come delle *porfiriti diabasiche laminate* (1). Queste porfiriti laminate fanno

(1) Avverto che le classificazioni di rocce non possono essere petrograficamente precise perchè non ho potuto studiare in laboratorio il materiale raccolto nelle mie escursioni.

passaggio assai evidente a degli scisti cloritico–sericitici–feldispatici, che derivano evidentemente da esse.

Analoghi graduali passaggi si possono notare in varie regioni della plaga Ugarò–Domiscioba nel bassopiano occidentale. Evidentissimi sono i passaggi sulla vetta del monticello Domiscioba e sui versanti occidentali della collina che si eleva a NO di Domiscioba: una verde *porfirite plagioclasica* [1] sfuma, attraverso vari tipi non molto laminati, verso degli scisti cloritici. Così sulle colline a sud e SO di Ugarò, dove si trovano anche dei porfidi felsitici laminati. Una riconferma di questa derivazione si ha in quei punti dove delle superfici di scivolamento e di milonitizzazione attraversano le porfiriti non laminate: qui si ha, localmente, produzione di scisti cloritico–sericitici–feldispatici.

Altri esempi di laminazione di rocce eruttive con produzione di rocce laminate scistose cloritico–sericitiche–feldispatiche si possono osservare lungo la strada Zahaflam–Fil Fil–Ailet. Al bivio delle strade per Merara e per Fil Fil e poco più a oriente, verso l'inizio della discesa della strada nella scarpata dell'altopiano, vari filoni basici presentano intensa laminazione alle salbande, mentre si presentano con la tessitura pressochè intatta verso la zona centrale. La roccia derivata per intensa laminazione risulta con l'apparenza di un vero scisto cloritico–sericitico–feldispatico. Esempi di tali derivazioni di rocce laminate a clorite da rocce eruttive si ritrovano poi in moltissimi altri punti, sia dell'altopiano e della sua scarpata orientale, sia del bassopiano occidentale.

Le interessanti determinazioni del Manasse (pagine 30–34 del lavoro citato), che classificò molti di tali scisti verdi come « prasiniti a tessitura pseudo–effusiva » in causa della scissione dell'originario plagioclasio in albite ed epidoto prodotta da un supposto metamorfismo, meritano senza altro nuova luce con nuove ricerche condotte con metodi e criteri moderni. Uno studio accurato e profondo di queste rocce, sia sul terreno sia in laboratorio, ritengo che possa portare a risultati forse sorprendenti o almeno assai curiosi. Ripeto che la mancanza del materiale raccolto non mi permette di essere più preciso.

Nella maggior parte dei casi la roccia primaria pare si debba riferire alle citate porfiriti; raramente a tipi filoniani lamprofirici.

Una riconferma di queste derivazioni delle rocce scistose verdi a clorite da rocce eruttive, si ha osservando le condizioni di giacitura e genetiche di molti scisti sericitici.

---

[1] Loc. cit. a p. 3.

Origine degli scisti sericitico-feldispatici.

Anche questi scisti in generale si sono voluti riferire a parascisti, ammettendo una loro derivazione da rocce sedimentarie argillose. Per analoghe ragioni a quelle esposte a proposito dell'origine delle rocce scistose cloritiche, anche per la genesi della sericite bisogna star attenti di non cadere in concetti eccezionalmente scolastici ed elementari, troppo spesso errati.

Se è ben vero che una certa quantità di sericite si può originare direttamente dalle cosidette sostanze argillose durante una azione metamorfica di epizona, è altrettanto indubbio che in tali casi la genesi della sericite è scarsa e si formano delle rocce veramente filladiche con particolari inconfondibili caratteristiche strutturali. Come è altrettanto dimostrato che in un sedimento argilloso mancano gli alcali sufficienti per portare alla produzione abbondante di mica bianca.

Si conosce invece in maniera precisa il processo per cui la mica bianca veramente abbondante si origina direttamente da feldispati, siano essi ortoclasici oppure plagioclasici. Il problema della michefazione e sericitizzazione dei feldispati e l'orientamento dei microliti micacei in plagioclasi di rocce metamorfiche di vario genere, sono stati così ampiamente trattati e dibattuti in questi ultimi anni a proposito di scisti cristallini alpini, da renderne superflua la discussione in questa sede.

Pertanto, pure essendo perfettamente d'accordo che una certa parte di scisti sericitici possono derivare da rocce sedimentarie, specialmente se queste fossero state rappresentate da materiale almeno parzialmente arenaceo-argilloso, ritengo che molte rocce laminate sericitiche, e precisamente quelle più chiare, talora bianchicce o bianchiccio-verdoline per la presenza di piccole quantità di clorite, specialmente se sono particolarmente ricche di sericite e contengano feldispati, devono derivare da rocce eruttive acide feldispatiche, per intensa laminazione accompagnata da alcuni processi debolmente metamorfici di epizona.

Ma se questi sono, diremo così, gli argomenti teoretici in favore dell'origine di molti scisti sericitici da rocce eruttive acide, l'argomento probatorio che in questo caso dev'essere decisivo è offerto dalle osservazioni che si fanno direttamente sul terreno. Queste dimostrano che quasi ovunque, nelle regioni dell'altopiano eritreo, della sua scarpata orientale e talora anche di alcuni punti del bassopiano occidentale, i passaggi graduali sono frequentissimi fra rocce eruttive acide e gli scisti sericitici.

Le rocce dalle quali, per laminazione via via aumentante di intensità, derivano molti scisti sericitici e sericitico-feldispatici talora debolmente cloritici sono date prevalentemente da *porfidi granitici*, da *apliti granitiche* e *granodioritiche* e da *graniti aplitici*. E qui potrei riportare

una nuova serie di osservazioni fatte sul terreno seguendo il regolare passaggio da rocce eruttive acide a scisti sericitico–feldispatici; le citazioni seguenti devono servire solo come esempio, non come sia pur sintetica elencazione.

Nella trincea della strada Asmara–Cheren presso il ponte sul Mai Tocor si possono osservare molto bene i passaggi per sfumature dai porfidi granitici e dalle apliti a certe forme di scisti sericitico–feldispatici per nulla diversi da quelli sviluppati in altre zone, anche se in queste non compaiono tipi a struttura schiettamente di rocce eruttive. Una interessante e varia serie di scisti sericitico–feldispatici derivati con evidenza da rocce eruttive, si può seguire discendendo la strada Zahaflam–Fil Fil–Ailet, a monte di Fil Fil, nel ciglione orientale dell'altopiano. In molti di tali scisti sericitico–feldispatici sono evidentissime diverse caratteristiche strutturali dei porfidi granitici, prima fra tutte quella dei grossi fenocristalli di quarzo arrotondati per riassorbimento. I passaggi fra roccia porfirica poco laminata e rocce molto laminate e scistose sono frequenti e talora si alternano fittamente. In queste serie compaiono, sotto forma di intercalazioni di vario spessore, le rocce scistose verdi cloritico–feldispatiche di cui parlai in precedenza, e che dimostrano esse pure chiaramente la loro derivazione da rocce eruttive.

Porfidi granitici ed apliti laminati sono visibili in moltissimi altri punti dell'altopiano vero e proprio e della sua scarpata orientale. Sulla strada fra Dolfù e Nefasit scisti sericitici derivati da granito aplitico e da porfido granitico sono a contatto con una interessante peridotite a vene di amianto. Porfidi granitici laminati poco intensamente, molto interessanti, si trovano presso il torrentello a Nord dei villaggi Afden e Zahaflam sulla strada Zahaflam–Fil Fil–Ailet. Anche in vari punti del bassopiano occidentale non mancano alternanze di scisti sericitici entro le rocce scistose verdi. Persino in piena porfirite plagioclasica, dove questa presenta delle superfici di scivolamento e talora di milonitizzazione a lamine, si possono notare degli interessanti scisti sericitico–feldispatici bianchissimi, derivati con grande evidenza da filoncelli più o meno sottili di rocce aplitiche eruttive (vari punti a oriente del Monte Domiscioba).

Gli scisti filladici sericitici a feldispati ed i porfiroidi descritti dal Manasse nel suo lavoro (pagg. 11–18) sono da riferire senz'altro a queste rocce scistose sericitiche derivate da rocce eruttive acide, mentre lo stesso Manasse ammette tale derivazione per i soli porfiroidi. Questo Autore fa notare un graduale passaggio fra porfiroidi e scisti quarzoso–sericitici del Monte Scenduà presso Mai Aliberet (Asmara).

Durante le mie escursioni ho avuto la netta impressione che i porfidi granitici, spesso più o meno fortemente laminati e ridotti a rocce scistose sericitiche, siano molto più diffusi di quello che si sia fin'ora ritenuto, nella intera zona dell'altopiano eritreo.

Non si creda però che voglia escludere la presenza di rocce filladiche di netta origine para. Tutt'altro. Ho avuto occasione di osservarne in molti punti e per potenze talora abbastanza considerevoli. Sicure filladi para si trovano lungo la strada Asmara–Nefasit e Nefasit–Decamerè (su questa con uno spessore che si può ben calcolare al loro affioramento, costante circa dal 10° al 15° chilometro). Così tali filladi si ritrovano verso Dembè sulla strada Ghinda–Massaua.

Altre sicure filladi para si trovano verso la base della scarpata orientale dell'altopiano: tipiche le filladi che si trovano alla fine della discesa della strada Zahaflam–Fil Fil–Ailet, fra il Passo Ghirghirret e A. Sciuma e fino verso Ailet.

Qui è bene che faccia notare che nella regione dell'altopiano eritreo molte altre rocce scistose sericitiche, e forse molte rocce scistose cloritiche, si devono ritenere derivate da laminazione di metarocce, di probabili gneis o scisti iniettati, per retrocessione metamorfica di epizona. E anche questi tipi di rocce miste, messe in evidenza come cornubianiti (Hornfels) nel pregevole lavoro del MANASSE (pagg. 44–46), si devono ritenere ben più diffuse di quello che fin'ora si sia ritenuto.

Con ciò si starebbe investendo il problema molto interessante e suggestivo del grado e sviluppo del metamorfismo o dei metamorfismi che presentano le rocce dette globalmente « scistoso–cristalline » di quelle regioni.

METAMORFISMO E TRASFORMAZIONI DEI TERRENI DI FONDO CRISTALLINI. CENNI SULLA MINERALIZZAZIONE AURIFERA.

Qual'è il grado di metamorfismo di tutte quelle rocce in generale indicate come « scisti cristallini » e che costituiscono lo zoccolo antichissimo su cui poggiano sedimenti e colate effusive ?

La già accennata distinzione, fra queste rocce scistose, delle due categorie da me indicate come rocce metamorfiche di mesozona e di epizona, farebbe ritenere che le azioni metamorfiche si siano sviluppate localmente con grado diverso.

Molti gneis e micascisti studiati dal MANASSE (pagg. 20–24 e 35–43) presentano composizione mineralogica di rocce metamorfiche di mesozona, benchè la loro attuale struttura intensamente cataclastica e milonitica stia ad indicare azioni puramente distruttive di cristalli, anzichè cristalloblastiche. Tutti i gneis descritti da questo Autore sono cataclastici: ma mentre alcuni non vi è dubbio che derivino direttamente da rocce eruttive attraverso un solo atto metamorfico dinamico, per altri la presenza di minerali di mesozona e le caratteristiche di struttura fanno pensare ad un vero e proprio *polimetamorfismo*.

E qui sorge spontanea la domanda: sono le rocce scistose dell'Eritrea polimetamorfiche ? Quali sono le varie fasi dinamiche o metamorfiche

fissate e documentate dalla struttura di queste rocce ? È evidente che la storia geologica di rocce così antiche dev'essere costituita da una serie di fasi tutt'altro che semplice.

A questo proposito è particolarmente sentita la mancanza di un rilevamento geologico, sia pure a grandi linee, delle regioni a rocce scistose e laminate. Tutte le carte geologiche si sono fin'ora limitate a comprendere in un'unica tinta le « rocce scistoso–cristalline » dell'intera Africa Orientale, distinguendovi tutt'al più i massicci intrusivi ed i calcari saccaroidi. Solo in qualche recente carta geologica allegata a lavori geologico–petrografici, s'incomincia a vedere una distinzione di alcuni terreni nella serie degli scisti cristallini: questo però è avvenuto per regioni ben lontane dall'Eritrea.

Ritengo di notevole importanza anche ai fini pratici di ricerca e valorizzazione di giacimenti minerari, che siano condotti studi locali dettagliati per stabilire, almeno per una limitata regione, i vari fondamentali terreni scistosi e studiarne la storia geologica. È evidente poi che un rilevamento geologico della parte cristallina dell'Eritrea è vivamente sentito in molti ambienti: tale rilevamento dovrebbe venir condotto in base ai risultati offerti dagli studi petrografici dettagliati. Il tutto trattato con moderni razionali criteri e metodi di ricerca.

In vari punti delle regioni da me percorse ho potuto notare due serie successive di fratturazioni e di laminazioni. Ad esempio, presso il ponte sul Mai Tocor, lungo la strada Asmara–Cheren, la serie eruttiva data da prevalenti tipi persilicici e da filoni lamprofirici, dimostra con evidenza due serie di superfici di discontinuità: una di piani di scivolamento e laminazione con direzione circa N–S e quasi verticale, l'altra di fratturazioni e movimento non lontana dalla posizione orizzontale. In altre zone si possono fare analoghe osservazioni.

La venuta di masse eruttive così abbondanti da costituire attualmente le rocce prevalenti nello zoccolo cristallino, deve avere necessariamente portato ad intense azioni di metamorfismo di contatto e di iniezione, come dimostrano le numerosissime cornubianiti nelle filladi a contatto con massicci granitici e le abbondanti e vaste zone costituite da rocce miste d'iniezione. Lo studio di queste dovrà portare a risultati assai interessanti.

Altrettanto interessanti dovranno essere i risultati dello studio dei vari tipi, molto diffusi sia nell'altopiano sia nel bassopiano occidentale, di quelle rocce da me denominate porfiriti diabasiche e plagioclasiche, quasi sempre di colore verde cupo. Tali rocce, secondo le mie osservazioni, dovrebbero essere quelle originarie dalle quali deriva la massima parte delle rocce verdi scistose: le prasiniti, i cloritoscisti, ecc.

La evidente struttura porfirica di rocce effusive notata dal Manasse nelle rocce da lui definite « prasiniti a struttura pseudo–effusiva », do-

vrebbe confermare le idee che mi sono fatto con osservazioni locali che, cioè, non si sia avuto un vero metamorfismo che portò alla formazione delle rocce verdi scistose, ma solamente una intensa laminazione di epizona, totalmente o quasi priva di ricristallizzazioni. In conseguenza di queste constatazioni, per le quali una documentazione probatoria sarà solo data dallo studio del materiale che spero di poter eseguire nel futuro, la maggior parte delle rocce laminate o « scistose », oltre che dimostrarsi derivata da rocce eruttive (rocce verdi da rocce eruttive basiche e scisti sericitico–feldispatici da rocce eruttive acide), dev'essere considerata non come veri « scisti cristallini ». In altre parole di veri e propri scisti cristallini nella Colonia Eritrea ne troviamo ben pochi e limitati sempre a non larghe fascie nella parte più settentrionale della nostra Colonia primogenita e nella scarpata orientale dell'altopiano.

La constatazione del Manasse che i grossi fenocristalli delle « prasiniti » risultano costituiti da albite ricca di piccoli cristalli di epidoti, non ritengo che sia una prova dell'avvenuta ricristallizzazione per metamorfismo di queste rocce. La struttura non sarebbe rimasta così nettamente porfirica.

Mi pare più probabile che l'albitizzazione, l'epidotizzazione e la cloritizzazione di tutte le rocce verdi sia un fenomeno determinato da soluzioni idrotermali che avrebbero agito ancora precedentemente alla laminazione delle rocce verdi. Non si dimentichi che la regione eritrea fa parte di quella vasta provincia metallogenica aurifera che si estende, press'a poco, per tutta la parte orientale dell'intero continente africano. La genesi della mineralizzazione aurifera, accompagnata da genesi di solfuri metallici, è da porre in relazione con fenomeni idrotermali connessi e successivi alle venute delle potenti masse intrusive, come senz'altro ora si ammette (v. pagg. 4–5 di F. Millosevich, *Qualche prospettiva mineraria dell'A. O. I.* « Rendiconti della R. Acc. d'Italia », Classe Sc. fis. mat. nat., serie VII, vol. I, 1939).

Noi sappiamo che di certi giacimenti auriferi di molti distretti del Nord America e del distretto dei Siebenbürgen in Transilvania la caratteristica genetica inconfondibile è la cosidetta « propilitizzazione ». Questa consiste in una trasformazione autometamorfica idrotermale di rocce vulcaniche di tipo andesitico o dacitico ad opera di soluzioni che riuscirono ad impregnare e permeare completamente vaste plaghe di rocce eruttive. In conseguenza di queste azioni si formò una roccia nuova, detta *propilite*, costituita essenzialmente da albite, clorite ed epidoti e, talora, solfuri metallici in quei punti ove le filtranti soluzioni idrotermali erano ricche di idrogeno solforato. In genere, la mineralizzazione aurifera si sarebbe maggiormente esplicata successivamente alla propilitizzazione, per il concentrarsi delle soluzioni. Ultima sarebbe stata un'azione caolinizzante, in ambiente divenuto in prevalenza ossidante. L'età delle propiliti sarebbe in genere terziaria.

Possiamo riferire a tipi, non di propiliti, ma analoghi a quelli delle propiliti le rocce verdi, siano esse compatte schiettamente eruttive (porfiriti diabasiche e feldispatiche), siano laminate più o meno intensamente (scisti a clorite, « prasiniti », ecc.), che tanto diffuse sono in Eritrea in connessione con i giacimenti auriferi?

L'età non è certo quella delle vere propiliti del Nevada e della Transilvania. In A. O. le rocce verdi in parola si devono ritenere prepaleozoiche, almeno secondo le più recenti idee. Invece il processo genetico, o per essere più esatto, la serie di processi genetici che le originarono, pare che mostrino grande analogia con quelli che portarono alla formazione delle propiliti. Non ultima analogia sarebbe quella della formazione di province metallogeniche aurifere simili, nelle quali le soluzioni aurifere avrebbero soprattutto seguìto i processi di propilitizzazione.

Purtroppo, la mancanza del materiale da me raccolto, non mi permette di esprimere con certezza un giudizio, che dev'essere in ogni caso ampiamente documentato. Ho però fiducia che le idee esposte in questo ultimo capitolo della presente nota preliminare non siano tanto lontane dalla realtà. Le rocce verdi, siano esse porfiriti compatte o laminate o scisti a clorite, devono necessariamente aver subìto una intensa trasformazione, che indica un ambiente non ossidante e delle condizioni idrotermali caratteristiche. Il predominio universale della clorite non può essere spiegato esaurientemente con l'ammissione di un metamorfismo di epizona con ricristallizzazioni quasi generali: la struttura delle rocce verdi laminate e quella di molti scisti sericitici e porfiroidi non potrebbe essere come in realtà ora si presenta. La vasta generale azione idrotermale non può essere negata, come non si potrà negare che questa precedette la mineralizzazione aurifera, almeno nella maggior parte dei casi.

Si noti però che le azioni idrotermali devono aver investito rocce per una zona ben più vasta di quelle zone ove si trovano le vere propiliti del Nevada e della Transilvania.

E con tutte le riserve, che il mancato studio del materiale raccolto rende necessarie, mi provo a dare uno schema oltremodo vago della storia geologica probabile del cristallino dell'Eritrea, insistendo che tale schema non ha, nè vuol avere, carattere esauriente e preciso e può essere suscettibile di variazioni anche ampie.

Secondo le idee che mi sono fatto durante le mie escursioni, si dovrebbe poter ricostruire una storia geologica formata dalle fasi seguenti:

1ª Metamorfismo di rocce eruttive e sedimentarie a formare una serie di scisti cristallini di mesozona (fase dubbia).

2ª Vaste eruzioni di lave mesosiliciche entro le probabili precedenti rocce metamorfiche; probabile venuta dei primi ammassi intrusivi.

3ª Formazione di rocce sedimentarie clastiche argilloso–arenacee che formeranno rocce filladiche, di conglomerati, di rocce calcaree.

4ª Intrusioni di vaste abbondanti masse granitiche, ricche di locali differenziazioni granodioritiche, dioritiche, gabbriche e persino ornoblenditiche e peridotitiche. Seguono le molteplici manifestazioni filoniane per le quali si formano filoni di rocce aplitiche e lamprofiriche. Col diminuire della intensità nella attività posteruttiva si passa, attraverso la fase di autometamorfismo pegmatitico e poi pneumatolitico, alla fase idrotermale.

5ª Impregnazione e permeazione da parte di soluzioni idrotermali delle rocce effusive mesosiliciche formatesi in 2ª, che alterano profondamente le porfiriti, con prevalente formazione di albite, clorite, epidoti e pochi solfuri. Le azioni che formarono l'alterazione delle attuali rocce verdi, anzichè costituire questa 5ª fase potrebbero essersi esplicate in una fase successiva alla 2ª, come manifestazione posteruttiva ed alterazione autometamorfica, analogamente al fenomeno terziario della « propilitizzazione ».

6ª Ultime manifestazioni posteruttive: venuta di filoni di quarzo, delle soluzioni aurifere contenenti pure abbondante idrogeno solforato che forma solfuri più o meno ricchi di oro.

7ª Laminazione dovuta a multipli scivolamenti che si sviluppano in seno alle varie rocce, ma che non portano mai a vere ricristallizzazioni e perciò che non possono dar origine a scisti cristallini. Si originano filladi dalle rocce arenaceo-argillose, scisti sericitici e feldispatici da rocce eruttive acide, scisti cloritici, « prasiniti » ecc. dalle porfiriti e da certi lamprofiri.

Tali azioni meccaniche possono essere state prodotte forse da più di una fase, perchè spesso si notano vari sistemi di laminazioni.

Le fasi di movimento in rapporto ad uno o a più processi orogenetici possono anche essere più numerose. Un ripiegamento potrebbe essere avvenuto in una fase intermedia a quelle da me denominate fasi 3ª e 4ª. Finchè non si avranno vasti molteplici studi geologico-petrografici sul cristallino dell'A. O. è però evidente che non si potranno apportare miglioramenti, variazioni e soprattutto materiale probatorio sicuro per questo schema.

Questi studi credo che potranno avere una grande portata pratica per la ricerca e la coltivazione degli stessi giacimenti minerari, in primo luogo quelli auriferi e poi quelli ferriferi, legati intimamente al massiccio cristallino. Ed è altrettanto augurabile che una serie di questi studi venga condotta al più presto possibile.

Ritorno ad insistere sul fatto che le idee espresse in questa nota preliminare devono esser prese come non definitive ed, in ogni modo, non complete ed esaurienti.

Biologia. — *La partecipazione del tessuto interrenale nell'organogenesi della gonade e nei processi di intersessualità giovanile della « Rana agilis »* (1). Nota di ENRICO VANNINI, presentata (2) da GIUSEPPE GOLA, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

L'esatta seriazione dei fenomeni organogenetici che caratterizzano lo sviluppo e il differenziamento sessuale delle gonadi degli Anfibi, è dovuta principalmente ad un'estesa serie di notissime ricerche, iniziate da WITSCHI fin dal 1914 e ininterrottamente continuate fino agli ultimi anni.

Limitandoci a considerare le condizioni che si verificano nelle rane (che sono gli Anfibi finora meglio conosciuti da questo punto di vista), è noto che in esse, come nella generalità dei Vertebrati, il precoce abbozzo delle gonadi è rappresentato dalle « creste genitali », sporgenti nella cavità celomatica ai lati della radice del mesenterio, coperte dall'endotelio peritoneale e costituite semplicemente di cellule germinative primordiali (protogoni) singolarmente circondate da un sottile involucro di cellule avvolgenti.

In stadi successivi, nell'interno delle creste genitali penetra un certo numero di cordoni di cellule non germinative, a disposizione pseudometamerica, che vengono denominati « cordoni della rete ». Come è noto, secondo l'opinione di WITSCHI, oggi generalmente accettata, il tessuto dei « cordoni della rete » proverrebbe direttamente dai blastemi mesonefrici.

In questo periodo le gonadi (che possono essere definite « sessualmente indifferenti » poichè hanno un identico aspetto sia nei futuri maschi che nelle future femmine) appaiono distinte in una « parte corticale » (*cortex*) contenente le cellule germinative primordiali e corrispondente alla primitiva cresta genitale, e in una « parte midollare » (*medulla*), completamente priva di elementi germinativi, costituita dalle cellule introdottesi con i « cordoni della rete ».

In seguito, nelle rane appartenenti alle così dette « razze differenziate », se la gonade è destinata a divenire un testicolo, le cellule germinative pri-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Zoologia e Anatomia comparata della R. Università di Padova, diretto dal prof. U. D'Ancona.

(2) Nell'Adunanza del 21 febbraio 1941-XIX.

mordiali migrano dalla *cortex* nella *medulla* e, nella nuova sede, subiscono un differenziamento in senso maschile (spermatogoni, spermatociti, ecc.); la *cortex* regredisce e il testicolo risulta perciò esclusivamente costituito dalla « parte midollare ». Se invece la gonade sessualmente indifferente è destinata a divenire un'ovaia, le cellule germinative rimangono localizzate nella *cortex* e si moltiplicano formando nidi di ovogoni e di ovociti; contemporaneamente il tessuto midollare perde la propria compattezza e regredisce, perchè nel suo spessore si formano ampie cavità (« tasche ovariche »), che esso si riduce a tappezzare in semplice strato di cellule.

In altre razze di rana, note col nome di « razze indifferenziate », le gonadi primordiali sessualmente indifferenti di tutti i girini presentano invece, in un primo periodo, uno sviluppo prevalente della *cortex* e una regressione della *medulla*, assumendo perciò l'aspetto di ovaie. Solo in un tempo successivo (all'epoca della metamorfosi o anche alquanto più tardi, a seconda delle razze), negli individui geneticamente maschili si verifica una trasformazione delle giovani ovaie in testicoli definitivi. Il processo di inversione sessuale della gonade consiste in una nuova comparsa di abbondante tessuto midollare, seguita dalla migrazione in quest'ultimo di quelle cellule germinative contenute nella *cortex* ovarica che non si erano ancora definitivamente differenziate in senso femminile (ovogoni primari e secondari, ovociti che non hanno ancora iniziato la profase della prima divisione maturativa); la *cortex* ovarica, infine, scompare, per degenerazione e riassorbimento di tutte le rimanenti cellule germinative, che avevano ormai assunto in maniera irreversibile caratteristiche di femminilità (ovociti profasici in 1° e in 2° periodo di accrescimento) [1]. Fenomeni perfettamente corrispondenti a quelli descritti, si verificano anche nei noti casi di mascolinizzazione sperimentale delle giovani ovaie delle rane (effetto delle temperature elevate o di ormoni sessuali dell'adulto).

Si ritiene comunemente (in base sopratutto agli studi di Witschi) che l'abbondante tessuto midollare che riempie e disintegra le giovani ovaie durante il processo della loro mascolinizzazione spontanea o sperimentale, si formi essenzialmente per proliferazione delle cellule residuali dei primitivi « cordoni della rete », rimaste (come ho già detto) a tappezzare in semplice strato le cavità centrali dell'ovaia [2].

---

[1] E. Vannini, *Nuove osservazioni sullo sviluppo delle gonadi e sul comportamento delle cellule germinative in una razza indifferenziata di « Rana agilis »*. « Rend. R. Accad. d'Italia », Cl. Sc. fis. mat. nat., ser. VII, vol. I, pag. 790 (1940).

[2] Kuschakewitsch (1910) per la *Rana esculenta* e Swingle (1921, 1926) per la *Rana catesbeiana*, ammettono che il mesonefro possa partecipare al processo di mascolinizzazione dell'ovaia, con l'invio di alcuni elementi cellulari.

Recentemente (1) ho potuto però constatare (su esemplari in corso di metamorfosi o da poco metamorfosati di *Rana agilis*) la infondatezza di tale opinione, sia nei casi di mascolinizzazione spontanea che in quelli di mascolinizzazione sperimentale dell'ovaia (azione dell'ormone testicolare sintetico « testosterone »). In tutti i casi l'invasione dell'ovaia da parte di un compatto tessuto midollare di natura testicolare, non deriva da proliferazione di elementi midollari entovarici residuali, bensì (almeno prevalentemente) dalla penetrazione di nuovi voluminosi cordoni di cellule somatiche, simili ai già descritti « cordoni della rete », provenienti da quel tessuto situato medioventralmente al mesonefro e lateralmente alla vena cava posteriore, che costituisce l'organo surrenale.

Come è noto, verso l'epoca della metamorfosi l'organo surrenale delle rane appare già costituito, oltre che dal tessuto interrenale, anche da una certa quantità di cellule cromaffini e di cellule di natura linfoide, del tipo delle così dette « cellule estive » (o « cellule acidofile ») descritte da vari Autori per gli organi surrenali della *Rana esculenta* e della *R. temporaria* (2).

Le mie osservazioni, condotte sui suddetti esemplari intersessuati di *Rana agilis*, mi hanno convinto che i descritti cordoni cellulari, provenienti dagli organi surrenali, constano esclusivamente di tessuto interrenale.

Bisogna tener presente che, all'epoca della metamorfosi, negli organi surrenali soltanto una parte delle cellule interrenali sembra aver già raggiunto la fase della propria funzionalità endocrina: tali cellule (che presentano un evidente ordinamento cordonale) mostrano già quel citoplasma chiaro e (nei preparati) finemente vacuolizzato, che le caratterizza negli adulti. Altre cellule interrenali, invece (almeno negli esemplari da me studiati), conservano ancora un aspetto più giovanile e più indifferenziato. Ho potuto constatare che soltanto quest'ultime cellule interrenali migrano nell'interno della gonade sotto forma dei descritti cordoni midollari.

Tanto nei casi di intersessualità spontanea che in quelli di intersessualità sperimentale, si possono facilmente distinguere ovaie all'inizio della mascolinizzazione, ovaie in mascolinizzazione già molto avanzata e testicoli già più o meno completamente costituiti. La penetrazione di tessuto interrenale sotto forma di compatti cordoni midollari, è particolarmente

---

(1) E. Vannini, *Rapida azione mascolinizzante del testosterone sulle gonadi di girini di « Rana agilis » in metamorfosi.* « Rend. R. Accad. d'Italia », Cl. Sc. fis. mat. nat., ser. VII, vol. II, fasc. 8 (1941).

(2) Fra i lavori più esaurienti sullo sviluppo e sulla struttura degli organi surrenali dei girini di *Rana*, vedi: A. Jona, *Sullo sviluppo del sistema interrenale e del sistema cromaffine negli anfibi anuri.* « Arch. Ital. Anat. Embr. », vol. XII, pag. 311 (1914): V. Radu, *Origine et développement des « cellules d'été » (« cellules acidophiles ») de la glande surrénale des grenouilles.* « Ann. Sc. Univ. Jassy », T. XX, pag. 439 (1935).

abbondante all'inizio della mascolinizzazione dell'ovaia, continua con minore abbondanza nelle ovaie in mascolinizzazione più avanzata (fig. 1) e cessa completamente verso la fine dell'inversione sessuale. Il tessuto interrenale migrato nell'interno della gonade, inizia subito una modica attività cariocinetica; qualche cariocinesi è pure presente nel tessuto interrenale durante la sua migrazione entro l'ovaia.

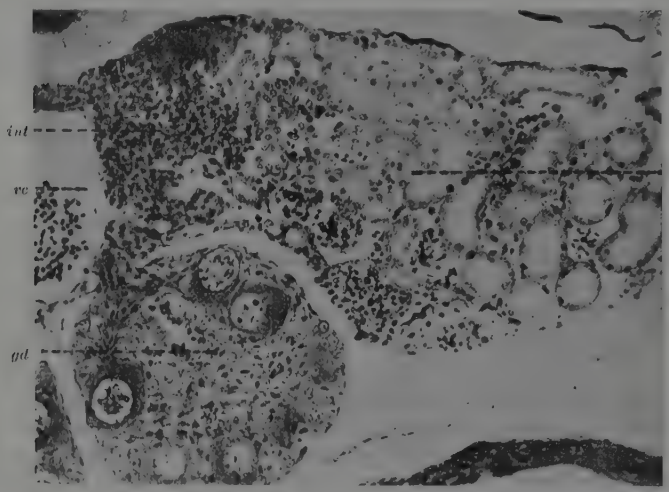


Fig. 1. — Ovaia all'epoca della metamorfosi (lunghezza dell'esemplare mm. 36), in avanzata mascolinizzazione sperimentale (azione del testosterone). È evidente la penetrazione di tessuto interrenale attraverso l'ilo della gonade. Nella parte corticale della gonade, si scorgono grossi ovociti in 2° periodo di accrescimento, di cui alcuni all'inizio della degenerazione. Ingrandimento 170 ×. (*mf* = mesonefro, *int* = interrenale, *gd* = gonade, *vc* = vena cava posteriore).

Non è da escludere che al processo di mascolinizzazione dell'ovaia possano partecipare anche gli elementi residuali entovarici dei primitivi « cordoni della rete », con una loro limitata attività cariocinetica; tale eventuale partecipazione è però certamente di importanza molto secondaria rispetto alla penetrazione di nuovi cordoni interrenali.

I risultati di queste osservazioni, mi sono sembrati degni di ulteriori indagini. In particolare, mi è sembrato necessario ricontrollare se la vera sede di origine dei primitivi « cordoni della rete » durante la più precoce organogenesi della gonade, fosse realmente rappresentata dai blastemi mesonefrici (come si ammette comunemente), oppure dai blastemi del tessuto interrenale (come mi appariva più probabile in seguito ai miei ultimi studi).

A tale scopo, in due differenti « razze indifferenziate » di *Rana agilis* (una proveniente dai dintorni di Siena, l'altra da quelli di Padova) ho accuratamente seguito (su complete serie larvali che vanno dalla prima comparsa delle creste genitali fino all'epoca della metamorfosi) l'organogenesi delle gonadi, tenendo conto contemporaneamente dello sviluppo dei mesonefri e del tessuto interrenale. Tutti gli esemplari studiati erano stati fissati in Zenker acetico, tagliati trasversalmente in fette seriali dello spessore di 10 μ e colorati con ematossilina-eosina o con ematossilina ferrica di Heidenhain. I risultati di questo mio studio sono stati perfettamente identici tanto nella serie larvale senese che in quella padovana.

All'epoca della prima comparsa delle creste genitali, sono già presenti tanto i blastemi interrenali quanto quelli mesonefrici. I blastemi interrenali sono situati ventralmente all'aorta e dorsalmente alle due vene cardinali posteriori, e si estendono longitudinalmente dal livello della biforcazione cefalica dell'aorta fin verso l'estremo caudale dei blastemi mesonefrici; per tutta la loro estensione i blastemi interrenali dei due lati appaiono più o meno intimamente fusi lungo il piano mediano. I blastemi mesonefrici occupano una posizione più laterale rispetto a quelli interrenali, dai quali appaiono nettamente separati per tutta la loro estensione; sono situati medialmente agli ureteri primari, dorsolateralmente alle vene cardinali posteriori, e, mentre caudalmente si avvicinano al livello dello sbocco cloacale degli ureteri primari oltrepassando l'estremo posteriore dei blastemi interrenali, anteriormente si arrestano ad un livello alquanto distante da quello più cefalico dei blastemi interrenali. A differenza di questi ultimi, i blastemi mesonefrici dei due lati non mostrano a nessun livello alcuna tendenza a fondersi lungo la linea mediana. Le creste genitali (sporgenti nella cavità celomatica ai lati della radice del mesenterio, ventralmente alle vene cardinali) si estendono caudalmente fino ad oltrepassare di un buon tratto l'estremo cefalico dei blastemi mesonefrici e cefalicamente non raggiungono l'estremo anteriore dei blastemi interrenali; a questo stadio di sviluppo, le creste genitali non ricevono ancora elementi cellulari nè dai blastemi mesonefrici nè da quelli interrenali, e risultano costituite esclusivamente di cellule germinative primordiali (protogoni).

In stadi ulteriori di sviluppo, tanto i blastemi interrenali che quelli mesonefrici aumentano progressivamente di volume per intensa attività cariocinetica, mentre le loro cellule consumano il tuorlo che ne infarciva il citoplasma. Le cellule dei blastemi mesonefrici assumono inoltre un evidente ordinamento canalicolare, che prelude alla formazione dei tubuli renali. Anche i protogoni delle creste genitali riducono il proprio tuorlo, e si ammassano maggiormente fra loro; le creste genitali si fanno più sporgenti nella cavità celomatica. Frattanto dalla fusione delle due vene cardinali posteriori si origina il tratto caudale della vena cava posteriore.

All'epoca (immediatamente successiva) in cui si inizia la penetrazione dei « cordoni della rete » nell'interno delle creste genitali, il tessuto interrenale si è notevolmente esteso lateralmente fino a raggiungere la faccia mediale dei blastemi mesonefrici. Tuttavia, anche in questo periodo dello sviluppo, tessuto interrenale e tessuto mesonefrico sono facilmente distinguibili, oltre che per la differente topografia, anche per le diversità morfologiche delle loro cellule, che nei blastemi mesonefrici mostrano ormai un

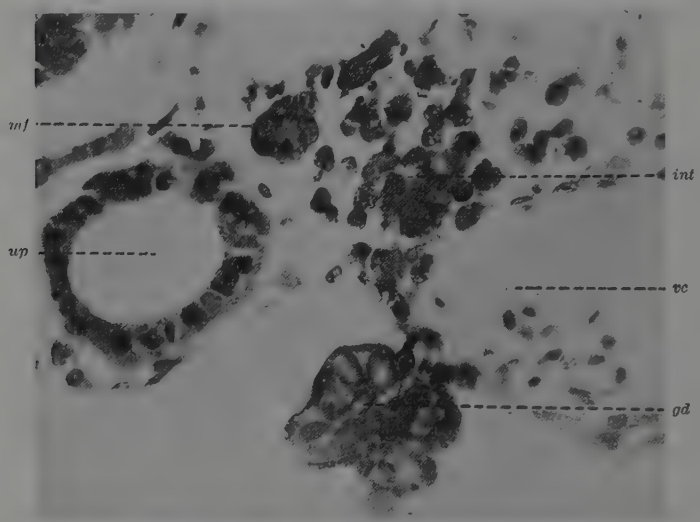


Fig. 2. - Cresta genitale di girino lungo mm. 17, all'inizio della penetrazione dei « cordoni della rete ». Vicino all'uretere primario, si vede l'estremo cefalico dell'abbozzo mesonefrico. Nella parte corticale della gonade, voluminosi protogoni infarciti di globuli di tuorlo. È evidente l'origine esclusivamente interrenale del tessuto midollare della gonade (tessuto dei « cordoni della rete »). Ingrandimento 540×. (*up* = uretere primario. Le altre indicazioni, come nella fig. 1).

ordinamento canalicolare ben evidente. *I « cordoni della rete » che penetrano nell'interno delle creste genitali sono sempre sicuramente ed esclusivamente costituiti da tessuto interrenale* (fig. 2). È particolarmente interessante, da questo punto di vista, l'esame delle parti più cefaliche delle creste genitali, situate a livelli nei quali mancano i blastemi mesonefrici, mentre sono ancora presenti quelli interrenali; anche a questi livelli si verifica la penetrazione dei « cordoni della rete », che sono pertanto con assoluta certezza costituiti esclusivamente da tessuto interrenale.

In stadi successivi, mentre si completa l'organogenesi dei mesonefri e degli organi surrenali, nella gonade continua ancora per qualche tempo

un'attiva penetrazione di tessuto interrenale in corrispondenza dei « cordoni della rete » (fig. 3). Nonostante ciò, le cellule germinative della parte corticale (protogoni) iniziano ben presto un'intensa attività cariocinetica, dando luogo alla formazione di numerosi nidi, sempre più voluminosi, di ovogoni. Le gonadi dunque, sebbene persista ancora un abbondante tessuto midollare, hanno già iniziato il loro differenziamento in un senso, almeno transitoriamente, femminile.

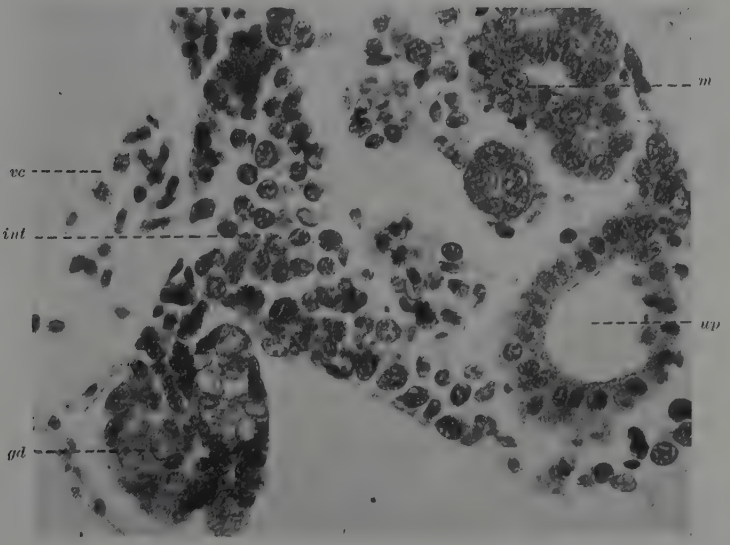


Fig. 3. — Giovane ovaia di girino lungo mm. 19, nella quale è ancora in corso la penetrazione del tessuto midollare proveniente dall'abbozzo interrenale. Nell'abbozzo mesonefrico è evidente l'ordinamento canalicolare. Nella parte corticale della gonade, si vedono cellule germinative (protogoni e piccoli nidi di ovogoni) ancora abbastanza ricche di globuli di tuorlo. Ingrandimento 470 ×. (Indicazioni, come nelle figg. 1 e 2).

In questo stesso periodo, cefalicamente e caudalmente alla gonade si sviluppano le sue parti « pregenitale » e « postgenitale », prive di cellule germinative. Esse si originano per un leggero sollevamento della parete peritoneale, sporgente nella cavità celomatica, che viene successivamente riempito da una più o meno abbondante *medulla* di cellule interrenali, mediante un processo esattamente paragonabile a quello della descritta penetrazione dei « cordoni della rete » nell'interno delle creste genitali. La parte pregenitale (destinata, come è noto, a trasformarsi in « corpo grasso ») assume sempre, specialmente a sinistra, uno sviluppo molto più

considerevole che la parte postgenitale (destinata a rimanere rudimentale). Lo sviluppo di queste regioni sterili della gonade, corrisponde perfettamente a quanto ha già rilevato la GRILLI [1] per il *Bufo viridis*, a parte il fatto che questa Autrice ammette una origine mesonefrica delle cellule che le costituiscono.

In prossimità della metamorfosi, cessa la penetrazione di tessuto interrenale nell'interno delle giovani ovaie, mentre il tessuto midollare già presente si scava gradualmente nella sua parte centrale e si riduce a tappezzare in semplice strato di cellule le cavità entovariche così costituitesi; contemporaneamente, nello spessore della *cortex* numerose cellule germinative iniziano la profase della prima divisione maturativa, assumendo così le caratteristiche degli ovociti di I ordine in 1° e successivamente anche in 2° periodo di accrescimento. Frattanto, anche nella parte pregenitale della gonade si arresta la penetrazione delle cellule interrenali, mentre quelle che erano già penetrate precedentemente assumono l'aspetto di cellule adipose. Tali modificazioni accrescono assai notevolmente il volume della parte pregenitale, che prende una forma lobata e si trasforma definitivamente in « corpo grasso ».

* * *

Le conclusioni generali di questo mio studio possono essere così riassunte:

1° *Il tessuto midollare (tessuto dei « cordoni della rete ») che invade precocemente le creste genitali trasformandole in gonadi primordiali sessualmente bipotenti, non si origina (come si riteneva finora) dai blastemi mesonefrici, bensì da quelli del tessuto interrenale.*

2° *Anche il tessuto dei « corpi grassi » non si origina (come si riteneva finora) dai blastemi mesonefrici, bensì da quelli del tessuto interrenale.*

3° *Durante i processi di intersessualità giovanile, spontanea o sperimentale, il compatto tessuto midollare che riempie e disintegra le ovaie trasformandole in testicoli, non si origina (come si ammetteva finora) dalla proliferazione di cellule residuali dei primitivi « cordoni della rete », rimaste a tappezzare le « tasche ovariche », bensì (almeno prevalentemente) dalla penetrazione, attraverso l'ilo della gonade, di nuovi cordoni di cellule interrenali.*

Ritengo che tali conclusioni possano essere valevoli per tutti gli Anfibi. Se ulteriori indagini dimostreranno che condizioni analoghe si verificano anche per i Vertebrati superiori, le conclusioni stesse potranno

---

[1] M. GRILLI, *Sull'origine dei corpi grassi negli Anfibi (Ricerche in « Salamandrina perspicillata » e « Bufo viridis »)*. « Arch. Ital. Anat. Embr. », vol. XXXIX, pag. 562 (1938).

assumere un significato ben più generale nell'àmbito dei problemi della determinazione e del differenziamento del sesso.

Comunque, appare fin d'ora molto interessante la constatazione di una così stretta e insospettata parentela fra cellule interrenali e cellule midollari della gonade, dato che a quest'ultime, secondo la nota interpretazione di WITSCHI, viene attribuita la produzione di un'ipotetica sostanza a tipo ormonico (la *medullarina*), induttrice di mascolinità sulle circostanti cellule germinative. Dato poi che, sempre secondo WITSCHI, si ritiene che dalle cellule midollari della gonade embrionale si originino gli elementi interstiziali del testicolo definitivo, probabili elaboratori dell'ormone sessuale maschile dell'adulto, l'interesse di una tale parentela appare anche maggiore.

Tutto ciò può indurci facilmente ad alcune considerazioni, sulle quali mi intratterrò nel lavoro in esteso, che è in corso di elaborazione.

RELAZIONI

Pubblicazioni scientifiche e brevetti d'invenzione.

Relazione [1] di GIUSEPPE BRUNI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

Il problema di assicurare agli scienziati autori di importanti scoperte una partecipazione ai profitti materiali derivanti dalla successiva applicazione pratica dei principî, delle sostanze o degli apparecchi da loro scoperti o dei processi che da tali scoperte si possono far derivare, si è spesso presentato agli studiosi ed al pubblico in genere. Il contrasto fra la modestia di condizioni in cui scienziati puri scopritori di principî e fenomeni fondamentali, e che hanno con ciò contribuito poderosamente al progresso della civiltà e della tecnica, sono stati costretti a vivere e gli enormi profitti derivati dalla attuazione industriale dei loro trovati, ha sempre colpito il sentimento pubblico come profondamente ingiusto. Alcuni casi singoli di clamorosa notorietà (PACINOTTI, GALILEO FERRARIS, RIGHI) hanno fatto sì che questo sentimento fosse particolarmente vivo in Italia.

Gli ostacoli che si frapponevano, e tuttora si frappongono, alla realizzazione di un tale desiderio di giustizia sono ben noti; non è necessario, ricordare che tutte le legislazioni in materia di proprietà intellettuale o industriale escludono i principî scientifici e le scoperte puramente teoriche dalla protezione mediante brevetti d'invenzione. La stessa nostra legge del 1939, che pur vedremo essere tanto benevolmente disposta verso gli studiosi, ammette che possa costituire oggetto di brevetto « l'applicazione tecnica di un principio scientifico, purchè essa dia immediati risultamenti industriali » e limita la brevettabilità a tali risultamenti.

Il problema sembra essere stato posto sul tappeto in Francia nel 1920 dove, dopo discussioni sulla stampa e in riunioni, il Barthelémy propose la istituzione di *brevetti di principio*, che avrebbero dovuto proteggere anche le scoperte scientifiche non capaci di immediate applicazioni pratiche e che avrebbero dovuto precostituire un diritto a retribuzione da parte dei futuri utenti o dei titolari di successivi brevetti di applicazione.

---

[1] Letta nell'Adunanza del 21 marzo 1941-XIX.

Ma il merito della prima proposta concreta spetta all'Italia per opera del senatore prof. Francesco Ruffini il quale sollevò la questione a Ginevra come rappresentante dell'Italia nella Commissione internazionale per le relazioni intellettuali presso la Società delle Nazioni e dietro incarico di questa presentò nel luglio 1923 un rapporto ed un progetto di convenzione internazionale per la *proprietà scientifica*. Questa proposta ebbe una grande risonanza internazionale; non intendo dilungarmi sulle numerose discussioni alle quali essa diede luogo, nelle quali fu unanimemente riconosciuta la nobiltà dell'intento prefissosi dal suo autore, ma furono altresì subito rilevate le molteplici e gravissime difficoltà che si opponevano alla sua attuazione.

Non posso peraltro a meno di ricordare la solenne discussione che, per invito del Ministro della pubblica istruzione d'allora, ebbe luogo nelle sedute a classi riunite del 13 gennaio, 3 febbraio, 5 marzo e 13 aprile 1924 della R. Accademia dei Lincei. Relatore fu l'attuale Accademico d'Italia A. Crocco il quale in un rapporto mirabile per acutezza e chiarezza, dopo aver reso omaggio all'ideale perseguito dal Ruffini concludeva alla inapplicabilità della sua proposta. Seguì un largo dibattito al quale presero parte insigni scienziati e uomini politici come Luigi Luzzatti, Vittorio Scialoja, Vivante e fra i presenti Francesco Severi, oltre che lo stesso Ruffini. Furono infine accettate sostanzialmente le conclusioni del relatore e fu votato un ordine del giorno nel quale, riconoscendo la giustizia del concetto informatore del progetto Ruffini, ma rendendosi conto delle gravi difficoltà di ordine tecnico e giuridico si opinava che il progetto stesso dovesse essere ampiamente riveduto e si faceva voti che il Governo studiasse provvedimenti intesi a maggiormente promuovere e compensare il lavoro scientifico nazionale.

Molto più modestamente, nell'adunanza del 10 aprile dello stesso anno del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, io trattavo lo stesso argomento giungendo alle stesse conclusioni, ma svolgendo altri punti di vista ed avanzando proposte sulle quali ritornerò fra poco.

Deve ancora ricordarsi che poco dopo, il 14 ottobre 1925, il deputato Galeazzi presentò alla Camera italiana una proposta di legge per estendere la protezione alle invenzioni e scoperte puramente scientifiche. Questo progetto, evidentemente ispirato alla proposta Ruffini, e compilato in una forma piuttosto vaga, non ebbe seguito.

Numerose furono dopo ciò le associazioni e i congressi che trattarono l'argomento suscettibile di appassionare il mondo intellettuale e non mancarono voti in favore di soluzioni più o meno ampie; ma il tentativo più serio di arrivare ad una realizzazione spetta ancora all'Italia.

Infatti l'esame della questione fu ripresa da un Comitato di studio apposito della Commissione italiana per la cooperazione intellettuale, presieduta dal nostro illustre Camerata Ecc. M. d'Amelio che dopo un'ap-

profondita discussione, nel maggio 1930 arrivò a formulare un progetto concreto basato su un ingegnoso sistema di compensi agli scienziati derivanti da un apposito istituto di assicurazione al quale avrebbero dovuto contribuire gli industriali in genere.

Questo progetto fu presentato dalla Commissione italiana a quella internazionale e fu discusso a Ginevra nella estate 1930 in una riunione alla quale l'Italia era rappresentata oltrechè dal Ruffini, dall'Ecc. Piola-Caselli e dal sottoscritto. La maggioranza dei paesi, sia per contrarietà aprioristica, sia per disinteresse, aveva omesso di farsi rappresentare; la discussione fu quasi esclusivamente franco–italiana e per quanto si svolgesse in linee simpatiche, non condusse, nè poteva condurre, a risultati positivi.

Dopo di allora la questione, nella sua forma più generale datale dal compianto Ruffini, è rimasta dormiente, nè si vede come e quando possa essere richiamata in vita. Non è ad ogni modo mio proposito estendermi ulteriormente su di essa. Debbo solo riaffermare che, dopo essermi adoperato lealmente per una possibile realizzazione del progetto tanto ridotto della sottocommissione italiana, dopo il suo insuccesso, mi sono sempre più confermato nelle conclusioni negative della mia Memoria del 1924.

L'incoraggiamento alle ricerche scientifiche puramente teoriche resta quindi per ora, nel nostro come negli altri paesi, affidato, oltrechè agli stimoli ideali, ai compensi e premi assegnati dallo Stato e da Enti ed aggiudicati da Accademie e simili Istituti, fra i quali ha posto cospicuo la nostra Accademia.

È detto con ciò che non vi sia altro mezzo di far sì che gli scienziati ed i ricercatori possano essere ricompensati dei contributi continui e decisivi che essi portano al progresso della tecnica sperimentale e successivamente di quella industriale? Certamente no.

Già nella discussione dei Lincei era stato notato dal relatore e da altri che in numerosi casi il risultato di una ricerca scientifica era già sufficientemente completo per aver potuto dar luogo ad un brevetto valido.

Per esempio, in uno dei casi più frequentemente citati, quello di Pacinotti, è da ricordare che la descrizione della sua «macchinetta» e delle possibili applicazioni era già così compiuta nella Memoria del 1865 da poter dar vita ad un brevetto validissimo che avrebbe anticipato e sicuramente dominato quelli chiesti successivamente da Z. Gramme. Altrettanto potrebbe dirsi del campo rotante di Galileo Ferraris.

Questo punto fu più esplicitamente ed espressamente messo in rilievo da me nella mia Nota del 1924, nella quale sostenevo che era da incoraggiare gli scienziati a non perdere di vista le possibili applicazioni pratiche delle loro scoperte ed a proteggerle con brevetti quando ciò apparisse fattibile e, s'intende, quando l'argomento ne valesse la pena; ciò che del

resto si praticava già largamente nei paesi industrialmente più progrediti, per esempio in Germania.

Nella sua prima esposizione il RUFFINI aveva presentato questo lato della questione come se il prendere brevetti fosse qualcosa di assolutamente contrario alla mentalità scientifica o addirittura al decoro dello scienziato. Ma questa concezione sentimentale, e un po' ingenua, era in fatto già superata allora e lo è oggi così completamente che non sarebbe il caso di dilungarvisi. A chi potrebbe venire in mente che tolga qualche cosa alla fama di GUGLIELMO MARCONI il fatto di essere stato titolare o partecipe dei numerosi brevetti presi intorno alla sua immortale invenzione?

Ma, come io notavo, appariva opportuno facilitare agli scienziati tale forma di protezione che si scosta dalle loro forme consuete di attività ed alla quale si oppongono per essi numerosi ostacoli di carattere giuridico-formale ed economico ed a tale scopo si invocavano adatte provvidenze legislative.

Un istituto che sarebbe molto vantaggioso nel senso ora accennato sarebbe quello dei *brevetti di principio* già ricordati e proposti dal BARTHELÉMY.

Difatti il Senatore RUFFINI aveva immediatamente accettato questo concetto e lo aveva introdotto nel primitivo testo del suo progetto sulla proprietà scientifica, il cui art. 6 suonava così: « L'autore di una scoperta o invenzione potrà far constatare il suo diritto per mezzo di un brevetto di principio, rilasciato (delivré) nelle condizioni fissate dalle convenzioni in vigore per i brevetti di invenzione ».

È da rilevare la formulazione vaga di questo articolo. Esso scomparve poi nei testi successivi elaborati dalla Commissione di cooperazione intellettuale.

Nella mia già citata Nota del 1924 anch'io invocavo « la abolizione dell'obbligo di un utile industriale immediato per la patentabilità di un processo, bastando la possibilità di un eventuale vantaggio futuro ». Debbo peraltro confessare che un quindicennio di ulteriore e larga esperienza in materia di brevetti nazionali ed internazionali mi ha convinto, se non della assoluta impossibilità, certo della estrema difficoltà di definire in modo giuridicamente esatto il nuovo istituto del brevetto di principio, in modo da stabilirne la figura e le caratteristiche distinte da quelle dei comuni brevetti d'invenzione, con quella precisione che è necessaria in materia di legislazione. A parte ciò, una difficoltà grave nasce subito a proposito della durata, poichè è ovvio che se questa fosse uguale a quella dei brevetti d'invenzione, ossia da 15 a 20 anni secondo i paesi, la protezione così accordata sarebbe quasi sempre inefficace, poichè la introduzione nella pratica di un *principio* scientifico richiede generalmente un periodo molto più lungo. Di ciò si era bene avveduto il RUFFINI che difatti

nel citato art. 6 del progetto disponeva che la durata dei diritti derivati da un brevetto di principio durasse quanto quella da lui prevista per la proprietà scientifica in genere, ossia per tutta la vita dell'autore e cinquanta anni dopo la sua morte. L'esagerazione di tale disposizione era evidente.

Difatti nel progetto preliminare preparato nel luglio 1928 dalla Commissione internazionale per la cooperazione intellettuale, la durata della protezione accordata alla proprietà scientifica è ridotta a 30 anni a datare dal giorno in cui la pubblicazione della scoperta viene registrata da un apposito organismo internazionale da crearsi (art. 5). E nel progetto finale dalla sottocommissione italiana nel giugno 1930, la durata viene fissata in una misura uguale a quella accordata ai brevetti di invenzione dalla legislazione nazionale e ciò per le ragioni indicate dall'illustre relatore l'Ecc. Piola-Caselli. Ma in queste condizioni la protezione accordata alla proprietà scientifica sarebbe praticamente inoperante.

L'altra grande difficoltà è di carattere pratico e risiede in ciò che il brevetto di principio, come la proprietà scientifica, non sarebbero efficaci se le disposizioni relative non avessero validità internazionale. Ciò era stato avvertito dal Ruffini, il quale nel già citato art. 6 del suo primitivo progetto considerava, come ho prima notato, il brevetto di principio come « rilasciato nelle condizioni fissate dalle convenzioni », s'intende internazionali. Ma qui vi è un equivoco; poichè le convenzioni si riferiscono sostanzialmente ai termini delle priorità che gli Stati contraenti riconoscono ai brevetti domandati in altri Stati Membri dell'Unione e non al loro rilascio; i brevetti vengono rilasciati (delivrés) in base alle diverse disposizioni e procedure nazionali dei singoli Stati.

Del resto, che io sappia, quantunque discussioni in merito non siano mancate, nessuno ha finora tentato seriamente di dare corpo concreto a questa concezione, attraente ma imprecisa, del brevetto di principio. Ed è evidente la pratica impossibilità di giungere almeno sollecitamente ad un accordo in proposito fra i diversi Stati, aventi legislazioni in materia di brevetti basati su principî così radicalmente diversi. Sembra dunque che si debba rinunziare, almeno per un periodo assai lungo, a questa forma di protezione delle scoperte scientifiche.

Vi è però un punto nel quale appariva possibile togliere una situazione ingiusta e sfavorevole a quegli scienziati che potessero e volessero proteggere le loro scoperte con regolari brevetti di invenzione.

È noto che in tutte le legislazioni europee sui brevetti la esistenza di pubblicazioni di qualsiasi genere, anche puramente scientifiche, ed anche dello stesso inventore, che espongano la sostanza della invenzione o scoperta, e la cui data sia anteriore a quella della domanda di brevetto, erano fino a pochissimi anni fa, e sono tuttora in tutti i paesi salvo Italia e Germania, considerate come distruttive della novità e quindi tali da rendere impossibile una brevettazione valida.

Uno scienziato che in una comunicazione ad una Accademia o Società scientifica esponga un processo od un apparecchio o descriva un nuovo prodotto e poscia depositi una domanda di brevetto sulla stessa materia, si vedrà rifiutare od annullare il brevetto in base alla sua stessa pubblicazione. Egli dovrebbe cioè differire la pubblicazione scientifica fino a dopo depositata la domanda di brevetto. Ora se si tiene conto della intensità colla quale si svolge la ricerca in certi campi delle scienze sperimentali e del conseguente naturale desiderio di ogni ricercatore di render noti al più presto i suoi risultati per assicurare la priorità scientifica, si comprende quanto la suddetta disposizione sia ingiusta e riesca dannosa allo scienziato.

Credo di essere stato il primo a mettere esplicitamente in rilievo questa ingiusta situazione e la convenienza di mettervi rimedio. Infatti nella più volte citata Nota del 1924, io invocavo che si desse: « permesso all'inventore di brevettare la sua scoperta, nonostante l'esistenza di pubblicazioni preliminari fatte *da lui* entro un determinato lasso di tempo sul medesimo soggetto »

Due anni più tardi al Convegno della Unione Internazionale di Chimica pura ed applicata tenuto a Washington nel settembre 1926 il problema fu studiato e, pur riconoscendo che esso era immaturo, fu approvata una mozione rivolta a promuovere presso i vari Stati l'indirizzo di ricompensare gli scienziati per le loro scoperte teoriche consentendo loro un termine di due anni dalla pubblicazione del suo trovato per depositare validamente un eventuale brevetto rivolto a proteggerlo.

Fu rilevato in quell'occasione come una disposizione in un certo senso analoga esistesse già nella legislazione degli Stati Uniti, diversa in questo da tutte le legislazioni europee dell'epoca. Si tratta della sezione 4886 della legge sui brevetti del 1870. Essa dispone infatti che è permesso ottenere un brevetto per un procedimento, un oggetto, o una composizione, o un perfezionamento « non ancora brevettato o descritto in una pubblicazione a stampa in paese o all'estero *prima dell'invenzione* o della scoperta o più di *due anni* prima del deposito delle domande di brevetto ».

Come si vede tale clausola è molto larga, più di quanto fosse domandata da me o dalla Unione di Chimica, poichè essa esclude, non solo le pubblicazioni dell'inventore, ma anche quelle di qualsiasi altro, ciò che a noi pare eccessivo. Ma tale clausola non nasce affatto dall'idea di favorire gli studiosi, ma bensì da uno dei principî informatori della legge americana che in punto di novità nelle invenzioni è così differente da quelle europee che un autorevole scrittore ha potuto affermare che un europeo per capirla deve dimenticare molte cose e riimparare a pensare.

Mentre infatti tutte le legislazioni europee concordi considerano come prima data alla quale può risalire il diritto di monopolio dell'inventore quella del *deposito* della sua *domanda* di brevetto, la legge americana

ammette che la priorità possa risalire fino alla data della *concezione* dell'invenzione. Un inventore che si veda opporre una domanda di brevetto depositata anteriormente alla sua, è ammesso a provare con dichiarazioni giurate, documenti o testimonianze che egli aveva entro i due anni prima della domanda avversaria avuta la medesima idea e aveva cominciato a sperimentarvi sopra e se egli riesce nel suo assunto la sua priorità sarà corrispondentemente retrodatata. Cosicchè la pubblicazione può essere di due anni precedente alla domanda di brevetto, ma tuttavia essere posteriore al momento della concezione dell'idea nella mente del primo inventore e non vi è quindi fra le due sottoclausole dell'articolo citato quella contraddizione che può apparire a prima vista a chi ragioni coi nostri criteri. Chi ha qualche pratica di estensioni di brevetti negli Stati Uniti sa a quali terribili complicazioni e a quali decisioni che a noi paiono ingiuste possano condurre i giudizi di « interferenza » che si svolgono davanti a quell'ufficio delle Patenti, e che avevano finora scoraggiati gli altri paesi a seguire l'esempio americano.

Non era quindi possibile attaccarsi senz'altro alla disposizione americana per risolvere il problema nelle legislazioni fuori degli Stati Uniti.

La importante questione fu discussa in tre successivi congressi dell'Associazione internazionale per la protezione della proprietà industriale, quelli di Londra del 1934, di Berlino del 1936 e di Praga del 1938. Anche qui l'onore dell'iniziativa spetta all'Italia che già nel 1926 a Washington era stata fra i pochi paesi favorevoli ad una risoluzione del problema nel senso desiderato.

Al Congresso di Londra del 1934 la delegazione italiana propose una risoluzione secondo la quale le divulgazioni fatte dal richiedente stesso, entro un limite determinato non siano distruttive della novità. Le delegazioni degli Stati Uniti e dell'Olanda avevano proposto voti analoghi. Il Congresso decise che la questione sarebbe stata discussa in quello successivo di Berlino del 1936.

Prima che questo si riunisse l'Italia e la Germania avevano già deciso la questione per conto loro sul piano nazionale con disposizioni legislative.

In Italia il Governo fascista col R. Decreto 13 settembre 1934, n. 1602, valendosi dei pieni poteri conferitigli, emanava una nuova legge sui brevetti d'invenzione che non solo accoglieva i desiderata degli studiosi, stabilendo all'art. 18 che la divulgazione fatta dall'inventore in atti di Accademie o Società scientifiche non tolga il diritto di ottenere un brevetto, purchè questo sia richiesto entro un anno dalla pubblicazione stessa; ma, andando più in là dei voti espressi, stabiliva che la priorità risalisse alla data della pubblicazione. Questa disposizione, per le note vicende, non doveva entrare in vigore che cinque anni dopo e la discuteremo poi.

La legge tedesca sui brevetti del 5 maggio 1936 all'art. 2, dopo aver detto che l'invenzione per essere nuova non deve essere « stata descritta in pubblicazioni a stampa già divulgate . . . o utilizzate nel paese . . . », stabilisce che « una descrizione o una utilizzazione fatte entro i sei mesi che precedono il deposito della domanda non sarà presa in considerazione quando sia basata sull'invenzione di chi effettua il deposito o del suo avente causa ».

Come si vede questa disposizione è a un tempo più larga e più ristretta di quella italiana. È più larga nel senso che non limita le pubblicazioni esentate a quelle apparse in atti di Accademie o di Società scientifiche, non solo, ma comprende anche le utilizzazioni pratiche. È più ristretta in quanto limita il periodo di salvaguardia a sei mesi, il quale può parere troppo breve, ma sopratutto in quanto la priorità non risale alla data della divulgazione, ma rimane fissa a quella del deposito della domanda. In relazione a ciò, la legge tedesca non fa obbligo all'inventore che voglia valersi di questa clausola di denunciare la sua pubblicazione anteriore, ma si limita a togliere all'esaminatore, o a un successivo oppositore, la facoltà di usarla come anteriorità distruttiva della novità. Dirò subito dopo come questo possa avere influenza nella procedura pratica.

La emanazione di queste due leggi diede una maggiore vivacità alle discussioni del Congresso di Berlino dell'A. I. P. P. I. del giugno 1936, nel quale la questione fu trattata sul piano internazionale. Gli americani non vi erano intervenuti. La delegazione italiana ripresentò naturalmente il suo punto di vista e fu appoggiata dalla delegazione germanica; contro questa tendenza si manifestarono la delegazione austriaca e sopratutto con particolare asprezza quella inglese. Il rapporto di quest'ultima fa una critica feroce degli inconvenienti derivanti dalla applicazione della legislazione americana e della clausola dei due anni di rinvio e conclude con questa affermazione recisa: « noi siamo assolutamente certi che molti paesi non acconsentiranno mai alla introduzione della regola dei due anni di rinvio o di qualsiasi altra regola del genere nella convenzione internazionale, e più presto lo diremo tanto meglio ».

La delegazione francese, per opera del sig. A. Lavoix, presentò un rapporto assai diffuso, concludendo in senso favorevole alla riforma proposta, *ma a condizione che la clausola relativa fosse incorporata nella convenzione internazionale*. Il Lavoix mette in rilievo i pericoli che deriverebbero agli inventori che si valessero di una simile clausola contenuta nella loro legge nazionale, se questa non fosse introdotta nella Convenzione d'Unione e riferendosi in particolare alla nuova legge italiana dice: « allorche l'inventore che avrà così divulgata la sua invenzione prima della sua domanda di brevetto in Italia, vorrà poi proteggere la sua invenzione negli altri paesi dell'Unione, egli non potrà invocare in questi paesi come data di priorità, in applicazione alla Convenzione attuale, che *la data della sua*

domanda di brevetto in Italia, di modo che i brevetti così domandati *saranno nulli* in tutti i paesi dove la divulgazione dell'invenzione prima della data del deposito (o prima della data di priorità in base all'art. 4 della Convenzione) è causa di nullità del brevetto ». Su questa acuta obbiezione ritornerò subito. Egli era disposto, sempre a condizione della internazionalità della decisione, ad accettare anche la retrodatazione della priorità alla data della divulgazione; come termine fissava sei mesi.

La maggior parte delle delegazioni accettò il punto di vista francese e fu approvato a grande maggioranza un voto in questo senso. Dato l'atteggiamento negativo di certi paesi e particolarmente dell'Inghilterra, era però chiaro che tale voto non aveva alcuna probabilità di essere realizzato e che esso era destinato a rimanere una platonica affermazione di principio.

La discussione si riaffacciò nel successivo Congresso dell'A. I. P. P. I. tenuto a Praga nel giugno 1938, ma nulla vi affiorò di nuovo. Le varie delegazioni riaffermarono il loro punto di vista e il voto emesso riproduce sostanzialmente e quasi testualmente quello di Berlino.

Dopo di allora le vicende della politica mondiale impedirono che la questione fosse nuovamente trattata nel piano internazionale.

Subito dopo nel 1939, finite le more così a lungo durate, fu col R. Decreto 29 giugno 1939–XVIII, n. 1127 emanato il testo definitivo della nuova legge sui brevetti e col successivo R. Decreto 5 febbraio 1940–XVIII, n. 244 fu emanato il testo delle relative disposizioni regolamentari relative. L'insieme delle nuove norme legislative è quindi entrato in vigore il 1° maggio 1940–XVIII.

Le disposizioni che ci interessano sono contenute nell'art. 17 della legge e nell'art. 19 del regolamento che credo necessario citare in esteso.

« Art. 17 (della legge). Le disposizioni del secondo comma del precedente articolo si applicano a favore dell'inventore, e dei suoi aventi causa, anche quando la iniziale divulgazione dell'invenzione sia avvenuta con Note o Memorie pubblicate in atti di Società o Accademie scientifiche nazionali, legalmente riconosciute, purchè la domanda per ottenere il brevetto venga depositata entro dodici mesi dalla pubblicazione ».

« La data della pubblicazione deve essere indicata dall'interessato e, previa verifica dell'ufficio centrale, deve essere menzionata nel Registro dei brevetti e nel brevetto; a questa data risale la priorità del brevetto stesso ».

« Art. 19 (del regolamento). Quando si rivendichi la priorità per divulgazione del trovato in atti di Accademie scientifiche, oppure di Società, Istituti o Enti scientifici, a norma dell'art. 17 del R. Decreto 29 giugno 1939, n. 1127, alla domanda di brevetto deve unirsi un certificato, nella carta bollata prescritta, dal quale risulti la data della pubblicazione degli atti contenenti la Nota o Memoria del trovato stesso ».

Affermiamo subito, col massimo compiacimento, che con questa legge l'Italia si è messa all'avanguardia del progresso nel campo della protezione accordata agli inventori e sopratutto agli scienziati ed ai ricercatori e dobbiamo esprimere la nostra riconoscenza al Governo Fascista per avere assunta questa posizione conforme ad un alto ideale di giustizia.

Compiaciamoci anche che la nostra grande Alleata, la Germania, si trovi associata a noi anche in questo campo, a parte le differenze delle rispettive norme legislative sulle quali già ho accennato.

Per noi, uomini di scienza, la norma italiana appare preferibile, anzitutto per il lasso di tempo più lungo accordato, ma sopratutto perchè il carattere di non essere distruttive della novità è riservato alle pubblicazioni di carattere puramente scientifico, ciò che costituisce un privilegio accordato agli studiosi ed ai ricercatori come parziale compenso del loro contributo al progresso universale ed ai sacrifici spesso connessi col loro lavoro. Inoltre la legge italiana, come già detto, accorda agli inventori il beneficio della retrodatazione della priorità alla data della pubblicazione.

La applicazione pratica di queste disposizioni della nostra legge può peraltro presentare varie incertezze e difficoltà, che vale la pena di esaminare attentamente, sia nel campo nazionale, quanto in grado assai maggiore in quello internazionale.

La legge dice che godono del beneficio del rinvio le pubblicazioni presentate a Società ed Accademie scientifiche, legalmente riconosciute; il regolamento aggiunge: « Istituti o Enti scientifici »; sembra che con ciò si debbano intendere le Accademie Regie e le Associazioni culturali regolarmente inquadrate; la identificazione non creerà difficoltà, tuttavia ad evitare equivoci sarà vantaggioso compilare ed eventualmente aggiornare un elenco degli Enti le cui pubblicazioni sono ammesse al privilegio.

Un quesito potrà nascere sul punto: quale debba intendersi la data della pubblicazione agli effetti di legge; è chiaro che questa deve essere una data certa e determinata in modo univoco. Può chiedersi se come data della pubblicazione debba intendersi quella della comunicazione orale in una tornata dell'Accademia o in un Congresso, oppure quella della stampa del fascicolo dei Rendiconti accademici o della Rivista sociale. Sembra chiaro che la seconda soluzione è la giusta e ciò anzitutto perchè le comunicazioni orali sono in generale puramente formali o almeno assai riassunte e spesso subiscono alterazioni nel corso della stampa; del resto che così debba essere si rileva anche dal testo degli articoli relativi nei quali si parla sempre di pubblicazioni « in atti » di Società od Accademie.

Ma anche con ciò la questione non è esaurita perchè resta da stabilire, quale si debba ritenere la data certa e certificabile della pubblicazione negli atti, rendinconti o simili. Non certo quella che sta stampata sul fascicolo, che è quasi sempre una data puramente nominale di riferimento. Si potrebbe pensare alla data nella quale l'Accademia, o l'Editore, spedisce

il fascicolo ai membri della Accademia o Società o agli abbonati, ma anche questa non sembra tale da dare in molti casi sufficiente garanzia di precisione e certezza. Sembra preferibile di adottare come data certa quella di consegna dell'esemplare d'obbligo ad una determinata biblioteca pubblica; comunque bisognerà adottare e rendere nota una precisazione.

Il nostro Ufficio centrale dei Brevetti non ha ancora avuta necessità di prendere una decisione in proposito. Infatti da informazioni assunte mi risulta che finora un solo inventore ha chiesto di valersi della facoltà concessa dall'art. 17 e la pratica relativa è tuttora in corso.

Ad ogni modo le questioni or ora prospettate sono di carattere minore ed interno e non saranno di troppa difficile risoluzione. La sola cosa da richiedere è che la decisione sia tale da non dar luogo ad incertezze ed equivoci nell'esecuzione.

Molte maggiori preoccupazioni nascono per gli effetti dell'uso dell'articolo 17 sulle successive estensioni all'estero. Esse vengono dalle circostanze messe chiaramente in rilievo dal sig. Lavoix nel rapporto della delegazione francese al congresso di Berlino del 1936. L'argomento è molto importante. I brevetti di maggiore interesse vengono estesi all'estero, almeno negli Stati industriali più importanti, dall'inventore o dai suoi aventi causa, ed a termini della Convenzione l'inventore ha diritto alla priorità della *data del deposito* nel paese d'origine, purchè l'estensione venga chiesta entro un anno, ma l'esame e la concessione o meno del brevetto saranno poi regolati secondo la legge nazionale del paese nel quale la concessione è richiesta. È della massima importanza che ai brevetti italiani sia conservata le possibilità di essere estesi validamente all'estero.

Esaminiamo ora quale sarà la condizione dello studioso–inventore italiano che si sia prevalso dell'art. 17 della nuova legge. Egli all'atto del deposito della sua domanda di brevetto avrà dichiarato che l'oggetto della medesima era svelato e descritto nella pubblicazione e dovrà indicare il luogo e la data di tale pubblicazione fornendo il modo di verificare tale asserzione. La data della priorità accordata e il riferimento alla pubblicazione madre dovranno essere riportati nell'attestato di brevetto che verrà poi concesso e stampato.

Come si troverà egli quando vorrà cercare la estensione negli altri stati europei ?

In Germania a norma del già citato art. 2 della legge del 1936 se la sua pubblicazione non sarà stata anteriore di più di *sei mesi* alla domanda italiana, essa non osterà a che gli sia concesso il brevetto; egli non potrà avere certo la priorità retrodatata, ma potrà sempre ottenere un brevetto valido che protegga la sua invenzione.

Ma in tutti gli Stati, e anche in Germania se la pubblicazione sarà stata anteriore di più di sei mesi al deposito originale, ciò non gli sarà più possibile. Le osservazioni del sig. Lavoix portano in pieno: sarà la sua

stessa pubblicazione che gli sarà opposta e che ucciderà in germe il desiderato brevetto e ciò tanto più inesorabilmente in quanto, a differenza di quanto accade nella procedura germanica, sarà stato egli stesso ad affermare la identità di contenuto della pubblicazione e della domanda.

In queste condizioni, e fino a quando non sia stato trovato un rimedio, io sconsiglierei a qualunque ricercatore che creda di aver ottenuto un risultato che sia o possa divenire capace di importanti applicazioni di avvalersi della facoltà data dal nostro art. 17.

Questo, così com'è, non può giovare che all'inventore che per ragioni sue intenda limitarsi alla protezione brevettistica in Italia. Si potrebbe anche pensare che sarebbe stato forse preferibile di attenersi per ora alla formula tedesca, sia pure allungando il termine di privilegio da sei mesi a un anno.

Non vi è alcun rimedio a tale situazione ? la concessione fatta dalla legge fascista agli scienziati-inventori è così importante e generosa, essa rappresenta un così grande progresso verso un ideale di giustizia che il rassegnarsi a rinunciarvi sarebbe oltremodo doloroso. Ho quindi riflettuto se non possa trovarsi una soluzione per la quale la legge italiana possa conciliare colle stipulazioni della Convenzione.

Data la quasi impossibilità di giungere in un tempo non eccessivo ad un accordo internazionale, che sarebbe evidentemente l'ideale, sembra preferibile trovare il rimedio nel piano nazionale con disposizioni aggiuntive che siano compatibili colle leggi degli altri Stati e colla pratica internazionale. Mi pare di averne trovata una che mi permetto di sottoporvi invocando il consiglio e l'avviso degli illustri camerati che si interessano a tali questioni, e particolarmente dei giuristi.

Essa si ispira ad un istituto peculiare della legislazione britannica e cioè a quello della « provisional specification » o *domanda provvisoria*. Come è ben noto, in Inghilterra un inventore può presentare una domanda provvisoria nella quale egli espone il principio e la sostanza della sua invenzione, ma non è ancora obbligato a enunciare le rivendicazioni; egli ha poi un anno di tempo per presentare la specificazione completa nella quale egli completerà la descrizione del suo trovato, presenterà degli esempi concreti e formulerà le rivendicazioni, sempre s'intende senza uscire dall'ámbito di quanto rivelato nella provvisoria.

Queste domande provvisorie sono riconosciute ed ammesse come valide basi di priorità in tutti gli Stati dell'Unione. Nel nostro attuale regolamento il caso è previsto dall'art. 14 il quale solo subordina la concessione del brevetto alla presentazione effettiva della specificazione completa.

Io penso che si dovrebbe riuscire ad assimilare la nostra pubblicazione anteriore ad una domanda provvisoria. Bisognerebbe stabilire che l'inventore che voglia valersi della concessione dell'art. 17, debba inviare

entro un breve termine dalla data della pubblicazione, copia del fascicolo o di un estratto all'Ufficio centrale dei brevetti, assieme con una domanda in forma legale, nella quale egli dichiari di riservarsi di presentare entro l'anno una domanda di brevetto per proteggere l'oggetto o il processo descritto nella Nota o Memoria. La data alla quale far risalire la priorità sarebbe quella nella quale la pubblicazione e la relativa dichiarazione pervenne all'ufficio.

Credo che con ciò dovrebbe essere assicurata la assimilazione alla *provisional specification* inglese e che gli Stati Esteri non avrebbero ragione di rifiutare di accettare questa nostra domanda preliminare come base di priorità internazionale. Naturalmente sarebbe necessario che le domande estere fossero presentate entro l'anno dalla pubblicazione, perchè non sarebbe giusto chè l'autore avesse un secondo anno per la estensione all'estero; questa norma vale già per le domande provvisorie inglesi.

Per l'inventore la limitazione introdotta sarebbe minima. Egli avrebbe solo l'obbligo di decidere subito dopo la pubblicazione se vuole riservarsi il diritto di brevettare, ma siccome anche se egli decidesse poi di rinunziarvi la spesa si ridurrebbe ad un foglio di carta bollata, l'incomodo sarebbe trascurabile rispetto al vantaggio raggiunto.

Esprimo la speranza che la mia proposta sia presa in considerazione dalle competenti autorità.

NOTE E COMUNICAZIONI

Matematica (Analisi). — *Una soluzione in grande del problema di Cauchy per una particolare equazione in tre variabili, ottenuta con un metodo di M. Picone* (1). Nota I di MASSIMO CIMINO, presentata (2) da MAURO PICONE, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

In una recente nota di C. TOLOTTI (3) è fruttuosamente applicato un metodo dato dal prof. M. PICONE (4) per la risoluzione del problema di CAUCHY relativo alla equazione

$$\Delta^n u(x, y) = 0$$

– ove è $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ –, assegnando i dati di CAUCHY su una circonferenza del piano (x, y) Vi si dà una elegante formula risolutiva del problema e vi si determina il campo di regolarità della soluzione. Limitatamente alla determinazione di tale campo, il risultato del TOLOTTI si può rapidamente ritrovare, – come ha mostrato il prof. L. FANTAPPIÈ in una recente conferenza tenuta nel Reale Istituto Nazionale di Alta Matematica –, valendosi di taluni risultati generali ottenuti dal LE ROUX (5) nel 1898, rimanendo però sempre il grande pregio della ricerca del TOLOTTI di fornire una semplice formula risolutiva del problema che, certamente, non sarebbe agevole ricavare dal procedimento di approssimazioni successive seguìto dal LE ROUX.

---

(1) Lavoro promosso dall'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo ed eseguito nel R. Osservatorio Astronomico di Roma su Monte Mario.

(2) Nell'Adunanza del 21 marzo 1941-XIX.

(3) C. TOLOTTI, *Sul problema di Cauchy*. « Rend. Acc. dei Lincei », vol. XXIX, ser. 6ª, 1° sem., fasc. 4° (1939).

(4) M. PICONE. *Nuovi indirizzi di ricerca nella teoria e nel calcolo delle soluzioni di talune equazioni differenziali lineari alle derivate parziali della Fisica-matematica*. « Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa », ser. IIª, vol. V (1936), pagg. 213-288.

(5) J. LE ROUX, *Sur les équations linéaires aux dérivées partielles*. « Journal de Mathématique pures et appliquées », 5me serie, to. IV (1898), pagg. 359-408.

Passando ai problemi di CAUCHY in tre variabili indipendenti x, y, z, non si possiedono a tutt'oggi teoremi generali atti a determinare il campo di regolarità della soluzione del problema nelle ipotesi di analiticità, se si eccettua il caso che il complesso delle derivate di ordine massimo comparente nella equazione sia decomponibile in fattori simbolici lineari.

Ciò non è il caso, ovviamente, per l'equazione:

$$[E] \qquad \Delta^n u(x, y, z) = 0$$

— ove è $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$. Per tale equazione mi sono posto il problema analogo a quello trattato dal TOLOTTI, e cioè la risoluzione del problema di CAUCHY nelle ipotesi che la varietà portante i dati iniziali sia una sfera $\Omega(0)$ di centro 0 nell'origine degli assi cartesiani e di raggio r, e siano soddisfatte le condizioni iniziali:

$$[C] \qquad \frac{\partial^k u}{\partial \rho^k} = f_k(x, y, z) \quad , \quad \text{su } \Omega(0); \quad k = 0, 1, 2, \cdots, 2n-1.$$

essendo ρ il raggio vettore e le $f_k(x, y, z)$ assegnate funzioni intere di tre variabili. Seguendo il metodo sopra citato del prof. M. PICONE, dò in primo luogo una forma esplicita della soluzione del problema $[E]$ $[C]$, atta alla effettiva calcolazione numerica; nel secondo paragrafo dò invece il teorema di esistenza, che ritengo opportuno segnalare fin da ora: *nelle ipotesi ammesse sulla analiticità e regolarità delle funzioni* $f_k(x, y, z)$ *assegnate, la soluzione* $u = u(x, y, z)$ *del problema* $[E]$ $[C]$ *esiste unica, analitica e regolare in* TUTTO *lo spazio, privato al più del centro della sfera* $\Omega(0)$.

Credo infine che il risultato ottenuto possa essere esteso anche ad analogo problema in più di tre variabili e, forse, anche ad altri tipi di equazioni differenziali lineari. Di queste ed altre possibili estensioni è mia intenzione occuparmi in un successivo lavoro.

§ 1. FORMULA RISOLUTIVA DEL PROBLEMA $[E]$ $[C]$. Per ottenere una forma esplicita della soluzione del problema $[E]$ $[C]$ seguiremo, come si è detto dianzi, il metodo del prof. M. PICONE, del quale, in questa sede, ci limitiamo a dare un semplice cenno, rimandando alla Memoria citata per ogni particolare.

Preso allora il punto di coordinate (0 , 0 , 1) come polo per le coordinate θ e φ sulla sfera $\omega(0)$ di raggio unitario (θ = longitudine; φ = colatitudine), indicheremo con $P, Q, \cdots$ punti della sfera $\omega(0)$ di coordinate sferiche generiche θ, φ.

Le $[E]$ $[C]$ si scriveranno perciò:

$$[E'] \qquad \Delta^n u(\rho, P) = 0$$

$$[C'] \qquad \left[\frac{\partial^k u}{\partial \rho^k}\right]_{\rho = r} = f_k(r, P) \qquad k = 0, 1, 2, \cdots, 2n-1.$$

Ciò posto, assumiamo un sistema completo ortonormale di funzioni sferiche $Y_\nu(P)$:

$$[1] \qquad [Y_\nu(P)] \qquad \nu = 0, 1, 2, \cdots$$

e proponiamoci di cercare la soluzione $u = u(\rho, P)$ del nostro problema tra le funzioni dell'aggregato lineare $\{u\}$ delle funzioni che risultano finite e continue assieme alle loro derivate parziali rispetto a ρ, θ e φ almeno fino all'ordine $2n$. Basterà assumere come nuove incognite i coefficienti di FOURIER della soluzione cercata, e cioè le quantità:

$$[2] \qquad u^{(\nu)}(\rho) = \int_{\omega(0)} u(\rho, Q) \cdot Y_\nu(Q)\, d\omega(Q); \qquad \nu = 0, 1, 2, \cdots$$

Moltiplichiamo allora ambo i membri delle $[E']$ e $[C']$ per la funzione $Y_\nu(P)$ ed integriamo su $\omega(0)$; con semplice calcolo (6) e ponendo:

$$[3] \qquad f_k^{(\nu)} = \int_{\omega(0)} f_k(r, Q) \cdot Y_\nu(Q)\, d\omega(Q); \qquad \begin{cases} \nu = 0, 1, 2, \cdots \\ k = 0, 1, 2, \cdots, 2n-1 \end{cases}$$

avremo, detto $s = s(\nu)$ l'ordine (7) della $Y_\nu(P)$, le equazioni differenziali ordinarie, con le relative condizioni iniziali, atte a definire le nuove incognite $u^{(\nu)}(\rho)$:

$$[4] \qquad \begin{cases} \Delta_{(s)}^n u^{(\nu)}(\rho) = 0 \\ \left[\dfrac{d^k u^{(\nu)}(\rho)}{d\rho^k}\right]_{\rho=r} = f_k^{(\nu)}; \end{cases} \qquad \begin{cases} \nu = 0, 1, 2, \cdots \\ k = 0, 1, 2, \cdots, 2n-1 \end{cases}$$

ove con $\Delta_{(s)}$ si è indicato l'operatore: $\Delta_{(s)} = \dfrac{d^2}{d\rho^2} + \dfrac{2}{\rho}\dfrac{d}{d\rho} - \dfrac{s(s+1)}{\rho^2}$.

Il problema è dunque ricondotto alla integrazione di infinite equazioni differenziali ordinarie, ma ciascuna contenente una sola funzione incognita. L'equazione generica integrata dà immediatamente l'integrale generale:

$$[5] \qquad u^{(\nu)}(\rho) = c_1^{(\nu)} \rho^s + c_3^{(\nu)} \rho^{s+2} + c_5^{(\nu)} \rho^{s+4} + \cdots + c_{2n-1}^{(\nu)} \rho^{s-2n-2} +$$

$$+ c_2^{(\nu)} \rho^{-s-1} + c_4^{(\nu)} \rho^{-s+1} + c_6^{(\nu)} \rho^{-s+3} + \cdots + c_{2n}^{(\nu)} \rho^{-s+2n-3};$$

$$\nu = 0, 1, 2, \cdots$$

---

(6) Cfr. M. PICONE, loc. cit., pag. 236.

(7) ν è un indice ordinale, mentre $s = s(\nu)$ è l'ordine della funzione sferica $Y_\nu(P)$ di posto ν.

essendo le $c^{(\nu)}$ le $2n$ costanti arbitrarie. Poichè converrà porre per comodità.

$$[6]\quad \begin{cases} s=\alpha_1\ ; & s+2=\alpha_3\ ; & s+4=\alpha_5\ ; \cdots & s+2n-2=\alpha_{2n-1} \\ -s-1=\alpha_2\ ; & -s+1=\alpha_4\ ; & -s+3=\alpha_6\ ; \cdots & -s+2n-3=\alpha_{2n} \end{cases}$$

avremo per i coefficienti $u^{(\nu)}(\rho)$ di FOURIER l'espressione:

$$[5']\qquad u^{(\nu)}(\rho)=\sum_1^{2n} {}_j\, c_j^{(\nu)}\,\rho^{\alpha_j}\ ; \qquad \nu=0,1,2,\cdots$$

Dobbiamo ora determinare le costanti $c_j^{(\nu)}$ per ogni $\nu=0,1,2,\cdots$, a norma delle condizioni indicate nelle [4]; si otterrà, per il generico ν, il sistema di $2n$ equazioni lineari:

$$[7]\qquad \sum_1^{2n} c_j^{(\nu)}\cdot\left[\frac{d^k\,\rho^{\alpha_j}}{d\rho^k}\right]_{\rho=r}=f_k^{(\nu)}\ ;\quad k=0,1,2,\cdots,2n-1$$

atto a definire le $c_j^{(\nu)}$. Indicando allora con:

$$[8]\qquad D^{(s)}=(\rho^{\alpha_1},\rho^{\alpha_2},\cdots,\rho^{\alpha_{2n}})_{\rho=r}$$

il determinante del sistema [7] – che risulta essere il wronskiano delle funzioni $\rho^{\alpha_1},\rho^{\alpha_2},\cdots,\rho^{\alpha_{2n}}$ calcolato per $\rho=r$, e che è sempre diverso da zero –, ed indicando con $D_k^{(s)}(\rho)$ il determinante che si ottiene da questo $D^{(s)}$ sostituendo agli elementi della riga di posto $k+1$ le funzioni $\rho^{\alpha_1},\rho^{\alpha_2},\cdots,\rho^{\alpha_{2n}}$, avremo infine per le $u^{(\nu)}(\rho)$ le espressioni:

$$[9]\qquad u^{(\nu)}(\rho)=\sum_0^{2n-1} {}_k\, f_k^{(\nu)}\cdot\frac{D_k^{(s)}(\rho)}{D^{(s)}}\ ; \qquad \nu=0,1,2,\cdots$$

Con ciò il problema $[E']\,[C']$ è formalmente risolto. Infatti si avrà:

$$[10]\qquad u(\rho,P)=\sum_0^{\infty} {}_\nu\, u^{(\nu)}(\rho)\cdot Y_\nu(P)$$

le $u^{(\nu)}(\rho)$ essendo date dalle [9].

Ma, sia per la [10] che per le quantità $\dfrac{D_k^{(s)}(\rho)}{D^{(s)}}$, conviene dare delle formule più espressive. Assumiamo a tale scopo sulla sfera $\omega(0)$ due punti P e Q variabili, ed indichiamo con $\gamma(P,Q)$ l'angolo (tra 0 e π) dei due raggi vettori $\overrightarrow{OP}$ ed $\overrightarrow{OQ}$; allora alla soluzione [10] del problema $[E']\,[C']$ si può dare la forma classica:

$$u(\rho,P)=\sum_0^{\infty} {}_s\,\frac{2s+1}{4\pi}\int_{\omega(0)} u(\rho,Q)\cdot X_s[\cos\gamma(P,Q)]\cdot d\omega(Q)$$

ove $X_s(x)$ è il polinomio di Legendre di grado s; e, ricordando la [2] e l'espressione esplicita di $u^{(\nu)}(\rho)$, avremo:

$$[10'] \qquad u(\rho, P) = \sum_0^\infty{}_s \frac{2s+1}{4\pi} \sum_0^{2n-1}{}_k f_k^{(s)}(P) \cdot \frac{D_\kappa^{(s)}(\rho)}{D^{(s)}}$$

essendo ora ovviamente:

$$[11] \qquad f_k^{(s)}(P) = \int_{\omega(\dot{0})} f_k(r, Q) \cdot X_s[\cos\gamma(P, Q)]\, d\omega(Q); \qquad \begin{cases} s = 0, 1, 2, \cdots \\ k = 0, 1, 2, \cdots, 2n-1 \end{cases}$$

e le $f_k^{(s)}(P)$ risultano funzioni sferiche di ordine s.

Quanto alle quantità $\frac{D_\kappa^{(s)}(\rho)}{D^{(s)}}$, vediamo di calcolare effettivamente i determinanti che vi figurano, e cominciano con $D^{(s)}$. Dividiamo tutti gli elementi della prima *colonna* per r^{α_1}, tutti quelli della seconda per $r^{\alpha_2}, \cdots,$ tutti quelli dell'ultima per $r^{\alpha_{2n}}$; quindi dividiamo tutti gli elementi della seconda *riga* per r^{-1}, tutti quelli della terza per $r^{-2}, \cdots,$ tutti quelli dell'ultima per r^{-2n+1}; avremo:

$$[12] \qquad D^{(s)} = r^{\sum_1^{2n} \alpha_j - (1+2+3+\cdots+2n-1)} \cdot \delta^{(s)}; \qquad s = 0, 1, 2, \cdots$$

ove si è posto:

$$[13] \quad \delta^{(s)} = \left\| \begin{matrix} 1 \\ \alpha_j \\ \alpha_j(\alpha_j - 1) \\ \alpha_j(\alpha_j - 1)(\alpha_j - 2) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_j(\alpha_j - 1)(\alpha_j - 2)\cdots(\alpha_j - 2n + 2) \end{matrix} \right\|_{(j=1,2,\cdots,2n)}; \qquad s = 0, 1, 2, \cdots$$

gli elementi indicati tra le sbarre verticali essendo quelli della *colonna* di posto j. Questo $\delta^{(s)}$ è un determinante *puramente numerico* dipendente solamente dagli indici n ed s; gli elementi della *riga* di posto i, a partire dalla terza, si ottengono da quelli della riga immediatamente precedente moltiplicandoli per $(\alpha_j - i + 2)$, e risultano della forma:

$$\alpha_j(\alpha_j - 1)(\alpha_j - 2)\cdots(\alpha_j - i + 2).$$

Analogo procedimento possiamo applicare per calcolare i $D_k^{(s)}(\rho)$; avremo con le stesse trasformazioni:

$$[14] \qquad D_k^{(s)}(\rho) = r^k \cdot r^{\sum_1^{2n} \alpha_j - (1+2+3+\cdots+2n-1)} \cdot \delta_k^{(s)}$$

con:

$$\delta_k^{(s)} = \left\| \begin{array}{l} 1 \\ \alpha_j \\ \alpha_j(\alpha_j - 1) \\ \alpha_j(\alpha_j - 1)(\alpha_j - 2) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \left(\frac{\rho}{r}\right)^{\alpha_j} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_j(\alpha_j - 1)(\alpha_j - 2)\cdots(\alpha_j - 2n + 2) \end{array} \right\|_{(j=1,2,\cdots,2n)} ; \quad \begin{cases} s = 0, 1, 2, \cdots \\ k = 0, 1, 2, \cdots, 2n-1 \end{cases}$$

ove le quantità $\left(\frac{\rho}{r}\right)^{\alpha_j}$ sono state sostituite al posto degli elementi della riga di posto $k+1$. Se indichiamo allora con $d_{k+1,j}^{(s)}$, il *complemento algebrico diviso per* $\delta^{(s)}$ dell'elemento di $\delta^{(s)}$ che occupa il posto sulla riga $k+1$, $(k = 0, 1, 2, \cdots, 2n-1)$, e sulla colonna j, $(j = 1, 2, \cdots, 2n)$, si avrà:

$$[15] \qquad \frac{D_k^{(s)}(\rho)}{D^{(s)}} = r^k \cdot \sum_1^{2n} {}_j\, d_{k+1,j}^{(s)} \cdot \left(\frac{\rho}{r}\right)^{\alpha_j}; \quad \begin{cases} s = 0, 1, 2, \cdots \\ k = 0, 1, 2, \cdots, 2n-1 \end{cases}$$

che permette una più facile calcolazione delle quantità $\frac{D_k^{(s)}(\rho)}{D^{(s)}}$, perchè le $d_{k+1,j}^{(s)}$ sono quantità *numeriche* dipendenti da n e da s, ma non dal particolare problema trattato, e possono perciò essere calcolate una volta per tutte.

Si noterà pure che il determinante [13] è il determinante di VANDERMONDE delle $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{2n}$.

Concludendo questo paragrafo: *si è ottenuto per il problema* $[E'][C']$, *e quindi per quello* $[E][C]$, *la formula risolutiva, atta alla effettiva calcolazione numerica*:

$$[S] \qquad u(\rho, P) = \sum_0^\infty {}_s \frac{2s+1}{4\pi} \cdot \sum_0^{2n-1} {}_k\, f_k^{(s)}(P) \cdot r^k \cdot \sum_1^{2n} {}_j\, d_{k+1,j}^{(s)} \cdot \left(\frac{\rho}{r}\right)^{\alpha_j}$$

ove le $d_{k+1,j}^{(s)}$ *sono numeri dipendenti solamente da* n *e da* s, *mentre le* α_j *e le* $f_k^{(s)}(P)$ *sono date rispettivamente dalle* [6] *e dalle* [11].

§ 2. *Teorema di esistenza e campo di regolarità della soluzione.* Per dimostrare l'esistenza della soluzione del problema [*E*] [*C*] in uno strato sferico A limitato da due sfere concentriche ad $\Omega(0)$ di raggi r' ed r'', $(r' \leq r \leq r'')$, è sufficiente assicurare la convergenza uniforme in A della serie [*S*], perchè quella delle serie derivate di ordine comunque elevato ne è conseguenza necessaria, in base ad un teorema sulle successioni di funzioni iperarmoniche di Picone-Nicolesco (8). Immediatamente se ne deduce che la formula (*S*) rappresenta effettivamente una funzione n-iperarmonica, che verifica sulla sfera $\Omega(0)$ le assegnate condizioni di Cauchy.

Cominciamo allora col dimostrare che è sempre possibile scegliere un conveniente numero positivo M, ed un altro positivo σ maggiore di r e del resto *grande a piacere*, per cui risultano verificate le disuguaglianze:

$$[16] \qquad |f_k^{(s)}(P)| < M\left(\frac{r}{\sigma}\right)^s \qquad k = 0,1,2,\cdots,2n-1.$$

Poniamoci infatti nel centro 0 della sfera $\Omega(0)$ portante i dati iniziali, ed applichiamo alle funzioni $f_k(x,y,z)$ –, che per brevità indicherò senza l'indice k in basso –, la formula di MacLaurin; avremo:

$$[17] \qquad f(x,y,z) = \sum_0^{s-1} {}_i\, \pi_i(x,y,z) + R_s$$

con:

$$[18] \quad \begin{cases} \pi_i(x,y,z) = \sum_0^i {}_{h,k,l} \dfrac{f_{x^h y^k z^l}(O)}{h!\,k!\,l!} x^h y^k z^l ; & h+k+l=i\,;\, i<s \\ R_s = \sum_0^s {}_{h,k,l} \dfrac{f_{x^h y^k z^l}(H)}{h!\,k!\,l!} x^h y^k z^l = \dfrac{1}{s!}\left[\dfrac{d^s f}{d\rho^s}\right]_{\mu\rho} \cdot \rho^s ; & h+k+l=s \end{cases}$$

ove si è indicato con H un conveniente punto situato sul segmento congiungente 0 col generico punto (x,y,z), e con μ un conveniente numero positivo, compreso tra zero ed uno, che dipenderà in generale anche dalla direzione del raggio su cui si effettua lo sviluppo. Se ora sostituiamo la [17] al posto della $f(r,Q)$ che compare nell'integrale [11] –, dato che la $f(r,Q)$ altro non è che la $f(x,y,z)$ calcolata per il punto generico Q della sfera $\Omega(0)$ di raggio r, – ed introduciamo nei termini delle [18] al posto delle x,y,z le quantità $\frac{x}{r} = \bar{x}$, $\frac{y}{r} = \bar{y}$, $\frac{z}{r} = \bar{z}$, moltiplicando contemporaneamente ogni monomio per r^{h+k+l}, otterremo per le $f^{(s)}(P)$ le espressioni:

---

(8) M. Picone. *Sulla convergenza delle successioni di funzioni iperarmoniche*; « Bull. Math. Soc. Roumaine des Sciences », vol. 38 (1936); M. Nicolesco, *Les fonctions polyharmoniques.* « Actual scient. et industr. », n. 331. Paris, Hermann, 1936.

$$[19] \qquad f^{(s)}(P) = \sum_{0}^{s-1} r^i \int_{\omega(0)} \pi_i(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})\, X_s[\cos\gamma(P, Q)]\, d\omega(Q) +$$

$$+ \frac{r^s}{s!} \int_{\omega(0)} \left[\frac{d^s f}{d\rho^s}\right]_{\mu r} \cdot X_s[\cos\gamma(P, Q)]\, d\omega(Q)$$

ove, naturalmente, le $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ che compaiono in π_i variano in modo che il punto $Q \equiv (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ si muova sulla sfera $\omega(0)$ di raggio unitario. Ma i primi s integrali che compaiono a secondo membro della [19] sono a loro volta, a meno di fattori moltiplicativi costanti, somme di integrali del tipo:

$$\int_{\omega(0)} \bar{x}^h \bar{y}^k \bar{z}^l \cdot X_s[\cos\gamma(P, Q)]\, d\omega(Q)$$

con $h + k + l = i < s$; e questi integrali sono tutti nulli. D'altra parte, per la supposta analiticità e regolarità delle $f(x, y, z)$ per tutti i valori reali o complessi delle variabili, è sempre possibile, comunque si assuma un numero positivo σ grande a piacere, determinare un altro M positivo, indipendente dal raggio vettore, per cui si abbia:

$$\left| \left[\frac{d^s f}{d\rho^s}\right]_{\mu r} \right| < \frac{M s!}{\sigma^s}$$

e quindi, detto ora con M il numero $4\pi M$, si avrà dalla [19]:

$$|f^{(s)}(P)| < M\left(\frac{r}{\sigma}\right)^s \cdot$$

La dimostrazione ora sviluppata si può ripetere per ogni indice $k = 0, 1, 2, \cdots, 2n-1$; si avranno in corrispondenza $2n$ numeri M, e basterà scegliere il maggiore di essi perchè rimangano stabilite le [16].

Richiamiamo ora le espressioni [6] delle α_j; ponendo:

$$\alpha_j = s + 2\lambda \quad , \quad \text{per} \quad j = 1, 3, 5, \cdots, 2n-1 \ ;$$

$$\alpha_j = -(s+1) + 2\lambda \quad , \quad \text{per} \quad j = 2, 4, 6, \cdots, 2n$$

con $\lambda = 0, 1, 2, \cdots, n-1$, possiamo scrivere:

$$[20] \qquad \frac{2s+1}{4\pi} r^k \sum_{1}^{2n}{}_j d_{k+1,j}^{(s)} \cdot \left(\frac{\rho}{r}\right)^{\alpha_j} =$$

$$= \sum_{0}^{n-1}{}_\lambda \left[\bar{P}_k(s)\left(\frac{\rho}{r}\right)^s + \bar{P}_k(s)\left(\frac{\rho}{r}\right)^{-(s+1)}\right] \cdot \left(\frac{\rho}{r}\right)^{2\lambda} ;$$

$$k = 0, 1, 2, \cdots, 2n-1$$

ove $\bar{P}_k(s)$ e $\bar{P}'_k(s)$ sono quozienti di polinomi in s il cui grado certamente non supera $2n\,(2n-2)$. Siano allora due numeri r' ed r'' non negativi tali che

$$r' \leq r \leq r'' \quad ; \quad r' \leq \rho \leq r''.$$

Avremo allora dalla [20]:

$$[21] \qquad \left| \frac{2s+1}{4\pi} \cdot r^k \cdot \sum_0^{2n} {}_j \, \bar{d}^{(s)}_{k+1,j} \cdot \left(\frac{\rho}{r}\right)^{\alpha_j} \right| < |P_k(s)| \cdot \left(\frac{r''}{r}\right)^s + |P'_k(s)| \cdot \left(\frac{r}{r'}\right)^{s+1}$$

$$k = 0, 1, 2, \cdots, 2n-1$$

ove $P_k(s)$ e $P'_k(s)$ sono anche essi quozienti di polinomi in s di grado non superiore a $2n\,(2n-2)$.

Ciò posto, riprendiamo la formula risolutiva $[S]$ del problema $[E]$ $[C]$; in virtù delle [16] e [21] possiamo scrivere:

$$[22] \qquad |u(\rho, P)| < \sum_0^\infty {}_s \, A_s + \sum_0^\infty {}_s \, A'_s$$

avendo posto:

$$[23] \qquad \begin{cases} A_s = M\left(\frac{r}{\sigma}\right)^s \cdot \left(\frac{r''}{r}\right)^s \cdot \sum_0^{2n-1} {}_k \, |P_k(s)| \\ A'_s = M\left(\frac{r}{\sigma}\right)^s \cdot \left(\frac{r}{r'}\right)^{s+1} \cdot \sum_0^{2n-1} {}_k \, |P'_k(s)| \end{cases} \qquad s = 0, 1, 2, \cdots$$

ed ove le espressioni $\sum_0^{2n-1} {}_k \, P_k(s)|$, $\sum_0^{2n-1} {}_k \, |P'_k(s)|$ sono quozienti di polinomi in s di grado non superiore a $2n\,(2n-2)$.

Non rimane allora che dimostrare la convergenza delle due serie numeriche che compaiono a secondo membro della [22]; poichè è:

$$\lim_{s\to\infty} \frac{A_{s+1}}{A_s} = \frac{r''}{\sigma} \quad ; \quad \lim_{s\to\infty} \frac{A'_{s+1}}{A'_s} = \frac{r^2}{r'\,\sigma}$$

la convergenza delle due serie suddette sarà assicurata, per il criterio del D'Alembert, ogni qualvolta si verificano le due disuguaglianze:

$$[24] \qquad r' > \frac{r^2}{\sigma} \quad ; \quad r'' < \sigma$$

ove, si ricorderà, σ è stato scelto maggiore di r e del resto *grande a piacere*.

Resta dunque dimostrato il teorema:

La serie [S] *converge assolutamente ed uniformemente in ogni punto* (ρ , P) *situato nella strato sferico* $r' \leq \rho \leq r''$, *con* r' *ed* r'' *soddisfacenti alle condizioni* [24]. Cioè anche, per essere σ grande a piacere: *la serie* [S] *converge assolutamente ed uniformemente in ogni dominio limitato dello spazio che escluda al più l'origine.* È quindi dimostrato il teorema enunciato nelle parole introduttive, e si ha questa elegante proprietà delle funzioni n–iperarmoniche:

Se nel campo di regolarità di una funzione n*–iperarmonica in* 3 *variabili* x , y , z *è contenuta una superficie sferica, sulla quale i valori della funzione e delle sue prime* $2n - 1$ *derivate normali coincidono con quelli che vi assumono* $2n$ *funzioni intere nelle variabili* x , y , z, *il detto campo di regolarità è certamente tutto lo spazio, privato al più del centro della sfera.*

Matematica. — *Generalizzazione del teorema d'Abel sulle serie di potenze* (1). Nota di GAETANO FICHERA, presentata (2) da MAURO PICONE, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

1. INTRODUZIONE. — Il teorema d'Abel sulle serie di potenze afferma che se la serie:

$$\sum_{s=0}^{\infty} a_s (z - z_0)^s$$

converge per un particolare valore $z' = z_0$, essa converge uniformemente nel segmento rettilineo congiungente il punto z_0 col punto z'. Introdotto un sistema di coordinate polari con polo z_0, possiamo dire che se la serie:

$$\sum_{s=0}^{\infty} a_s e^{is\theta} \rho^s$$

converge per $\theta = \theta_0$ e $\rho = R \neq 0$ essa converge per $\theta = \theta_0$ e uniformemente al variare di ρ nell'intervallo chiuso $(0, R)$.

M. Picone ha generalizzato questo teorema (3) dimostrando che se la serie:

$$\sum_{s=0}^{\infty} \left[c_s(P) \frac{1}{\rho^{s+\mu}} + \gamma_s(P) \rho^s \right],$$

ove $c_s(P)$ e $\gamma_s(P)$ sono funzioni definite in un insieme A e μ un qualsivoglia numero reale, converge per un certo punto P in A e per i valori di ρ rispettivamente eguali a r e a R, le serie:

$$\sum_{s=0}^{\infty} c_s(P) \frac{1}{\rho^{s+\mu}}, \quad \sum_{s=0}^{\infty} \gamma_s(P) \rho^s,$$

---

(1) Lavoro del Laboratorio d'Analisi Superiore della R. Università di Roma, eseguito nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(2) Nell'Adunanza del 21 marzo 1941-XIX.

(3) Cfr. M. PICONE, *Appunti di Analisi Superiore*. Rondinella, Napoli, 1940, pagg. 271-272.

convergono, la prima uniformemente per $\rho \geq r$, la seconda uniformemente per $0 \leq \rho \leq R$.

In questo lavoro generalizzo ulteriormente il teorema d'Abel, nell'indirizzo di M. PICONE, studiando la convergenza della serie:

$$\sum_{s=0}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{m} c_i^{(s)}(P) \frac{1}{\rho^{s+\mu_i}} + \sum_{j=1}^{n} \gamma_j^{(s)}(P) \rho^{s+\nu_j} \right],$$

ove $c_i^{(s)}(P)$ e $\gamma_j^{(s)}(P)$ sono funzioni definite in un insieme A e μ_i e ν_j numeri reali qualsivogliano. Per una siffatta serie pervengo al teorema del n. 4 del presente scritto.

Come il teorema di M. PICONE riesce di grandissimo ausilio nello studio delle proprietà delle funzioni armoniche, così questa ulteriore generalizzazione si presta molto utilmente per lo studio di talune proprietà fondamentali delle funzioni iperarmoniche.

2. OSSERVAZIONE SULLO SVILUPPO DEI DETERMINATI. – *Se un termine dello sviluppo d'un determinante d'ordine $m + n$ contiene un elemento appartenente ad una matrice formata con gli elementi d'incrocio di m righe ed n colonne del determinante, tale termine contiene almeno un elemento della matrice complementare a quella considerata.*

La matrice sia formata con gli elementi d'incrocio delle righe d'indici $h_1, h_2, \cdots, h_m$ e delle colonne d'indici $k_1, k_2, \cdots, k_n$ e siano $h_{m+1}, h_{m+2}, \cdots, h_{m+n}$ gli indici delle restanti righe e $k_{n+1}, k_{n+2}, \cdots, k_{n+m}$ gli indici delle restanti colonne. Il termine in questione deve contenere m elementi tratti dalle righe d'indici $h_1, h_2, \cdots, h_m$ e siccome già uno appartiene, per ipotesi, ad una delle colonne d'indici $k_1, k_2, \cdots, k_n$, al massimo $m - 1$ apparterranno alle colonne d'indici $k_{n+1}, k_{n+2}, \cdots, k_{n+m}$; d'altra parte detto termine deve contenere m elementi tratti dalle colonne d'indici $k_{n+1}, k_{n+2}, \cdots, k_{n+m}$ ed essendovene non più di $m - 1$ che appartengono alle righe d'indici $h_1, h_2, \cdots, h_m$ ve ne sarà almeno uno che appartiene alle righe d'indici $h_{m+1}, h_{m+2}, \cdots, h_{m+n}$, cioè alla matrice complementare alla data.

3. DISEGUAGLIANZE DI BRUNACCI–ABEL. – Sono note le diseguaglianze di Brunacci–Abel [4] secondo le quali se $z_1, z_2, \cdots, z_n$ sono quantità reali o complesse ed $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ quantità reali e se è per $k = 1, 2, \cdots, n$

$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_k| \leq M$$

risulta:

$$[1] \qquad |\varepsilon_1 z_1 + \varepsilon_2 z_2 + \cdots + \varepsilon_n z_n| \leq \varepsilon_1 M \leq \sigma M,$$

[4] Cfr. M. PICONE, op. cit., pagg. 231–232.

quando si ha:

$$\sigma \geq \varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \cdots \geq \varepsilon_n \geq 0;$$

e risulta invece:

$$[2] \qquad |\varepsilon_1 z_1 + \varepsilon_2 z_2 + \cdots + \varepsilon_n z_n| \leq 2\varepsilon_n M \leq 2\sigma M,$$

quando si ha:

$$0 \leq \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 \leq \cdots \leq \varepsilon_n \leq \sigma$$

Diseguaglianze analoghe possono essere stabilite anche quando la quantità reale ε_s, pur non essendo monotona, sia, però, funzione a variazione limitata dell'indice s nell'intervallo $(0, +\infty)$. In tal caso si può porre:

$$\varepsilon_s = \varepsilon'_s - \varepsilon''_s,$$

essendo ε'_s ed ε''_s funzioni positive non decrescenti di s e superiormente limitate da un numero Λ che sia la somma dell'estremo superiore di $|\varepsilon_s|$ e della variazione totale di ε_s in $(0, +\infty)$. Abbiamo allora:

$$\sum_{h=1}^{n} \varepsilon_h z_h = \sum_{h=1}^{n} (\varepsilon'_h - \varepsilon''_h) z_h = \sum_{h=1}^{n} \varepsilon'_h z_h - \sum_{h=1}^{n} \varepsilon''_h z_h.$$

E tenendo presente la [2]:

$$\left|\sum_{h=1}^{n} \varepsilon_h z_h\right| \leq \left|\sum_{h=1}^{n} \varepsilon'_h z_h\right| + \left|\sum_{h=1}^{n} \varepsilon''_h z_h\right| \leq 2\varepsilon'_n M + 2\varepsilon''_n M \leq 4\Lambda M$$

cioè:

$$[3] \qquad |\varepsilon_1 z_1 + \varepsilon_2 z_2 + \cdots + \varepsilon_n z_n| \leq 4\Lambda M.$$

4. Teorema. – *Le funzioni reali o complesse delle successioni*

$$[c_1^{(s)}(P)], [c_2^{(s)}(P)], \cdots, [c_m^{(s)}(P)], [\gamma_1^{(s)}(P)], [\gamma_2^{(s)}(P)], \cdots, [\gamma_n^{(s)}(P)]$$

siano definite nell'insieme A dello spazio ad un qualsiasi numero di dimensioni e sia ρ una variabile positiva e $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_m$; $\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n$ fissati numeri reali qualsivogliano, tali, che sia:

$$\mu_h \geq \mu_{h+1} \ (h = 1, 2, \cdots, m-1); \ \nu_k \leq \nu_{k+1} \ (k = 1, 2, \cdots, n-1).$$

Se la serie:

$$[4] \qquad \sum_{s=0}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{m} c_i^{(s)}(P) \frac{1}{\rho^{s+\mu_i}} + \sum_{j=1}^{n} \gamma_j^{(s)}(P) \rho^{s+\nu_j}\right],$$

converge per un certo punto P in A e per i valori di ρ rispettivamente uguali a

$$r_m, r_{m-1}, \cdots, r_2, r_1, R_1, R_2, \cdots, R_{n-1}, R_n$$

essendo:

$$r_m < r_{m-1} \cdots < r_2 < r_1 < R_1 < R_2 \cdots < R_{n-1} < R_n ,$$

le serie:

$$[5] \qquad \sum_{s=0}^{\infty} c_i^{(s)}(P)\,\frac{1}{\rho^{s+\mu_i}} \qquad (i=1,2,\cdots,m)$$

convergono per quel certo punto P in A e uniformemente per $\rho \geq r_1$, e le serie

$$[6] \qquad \sum_{s=0}^{\infty} \gamma_j^{(s)}(P)\,\rho^{s+\nu_j} \qquad (j=1,2,\cdots,n)$$

convergono per il detto punto P e uniformemente per $\rho \leq R_1$, sicchè la serie data converge uniformemente al variare di ρ nell'intervallo chiuso (r_1, R_1).

Se poi la convergenza della serie data per i detti valori di ρ è uniforme al variare di P in A, le serie [5] *convergono uniformemente al variare di P in A e per $\rho \geq r_1$, e le serie* [6] *convergono uniformemente al variare di P in A e per $\rho \leq R_1$.*

Detto q quel numero positivo minore di uno, tale che:

$$r_1 = qR_1$$

e posto:

$$\alpha_1 = 1 \quad \text{e} \quad \beta_1 = 0 ,$$

si abbia:

$$[7] \qquad r_i = q^{\alpha_i} R_1 \quad (i=1,2,\cdots,m) \quad ; \quad R_j = \frac{1}{q^{\beta_j}} R_1 \quad (j=1,2,\cdots,n),$$

essendo:

$$\alpha_m > \cdots > \alpha_2 > \alpha_1 = 1 \quad ; \quad 0 < \beta_1 < \beta_2 < \cdots < \beta_n .$$

Scriviamo adesso il termine generale della serie [4] per quei valori di ρ per i quali la serie converge, sostituendo a r_i ed R_j i valori dati dalle [7], e poniamo:

$$\sum_{i=1}^{m} c_i^{(s)}(P)\,\frac{q^{\beta_n s+\beta_n \mu_i}}{R_1^{s+\mu_i}} + \sum_{j=1}^{n} \gamma_j^{(s)}(P)\,\frac{R_1^{s+\nu_j}}{q^{\beta_n s+\beta_n \nu_j}} = A_1^{(s)}(P) ,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum_{i=1}^{m} c_i^{(s)}(P)\,\frac{q^{\beta_2 s+\beta_2 \mu_i}}{R_1^{s+\mu_i}} + \sum_{j=1}^{n} \gamma_j^{(s)}(P)\,\frac{R_1^{s+\nu_j}}{q^{\beta_2 s+\beta_2 \nu_j}} = A_{n-1}^{(s)}(P),$$

$$\sum_{i=1}^{m} c_i^{(s)}(P)\,\frac{1}{R_1^{s+\mu_i}} + \sum_{j=1}^{n} \gamma_j^{(s)}(P)\,R_1^{s+\nu_j} = A_n^{(s)}(P) ,$$

$$\sum_{i=1}^{m} c_i^{(s)}(P)\,\frac{1}{q^{s+\mu_i} R_1^{s+\mu_i}} + \sum_{j=1}^{n} \gamma_j^{(s)}(P)\,q^{s+\nu_j} R_1^{s+\nu_j} = A_{n+1}^{(s)}(P),$$

$$\sum_{i=1}^{m} c_i^{(s)}(P)\,\frac{1}{q^{\alpha_2 s+\alpha_2 \mu_i} R_1^{s+\mu_i}} + \sum_{j=1}^{n} \gamma_j^{(s)}(P)\,q^{\alpha_2 s+\alpha_2 \nu_j} R_1^{s+\nu_j} = A_{n+2}^{(s)}(P) ,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum_{i=1}^{m} c_i^{(s)}(P)\,\frac{1}{q^{\alpha_m s+\alpha_m \mu_i} R_1^{s+\mu_i}} + \sum_{j=1}^{n} \gamma_j^{(s)}(P)\,q^{\alpha_m s+\alpha_m \nu_j} R_1^{s+\nu_j} = A_{n+m}^{(s)}(P) .$$

Moltiplichiamo la 1ª di queste eguaglianze per $q^{\beta_n s + \beta_n \nu_n}$ la 2ª per $q^{\beta_n - 1 s + \beta_n - 1 \nu_n}, \cdots$, la $(n-1)$-esima per $q^{\beta_2 s + \beta_2 \nu_n}$, e moltiplichiamo la $(n+1)$-esima per $q^{s+\mu_1}$, la $(n+2)$-esima per $q^{\alpha_2 s + \alpha_2 \mu_1}, \cdots$, la $(n+m)$-esima per $q^{\alpha_m s + \alpha_m \mu_1}$. Ponendo:

$$\delta_i = \mu_i + \nu_n \qquad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

$$\eta_j = \nu_n - \nu_j \geq 0 \qquad (j = 1, 2, \cdots, n)$$

$$\varepsilon_i = \mu_i - \mu_i \geq 0$$

$$\tau_j = \mu_i + \nu_j ,$$

possiamo così scrivere tali eguaglianze:

$$[8] \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{m} \frac{c_i^{(s)}(P)}{R_1^{s+\mu_i}} q^{2\beta_n s + \beta_n \delta_i} + \sum_{j=1}^{n} \gamma_j^{(s)}(P) R_1^{s+\nu_j} q^{\beta_n \eta_j} = A_1^{(s)}(P) q^{\beta_n s + \beta_n \nu_n}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum_{i=1}^{m} \frac{c_i^{(s)}(P)}{R_1^{s+\mu_i}} q^{2\beta_2 s + \beta_2 \delta_i} + \sum_{j=1}^{n} \gamma_j^{(s)}(P) R_1^{s+\nu_j} q^{\beta_2 \eta_j} = A_{n-1}^{(s)}(P) q^{\beta_2 s + \beta_2 \nu_n}, \\ \sum_{i=1}^{m} \frac{c_i^{(s)}(P)}{R_1^{s+\mu_i}} + \sum_{j=1}^{n} \gamma_j^{(s)}(P) R_1^{s+\nu_j} = A_n^{(s)}(P), \\ \sum_{i=1}^{m} \frac{c_i^{(s)}(P)}{R_1^{s+\mu_i}} q^{\varepsilon_i} + \sum_{j=1}^{n} \gamma_j^{(s)}(P) R_1^{s+\nu_j} q^{2s+\tau_j} = A_{n+1}^{(s)}(P) q^{s+\mu_1}, \\ \sum_{i=1}^{m} \frac{c_i^{(s)}(P)}{R_1^{s+\mu_i}} q^{\alpha_2 \varepsilon_i} + \sum_{j=1}^{n} \gamma_j^{(s)}(P) R_1^{s+\nu_j} q^{2\alpha_2 s + \alpha_2 \tau_j} = A_{n+2}^{(s)}(P) q^{\alpha_2 s + \alpha_2 \mu_1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum_{i=1}^{m} \frac{c_i^{(s)}(P)}{R_1^{s+\mu_i}} q^{\alpha_m \varepsilon_i} + \sum_{j=1}^{n} \gamma_j^{(s)}(P) R_1^{s+\nu_j} q^{2\alpha_m s + \alpha_m \tau_j} = A_{n+m}^{(s)}(P) q^{\alpha_m s + \alpha_m \mu_1}. \end{array} \right.$$

Avvertiamo d'ora in avanti che il punto P che si considera è quello per cui per ipotesi la serie [4] converge.

Possiamo considerare le [8] come un sistema di $n + m$ equazioni nelle $n + m$ quantità:

$$\frac{c_1^{(s)}(P)}{R_1^{s+\mu_1}}, \frac{c_2^{(s)}(P)}{R_1^{s+\mu_2}}, \cdots, \frac{c_2^{(s)}(P)}{R_1^{s+\mu_m}}, \gamma_1^{(s)}(P) R_1^{s+\nu_1}, \gamma_2^{(s)}(P) R_1^{s+\nu_2}, \cdots, \gamma_n^{(s)}(P) R_1^{s+\nu_n}.$$

Il determinante di questo sistema vale:

$$\begin{array}{|llllll|}
q^{2\beta_n s+\beta_n\delta_1} \ldots q^{2\beta_n s+\beta_n\delta_i} \ldots q^{2\beta_n s+\beta_n\delta_m} & q^{\beta_n\eta_1} & \ldots & q^{\beta_n\eta_j} & \ldots 1 \\
\ldots\ldots\ldots

nente di q è sempre ≥ 2, segue il verificarsi della [9]. Stabilito ciò si può provare che la funzione

$$f(s) = \frac{1}{Q + \Sigma_l a_l q^{\lambda_l s}}$$

è a variazione limitata in $(0, +\infty)$. Basta a tal uopo far vedere che la sua derivata è di modulo sommabile in $(0, +\infty)$. Si ha infatti:

$$f'(s)| = \frac{|\Sigma_l a_l (\log q^{\lambda_l}) q^{\lambda_l s}|}{[Q + \Sigma_l a_l q^{\lambda_l s}]^2} = \frac{|\Sigma_l a_l (\log q^{\lambda_l}) q^{(\lambda_l - 1) s}|}{[Q + \Sigma_l a_l q^{\lambda_l s}]^2} q^s .$$

Teniamo intanto presente che Q nel determinante su scritto è, a meno del segno, il prodotto del minore formato con le prime n righe e le ultime n colonne per il minore formato con le ultime m righe e le prime m colonne, sicchè, essendo ciascuno di questi minori diverso da zero, è $Q \neq 0$. D'altra parte per l'osservazione fatta è $\lambda_l - 1 \geq 1$, e quindi accade che:

$$\lim_{s \to \infty} \frac{|\Sigma_l a_l (\log q^{\lambda_l}) q^{(\lambda_l - 1) s}|}{[Q + \Sigma_l a_l q^{\lambda_l s}]^2} = 0.$$

Fissato quindi il numero positivo K_0, appena sia s convenientemente elevato, si ha

$$|f'(s)| = \frac{|\Sigma_l a_l (\log q^{\lambda_l}) q^{(\lambda_l - 1) s}|}{[Q + \Sigma_l a_l q^{\lambda_l s}]^2} q^s < K_0 q^s,$$

la quale diseguaglianza esprime la sommabilità di $|f'(s)|$. Ritorniamo adesso al sistema [8]. Ricordando che è $Q \neq 0$, ed osservando che

$$\lim_{s \to \infty} G(s) = \lim_{s \to \infty} \Sigma_l a_l q^{\lambda_l s} = 0$$

si vede che, per s abbastanza grande, il determinante di tale sistema è diverso da zero. Applicando allora la regola di Cramer abbiamo:

$$c_i^{(s)}(P) \frac{Q + \Sigma_l a_l q^{\lambda_l s}}{R_1^{s + \mu_i}} =$$

$$\begin{vmatrix}
q^{2\beta_n s + \beta_n \delta_1} \ldots [q^{\beta_n s + \beta_n \nu_n} A_1^{(s)}(P)] & \ldots q^{2\beta_n s + \beta_n \delta_m} & q^{\beta_n \eta_1} & \ldots q^{\beta_n \eta_j} & \ldots 1 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\
q^{2\beta_2 s + \beta_2 \delta_1} \ldots [q^{\beta_2 s + \beta_2 \nu_n} A_{n-1}^{(s)}(P)] & \ldots q^{2\beta_2 s + \beta_2 \delta_m} & q^{\beta_2 \eta_1} & \ldots q^{\beta_2 \eta_j} & \ldots 1 \\
1 \quad \ldots \quad A_n^{(s)}(P) & \ldots 1 & 1 & \ldots 1 & \ldots 1 \\
1 \quad \ldots [q^{s + \mu_1} A_{n+1}^{(s)}(P)] & \ldots q^{s m} & q^{2s + \tau_1} & \ldots q^{2s + \tau_j} & \ldots 1 \\
1 \quad \ldots [q^{\alpha_2 s + \alpha_2 \mu_1} A_{n+2}^{(s)}(P)] & \ldots q^{\alpha_2 s m} & q^{2\alpha_2 s + \alpha_2 \tau_1} & \ldots q^{2\alpha_2 s + \alpha_2 \tau_j} & \ldots 1 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\
1 \quad \ldots [q^{\alpha_m s + \alpha_m \mu_1} A_{n+m}^{(s)}(P)] & \ldots q^{\alpha_m s m} & q^{2\alpha_m s + \alpha_m \tau_1} & \ldots q^{2\alpha_m s + \alpha_m \tau_j} & \ldots 1
\end{vmatrix}$$

Lo sviluppo del determinante è costituito da una somma di termini del tipo:

$$A_g^{(s)}(P)\, q^{\xi s + \varphi}$$

ove è sempre $\xi \geq 1$. Difatti s'osservi che $A_{n+i}^{(s)}(P)$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$ viene moltiplicato per $q^{\alpha_i s + \alpha_i \mu_1}$ ed è, come sappiamo, $\alpha_i \geq 1$, mentre ogni termine che contiene $A_j^{(s)}(P)$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$ deve contenere, per l'osservazione premessa sui determinanti, almeno un elemento della matrice formata con le ultime m righe e le ultime n colonne e, come abbiamo avuto agio d'osservare anche sopra, il coefficiente di s nell'esponente di q in questa matrice è addirittura ≥ 2. Raccogliamo nello sviluppo di tale determinante tutti i termini che rispettivamente contengono $A_1^{(s)}(P)$, $A_2^{(s)}(P), \cdots, A_{n+m}^{(s)}(P)$ e mettiamo inoltre in evidenza $q^{s+\mu_i}$, abbiamo:

$$c_i^{(s)}(P) =$$

$$= \frac{[A_1^{(s)}(P)\, \mathrm{S}\, q^{\omega_1 s + \chi_1} + A_2^{(s)}(P)\, \mathrm{S}\, q^{\omega_2 s + \chi_2} + \cdots + A_{n+m}^{(s)}(P)\, \mathrm{S}\, q^{\omega_{n+m} s + \chi_{n+m}}]\, (qR_1)^{s+\mu_i}}{Q + \Sigma_l\, a_l\, q^{\lambda_l s}},$$

dove s'è indicato con

$$\mathrm{S}\, q^{\omega_g s + \chi_g} \qquad (g = 1, 2, \cdots, n+m)$$

la somma di tutti i coefficienti di $A_g^{(s)}(P)$ nello sviluppo del determinante, dopo che si è messo in evidenza $q^{s+\mu_i}$.

Essendo $m + n$ l'ordine del determinante tale somma contiene di $(m + n - 1)!$ termini. Vogliamo adesso provare che prendendo l'indice s abbastanza grande è sempre:

[10] $$\omega_g s + \chi_g \geq 0.$$

Per provare ciò basta far vedere che è $\omega_g \geq 0$, e che quando è $\omega_g = 0$, è allora $\chi_g \geq 0$. Ed invero abbiamo testè osservato che in ogni termine dello sviluppo del determinante il coefficiente ξ di s, nell'esponente di q, è sempre ≥ 1, consegue quindi che messo $q^{s+\mu_i}$ in evidenza, resta $\omega_g \geq 0$, anzi, sempre per quanto abbiamo osservato, per $g \leq n$ è addirittura $\omega_g \geq 1$. Si vede allora, osservando il determinante, che il caso $\omega_g = 0$ si può avere solo per $g = n + 1$. Allora il termine dello sviluppo del determinante

$$A_{n+1}^{(s)}(P)\, q^{\chi_{n+1}} \cdot q^{s+\mu_i}$$

deve necessariamente provenire dal prodotto di elementi appartenenti al minore formato con le prime n righe e le ultime n colonne e al minore

formato con le ultime m righe e le prime m colonne; e, giacchè gli esponenti di q in tali minori sono ≥ 0, si ha:

$$\chi_{n+1} + \mu_i \geq 0 .$$

D'altra parte, nel determinante, $A^{(s)}_{n+1}(P)$ viene moltiplicato per $q^{s+\mu_1}$, sicchè avremo:

$$\chi_{n+1} + \mu_i \geq \mu_1 ,$$

da cui:

$$\chi_{n+1} \geq \mu_1 - \mu_i \geq 0.$$

Resta quindi dimostrata la [10].

Consideriamo il numeratore dell'espressione di $c_i^{(s)}(P)$ su ottenuta, moltiplichiamo per $1/\rho^{s+\mu_i}$ e sommiamolo per i valori dell'indice s che vanno da $h+1$ a $h+k$, abbiamo allora:

$$\left| \sum_{s=h+1}^{h+k} [A_1^{(s)}(P)\, \mathrm{S}\, q^{\omega_1 s+\chi_1} + \cdots + A^{(s)}_{n+m}(P)\, \mathrm{S}\, q^{\omega_{n+m} s+\chi_{n+m}}] \frac{(qR_1)^{s+\mu_i}}{\rho^{s+\mu_i}} \right| \leq$$

$$\leq \left| \sum_{s=h+1}^{h+k} \frac{(qR_1)^{s+\mu_i}}{\rho^{s+\mu_i}} A_1^{(s)}(P)\, \mathrm{S}\, q^{\omega_1 s+\chi_1} \right| + \cdots +$$

$$+ \left| \sum_{s=h+1}^{h+k} \frac{(qR_1)^{s+\mu_i}}{\rho^{s+\mu_i}} A^{(s)}_{n+m}(P)\, \mathrm{S}\, q^{\omega_{n+m} s+\chi_{n+m}} \right| .$$

Si osservi intanto che:

$$\left| \sum_{s=h+1}^{h+k} \frac{(qR_1)^{s+\mu_i}}{\rho^{s+\mu_i}} A_g^{(s)}(P)\, \mathrm{S}\, q^{\omega_g s+\chi_g} \right| = \left| \sum_{s=h+1}^{h+k} \mathrm{S} \left[A_g^{(s)}(P) \cdot q^{\omega_g s+\chi_g} \cdot \frac{(qR_1)^{s+\mu_i}}{\rho^{s+\mu_i}} \right] \right| =$$

$$= \left| \mathrm{S} \sum_{s=h+1}^{h+k} \left[A_g^{(s)}(P) \cdot q^{\omega_g s+\chi_g} \cdot \frac{(qR_1)^{s+\mu_i}}{\rho^{s+\mu_i}} \right] \right| \leq \mathrm{S} \left| \sum_{s=h+1}^{h+k} \left[A_g^{(s)}(P) \cdot q^{\omega_g s+\chi_g} \cdot \frac{(qR_1)^{s+\mu_i}}{\rho^{s+\mu_i}} \right] \right|$$

$$(g = 1, 2, \cdots, n+m).$$

Otteniamo allora:

$$\left| \sum_{s=h+1}^{h+k} [A_1^{(s)}(P)\, \mathrm{S}\, q^{\omega_1 s+\chi_1} + \cdots + A^{(s)}_{n+m}(P)\, \mathrm{S}\, q^{\omega_{n+m} s+\chi_{n+m}}] \frac{(qR_1)^{s+\mu_i}}{\rho^{s+\mu_i}} \right| \leq$$

$$\leq \mathrm{S} \left| \sum_{s=h+1}^{h+k} \left[A_1^{(s)}(P) \cdot q^{\omega_1 s+\chi_1} \cdot \frac{(qR_1)^{s+\mu_i}}{\rho^{s+\mu_i}} \right] \right| + \cdots +$$

$$+ \mathrm{S} \left| \sum_{s=h+1}^{h+k} \left[A^{(s)}_{n+m}(P) \cdot q^{\omega_{n+m} s+\chi_{n+m}} \cdot \frac{(qR_1)^{s+\mu_i}}{\rho^{s+\mu_i}} \right] \right| .$$

Consideriamo adesso le quantità:

$$\left| \sum_{s=h+1}^{h+k} A_1^{(s)}(P) \right| , \quad \left| \sum_{s=h+1}^{h+k} A_2^{(s)}(P) \right| , \cdots , \left| \sum_{s=h+1}^{h+k} A^{(s)}_{n+m}(P) \right| .$$

L'insieme numerico descritto da tutte quante queste quantità quando k percorre la successione dei numeri naturali è limitato per ipotesi e, detto $M_h(P)$ il suo estremo superiore è

$$\lim_{h\to\infty} M_h(P) = 0.$$

Si ponga:

$$Z_s^{(g)} = A_g^{(s)}(P) \qquad (g = 1, 2, \cdots, n+m)$$

$$\varepsilon_s^{(g)} = q^{\omega_g s + \chi_g} \cdot \frac{(qR_i)^{s+\mu_i}}{\rho^{s+\mu_i}} \quad (s = h+1, h+2, \cdots, h+k).$$

Poichè, per h abbastanza grande, vale la [10], si ha per $\rho \geq qR_i = r_i$:

$$1 \geq \varepsilon_{h+1}^{(g)} \geq \varepsilon_{h+2}^{(g)} \geq \cdots \geq \varepsilon_{h+k}^{(g)} > 0,$$

ed è inoltre:

$$\left| \sum_{s=h+1}^{h+k} Z_s^{(g)} \right| \leq M_h(P),$$

possiamo applicare alle quantità $Z_s^{(g)}$ e $\varepsilon_s^{(g)}$ la [1] delle disuguaglianze di Brunacci–Abel. Otteniamo così:

$$\left| \sum_{s=h+1}^{h+k} \varepsilon_s^{(g)} Z_s^{(g)} \right| = \left| \sum_{s=h+1}^{h+k} \left[A_g^{(s)}(P) \cdot q^{\omega_g s + \chi_g} \cdot \frac{(qR_i)^{s+\mu_i}}{\rho^{s+\mu_i}} \right] \right| \leq M_h(P).$$

Siccome in ogni somma S, come abbiamo precedentemente osservato, vi sono $(m+n-1)!$ termini, abbiamo:

$$\mathrm{S} \left| \sum_{s=h+1}^{h+k} \left[A_g^{(s)}(P) \cdot q^{\omega_g s + \chi_g} \cdot \frac{(qR_i)^{s+\mu_i}}{\rho^{s+\mu_i}} \right] \right| \leq (m+n-1)!\, M_h(P).$$

Otteniamo così, in definitiva:

$$\left| \sum_{s=h+1}^{h+k} [A_1^{(s)}(P)\, \mathrm{S}\, q^{\omega_1 s + \chi_1} + \cdots + A_{n+m}^{(s)}(P)\, \mathrm{S}\, q^{\omega_{n+m} s + \chi_{n+m}}] \frac{(qR_i)^{s+\mu_i}}{\rho^{s+\mu_i}} \right| \leq$$

$$\leq (m+n)!\, M_h(P).$$

Poniamo ora:

$$z_s = [A_1^{(s)}(P)\, \mathrm{S}\, q^{\omega_1 s + \chi_1} + \cdots + A_{n+m}^{(s)}(P)\, \mathrm{S}\, q^{\omega_{n+m} s + \chi_{n+m}}] \frac{(qR_i)^{s+\mu_i}}{\rho^{s+\mu_i}},$$

$$\varepsilon_s = f(s) = \frac{1}{Q + \sum_l a_l q^{\lambda_l s}}$$

$$(s = h+1, h+2, \cdots, h+k).$$

Come abbiamo visto a principio, ε_s è funzione a variazione limitata dell'indice s, ed è inoltre

$$\left| \sum_{s=h+1}^{h+k} z_s \right| \leq (m+n)!\, M_h(P),$$

sicchè possiamo applicare la [3] delle diseguaglianze di Brunacci-Abel alle quantità z_s ed ε_s. Avremo, detto Λ un numero che sia la somma dell'estremo superiore di $|f(s)|$ in $(0, +\infty)$ e della variazione totale di $f(s)$ in tale intervallo:

$$\left| \sum_{s=h+1}^{h+k} \varepsilon_s z_s \right| = \left| \sum_{s=h+1}^{h+k} \frac{A_1^{(s)}(P)\, S\, q^{\omega_1 s+\chi_1} + \cdots + A_{n+m}^{(s)}(P)\, S\, q^{\omega_{n+m} s+\chi_{n+m}}}{Q + \sum_l a_l q^{\lambda_l s}} \frac{(qR_i)^{s+\mu_i}}{\rho^{s+\mu_i}} \right| \leq$$

$$\leq 4\Lambda (m+n)!\, M_h(P),$$

e questa formola di maggiorazione sussiste *comunque* si prenda $\rho \geq r_1$. Ricordando l'ottenuta espressione di $c_i^{(s)}(P)$, abbiamo:

$$\left| \sum_{s=h+1}^{h+k} c_i^{(s)}(P) \frac{1}{\rho^{s+\mu_i}} \right| \leq 4\Lambda (m+n)!\, M_h(P),$$

che, ripetiamo, è uniforme per $\rho \geq r_1$. Da essa seguono tutti i fatti asseriti nell'enunciato relativamente alle serie [5]. Con procedimento analogo si perviene alla formola di maggiorazione:

$$\left| \sum_{s=h+1}^{h+k} \gamma_j^{(s)}(P) \rho^{s+\nu_j} \right| \leq 4\Lambda (m+n)!\, M_h(P),$$

uniformemente al variare di ρ nell'intervallo chiuso $(0, R_i)$. Da essa segue quanto si è asserito nell'enunciato relativamente alle serie [5], e quindi la dimostrazione del teorema.

5. Corollario. – *Se la serie* [4] *per ogni* ρ *dell'intervallo aperto* (ρ', ρ''), $(\rho' < \rho'')$, *converge uniformemente al variare di* P *in* A, *le serie* [5] *convergono uniformemente per* $\rho > \rho'$ *e* P *in* A *e le serie* [6] *per* $\rho < \rho''$ *e* P *in* A.

Difatti scelto *comunque* un intervallo chiuso (r_1, R_1), $(r_1 < R_1)$, contenuto nell'intervallo aperto (ρ', ρ''), si determinino $m-1$ numeri in modo che sia

$$\rho' < r_m < r_{m-1} < \cdots < r_2 < r_1$$

ed $n-1$ in modo che sia

$$R_1 < R_2 < \cdots < R_{n-1} < R_n < \rho''.$$

Si vede allora che la serie [4] soddisfa alle condizioni dell'enunciato del teorema precedente, e quindi segue la convergenza uniforme delle serie [5] per P in A e $\rho \geq r_1$, e quella delle serie [6] per P in A e $\rho \leq R_1$. Il corollario resta così provato e possiamo, quindi, asserire che la serie [4] converge uniformemente per ρ nell'intervallo aperto (ρ', ρ'') e P in A.

Matematica (Geometria). — *Sul modello minimo della varietà degli elementi differenziali del 2° ordine del piano projettivo.* Nota di GIUSEPPE GHERARDELLI, presentata (1) dall'Accademico FRANCESCO SEVERI.

1. Allo studio della varietà razionale W degli elementi differenziali del 2° ordine, E_2, del piano projettivo è dedicata un'ampia ed elaborata Memoria di E. STUDY (2); nella quale l'insieme (aperto) degli E_2 regolari (cioè non cuspidali nè inflessionali) viene in più modi completato così da formare un continuo chiuso.

Nel presente scritto l'argomento viene ripreso in vista di determinare, secondo un concetto introdotto da F. SEVERI (3), un modello minimo di W: una varietà che, fra le trasformate birazionali senza eccezione di W, presenti il minimo ordine. Questa varietà risulta a posteriori priva di punti multipli.

L'ordine (= 330) e la dimensione dello spazio lineare di appartenenza (= 69) del modello minimo normale spiegano le complicazioni che si incontrano quando si cerca di stabilire per gli E_2 del piano projettivo un sistema di coordinate privo di eccezioni.

2. Per elemento del 2° ordine E_2 del piano projettivo si intende qui, con F. ENGEL (4), il sistema di due elementi lineari E_1, infinitamente vicini, in posizione unita (*vereinigte Lage*). Se x, u sono coordinate omogenee di punto e di retta tali che la condizione di mutua appartenenza sia espressa da $(ux) = 0$, due $E_1 : (x , u) , (x + dx , u + du)$ sono in posizione unita se:

$$(ux) = (udx) = (xdu) = 0$$

---

(1) Nell'Adunanza del 21 marzo 1941-XIX.

(2) E. STUDY, *Die Elemente zweiter Ordnung in der ebenen projectiven Geometrie.* « Leipz. Ber. », 53 (1901), pag. 338.

(3) F. SEVERI, *Serie, sistemi di equivalenza ...* « Ist. Mat. Università di Roma », 1938, pag. 20.

(4) F. ENGEL, *Die höheren Differentialquotienten.* « Leipz. Ber. », 54 (1902) pag. 17.

Un E_1 è origine di una ∞^1 razionale di E_2 entro la quale esistono due elementi projettivamente individuati: l'E_2 cuspidale e l'E_2 inflessionale. Nel primo i due E_1 infinitamente vicini hanno comune il punto $(dx = 0)$; nel secondo la retta $(du = 0)$. Due E_2, infinitamente vicini, sono in posizione unita (e individuano un E_3) quando gli E_1 cui appartengono o coincidono o sono in posizione unita [1].

Una curva (unione, *verein*) è una varietà (analitica) ∞^1 di E_2 ciascuno dei quali è in posizione unita con gli E_2 della varietà prossimi ad esso.

Il gruppo continuo delle omografie piane muta W in sè lasciando singolarmente fisse la varietà degli E_2 cuspidali e la varietà degli E_2 inflessionali; il sistema delle reciprocità piane muta in sè la W scambiando l'una varietà nell'altra.

3. Per la varietà V degli elementi lineari del piano SEVERI [2] ha provato che:

« La base minima delle superficie appartenenti alla varietà V consta della superficie X imagine degli elementi lineari le cui rette passano per un punto x e della superficie U imagine degli elementi lineari i cui punti appartengono a una retta u. La base minima delle curve tracciate su V consta della curva l_x imagine degli elementi appartenenti ad un punto x e della curva l_u imagine degli elementi appartenenti a una retta u ».

Se Φ è una superficie di V ha pertanto luogo l'equivalenza:

$$[1] \qquad \Phi \equiv mX + nU .$$

L'imagine projettiva del sistema $|X + U|$ è il modello minimo normale di V. La [1] esprime il fatto che ogni equazione differenziale algebrica del 1° ordine può scriversi, in coordinate di CLEBSCH, nella forma:

$$[2] \qquad \begin{cases} (ax)^m (ub)^n = 0 \\ (ux) \quad = 0 . \end{cases}$$

Gli interi m, n sono le caratteristiche del sistema ∞^1 delle corrispondenti curve integrali. Per $m = n = 1$ le [2] rappresentano l'equazione

---

[1] Segue da questa definizione che una trasformazione entro la varietà degli E_2 che muti E_2 in posizione unita in E_2 anche in posizione unita è un'ordinaria trasformazione di contatto. Osservazione questa di A. BÄCKLUND, *Ueber Flächentransformationen*, « Math. Ann. », 9 (1876), pag. 297.

[2] F. SEVERI, *I fondamenti della Geometria numerativa*. « Annali di Mat. », 19 (1940) pag. 227.

differenziale del 1° ordine di JACOBI che in coordinate ordinarie x , y , y' si scrive:

$$A(x, y) + B(x, y)\, y' + C(x, y)\,(xy' - y) = 0$$

con A , B , C polinomi lineari in x , y.

Il modello minimo di V si ottiene pertanto quale immagine projettiva del sistema lineare ∞^7 delle equazioni differenziali del 1° ordine di JACOBI (varietà ∞^2 di E_1). In altre parole: un elemento lineare viene concepito come l'insieme delle curve di KLEIN–LIE che lo contengono.

Per la dimensione $\delta(m, n)$ dello spazio di appartenenza e per l'ordine $N(m, n)$ del modello normale (m, n) di V, immagine projettiva del sistema $|mX + nU|$, si ha [1]:

$$\delta(m, n) = \frac{1}{2}(m+1)(n+1)(m+n+2) - 1$$

$$N(m, n) = 3mn(m+n).$$

Sul modello (m, n) le curve l_x, l_u sono C^n (C^m) razionali normali. Per ogni punto di (m, n) passano una C^m e una C^n. Una superficie X (U) si compone delle C^m (C^n) appoggiate a una C^n (C^m). Le stesse superficie X, U, rappresentabili sul piano mediante il sistema lineare completo delle curve d'ordine $m + n$ con dato punto n–plo o rispettivamente m–plo, hanno gli ordini $m^2 + 2mn$, $n^2 + 2mn$ e appartengono a spazi di dimensione:

$$\binom{m+n+2}{2} - \binom{n+1}{2} - 1 \quad ; \quad \binom{m+n+2}{2} - \binom{m+1}{2} - 1$$

rispettivamente. Il modello (m, n) si ottiene quale sezione della varietà « generalizzata » di C. SEGRE [1]:

$$X_{i_1 i_2 - i_m J_1 J_2 \cdots J_n} \equiv x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_m} u_{J_1} u_{J_2} \cdots u_{J_n}$$

con lo spazio lineare comune agli $\binom{m+1}{2}\binom{n+1}{2}$ iperpiani indipendenti:

$$x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_{m-1}} u_{J_1} u_{J_2} \cdots u_{J_{n-1}} (ux) = 0.$$

Lo stesso modello, in quanto ammette un gruppo continuo transitivo di trasformazioni omografiche in sè, è privo di punti multipli.

---

[1] F. SEVERI, loc. cit. alla nota 5, pag. 230; E. STUDY, *Methoden zur Theorie der Ternären Formen* Leipzig (Teubner) 1889, pag. 110 e sgg.

[2] A. TERRACINI, *Sul modulo delle forme contenenti una varietà di Segre.* « Rend. Lincei », XXX (1921), pag. 95.

4. Si considerino ora su W le varietà:

$C = V_3$ degli E_2 cuspidali.
$F = V_3$ degli E_2 inflessionali.
$P = V_3$ degli E_2 con la retta per un punto.
$R = V_3$ degli E_2 con il punto su una retta.
$P^* = (C, P)$, $\bar{P} = (F, P)$, $R^* = (C, R)$, $\bar{R} = (F, R)$

$t = V_1$ degli E_2 con data origine E, (unione).
$p^* = V_1$ degli E_2 cuspidali con punto dato (unione).
$\bar{p} = V_1$ degli E_2 inflessionali con punto dato.
$r^* = V_1$ degli E_2 cuspidali con retta data.
$\bar{r} = V_1$ degli E_2 inflessionali con retta data (unione).

Le t, razionali, costituiscono entro W un sistema razionale ∞^3 di indice 1; le varietà C, F unisecano le t e perciò, secondo un noto criterio di Severi [1], sono su W linearmente equivalenti a meno di V_3 composte con le t. Ora W, concepita come insieme delle ∞^3 t, è birazionalmente equivalente, senza eccezioni, alla varietà V degli E_1; e poichè su V è nota (Severi) una base minima per la superficie, risulta in conseguenza nota su W una base minima per le V_3 composte con le t: la quale base consta pertanto delle varietà P , R. Si ha dunque su W:

[3] $$C \equiv F + aP + bR.$$

Intersecando i due membri della [3] con l' ∞^1 degli E_2 di una conica irriducibile e poi con l'∞^1 degli E_2 di una cubica generale luogo, si trova:

$$2a + 2b = 0 \quad ; \quad 9 + 6a + 3b = 0$$

da cui

$$a = -3 \quad , \quad b = 3.$$

Vale dunque l'equivalenza:

[4] $$C + 3P \equiv F + 3R \text{ [2]}.$$

Sia M una V_3 (pura) di W non composta con le t: $[M, t] = \lambda > 0$; le varietà M e λC (o λF) segano la generica t nello stesso numero di punti e perciò, a norma del ricordato criterio di Severi, sarà su W:

[5] $$M \equiv \lambda C + \mu P + \nu R \equiv \lambda F + \mu' P + \nu' R;$$

---

[1] F. Severi, loc. cit. alla nota 3, pag. 190.

[2] Intersecando i due membri della [4] con l'∞^1 degli E_2 di una curva piana d'ordine n classe m, dotata di c cuspidi e di f flessi, si trova la nota formula di Plücker: $c + 3m = f + 3n$.

e poichè C , P , R (F , P , R) sono indipendenti, si conclude:

Una base (minima) per le V_3 contenente in W consta delle 3 varietà: C , P , R ovvero F , P , R. Se si assumono come elementi della base per le V_3 di W le varietà C , P , R (F , P , R) allora t , $\bar{p}$, $\bar{r}$ (t , p^* , r^*) costituiscono una base duale per le V_1. Si trova in effetto per il discriminante simultaneo:

$$\begin{vmatrix} [C,t] & [P,t] & [R,t] \\ [C,\bar{p}] & [P,\bar{p}] & [R,\bar{p}] \\ [C,\bar{r}] & [P,\bar{r}] & [R,\bar{r}] \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Dalle [4], [5] seguono le:

$$[C,p^*] = [F,\bar{r}] = -3 \quad ; \quad [C,r^*] = [F,\bar{p}] = 3$$
$$(C,C) \equiv 3R^* - 3P^* \quad ; \quad (F,F) \equiv 3\bar{P} - 3\bar{R}$$
$$[M,t] = \lambda\,; \quad [M,p^*] = \mu - 3\lambda = \mu'\,; \quad [M,r^*] = \nu + 3\lambda = \nu'\,;$$
$$[M,\bar{r}] = \nu = \nu' - 3\lambda\,; \quad [M,\bar{p}] = \mu = \mu' + 3\lambda.$$

Le varietà C , F sono, su W, isolate. Nè esistono, su W, altre V_3 isolate: ogni V_3 distinta da C , F è suscettibile di variare in un sistema continuo. Basta osservare che un punto (elemento) della V_3 (fuori di C , F) può esser mutato in un punto qualunque di W (fuori di C , F) con un'omografia del piano.

5. Un modello minimo di W è l'immagine projettiva di un sistema lineare di V_3 appartenenti a W, irriducibile, privo di punti base, semplice, di grado minimo. Per il grado ρ del sistema lineare [5] si trova:

$$\begin{aligned} \rho = [MMMM] = {} & [CCCC]\lambda^4 + [PPPP]\mu^4 + [RRRR]\nu^4 + \\ & + 4\{[CCCP]\lambda^3\mu + [CCCR]\lambda^3\nu + [PPPR]\mu^3\nu + \\ & + [CPPP]\mu^3\lambda + [CRRR]\nu^3\lambda + [RRRP]\nu^3\mu\} + \\ & + 6\{[CCPP]\lambda^2\mu^2 + [PPRR]\mu^2\nu^2 + [RRCC]\nu^2\lambda^2\} + \\ & + 12\{[CCPR]\lambda^2\mu\nu + [CPPR]\lambda\mu^2\nu + [CPRR]\lambda\mu\nu^2\} \end{aligned}$$

con:

$$[CCCP] = [CCCR] = -9 \quad , \quad [CCPP] = 3 \quad [CCRR] = -3$$
$$[CPPR] = [CPRR] = 1\,;$$

gli altri simboli [ ] hanno valore nullo. Si ha pertanto:

$$\begin{aligned} \rho = {} & -36\lambda^3\mu - 36\lambda^3\nu + 18\lambda^2\mu^2 - 18\lambda^2\nu^2 + 12\lambda\mu^2\nu + 12\lambda\mu\nu^2 = \\ & = 6\lambda(\mu+\nu)[-6\lambda^2 + 3\lambda\mu - 3\lambda\nu + 2\mu\nu]. \end{aligned}$$

Sulla varietà immagine projettiva di $|M|$ le $t, p^*, r^*, \bar{r}, \bar{p}$ hanno gli ordini rispettivi $\lambda, \mu - 3\lambda, \nu + 3\lambda, \nu, \mu$. Si avrà pertanto:

$$\lambda \geqq 1 \quad , \quad \mu \geqq 3\lambda + 1 \quad , \quad \nu \geqq 1.$$

Segue, poichè ρ è funzione crescente di μ qualunque sieno λ, ν (positivi):

$$\rho \geqq 6\lambda\,(3\lambda + \nu + 1)\,(3\lambda^2 + 3\lambda + 3\lambda\nu + 2\nu).$$

Il minimo valore di ρ si consegue dunque per:

$$\lambda = 1 \qquad \mu = 4 \qquad \nu = 1$$

in corrispondenza ai quali valori si ottiene:

$$\rho = 330.$$

Quanto alla dimensione del sistema:

$$|M| = |C + 4P + R|$$

si osservi che sulla varietà C il sistema stesso sega il sistema lineare:

$$|(C, C + 4P + R)| = |P^* + 4R^*|$$

la cui dimensione vale $\delta(1, 4) = 34$ (V^i n. 3). D'altra parte il sistema residuo di C rispetto a $|M|$ è il sistema $|4P + R|$, anche di dimensione 34.

Il sistema $|M|$ ha pertanto la dimensione $34 + 34 + 1 = 69$.

Si prova facilmente che $|M|$ è (semplice anzi) privo di gruppi neutri: le M per un punto qualunque A non passano tutte in conseguenza per un secondo punto B. Se A, B appartengono a due t distinte, si consideri una P che passi per A e non per B: una almeno delle varietà $C + 4P + R$, $F + P + 4R$, con R generica, contiene A e non B.

Se poi A, B stanno sulla stessa t e se ogni M per A contenesse B, quella t apparterebbe a tutte le M per A poichè $[M, t] = 1$: quella t presenterebbe *una* condizione alle M. Questo fatto avrebbe allora luogo per ogni t: poichè con un'omografia del piano una t può essere mutata in ogni altra: $|M|$ risulterebbe composto con le t; ciò che non è. Si conclude: *L'immagine projettiva del sistema* $|C + 4P + R|$, *privo di punti base, semplice (e quindi irriducibile), è il modello minimo normale per la varietà W degli elementi del 2° ordine del piano. Tale modello, determinato a meno di trasformazioni omografiche, appartiene ad* S_{69}, *ha l'ordine 330 ed è privo di punti multipli.* Su di esso le omografie e le reciprocità piane sono trasformazioni birazionali che mutano sezioni iperpiane in sezioni iperpiane; dunque omografie dello spazio ambiente.

6. L'effettiva costruzione del modello minimo normale di W si attua in modo semplice e simmetrico ricorrendo ad un sistema di coordinate per gli E_2 introdotto da STUDY e da ENGEL [1]. In questo sistema un E_2 è univocamente determinato dal gruppo di 8 numeri:

$$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad ; \quad u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad ; \quad \sigma , \tau$$

con $(u\,x) = 0$; ove si ritenga che il gruppo precedente e il gruppo:

$$\lambda x_1 \quad \lambda x_2 \quad \lambda x_3 \quad ; \quad \mu u_1 \quad \mu u_2 \quad \mu u_3 \quad ; \quad \mu^3 \nu\sigma , \lambda^3 \nu\tau$$

con λ , μ , ν fattori indipendenti e non nulli, rappresentino un medesimo E_2. Per $\sigma = 0$ l'E_2 è inflessionale, per $\tau = 0$ cuspidale. Se ora si pone:

$$[7] \qquad \begin{aligned} X_{i\,h\,k\,l\,,\,m} &\equiv \sigma x_i\, x_h\, x_k\, x_l\, u_m \\ Y_{i\,h\,k\,l\,,\,m} &\equiv \tau u_i\, u_h\, u_k\, u_l\, x_m \end{aligned} \qquad (ux) = 0$$

ad ogni E_2 corrisponde un sistema di valori per le X , Y definiti a meno di un comune fattore non nullo e, inversamente, quel sistema di valori proviene dal quel solo E_2. Pertanto la varietà luogo del punto di coordinate omogenee X , Y è un modello di W; modello che senza ambiguità può indicarsi ancora con W.

Su W le varietà $C\,(\tau = 0)$, $F\,(\sigma = 0)$ sono i modelli $(4\,,1)$ e $(1\,,4)$ della varietà V degli elementi lineari ($V.^i$ n. 3): hanno l'ordine 60 e appartengono ad S_{34} sghembi. Le 7) pongono fra C , F la corrispondenza birazionale senza eccezioni che associa un E_2 dell'una e un E_2 dell'altra quando hanno una medesima origine. Su $C\,(F)$ le p^* , r^* $(\bar r\,, \bar p)$ sono rispettivamente rette e C^4 razionali normali; le superficie P^* R^* $(\bar R\,, \bar P)$ hanno gli ordini 24, 9 e appartengono a spazi S_{19} , S_{10} rispettivamente.

La corrispondenza birazionale che intercede fra C , F muta le rette dell'una nelle C^4 dell'altra, P^* in $\bar P$, R^* in $\bar R$.

Il modello W consta delle ∞^3 rette (immagini delle t) congiungenti coppie di punti omologhi di C , F: esso appartiene pertanto ad S_{69} ed è *privo di punti multipli*. Determiniamone l'ordine. Si considerino una P^* e la $\bar P$ associata: la varietà luogo delle congiungenti coppie di punti omologhi di P^*, $\bar P$ è una P. Un iperpiano generico per P^* sega $\bar P$ in una C^9 razionale normale appoggiata in 4 punti alla direttrice $\bar p$ e unisecante le $\bar r$ generatrici; a questa C^9 corrisponde in P^* una curva appoggiata in 4 punti alla direttrice rettilinea p^* e unisecante le r^* generatrici: tale curva ha l'ordine 21, come subito appare dalla rappresentazione piana di P^*. La rigata delle congiungenti coppie di punti omologhi delle due curve, d'ordine 30, insieme alla P^* dà una sezione iperpiana di P. Dunque $P\,(R)$ ha l'ordine 54.

---

[1] E. STUDY, loc. cit., pag. 369; F. ENGEL, loc. cit., pag. 27.

Un iperpiano per C sega F in una superficie di $|4\bar{R} + \bar{P}|$ e perciò sega W, fuori di C, in una V_3 di $|4R + P|$ la quale ha l'ordine $5.54 = 270$. L'ordine di W vale pertanto: $270 + 60 = 330$.

Le [7] dànno effettivamente la rappresentazione del modello minimo normale della varietà degli E_2 del piano projettivo.

7. Si è visto che se M è una V_3 appartenente a W ha luogo l'equivalenza:

$$M \equiv \lambda C + \mu P + \nu R$$

Una tale M è immagine, su W, di un'equazione differenziale algebrica del 2° ordine (varietà ∞^3 di E_2). I numeri λ, $\mu - 3\lambda$, ν hanno un semplice significato per il sistema ∞^2 delle corrispondenti curve integrali γ: λ esprime il numero delle γ che contengono un dato elemento lineare; $\mu - 3\lambda$ il numero delle γ che hanno in un dato punto una cuspide; ν il numero delle γ che hanno una data retta come tangente inflessionale. I numeri λ, $\mu - 3\lambda$, ν sono le *caratteristiche* del sistema ∞^2 di curve integrali [1].

Una varietà del sistema lineare $|C + 4P + R|$, la cui immagine projettiva è il modello minimo normale di W, corrisponde ad un'equazione differenziale algebrica del 2° ordine, di caratteristiche 1, 1, 1: equazione che in coordinate di Engel-Study si scrive:

$$\sigma\,(ax)^4\,(ub) + \tau\,(cx)\,(ud)^4 = 0$$
$$(ux) = 0$$

e in coordinate ordinarie $x\ y\ y'\ y''$:

$$y'' = \frac{A\,(xy' - y\,,\,y') + xB\,(xy' - y\,,\,y') + yC\,(xy' - y\,,\,y')}{L\,(x\,,\,y) + M\,(x\,,\,y)\,y' + N\,(x\,,\,y)\,(xy' + y)}$$

con $A\ B \cdots N$ polinomi di 4° grado nei loro argomenti.

Si designi con w una curva piana (analitica) appartenente ad un sistema (analitico) ∞^2 di curve, di caratteristiche 1, 1, 1: il modello minimo normale della varietà degli elementi del 2° ordine del piano si consegue considerando un elemento del 2° ordine come l'insieme delle curve w che lo contengono. La costruzione del modello minimo della varietà degli E_2, così concepita, sembra suggerire la via per la risoluzione del problema generale relativo agli E_n del piano projettivo; su questo argomento spero di tornare in altra occasione.

---

[1] G. H. Halphen, *Sur la recherche des points d'une courbe algébrique plane ...* « Journal de Mathématiques », 2 (1876), pag. 257. *Oeuvres*, Paris (Gauthier-Villars) (1916), 1°, pag. 495.

Matematica (Analisi). — *Su talune serie di funzioni olomorfe* (1). Nota di CARLO MIRANDA, presentata (2) da MAURO PICONE, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

Sia

$$f_0(z), f_1(z), f_2(z), \cdots, f_n(z), \cdots$$

una successione di funzione olomorfe nel cerchio $|z| < R$, *la n–esima delle quali riesca infinitesima di ordine n per* $z = 0$.

Se una funzione $f(z)$, anch'essa olomorfa per $|z| < R$, è sviluppabile in una serie del tipo

$$[1] \qquad f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n(z),$$

uniformemente convergente in un intorno di $z = 0$, le costanti c_n devono ovviamente soddisfare le equazioni:

$$[2] \qquad c_0 = f(0) \quad , \quad \sum_{k=1}^{n} c_k f_k^{(n)}(0) = f^{(n)}(0) \qquad (n = 1, 2, \cdots),$$

le quali forniscono un procedimento ricorrente per calcolarle.

Viceversa, è anche evidente che, *se la serie a secondo membro della* [1] *con i valori delle* c_n *dati dalle* [2], *converge uniformemente in un intorno di* $z = 0$, *essa ha ivi per somma* $f(z)$.

Quando nel seguito noi faremo riferimento alla serie [1] intenderemo sempre che in essa i coefficienti c_n siano quelli forniti dalle [2]; diremo inoltre *dominio di convergenza* della detta serie un dominio T, contenente nel suo interno il punto $z = 0$ e contenuto nel cerchio $|z| \leq R$, tale che la serie stessa sia uniformemente convergente in ogni dominio limitato interno a T e non uniformemente convergente in ogni dominio avente punti comuni col complementare di T sul cerchio $|z| < R$. Al lume delle precedenti considerazioni è ora ben naturale chiedersi sotto quali condizioni per le $f_n(z)$ la serie [1] ammetta un dominio di convergenza e la pre-

(1) Lavoro promosso dall' Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(2) Nell'Adunanza del 21 marzo 1941–XIX.

sente Nota è intesa, appunto, a dare una prima risposta a tale quesito, che mi è stato recentemente proposto dal prof. Mauro Picone.

I risultati ottenuti non possono, per molti aspetti, ritenersi definitivi e il loro interesse sta soprattutto nella estrema semplicità del procedimento di dimostrazione [1].

Essi non sono, peraltro, privi di una certa generalità, giacchè, per esempio, si può da essi dedurre una nuova dimostrazione della sviluppabilità in serie di funzioni di Bessel di ogni funzione olomorfa in un intorno di $z = 0$.

1. Cominciamo con l'introdurre alcune notazioni. Poichè $f_n(z)$ è, per ipotesi, infinitesima di ordine n per $z = 0$, la funzione

$$\varphi_n(z) = \frac{f_n(z)}{z^n}$$

riesce olomorfa nel cerchio $|z| < R$ e, come tale, è sviluppabile in detto cerchio in una serie di potenze che scriveremo:

$$\varphi_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} z^k ,$$

essendo:

$$a_{n0} \neq 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots) .$$

Per ogni $\rho < R$ porremo poi [2]:

$$H_n(\rho) = \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\varphi_n(\rho e^{i\theta})}{a_{n0}} \right|^2 d\theta \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$H(\rho) = \lim_{n \to \infty}{}'' \, H_n(\rho) .$$

---

[1] Un'accurata ricerca bibliografica, svolta durante la correzione delle bozze, mi ha permesso di riscontrare che l'argomento di questa Nota è stato già oggetto di precedenti lavori. Tra questi mi limiterò a citare quelli di D. V. Widder [« Trans. Amer. Math. Soc. » vol. 31 (1929), pag. 43] e S. Takahashi [« Tohoku. Math. Journal », vol. 33 (1930), pag. 48], nei quali si trova una completa bibliografia dei lavori precedenti.

I miei risultati, benchè dello stesso tipo di altri precedenti, non mi sembrano rientrare in nessuno di questi. Ciò sia detto, peraltro, con qualche riserva nei riguardi di un recente lavoro di R. P. Boas jr. [« Trans. Amer. Math. Soc. », vol. 48 (1940), pag. 467], di cui ho potuto avere notizia soltanto attraverso la « Math. Reviews » [vol. 2°, pag. 80] dato che l'indicato volume dei « Transactions » non è giunto in Italia a causa dell'attuale stato di guerra.

[2] Col simbolo lim'' designamo il massimo limite.

Poichè è

$$[3] \qquad H_n(\rho) = \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{a_{nk}}{a_{n0}} \right|^2 \rho^{2k}\right]^{\frac{1}{2}},$$

si ha:

$$H_n(\rho) \geq 1$$

e quindi:

$$[4] \qquad 1 \leq H(\rho) \leq +\infty .$$

Ne segue che, se nell'intervallo $(0 \leq \rho < R)$ è $H(\rho) < +\infty$, per l'estremo superiore r, nello stesso intervallo, della funzione

$$\frac{\rho}{H(\rho)}$$

si ha

$$[5] \qquad r \leq R .$$

Si osservi anche che, essendo per la [3]:

$$[6] \qquad \left| \frac{a_{nk}}{a_{n0}} \right| < \frac{H_n(\rho)}{\rho^k},$$

si ha per $|z| \leq \rho' < \rho$:

$$[7] \qquad |\varphi_n(z)| < |a_{n0}| \frac{\rho H_n(\rho)}{\rho - \rho'} .$$

Infine, per la funzione $f(z)$ che vogliamo sviluppare in serie porremo:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n ,$$

$$K(\rho) = \left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(\rho e^{i\theta})|^2 d\theta\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|^2 \rho^{2n}\right]^{\frac{1}{2}} .$$

2. Dimostriamo ora che:

I. — *Nelle ipotesi poste per le funzioni* $f(z)$ e $f_n(z)$ *e se inoltre è* $H(\rho) < +\infty$, *la serie* [1] *converge uniformemente in ogni dominio limitato contenuto nel cerchio* $|z| < r$.

Per questo osserviamo che, con le notazioni introdotte nel numero precedente, il sistema [2] si scrive:

$$\sum_{k=1}^{n} c_k a_{k,n-k} = b_n , \qquad (n = 0, 1, \cdots),$$

onde si ha:

$$c_n \prod_{k=0}^{n} a_{k0} = \begin{vmatrix} a_{00} & 0 & 0 & 0 & \cdots & b_0 \\ a_{01} & a_{10} & 0 & 0 & \cdots & b_1 \\ a_{02} & a_{11} & a_{20} & 0 & \cdots & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{0,n} & a_{1,n-1} & a_{2,n-2} & a_{3,n-3} & \cdots & b_n \end{vmatrix},$$

o anche:

$$[8] \quad c_n \rho^n \prod_{k=0}^{n} a_{k0} = \begin{vmatrix} a_{00} & 0 & 0 & 0 & \cdots & b_0 \\ a_{01}\rho & a_{10} & 0 & 0 & \cdots & b_1\rho \\ a_{02}\rho^2 & a_{11}\rho & a_{20} & a & \cdots & b_2\rho^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{0n}\rho^n & a_{1,n-1}\rho^{n-1} & a_{2,n-2}\rho^{n-2} & a_{3,n-3}\rho^{n-3} & \cdots & b_n\rho^n \end{vmatrix}.$$

Tenendo presente la nota diseguaglianza relativa ai determinanti:

$$[9] \quad |\,\|\,\alpha_{ij}\,\|\,|^2 \leq \prod_{j=1}^{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} |\,\alpha_{ij}\,|^2,$$

si ricava dalla [8]:

$$[10] \quad |\,c_n\,| \leq \frac{K(\rho)}{|\,a_{n0}\,|\,\rho^n} \prod_{k=0}^{n-1} H_k(\rho).$$

Ciò premesso, sia ρ' un arbitrario numero positivo minore di r, e $\rho < R$ un altro numero positivo, certo esistente, per il quale riesca:

$$[11] \quad \rho' < \frac{\rho}{H(\rho)}.$$

Dalla [4] si deduce $\rho' < \rho$ e quindi per i predetti valori di ρ e ρ' sussistono simultaneamente le [7] e [10].

Ne segue che per $|z| \leq \rho'$ la serie [1] è maggiorata dalla serie:

$$\frac{\rho K(\rho)}{\rho - \rho'} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^n \prod_{k=0}^{n} H_k(\rho),$$

la quale è convergente perchè in essa il rapporto di un termine al precedente ha, in virtù della [11], massimo limite minore di 1.

Resta con ciò dimostrato che la serie [1] converge uniformemente nel cerchio $|z| \leq \rho'$ e quindi anche in ogni dominio limitato contenuto nel cerchio $|z| < r$.

Dal teorema I segue in particolare che:

II. — *Nelle ipotesi poste per le funzioni $f(z)$ e $f_n(z)$ e se inoltre è*

$$[12] \quad H(\rho) = 1,$$

la serie [1] *ha per dominio di convergenza il cerchio $|z| \leq R$.*

Si osservi che, poichè è $H_n(\rho) \geq 1$, la [12] implica che sia:

$$\lim_{n\to\infty} H_n(\rho) = 1.$$

D'altra parte, poichè è, ovviamente, per $k \geq 1$:

$$\left| \frac{a_{nk}}{a_{n0}} \right| \leq \frac{\sqrt{H_n^2(\rho) - 1}}{\rho^k},$$

si ha, per $|z| \leq \rho' < \rho$:

$$\left| \frac{\varphi_n(z)}{a_{n0}} - 1 \right| \leq \frac{\rho' \sqrt{H_n^2(\rho) - 1}}{\rho - \rho'}$$

e quindi, se è soddisfatta la [12], si ha anche:

[13] $$\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi_n(z)}{a_{n0}} = 1$$

uniformemente al variare di z in ogni dominio limitato contenuto nel cerchio $|z| < R$.

Viceversa è poi ovvio che, se la [13] è soddisfatta uniformemente al variare di z in ogni dominio limitato contenuto nel cerchio $|z| < R$, sussiste la [12].

Ricordando l'espressione di $\varphi_n(z)$ possiamo dunque asserire che:

III. — *Condizione necessaria e sufficiente affinchè sussita la* [12] *è che riesca:*

[14] $$\lim_{n\to\infty} \frac{n!\, f_n(z)}{z^n f_n^{(n)}(0)} = 1$$

uniformemente al variare di z in ogni dominio limitato contenuto nel cerchio $|z| < R$.

3. Per illustrare la portata dei risultati ottenuti osserviamo che, detta $J_n(z)$ la funzione di Bessel di ordine n:

$$J_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(n+k)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k},$$

si ha:

$$\left| \frac{n!\, J_n(z)}{z^n J_n^{(n)}(0)} - 1 \right| < \frac{e^{\frac{|z|^2}{4}} - 1}{n+1},$$

per cui, assumendo $f_n(z) = J_n(z)$, la [14] risulta verificata uniformemente al variare di z in ogni dominio limitato. Si trae, pertanto, dai teoremi II e III una nuova dimostrazione della sviluppabilità di una funzione $f(z)$,

olomorfa in un cerchio $|z| < R$, in serie di funzioni di Bessel uniformemente convergente in ogni dominio limitato contenuto nel detto cerchio.

4. Se è $H(\rho) > 1$ il teorema I ci permette soltanto di affermare che la serie [1] converge uniformemente in ogni dominio interno al cerchio $|z| \leq r$. Non si può, peraltro, escludere che il dominio di convergenza della serie [1] sia effettivamente più ampio di tale cerchio o coincida addirittura col cerchio $|z| \leq R$.

Così, per esempio, se si pone:

$$f_n(z) = z^n(1+z),$$

dal teorema I segue la convergenza della serie [1] nel cerchio

$$[15] \qquad |z| < \frac{R}{\sqrt{1+R^2}},$$

laddove è evidente che detta serie ha per dominio di convergenza il cerchio $|z| \leq R$ se è $R \leq 1$, e il cerchio $|z| \leq 1$, se, essendo $R > 1$, la $f(z)$ non si annulla per $z = -1$. Soltanto, dunque, se la $f(z)$ è intera e non nulla per $z = -1$, il dominio di convergenza della [1] si riduce al cerchio [15].

5. L'esempio precedente mostra come, ferma restando l'ipotesi $H(\rho) < +\infty$, la forma e le dimensioni del dominio di convergenza della serie [1] siano strettamente legate alla distribuzione degli zeri delle funzioni $f_n(z)$.

Uno studio approfondito di tale dipendenza sarebbe certamente assai interessante ma esso si presenta, a prima vista, piuttosto difficile.

Anche interessante sarebbe la ricerca di condizioni atte ad assicurare l'esistenza di un dominio di convergenza della serie [1] nel caso in cui sia $H(\rho) = +\infty$. Infatti, in tal caso il detto dominio di convergenza può anche, ove non si introducano ipotesi restrittive, ridursi al solo punto $z = 0$.

Tale circostanza si presenta, ad esempio, per le funzioni

$$f_n(z) = z^n(1+nz),$$

per le quali lo sviluppo [1] converge in un intorno di $z = 0$, solo se in detto intorno l'equazione differenziale

$$[16] \qquad z^2\varphi'(z) + \varphi(z) = f(z)$$

ammette un integrale olomorfo.

Invero, poichè è:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|1+nz|} = 1,$$

una serie del tipo

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n (1 + nz)$$

può convergere uniformemente in un intorno di $z = 0$ solo se riesce:

$$\lim_{n \to \infty}{}'' \sqrt[n]{|c_n|} < +\infty$$

e in tal caso, posto:

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n ,$$

la $\varphi(z)$ e la $f(z)$ risultano legate dalla [16].

6. Le considerazioni svolte nei numeri precedenti mostrano come i teoremi I e II abbiano, per molti aspetti, una portata alquanto limitata.

Presenta, pertanto, un certo interesse la seguente generalizzazione del teorema II che fornisce un criterio di convergenza per la serie [1] in campi non circolari:

IV. — *Sia A un insieme aperto, semplicemente connesso, del piano complesso z, contenente il punto $z = 0$, e*

$$f_0(z), f_1(z), f_2(z), \cdots, f_n(z), \cdots$$

una successione di funzioni olomorfe in A, la n-esima delle quali riesca infinitesima di ordine n per $z = 0$. Se la funzione $w = \varphi(z)$, olomorfa in A, rappresenta conformemente A sul cerchio $|w| < R$, facendo corrispondere i punti $w = 0$ e $z = 0$, e se inoltre riesce:

$$[17] \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{n!\, f_n(z)}{f_n^{(n)}(0)} \left[\frac{\varphi'(0)}{\varphi(z)}\right]^n = 1 ,$$

uniformemente in ogni dominio limitato contenuto in A, la serie [1], *relativa ad una funzione $f(z)$ olomorfa in A, converge uniformemente in ogni dominio limitato contenuto in A.*

Osserviamo, invero, che il nostro teorema sarà pienamente dimostrato se faremo vedere che, detta $z = \psi(w)$ la funzione inversa di $w = \varphi(z)$, e posto:

$$f(\psi(w)) = F(w) \quad , \quad f_n(\psi(w)) = F_n(w) ,$$

la funzione $F(w)$ è suscettibile di uno sviluppo in serie del tipo

$$F(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n F_n(w) ,$$

uniformemente convergente in ogni dominio limitato contenuto nel cerchio $|w| < R$.

Ora, poichè $\psi(w)$ è infinitesima del primo ordine per $w = 0$, $F_n(w)$ risulta infinitesima di ordine n per $w = 0$; per provare il nostro asserto basta quindi far vedere che è:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!\, F_n(w)}{w^n F_n^{(n)}(0)} = 1,$$

uniformemente in ogni dominio limitato contenuto nel cerchio $|w| < R$. E ciò è un'ovvia conseguenza della [17] e dell'identità:

$$\frac{n!\, F_n(w)}{w^n F_n^{(n)}(0)} = \frac{n!\, f_n(\psi(w))}{f_n^{(n)}(0)} \left[\frac{\varphi'(0)}{w}\right]^n.$$

A titolo d'esempio osserviamo che, se A è il sempiano $\Re(z) < \frac{1}{2}$, rappresentando conformemente tale semipiano sul cerchio $|w| < 1$ mediante la formula:

$$w = \frac{z}{z-1}$$

e ponendo:

$$f_n(z) = \frac{J_n(z)}{(z-1)^n},$$

la [17] è senz'altro soddisfatta, onde segue la possibilità di rappresentare ogni funzione $f(z)$, olomorfa per $\Re(z) < \frac{1}{2}$, mediante una serie del tipo

$$\Sigma\, c_n \frac{J_n(z)}{(z-1)^n},$$

uniformemente convergente in ogni dominio limitato contenuto nel predetto semipiano.

Astronomia. — *Fotometria visuale e indici di colore del nucleo della cometa Cunningham* (1940 c). Nota di LUCIO GIALANELLA, presentata (1) da GIUSEPPE ARMELLINI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

1. Questa cometa – la terza del 1940 in ordine di scoperta, ma la prima del 1941 per l'epoca del passaggio al perielio – è stata scoperta fotograficamente la notte del 5 settembre 1940 dall'americano L. E. CUNNINGHAN a Oak Ridge, succursale dell'osservatorio Harvard, mentre era di 13ª grandezza, ed è stata poi ritrovata dallo stesso CUNNINGHAM su una sua lastra del 25 agosto. Le successive osservazioni hanno permesso a MÖLLER (2) di calcolarne un'orbita preliminare che dava come epoca del passaggio al perielio il 16,282 gennaio 1941 e come distanza periclia 0,37 u. a. Quindi l'oggetto – per cui fin da principio si prevedeva un notevole aumento di splendore, insieme con una eccellente situazione in cielo – si mostrava ben promettente per una lunga serie di osservazioni, tanto più importanti in quanto si potevano cominciare assai prima del passaggio al perielio. La cometa è stata subito cercata e seguìta all'Osservatorio di Monte Mario dallo scrivente con l'equatoriale medio di 16 cm., essendo il grande (40 cm.) smontato per la protezione antiarea. Appena possibile, ne ho cominciato le osservazioni fotometriche del nucleo sia in luce normale che nelle luci monocromatiche dei filtri giallo e violetto, per la determinazione dell'indice di colore. La prima osservazione utile a tal fine è stata quella della sera del 31 ottobre, quando la cometa appariva di circa 10^m (nucleo 10^m, 83); le osservazioni si sono poi continuate in tutte le serate serene, che sono state complessivamente 25, fino al 29 dicembre incluso. Esse sono state in generale favorite da un buon tempo, meno che nella seconda settimana di novembre, nella penultima di dicembre, e per tutto gennaio, quando la cometa è stata addirittura inosservabile per oltre 15 sere di seguito. Di poi, il suo rapidissimo moto in declinazione l'ha rapidamente spostata verso le regioni australi del cielo, rendendo impossibile ogni ulteriore osservazione.

---

(1) Nell'Adunanza del 21 marzo 1941-XIX.

(2) « Circolare del *Bureau central des Télégrammes astronomiques* », n. 832.

TABELLA I.

Fotometria visuale del nucleo della cometa Cunningham (1940 c).

Data 1940	*	θ	T. U.	Cfr.		Letture fotometro mm.		Δm	Mag. Nucleo (Harvard)	Medie serali
				*	○	*	○			
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)		(6)		(7)	(8)	(9)
Ottobre 31	1	23^h40^m	20^h07^m	6	8	63,25	37,20	4^m,33	11^m,03	10^m,83
31	2	0 20	20 46	6	8	62,20	34,97	4 ,52	10 ,64	
Novembre 2	3	23 30	20 00	10	10	60,30	35,61	4 ,10	9 ,72	9 ,72
5	3	0 05	20 30	10	10	58,78	31,36	4 ,55	10 ,17	10 ,17
6	3	23 50	20 18	9	10	59,08	34,40	4 ,10	9 ,72	9 ,72
19	4	0 45	20 01	8	10	55,12	34,06	3 ,47	9 ,29	9 ,29
21	4	0 10	19 30	10	10	53,61	35,01	3 ,09	8 ,86	8 ,86
22	4	23 40	19 00	10	10	56,62	39,38	2 ,86	8 ,63	8,63
24	4	0 00	19 18	10	10	58,78	42,29	2 ,73	8 ,50	8 ,50
25	4	23 10	17 58	10	10	56,79	38,50	3 ,04	8 ,81	8 ,81
27	4	23 10	17 57	10	10	60,42	45,77	2 ,43	8 ,20	8 ,20
Dicembre 1	4	23 00	17 45	6	6	60,68	43,20	2 ,91	7 ,77	7 ,71
1	5	23 15	18 00	10	12	55,59	45,40	1 ,69	7 ,46	
4	5	23 25	18 08	11	10	59,16	41,73	2 ,89	7 ,75	7 ,75
8	5	23 55	18 01	5	10	60,98	43,64	2 ,88	7 ,74	7 ,76
8	6	0 10	18 11	5	10	57,86	43,64	2 ,36	7 ,78	
9	5	23 20	17 40	6	12	60,62	43,57	2 ,83	7 ,69	7 ,63
9	6	0 10	17 50	5	12	56,44	43,57	2 ,15	7 ,57	
10	5	23 37	17 28	5	10	59,82	41,33	3 ,06	7 ,92	8 ,00
10	6	0 12	18 03	5	10	57 44	41,33	2 ,67	8 ,09	
13	7	23 55	17 33	10	10	52,39	46,31	1 ,01	6 ,99	6 ,99
15	7	23 53	17 25	7	10	52,26	48,87	0 ,56	6 ,54	6 ,56
15	8	0 10	17 42	7	10	60,61	48,87	1 ,95	6 ,58	
16	8	0 29	18 00	6	8	58,50	48,82	1 ,67	6 ,30	6 ,44
16	7	0 45	18 16	6	8	52,50	48,82	0 ,61	6 ,59	

(*Segue* TABELLA I).

Data 1940	*	θ	T. U.	Cfr.		Letture fotometro mm.		Δm	Mag. Nucleo (Harvard)	Medie serali
				*	○≡	*	○≡			
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)		(6)		(7)	(8)	(9)
17	8	0^h05^m	17^h30^m	8	10	64,77	54,45	$1^m,72$	$6^m,35$	$6^m,22$
17	7	0 20	17 45	5	10	55,20	54,45	0 ,12	6 ,10	
18	7	0 18	17 38	5	12	52,98	53,31	0 ,05	5, 93	6 ,14
18	8	0 35	17 55	5	12	63,78	53,31	1 ,73	6, 36	
19	9	0 32	17 50	8	10	69,42	56,15	2 ,20	5, 98	5 ,98
19	10	0 50	18 08	9	10	55,24	56,15	0 ,15	5, 99	
28	11	0 50	17 30	6	5	65,55	60,36	0 ,86	4, 84	4 ,81
28	12	0 57	17 37	5	5	57,42	60,36	0 ,49	4, 83	
28	13	1 05	17 45	5	5	51,30	60,36	1 ,50	4, 76	
28	12	1 25	18 06	5	5	57,04	60,16	0 ,52	4, 80	4 ,84
28	13	1 35	18 16	5	5	51,86	60,16	1 ,37	4, 89	
29	14	1 15	17 53	5	5	69,30	55,83	2 ,24	5, 04	5 ,04

NOTE ALLA TAB. I. Ott. 31, nebulosità allungata 5′–6′ diametro; nucleo ben distinto, stelliforme. – Nov. 2, appare la coda. – Nov. 5, nella chioma, vicinissimo al nucleo, una stellina di 11^m. – Nov. 6, osservazioni disturbate da nubi. – Nov. 7–18, cielo sempre coperto e piovoso. – Nov. 19, chioma ampia; nucleo distintissimo; coda molto appariscente, diritta. – Nov. 21, nucleo puntiforme, netto come non mai. – Nov. 22, nucleo sempre distinto, manca però del puntino brillante di ieri. – Nov. 24, nucleo brillante, stelliforme, si estingue benissimo. Nucleo visibilmente più azzurro. – Nov. 25, nucleo non brillante e puntiforme come ieri. – Nov. 26, nucleo brillante. – Nov. 27, nucleo grande, coda lunga, diritta. – Nov. 28–30, sempre coperto e piovoso. – Dic. 1, nucleo grande, azzurro. – Dic. 4, 5, 8, osservazioni disturbate da nubi. – Dic. 9, nucleo molto grande, non puntiforme. – Dic. 10, osservazione disturbata da nubi. – Dic. 15, nucleo molto brillante. – Dic. 16, chioma ampia, rotonda, con nucleo ben distinto; coda diritta, sfrangiata; attraverso la chioma ben visibile una stella di 6^m. – Dic. 17, cometa magnifica; nucleo brillantissimo, azzurro, contornato da una grossa testa rotonda; coda diritta, drappeggiata. Dic. 18, coda più lunga e più ampia, sempre diritta. – Dic. 19, la coda si vede distintamente anche col filtro azzurro (v. appresso). – Dic. 20–27, tempo sempre cattivo: pioggia e neve. – Dic. 28, cometa bellissima; nucleo brillante, puntiforme, azzurrissimo come non mai; coda estesa e lunga, diritta. – Dic. 29, osservazione disturbata da nubi. – Dal 30 dic. al 6 gennaio, cielo sempre coperto e piovoso. – Gennaio 7, cercata invano la cometa dopo il tramonto del sole; declinazione australe; tramonta presto.

I. – Grandezze visuali del nucleo.

2. La cometa di Cunningham ha presentato fin dalle prime sere susseguenti la sua scoperta una condensazione centrale nettamente distinta, nella quale assai spesso, e sempre più visibilmente mano a mano che la cometa stessa si avvicinava alla Terra e al Sole, appariva nitidamente un nucleo puntiforme, a volte assai lucido e brillante, di apparenza del tutto stellare. Di questo nucleo io ho eseguito le misure fotometriche visuali e le determinazioni di indice di colore, di cui dò conto in questa Nota. Di solito esso si estingueva sotto il cuneo del fotometro a guisa di stella, colla medesima facilità e col medesimo ordine di precisione; soltanto in qualche serata esso non è apparso nettamente distinto rispetto al resto della chioma: in tali casi le misure sono state fatte puntando la regione più luminosa della chioma stessa.

Come ho detto avanti, lo strumento adoperato è stato l'equatoriale rifrattore Cauchoix–Cavignato di mm. 155 di apertura e 2240 di distanza focale, a cui – come sempre nelle mie precedenti osservazioni fotometriche di varî oggetti celesti e nelle determinazioni di indici di colore – era applicato un fotometro di Toepfer, del quale la costante del cuneo ha il va ore di 0^m, 166, già precedentemente e sicuramente determinato (1).

La cometa, tranne che nelle ultime serate, è stata osservata alta sull'orizzonte; così pure le stelle di confronto, che, del resto, sono state sempre scelte nelle immediate vicinanze della cometa stessa (la distanza ha raggiunto al più un grado) onde evitare errori dovuti alla estinzione atmosferica differenziale. Data la posizione della cometa nel primo periodo di osservazione – in piena Via Lattea – e il gran numero di stelle del fondo, ho preferito scegliere per il confronto stelle abbastanza brillanti (6^m circa) per essere ben sicuro della identificazione e delle grandezze delle stelle di paragone. I confronti della luminosità integrale del nucleo sono stati sempre fatti con un'immagine *extra–focale* della stella di paragone, ricoprente all'incirca la medesima area del nucleo stesso. Generalmente queste osservazioni sono state fatte in serate limpide e serene, approfittando – tuttavia – di tutte le serate buone, data la stagione invernale in cui la cometa è apparsa. Per questa ragione, non ho tralasciato le osservazioni anche nelle serate di luna, a meno che la luna non fosse proprio nelle vicinanze della cometa. Mi pare, dall'esame dei risultati ottenuti, che il chiarore lunare, in questo caso, non influisca sulle misure fotometriche sia in

(1) « Rendic. R. Accademia Naz. dei Lincei », vol. XIV (1931).

luce normale, che in luce monocromatica (per le determinazioni di indice di colore). Del resto, a conclusioni simili erano già pervenuti anche precedenti Autori [1].

3. Nella tabella I ho raccolto i risultati delle mie osservazioni; le singole colonne contengono:(1) Data; (2) stella di confronto adoperata; (3) tempo siderale locale all'istante medio dell'osservazione; (4) T. U. corrispondente; (5) numero dei confronti della stella e della cometa; (6) medie delle letture della scala del fotometro; (7) differenza delle grandezze; (8) grandezza apparente del nucleo; (9) medie serali concluse.

4. La tabella II contiene l'elenco delle stelle adoperate per i confronti. Le grandezze sono nella scala di Harvard (R. H. P.).

Tabella II.

Stelle di confronto.

Num.	*	Mag.	Sp.	Num.	*	Mag.	Sp.
1	Boss Gen. Cat. 26653	$6^m,70$	Ao	8	α Vulpeculae	$4,^m63$	Ma
2	Boss. Gen. Cat. 26454	6 ,12	Ao	9	δ Sagittae	3, 78	Mo
3	Boss Gen. Cat. 27492	5 ,62	B2	10	Boss Gen. Cat. 26530	6, 14	G5
4	19 Lyrae	5 ,77	Ao	11	ε Delphini	3, 98	B5
5	2 Cygni	4 ,86	B3	12	χ Aquilae	5, 32	F3
6	9 Cygni	5 ,42	F5 + Ao	13	46 Aquilae	6, 26	B9
7	8 Vulpeculae	5 ,98	Ko	14	γ Aquilae	2, 80	K2

5. I valori delle medie serali (tab. I, colonna (9)) sono stati riportati in grafico nella figura 1 (in basso). È ben visibile il continuo incremento della luminosità apparente del nucleo della cometa al suo avvicinarsi alla Terra o al Sole; ma sono altrettanto evidenti le improvvise variazioni di splendore dovute a rapido aumento o estinzione della luce nucleare.

---

[1] Cfr., per es., A. Bemporad, *Misure fotometriche del Nucleo della Cometa Halley*, « Memorie della Società Spettroscopisti Italiani », vol. XL (1911).

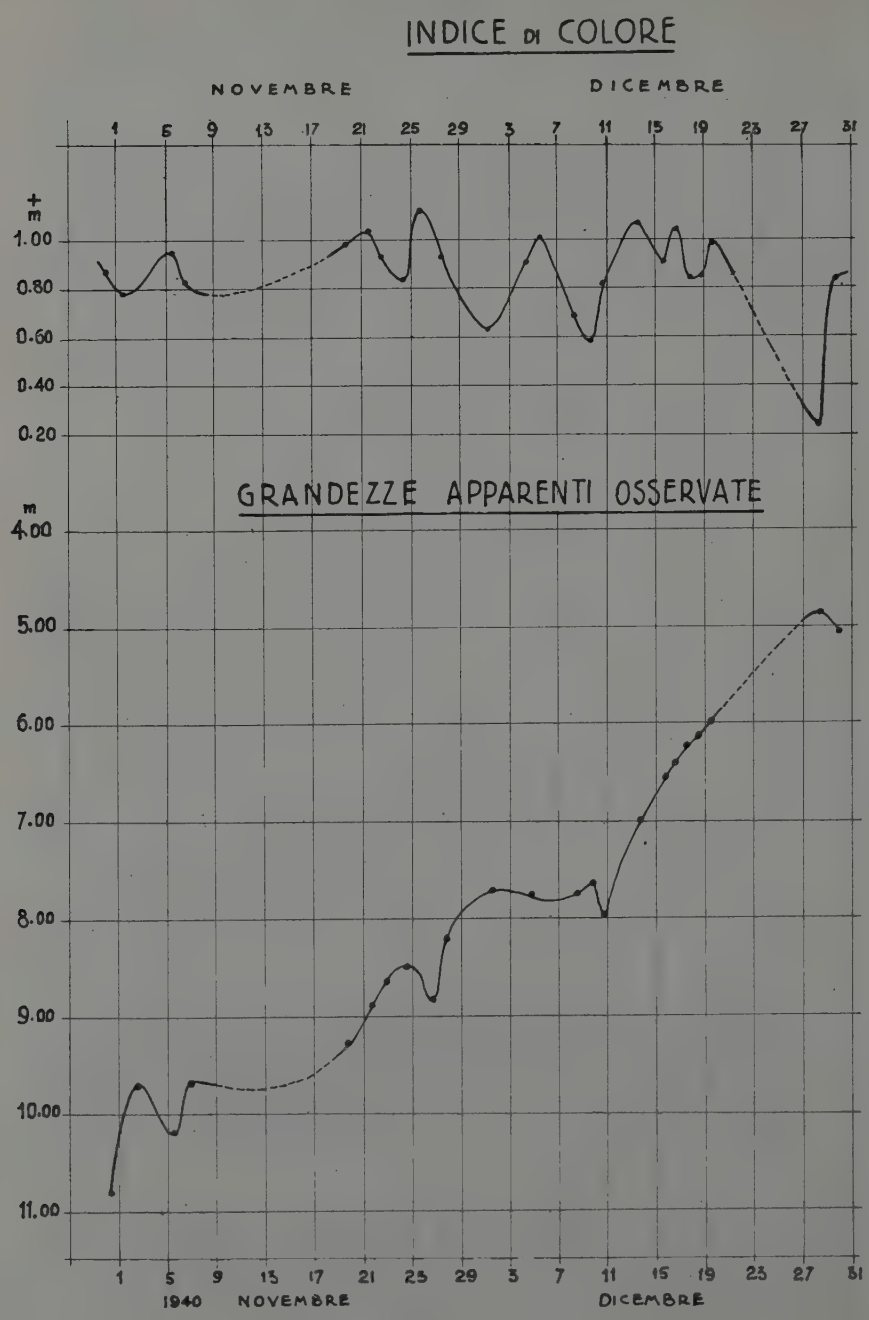

INDICE DI COLORE
NOVEMBRE
DICEMBRE
1 5 9 13 17 21 25 29 3 7 11 15 19 23 27 31
+ m
1.00
0.80
0.60
0.40
0.20
GRANDEZZE APPARENTI OSSERVATE
m
4.00
5.00
6.00
7.00
8.00
9.00
10.00
11.00
1 5 9 13 17 21 25 29 3 7 11 15 19 23 27 31
1940 NOVEMBRE
DICEMBRE

Fig. 1.

Per diminuire gli effetti degli errori accidentali, ho proceduto ad una *perequazione* dei valori bruti forniti dalle osservazioni serali, riunendo in media a tre a tre (o a due a due, in qualche caso) i risultati delle singole sere, ed ottenendo, per le date scritte nella 1ª colonna della tabella III, le *grandezze perequate* m_p del nucleo della cometa, grandezze che sono riportate nella colonna (6) della medesima tabella. Dall'effemeride della cometa, calcolata da MOLLER [1] ho dedotto i valori delle distanze r dal Sole e Δ dalla Terra, per ognuna delle corrispondenti date; questi valori sono riportat nelle colonne (2) e (3). Con essi ho calcolato le *grandezze teoriche* M_1 e M_2:

$$[1] \qquad M_1 = m_0 + 5 \log (r\,\Delta) \qquad \text{e} \qquad M_2 = m_0 + 5 \log (r^2\,\Delta)$$

che si sarebbero osservate qualora valessero, per le variazioni delle intensità luminose del nucleo cometario in dipendenza delle variazioni della sua distanza dal Sole e dalla Terra, rispettivamente le leggi:

$$[2] \qquad i = \frac{k}{r^2\,\Delta^2} \qquad \text{e} \qquad i = \frac{k}{r^4\,\Delta^2}\,.$$

TABELLA III.

Data 1940 (T. U.) (1)		Quantità calcolate				Quantità osservate		
		r (2)	Δ (3)	M_1 (4)	M_2 (5)	m_p (6)	I (7)	I' (8)
Novembre	1,83	1,652	1,376	$10^m,27$	$10^m,27$	$10^m,27$	0,0002	0,0004
	6,35	1,562	1,340	10 ,08	9, 97	9 ,95	3	5
	19,83	1,365	1,251	9 ,65	9 ,22	9 ,29	5	8
	22,30	1,320	1,226	9 ,53	9 ,05	8 ,75	8	12
	26,10	1,251	1,171	9 ,30	8 ,71	8 ,30	12	17
Dicembre	3,25	1,118	1,111	8 ,95	8 ,11	7 ,73	20	25
	10,74	0,975	1,015	8 ,41	7 ,33	7 ,59	23	24
	16,25	0,867	0,938	8 ,02	6 ,63	6 ,50	63	56
	18,74	0,817	0,901	7 ,83	6 ,29	6 ,11	90	73
	29,25	0,608	0,731	6 ,51	4 ,55	4 ,89	278	152

[1] « Circolari del *Bureau Central des Télégrammes astronomiques* », n. 830 e 832.

6. Con i valori delle colonne (6), (4) e (5) di questa tabella ho costruito i diagrammi della fig. 2; la curva I a tratto grosso rappresenta le grandezze osservate (perequate); le II e III a tratto più sottile le curve delle grandezze teoriche corrispondenti alle due leggi scelte. Naturalmente, poichè il punto iniziale di queste due ultime è arbitrario, ciascuna di esse può immaginarsi spostata parallelamente all'asse delle ordinate. In figura,

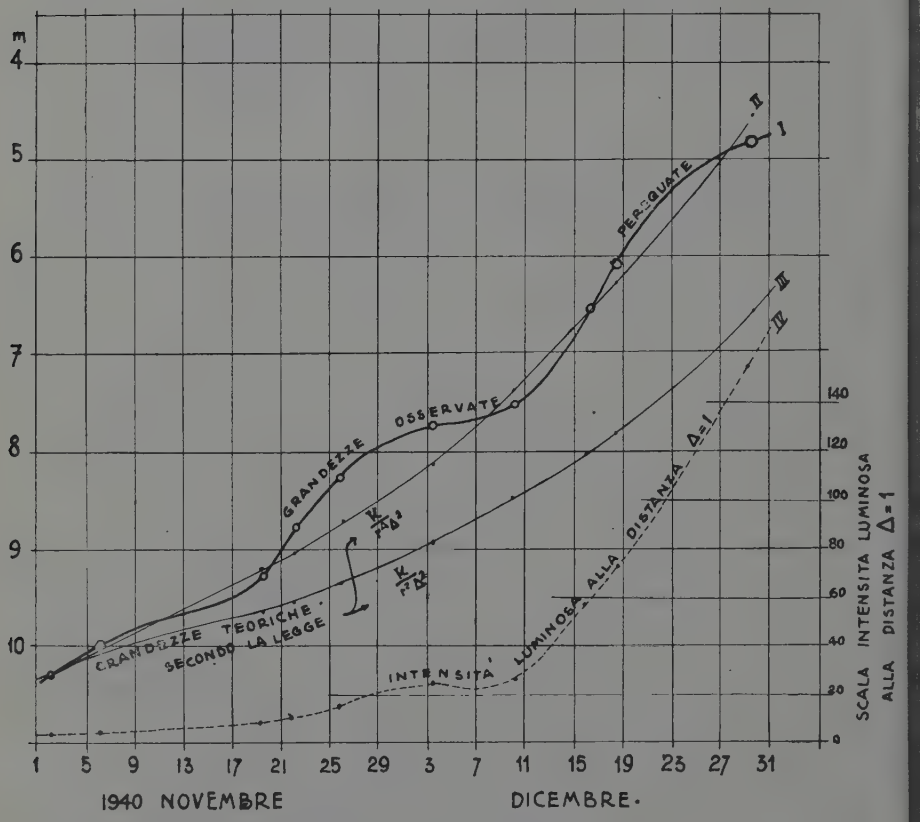


Fig. 2.

esse sono state tracciate facendole partire dallo stesso punto iniziale corrispondente al valore della prima osservazione (compensata) del Nov. 1,83. Per esso corrispondono rispettivamente i valori di m_0 delle formule [1]:

$$m_0 = 8^m,48 \qquad \text{per } M_1$$

$$m_0 = 7^m,40 \qquad \text{per } M_2.$$

Nella *curva perequata* sono ben distinte e appariscenti delle ondulazioni, potendosi, nel periodo delle mie osservazioni, contare distintamente tre onde. Confrontando questa curva con quelle teoriche secondo le leggi $\frac{k}{r^2\Delta^2}$ e $\frac{k}{r^4\Delta^2}$, risulta evidente – anche al primo esame – l'aderenza della curva dedotta da quest'ultima legge con quella delle osservazioni dirette, quando in questa si trascurino le sopradette ondulazioni sinusoidali, che si debbono imputare a periodiche emissioni di getti luminosi dal nucleo cometario e successive estinzioni. Si può dire, anzi, che la curva sinusoidale sembra avvolgersi intorno alla curva delle grandezze teoriche corrispondenti alla legge $\frac{k}{r^4\Delta^2}$, la quale – se convenientemente spostata in ordinata – può pertanto assumersi come *asse* della curva sinusoidale delle osservazioni. Possiamo anche aggiungere che in questa cometa da me osservata la somiglianza della curva delle osservazioni con quella teorica dedotta dalla legge $\frac{k}{r^4\Delta^2}$ è più evidente che non in precedenti esami di altre comete [1], per le quali pure i rispettivi Autori si sono mostrati decisamente favorevoli alla legge in parola.

In conclusione, quindi, dalle presenti osservazioni risulterebbe provato – come mai finora, e per lo meno per il periodo precedente il passaggio della cometa al perielio – che l'intensità del nucleo aumenta, coll'avvicinarsi della cometa stessa al Sole, molto più rapidamente di quanto sarebbe aumentata la sola *illuminazione* (per parte del Sole) del nucleo, supposto dotato di potere riflettente. Laonde il nucleo sarebbe dotato di luce propria, la cui intensità luminosa varierebbe in ragione della quarta potenza della distanza dal Sole. Inoltre, a questa variazione continua si sovrappongono delle ondulazioni di carattere sinusoidale (periodico: con periodo dell'ordine di una ventina di giorni, o poco più, nella cometa da me esaminata), dovute – come dicevamo – alla emissione di getti di materia nucleare e susseguenti estinzioni. Si potrebbe pensare anche ad effetti di fase; ma questa ipotesi sembra piuttosto da scartarsi. Ugualmente poco probabile è anche l'ipotesi che le successive periodiche estinzioni (del resto non troppo visibili in questa cometa) siano dovute ad assorbimento della luce del nucleo da parte della chioma e della coda. Tuttavia non è da escludere che tutte queste cause concorrano insieme nel produrre le osservate variazioni periodiche di luminosità del nucleo.

---

[1] *Cometa di Halley* [osservazioni di A. Bemporad, « Astronomische Nachrichten », band 187 (1911) e « Memorie Società Spettroscopisti Italiani », vol. XL (1911)]; *Cometa di Gale* (1912 *a*), [osservazioni di G. Silva, « Astron. Nachr. », bd. 200 (1914)].

7. Possiamo, infine, calcolare le *intensità luminose apparenti* I del nucleo mediante la formula:

[3] $$\log I = (1 - m) \cdot 0{,}4$$

che notoriamente lega le grandezze stellari apparenti m con le corrispondenti intensità luminose (qui si è preso per unità l'intensità luminosa delle stelle di 1ª grandezza). Possiamo, poi, ridurre queste intensità alla distanza unitaria dalla Terra ($\Delta = 1$), moltiplicandole per Δ^2, ossia prendendo:

[4] $$I' = I \cdot \Delta^2$$

e quindi:

[5] $$\log I' = (1 - m) \cdot 0{,}4 + 2 \log \Delta = \log I + 2 \log \Delta .$$

I valori di I e di I' così ottenuti sono riportati nelle ultime due colonne della Tabella III. Le intensità luminose alla distanza geocentrica unitaria I' sono state anche rappresentate in grafico nella fig. 2 (curva tratteggiata in basso, di cui la scala è evidentemente arbitraria).

II. Indici di colore del nucleo.

1. Le determinazioni dell'indice di colore del nucleo della cometa Cunningham e delle sue variazioni al variare delle distanze eliocentriche e geocentriche della cometa stessa, sono state da me eseguite applicando al fotometro Toepfer due filtri di luce (*giallo*, circa $\lambda = 6000$ A e *violetto*, circa $\lambda = 4000$ A), già precedentemente tarati sia con osservazioni astronomiche di indice di colore noto e sia con esami di laboratorio. I metodi di osservazione e di riduzione sono stati già altre volte da me descritti [1], e rimandiamo per questo alle memorie citate. I risultati delle mie osservazioni presenti sono riportati nella Tabella IV, le cui colonne hanno le significazioni: (1) Data; (2) lettura in mm. col filtro giallo; (3) lettura in mm. col filtro violetto; (4) differenza delle due precedenti letture; (5) valori del rapporto $K = \frac{c}{L_G - L_v}$, dedotto dalle stelle di confronto riportate nella tab. III della mia citata Memoria sugli indici di colore di ammassi stellari; (6) numeri delle corrispondenti stelle adoperate per la deduzione del detto rapporto K; (7) indici di colore conclusi.

---

[1] L. Gialanella, *Indice di colore del pianeta Urano. Osservazioni fotometriche e indice di colore del nucleo della cometa Kozik-Peltier* (1939 a). « Rend. Lincei » (1939); L. Gialanella, *Indici di colore di ammassi globulari e nebulose, e ricerche sull'assorbimento della luce nello spazio interstellare.* « Rend. fisici R. Accademia d'Italia » (1940-41).

TABELLA IV.

Indici di colore del nucleo della cometa Cunningham.

Data 1940 (1)	L_G ( )	L_V (2)	$L_G - L_V$ (3)	K (5)	Stelle di confronto (6)	c (7)
Ottobre 31	28,48	25,24	3,24	$0^m,269$	8–9–10–11–12–13–14–16–17	$+0^m,87$
Nov. 2	27,18	24,21	2,97	0 ,263	7–8–9–10–11–12	+0 ,78
5	26,73	23,26	3,47	0 ,273	11–12–13–16	+0 ,95
6	26,50	23,40	3,10	0 ,269	8–9–10–11–12–13–14–16–17	+0 ,83
19	23,26	19,67	3,59	0 ,274	11–12–13–16–17	+0 ,98
21	29,10	25,06	4,04	0 ,255	14–17	+1 ,03
22	31,46	28,02	3,44	0 ,273	11–12–13–16	+0 ,94
24	32,64	29,56	3,08	0 ,269	8–9–10–11–12–13–14–16–17	+0 ,83
25	33,82	29,30	4,52	0 ,250	14–15–16–17–18	+1 ,13
26	34,93	32,23	2,70	0 ,253	6–7–8–9–10	+0 ,68
27	37,93	34,53	3,40	0 ,273	11–12–13–16	+0, 93
Dic. 1	38,62	35,03	2,59	0 ,237	6–7–9	+0 ,62
4	34,90	31,60	3,30	0 ,273	11–12–13–16	+0 ,90
5	36,91	33,15	3,76	0 ,268	11–12–16–17	+1 ,01
8	36,08	33,35	2,73	0 ,253	6–7–8–9–10	+0 ,69
9	37,88	35,42	2,46	0 ,235	5–6–7–8–9	+0 ,58
10	39,06	36,01	3,05	0 ,269	8–9–10–11–12–13–14–16–17	+0 ,82
13	39,44	35,16	4,28	0 ,250	14–15–16–17–18	+1 ,07
15	41,58	38,27	3,31	0 ,273	11–12–13–16	+0 ,90
16	43,27	39,17	4,10	0 ,255	14–17	+1 ,04
17	48,33	45,25	3,08	0 ,269	8–9–10–11–12–13–14–16–17	+0 ,83
18	48,36	45,24	3,12	0 ,269	8–9–10–11–12–13–14–16–17	+0 ,84
19	49,48	45,80	3,68	0 ,268	11–12–16–17	+0 ,99
28	54,37	52,42	1,95	0 ,113	3–5–6	+0 ,27
29	46,26	43,15	3,11	0 ,269	8–9–10–11–12–13–14–16–17	+0 ,84

NOTE ALLA TAB. IV. – Nov. 6, osservazione molto difficile: col filtro violetto la cometa è quasi al limite della visibilità. – Nov. 21, nucleo brillante, puntiforme. – Nov. 22, nucleo più diffuso di ieri. – Nov. 25, nucleo ancora meno brillante e puntiforme. – Nov. 26, osservatore stanco; da scartare. – Dic. 1, nucleo visibilmente più azzurro delle sere precedenti; non puntiforme. – Dic. 4, nucleo meno azzurro. – Dic. 8 e 9, chiarore lunare. – Dic. 13, nucleo visibilmente meno azzurro; forte chiarore lunare. – Dic. 15, nucleo brillante. – Dic. 17, nucleo brillantissimo, azzurro. – Dic. 19, nucleo visibilmente arrossato. – Dic. 28, nucleo brillante, puntiforme, azzurrissimo. – Dic. 29, osservazioni ostacolate da nubi; nucleo visibilmente meno azzurro e meno brillante, non puntiforme.

Aggiungiamo, per chiarezza, che la scala degli indici di colore adoperati corrisponde sensibilmente a quella cosidetta « di Harvard » o « internazionale ». Precisamente, l'equazione di colore del nostro sistema è:

$$gKo - Ao = 1^{m},30 \qquad \text{(per le stelle giganti)}.$$

In ogni serata sono state fatte generalmente due serie di osservazioni di almeno 10 puntate per ognuno dei due filtri, con un qualche intervallo di tempo dall'una serie all'altra (di solito prima e dopo l'osservazione in luce normale), per eliminare dalle medie le eventuali imponderabili variazioni dell'assorbimento selettivo dell'atmosfera terrestre. I valori conclusi nella colonna [7] sono le medie serali. L'epoca media delle osservazioni è all'incirca la stessa di quella delle precedenti osservazioni fotometriche in luce normale.

2. I valori conclusi nella colonna (7) sono stati riportati in grafico nella figura 1 (in alto). Sono evidenti rapide variazioni e fluttuazioni del colore del nucleo cometario, variazioni e fluttuazioni che debbono considerarsi *reali*, poichè, anche le più piccole, sono superiori agli errori medî di osservazione. Allo scopo, anzi, di lasciare evidenti queste oscillazioni, non ho fatto nessuna compensazione o perequazione delle singole osservazioni serali [1], ed ho presentato insieme le due curve delle grandezze apparenti (in luce normale) e degli indici di colore allo scopo di mettere meglio in evidenza le eventuali correlazioni tra gli incrementi e le estinzioni della luce normale del nucleo con le variazioni del suo indice di colore. Benchè la legge non abbia carattere di generalità, mi sembra di aver rilevato che quanto più il nucleo è brillante e puntiforme, tanto più esso appare azzurro, mentre si arrossa quanto è più diffuso. Aggiungiamo che annotazioni di questo genere trovo anche nel registro delle mie osservazioni serali. Invece, dall'esame della curva non si mostra nessun andamento regolare e sensibile in diminuzione o in crescita.

Determinazioni di indici di colore di comete non se ne hanno molte precedentemente. Io stesso ho eseguito delle misure di indice di colore del nucleo della cometa Kozik–Peltier (1939 *a*) per un periodo di 14 giorni dopo il passaggio al perielio, mostrando come in quel caso l'indice di colore è andato continuamente *diminuendo* dopo il passaggio al perielio. Una cosa contraria era stata invece notata da P. Kulikovsky [2] per la cometa Peltier–Whipple (1932 *k*); il quale, riportando le determinazioni di

---

[1] Una cosa del tutto analoga avevano fatto per le loro misure fotoelettriche del colore della *Nova Aquilae* 1918 P. Guthnick e P. Hingeler [cfr. « Astron. Nachr. », Bd. 210 (1919)].

[2] « Russian Astronomical Journal », vol. XIV (1937), pag. 497.

N. FLORJA e B. KUKARKIN [1], ottenute dal confronto di osservazioni simultanee visuali e fotografiche, concludeva con un *arrossamento* dopo il passaggio al perielio.

L'attuale mia serie di osservazioni mi sembra sia la più lunga e continua finora ottenuta; purtroppo il rapido abbassarsi della cometa verso declinazioni australi mi ha impedito di completarla con le epoche intorno e dopo il perielio, quando probabilmente si sarebbero osservati i più importanti fenomeni.

Prima di finire, aggiungiamo che all'osservatorio di Stoccolma [2] sono state eseguite osservazioni spettrografiche e di polarizzazione di questa cometa nei giorni 26 nov., 13, 14, 17, 19 dicembre, mettendo in evidenza una distinta polarizzazione della luce fotografica totale della testa della cometa, dovuta prevalentemente a bande di emissione di C_2. Gli effetti osservati sono probabilmente dovuti a fluorescenza; sicchè le bande di C_2 di questa cometa forniscono un nuovo esempio di emissione di luce polarizzata da gas fluorescenti, alla stessa maniera che si ottiene in laboratorio dalla bande del potassio e del sodio. È interessante notare che alle date di queste osservazioni polarigrafiche, l'indice di colore del nucleo si è mantenuto sempre intorno ai valori $+ 0^m,85$ $+ 0^m,90$. Altre osservazioni spettrografiche di questa cometa sono state fatte ad Arcetri–Firenze e all'osservatorio Mc Donald in America; delle prime non è stato pubblicato ancora niente; le seconde, eseguite con ottica di quarzo, hanno permesso la identificazione dei due gruppi NH e OH (λ 3360 e λ 3090), che verrebbero così ad aggiungersi alle cinque molecole precedentemente osservate nelle comete: CN, C_2, CH, CO^+, N_2^+. [3].

---

[1] « Circ. Osservatorio di Tashkent », n. 3 e 6 (1932).

[2] « Circ. *Bureau Central des Télégrammes Astronomiques* », n. 839 (1941).

[3] « Circ. *Bureau Central des Télégrammes Astronomiques* », n. 852 (1941).

Fisica. — *Sulle componenti dura e molle della radiazione cosmica fino alla profondità di 575 m. di acqua equivalente* (1). Nota di CARLO BALLARIO, MICHELE DELLA CORTE e MARIO PROSPERI, presentata (2) da LAURETO TIERI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

Allo scopo di studiare il comportamento della componente penetrante della radiazione cosmica nella interazione con la materia, e dedurne quindi informazioni circa la sua natura ed il suo spettro di energia, sono state eseguite ricerche sotto forti spessori di materia (roccia, acqua).

In tali ricerche si è studiato, in funzione dello spessore di materia attraversato, l'assorbimento dei corpuscoli penetranti, l'andamento della componente molle rispetto a quello dei corpuscoli penetranti, ed infine gli sciami in equilibrio o meno con tali corpuscoli. I lavori di CLAY, CORLIN, WILSON, BARNOTHY e FORRÒ (1-5) e più recentemente di P. H. CLAY, A v. GEMERT e J. CLAY e di J. CLAY e A. v. GEMERT (6-7) hanno dimostrato che nella curva di assorbimento della radiazione cosmica si nota un apprezzabile cambiamento del coefficiente di assorbimento dei raggi in esame per un valore dello strato assorbente di circa 250 metri di acqua equivalente; inoltre si è visto che la componente molle presente alle diverse profondità aumenta generalmente fino a circa 400 metri di acqua equivalente per poi diminuire lentamente. Si è cercato di mettere in relazione la variazione del coefficiente di assorbimento e l'andamento della percentuale di molle rispetto alla dura; per questo si è pensato: 1° che i raggi ionizzanti più penetranti potessero dare luogo ad una diversa percentuale di molle o per il variare della loro energia media, e quindi del tipo di processo di generazione dei secondari, o perchè la parte penetrante della radiazione cosmica è costituita da componenti ionizzanti di diversa natura e di diversa penetrazione; 2° che vi fosse un agente non ionizzante di alta penetrazione che generasse una componente molle che si somma con la componente molle in equilibrio con la dura ionizzante; 3° che le caratteristiche geometriche della produzione della componente molle da parte della dura ionizzante fossero tali da

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisica della R. Università di Firenze (Arcetri).

(2) Nell'Adunanza del 21 marzo 1941-XIX.

poter influenzare le misure fatte con contatori e che le caratteristiche stesse variassero con la profondità (e quindi con l'energia della componente dura). Il fatto però che misure eseguite con telescopi di contatori assai diversi e misure fatte con camere di ionizzazione (6) concordano sufficientemente bene, ci porta a credere che quest'ultima ipotesi non possa sussistere come *unica* ipotesi.

Per completare i dati sperimentali attualmente in nostro possesso e per provare in particolare la consistenza delle due prime ipotesi, occorre evidentemente poter sapere quale sia l'andamento della molle in equilibrio con la dura rispetto alla dura stessa. È inoltre indispensabile, a causa della terza ipotesi, lavorare in condizioni tali che, per le misure alle diverse profondità, ci si trovi nelle stesse condizioni geometriche

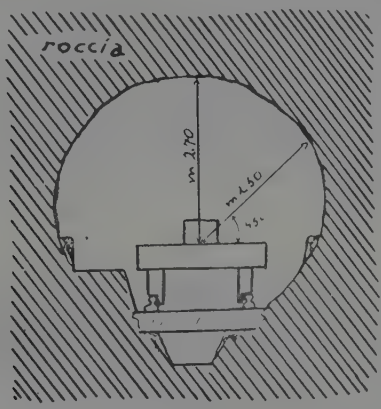


Fig. 1.

sperimentali. Si è immaginato quindi un'esperienza sotto roccia in ambiente tale da mantenere costante la posizione del telescopio di contatori rispetto alla roccia circostante ed in condizioni tali da poter alternare facilmente e rapidamente le misure alle diverse profondità, per avere così una maggiore garanzia sulla attendibilità dei risultati (10). La disposizione dei contatori nel telescopio è stata studiata in modo tale da darci l'andamento dei secondari in equilibrio con la componente dura rispetto alla dura stessa e di ripetere inoltre, per una più sicura discussione ed interpretazione, le misure, già fatte da altri, di totale/dura.

Descrizione dell'esperienza.

Si prestava ottimamente per condurre l'esperienza suddetta uno dei pozzi di aereazione della Grande Galleria dell'Appennino (altezza dell'imboccatura 600 metri s. l. m., latitutine circa 43°), pozzo che pre-

senta una inclinazione sull'orizzontale di 27°, ha una luce costante della forma e dimensioni indicate in fig. 1 ed è servito da un carrello che poteva portare tutta l'apparecchiatura sperimentale (figure 2 e 3): ed è appunto

Fig 2.

Fig. 3.

in tale pozzo che abbiamo installato una stazione mobile per la ricerca di cui sopra. La roccia sovrastante era costituita da marne e schisti argillosi di peso specifico medio 2,5. Il telescopio di contatori era formato da tre gruppi di due contatori posti in parallelo e disposti come in figura 4.

Le caratteristiche dei contatori erano le seguenti: lunghezza utile cm. 65, diametro cm. 5,8, parete di ottone dello spessore di cm. 0,1, involucro di vetro dello spessore di cm. 0,1, riempimento in elio ed alcool alle pressioni rispettive di 9 ed 1 cm. Hg. I pianerottoli avevano una lunghezza media di 150 V. ed il numero di impulsi singoli misurato in fondo al pozzo (900 metri di acqua equivalente) era di circa 500 al minuto.

Nella posizione A (fig. 4) si contano le triple senza o con cm. 8,5 di Pb interposto tra il secondo e il terzo gruppo e quindi rispettivamente il numero totale dei corpuscoli ed il numero dei corpuscoli penetranti; nella posizione B venivano contate le triple dovute ad un corpuscolo penetrante accompagnato da uno o più corpuscoli in equilibrio (1).

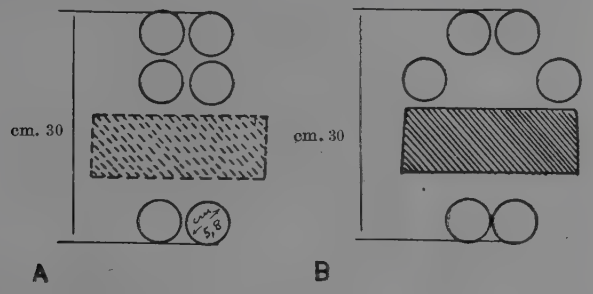


Fig. 4.

Con questa disposizione si può evidentemente osservare la percentuale di molle in stretto equilibrio con la dura supponendo che la probabilità di osservare un corpuscolo molle in equilibrio con la dura sia proporzionale al numero dei corpuscoli generati dalla dura stessa. Dobbiamo notare però che una variazione delle caratteristiche geometriche della generazione dei secondari può influenzare detta proporzionalità.

La registrazione usata è del tipo Neher–Harper con un potere risolutivo di $7 \cdot 10^{-5}$ sec. completamente alimentata in continua.

Tutto l'apparato è stato montato in un cassone (fig. 5) schermato elettrostaticamente ed isolato termicamente dall'ambiente esterno, mantenuto ad una temperatura costante superiore a quella esterna per evitare l'influenza della forte umidità. Tutto il montaggio era ampiamente molleggiato per poter spostare la stazione lungo il pozzo senza che l'apparato subisse sollecitazioni meccaniche.

Oltre ai normali controlli, il regolare funzionamento e l'attendibilità delle misure venivano garantiti dal frequente alternarsi (ogni 6–7 ore)

(1) Noi chiamiamo le misure fatte con la disposizione B, misure di coerente.

delle profondità sotto roccia della stazione e delle disposizioni A (con o senza Pb) e B (ogni 1-2 ore). Effettivamente gli scarti delle misure dal valore medio erano assai piccoli e compresi nelle fluttuazioni statistiche.

In tabella sono riportati i valori ottenuti con le varie disposizioni ed i relativi errori medi statistici.

Sarebbe stato desiderabile prolungare ulteriormente le misure per ridurre ancor più gli errori statistici, ma per ragioni indipendenti dalla nostra volontà, ciò non è stato possibile; ad ogni modo, dai dati rac-

Fig. 5.

colti, si possono trarre certamente deduzioni di carattere qualitativo e, come vedremo, in piccola parte di carattere quantitativo.

I dati della tabella sono stati riportati in scala logaritmica per ciò che riguarda l'assorbimento con la disposizione A con piombo e B (fig. 6) ed in scala proporzionale per il rapporto totale/dura (fig. 7), che differisce dell'unità dal rapporto molle/dura, e (fig. 8) per il rapporto coerente/dura.

Non si è ritenuto opportuno correggere le misure dal contributo degli sciami laterali per il fatto che tale correzione, oltre ad essere difficilmente realizzabile, ci appariva *a priori* minima dato che si poteva contare su di un forte schermaggio laterale, le misure essendo condotte in un pozzo posto in una zona assai montuosa.

Tabella I.

Metri H_2O equiv.	Posizione A			Posizione A con Pb			Posizione B			Triple / Triple Pb	Coerenti / Triple Pb
	Min.	Coinc.	Coinc./Min. **	Min.	Coinc.	Coinc./Min. **	Min.	Coinc.	Coinc./Min. **		
15	219	13821	63,1 ± 0,54	183	10797	59 ± 0,57	245	549	2,24 ± 0,095	1,068 ± 0,014	0,038 ± 0,0016
125	1010	2518	2,49 ± 0,05	916	2019	2,2 ± 0,05	1099	165	0,15 ± 0,011	1,131 ± 0,035	0,068 ± 0,0055
190	1252	1238	0,988 ± 0,028	1170	1067	0,911 ± 0,028	1155	81	0,07 ± 0,008	1,08 ± 0,042	0,076 ± 0,0085
235	2204	1170	0,530 ± 0,015	2022	989	0,49 ± 0,015	1729	91	0,053 ± 0,0055	1,084 ± 0,047	0,107 ± 0,011
305	1541	525	0,34 ± 0,014	1491	426	0,28 ± 0,014	1405	44	0,031 ± 0,0047	1,19 ± 0,08	0,109 ± 0,014
425	3003	530	0,17 ± 0,007	3000	381	0,127 ± 0,006	1886	24	0,012 ± 0,0026	1,38 ± 0,09	0,093 ± 0,016
575*	1987	144	0,072 ± 0,0065	1806	102	0,056 ± 0,0056	—	—	—	1,27 ± 0,156	—

* Per tale profondità le pareti ed il cielo della volta erano più vicine al teloscopio di 60 cm.
** I valori sono corretti dalle casuali.

Discussione dei risultati sperimentali.

La curva di assorbimento da noi trovata si accorda sufficientemente bene, specie per forti spessori, con i dati di Wilson (3) e di Clay e van Gemert (7). Le differenze che si notano possono essere attribuite sia a diversità nella geometria o nella composizione dello strato di roccia

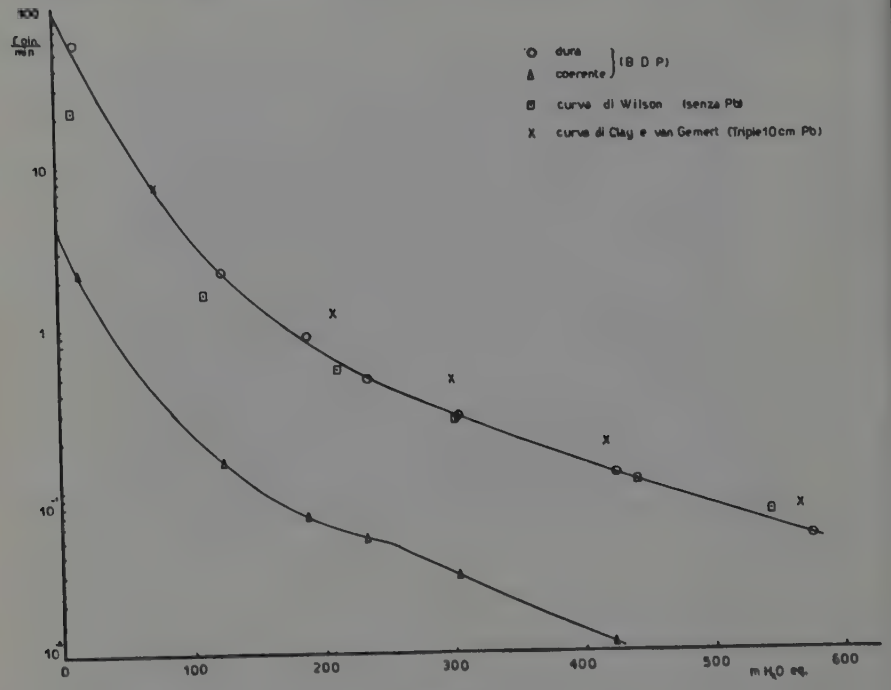


Fig. 6.

assorbente, sia alle differenti disposizioni geometriche dei contatori. La nostra curva del rapporto totale dura si accorda bene con quella corrispondente di Clay e van Gemert.

L'attendibilità e l'importanza della nostra curva del rapporto coerente/dura sono aumentate dall'accennato buon accordo delle nostre curve con quelle degli altri sperimentatori.

Riguardo alla misura di coerente notiamo subito che può ritenersi non casuale il fatto che si possa trovare una relazione qualitativa tra la curva di assorbimento e la curva del rapporto coerente/dura. Infatti

tra 15 e 250 metri di acqua equivalente si ha un indurimento della radiazione e, come è logico, un aumento del rapporto coerente/dura, mentre poi tra 250 e 430 metri di acqua equivalente ad un coefficiente di assorbimento costante [1] corrisponde un valore costante nel rapporto coerente/dura.

Dal punto di vista quantitativo si deve dire che può non esistere una proporzionalità tra il numero di secondari in equilibrio con la dura e le nostre misure di coerente. Infatti ad un indurimento della radiazione

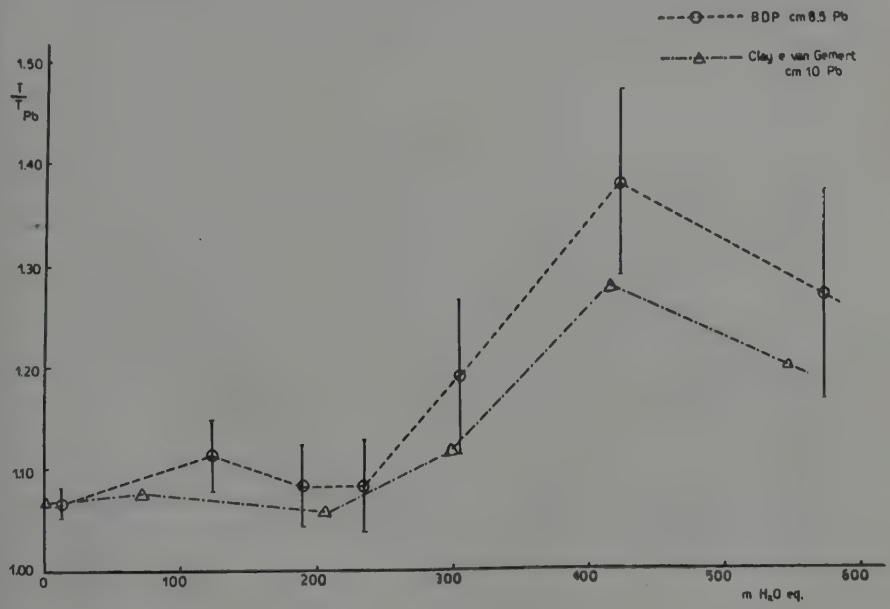


Fig. 7.

primaria può corrispondere un angolo di generazione dei secondari sempre minore in modo che nella disposizione B, oltre all'aumento dovuto alla maggiore generazione, si avrebbe un aumento dovuto a tale fattore geometrico.

---

[1] Rappresentando la curva di assorbimento con una espressione del tipo

$$I = Ke^{-hx}$$

nel nostro caso per $250 \leq h \leq 575$ metri di acqua equivalente troviamo per K ed x i valori 2,43 e 0,0068. Dai dati di Wilson lo stesso tratto di curva ha per coefficiente di assorbimento 0,0075 in buon accordo col nostro valore.

Barnothy, per spiegare la presenza della radiazione cosmica alle più grandi profondità emette l'ipotesi che la radiazione penetrante ionizzante proveniente dall'atmosfera sia accompagnata al suo entrare in roccia da un flusso di particelle neutre (neutroni, neutrini) le quali, per la loro grande penetrazione e attraverso i loro secondari ionizzanti, renderebbero sperimentalmente rivelabile la radiazione cosmica alle più grandi profondità.

Barnothy (9) pone come limite alla penetrazione in roccia dei mesotroni lo spessore di 600 metri di acqua equivalente attraverso considerazioni sull'energia massima di questi; pur non sembrandoci sufficien-

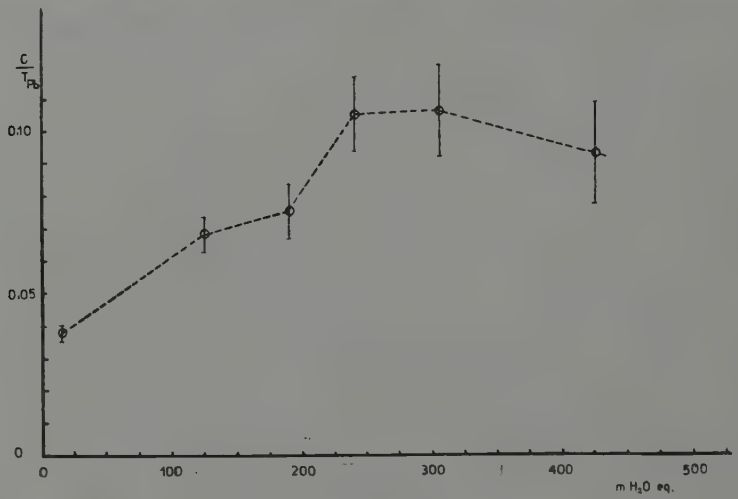


Fig. 8.

temente giustificato in via sperimentale tale limite di penetrazione, dobbiamo notare che effettivamente le nostre curve dei rapporti totale/dura e coerente/dura confermerebbero la presenza di una componente non ionizzante. Infatti, se noi confrontiamo la curva del rapporto coerente/dura (tenendo conto delle considerazioni di carattere qualitativo già fatte in relazione alla curva di assorbimento) con la curva del rapporto totale/dura, vediamo che ad una generazione costante di molle in equilibrio, che ha inizio a circa 250 metri di acqua equivalente, corrisponde un notevole aumento nel rapporto totale/dura; la più semplice spiegazione di tale fatto è appunto che ci sia una componente non ionizzante che comincia a far sentire i suoi effetti sulla molle presente. Si deve notare però che, secondo le ipotesi di Barnothy, tale componente dovrebbe far sentire i suoi effetti in un rapporto totale/dura anche a piccole pro-

fondità, ciò che sperimentalmente non risulta [1]; questo fatto si può spiegare, o ammettendo che la componente neutrale a piccole profondità dia secondari di penetrazione inferiore a 15 millimetri di Al, tale essendo lo spessore equivalente del nostro dispositivo di contatori, oppure tale componente neutrale sia prodotta in roccia o da disintegrazione di mesotroni o da altro processo. Dal punto di vista sperimentale noi possiamo notare che dai nostri dati sembrerebbe che a 250 metri di acqua equivalente non vi fosse alcuna evidenza per una componente molle dovuta ad una radiazione non ionizzante. Infatti, tralasciando la molle assai coerente con la dura che non è registrata nelle due disposizioni A con Pb e B, si può dire che tutta la molle è generata dalla dura in quanto i valori della molle/dura e della coerente/dura sono rispettivamente $0{,}084 \pm 0{,}047$ e $0{,}107 \pm 0{,}011$.

E. J. Williams (8) ha calcolato il numero medio di elettroni che accompagnano un mesotrone dovuti a collisione di questo con gli elettroni atomici. I nostri dati del rapporto coerente/dura si prestano ad un confronto con detta teoria assai meglio delle normali misure di molle/dura in quanto vi è la possibilità di esistenza di una componente non ionizzante che crea secondari molli. Bisogna supporre però, per un tale confronto di carattere quantitativo, che valga, come si è già detto, la proporzionalità tra il numero di secondari generati da mesotroni ed i valori da noi trovati con la disposizione B; tale supposizione significa che le variazioni dell'angolo medio di generazione dei secondari al variare dell'energia dei primari dovrebbero essere di entità tale da non influenzare le misure di coerente.

Secondo la teoria di E. J. Williams il rapporto fra il numero medio di elettroni provenienti da collisione e quello dei mesotroni, è dato dalla formola seguente:

$$[1] \qquad R' = \frac{l'_3}{l'_1 + l'_2}$$

dove l'_1 e l'_2 sono quantità proporzionali alle perdite di energia per collisione e per radiazione degli elettroni ed l'_3 alle perdite di energia dei mesotroni. Abbiamo assunto 16 come valore della somme $l'_1 + l'_2$ e come valore di R' a 15 metri di acqua equivalente abbiamo assunto 0,13 ; l'_3 è dato dalla formola:

$$[2] \qquad l'_3 = \log_{10} \frac{Q_m}{eE_m}$$

---

[1] Calcolando il rapporto fra l'intensità dei neutroni + neutrini e l'intensità dei mesotroni alle diverse profondità secondo i dati di Barnothy, si nota che tale rapporto diminuisce fra 20 e 300 metri di acqua equivalente, per risalire poi livemente con la profondità.

dove E_m rappresenta l'energia minima perchè un secondario sia rivelato dal sistema sperimentale e Q_m l'energia media dei mesotroni. Il valore di E_m è per noi, nella disposizione B, di $3 \cdot 10^6$ eV e nella disposizione A, di 10^7 eV.

Calcolando dai nostri dati della curva coerente/dura con la formola [1], attraverso la [2], il valore di Q_m ad una profondità di 300 metri di acqua equivalente, si ottiene un valore di circa 10^{13} eV. Tale valore come energia media dei mesotroni alla suddetta profondità ci appare non plausibile in quanto dalle attuali conoscenze sullo spettro di energia della radiazione cosmica incidente sulla atmosfera terrestre e dello spettro al livello del mare non si ha alcuna evidenza per una così alta energia.

Si può supporre allora che la componente dura possa produrre secondari ionizzanti oltre alla generazione normale per collisione; non si può dire però se tale generazione sia dovuta alla energia man mano crescente dei corpuscoli duri, nella supposizione che essi siano tutti mesotroni, o ad un cambiamento della natura dei corpuscoli stessi.

Secondo J. Clay e A. V. Gemert la parte più penetrante della componente dura sarebbe costituita da protoni: per le attuali conoscenze sulla generazione di secondari da protoni non sembra plausibile tale ipotesi poichè la produzione di secondari da protoni per collisione (la produzione per radiazione essendo trascurabile) è, per energie superiori a 10^8 eV., dello stesso ordine di grandezza di quella da mesotroni; sembra più logico ammettere che si tratti di una componente mesotronica di energia tale che avvenga il suddetto processo oltre al normale per collisione.

Riassumendo, dal confronto dei nostri dati sperimentali sembra avvalorata l'ipotesi dell'esistenza nella radiazione cosmica sotto roccia di una componente non ionizzante che sembrerebbe di produzione locale. Dalla nostra misura di coerente si può dedurre poi, con una ipotesi restrittiva, che l'eccessiva produzione di secondari in equilibrio con la dura in confronto alla teoria di E. J. Williams può essere spiegata supponendo che la componente dura mesotronica possa produrre secondari per un processo non previsto dalla teoria.

Ci è grato ringraziare il Comitato per la Geofisica del Consiglio Nazionale delle Ricerche per il contributo finanziario alla ricerca, la Direzione Generale delle Ferrovie dello Stato per il permesso accordatoci di condurre l'esperienza nella Grande Galleria dell'Appennino, ed in particolare il prof. ing. Guido Corbellini ed i suoi assistenti dott. ing. Martarelli e dott. ing. Diegoli per l'interessamento dimostrato e le agevolazioni concesseci.

Siamo grati al prof. Laureto Tieri, Direttore di questo Istituto, per averci consigliato la presente ricerca e per il costante interessamento nella preparazione ed esecuzione di questa.

BIBLIOGRAFIA

(1) Clay J., « Physica », I, 363 (1934).
(2) Corlin A., *Cosmic ultra-radiation in N. Sweden*, 1934.
(3) Wilson V. C., « Phys. Rev. », *53*, 337 (1938).
(4) Wilson V. C., « Phys. Rev. », *55*, 6 (1939).
(5) Barnothy e Forrò, « Zts. f. Phys. », *104*, 774 (1937).
(6) Clay P. H., A. v. Gemert e Clay J., « Physica », *6*, 184 (1939).
(7) Clay J. e van Gemert A., « Physica », *4*, 497 (1939).
(8) Williams E. J., « Proc. Camb. Phyl. Soc. », *34*, 183 (1940).
(9) Barnothy J., « Zts. f. Phys. », *115*, 140 (1940).
(10) Ballario C., Della Corte M., Prosperi M., « Ric. Scient. » 12-2-162 (1941).

Fisica. — *Centrifugazione dell'idrogeno occluso nei metalli.* Nota di TITO FRANZINI, presentata (1) da LAURETO TIERI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

Le esperienze di TOLMAN e collaboratori e quelle più recenti di centrifugazione elettronica di MAJORANA (2), oltre a prospettare la possibilità di una conferma del noto valore e/m sono una prova diretta della presenza e della estrema mobilità di cariche libere (elettroni) nell'interno di un metallo.

D'altra parte già da tempo esperienze mie (3) e di A. COEHN (4) avevano messo in evidenza la ionizzazione, almeno parziale, dell'idrogeno assorbito nei metalli in base alla sua spostabilità mediante l'applicazione di un campo elettrico. Ed anche indipendentemente da questi fatti, la facile diffusibilità, soprattutto nel palladio, dell'idrogeno occluso, sotto l'azione del solo gradiente di concentrazione, poteva farne ritenere possibile lo spostamento sotto l'azione della centrifugazione. Naturalmente il presente problema, se è stato ispirato dalle evidenti analogie con quello trattato da MAJORANA, presenta varie notevoli diversità e fra queste la semplificazione dovuta al fatto che mentre nella centrifugazione degli elettroni si ricerca un fenomeno per così dire istantaneo i cui effetti sono misurabili solo durante la centrifugazione, invece nel caso degli atomi di idrogeno, ionizzato o no, si può misurare, a centrifugazione avvenuta, un effetto che si è accumulato con la durata delle centrifugazione e che dopo perdura praticamente invariato.

Nella presente ricerca lo spostamento dell'idrogeno occluso è stato studiato su fili di palladio del diametro di mm. 0,1; la quantità di H_2 occluso è stata determinata dalla variazione Δr della resistenza elettrica del metallo in base alla relazione (5)

$$[1] \qquad \frac{\Delta r}{r} = 0{,}0292 + 0{,}000\,668\, v$$

(1) Nell'Adunanza del 21 marzo 1941-XIX.

(2) Q. MAJORANA, « N. Cim. », XVII, pag. 253 (1940).

(3) T. FRANZINI, « Rend. R. Ist. Lomb. », *64* pag. 709 (1931).

(4) A. COEHN e collaboratori « Z. S. f. Phys. », *62*, pag. 1 (1930); id. *71*, pag. 179 (1931) ecc.

(5) F. FISCHER, « Ann. d. Phys. », *20*, pag. 503 (1906).

dove v rappresenta i volumi di H_2 ridotto a 0 °C e 760 mm di Hg, occlusi in un volume di metallo. Tale relazione stabilita da Fischer in base ad accurate ricerche è stata controllata ed adottata da vari autori, così che per $30 < v < 950$ si può ritenere del tutto attendibile con un errore probabile dell'1 % e per $950 < v < 1300$ ancora sufficientemente approssimata per quanto con scarti via via crescenti.

La misura delle resistenze dei vari tratti di filo era eseguita con il dispositivo a ponte indicato in figura: AB rappresenta il filo in esame della lunghezza da 7 a 10 cm.; $A'B'$ un filo calibro di manganina lungo m. 2 e avente una resistenza totale di ohm 1,145; la pila era applicata ai due morsetti D, E mentre i corsoi C, C' erano invece in comunicazione con un galvanometro ad alta sensibilità in volt (resistenza interna 2,2 ohm, sensibilità $2.10^{-8}\ A\ \frac{m}{mm}$). Il contatto di C sul filo AB era fatto a

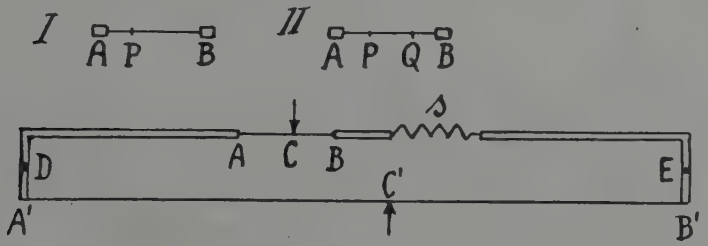


Fig. 1.

mezzo di dispositivo micrometrico di spostamento e nonio per la lettura a meno di mm. 0,05. La resistenza totale del filo in esame poteva essere misurata confrontandola con quella s del valore di 3 ohm; questa poi per le successive misure era cortocircuitata. Una speciale cura è stata presa sia per evitare errori dovuti alle variazioni di temperatura, sia alle resistenze dei conduttori $A'DA$, $B'EB$. In quanto ai fili in esame AB ciascuno di essi era saldato a stagno a due corti sostegni di ottone da 2 mm. di diametro per mezzo dei quali potevano essere facilmente fissati con una buona superficie di contatto ad appositi morsetti. Infine le resistenze dei vari tratti dei fili in esame AB erano ottenute con il seguente metodo: determinata la resistenza totale R si cortocircuitava la resistenza s; quindi per una data posizione di C si equilibrava il ponte con C'. La resistenza r del tratto AC si otteneva dalle lunghezze dei tratti $A'C'$, $C'B'$ e indipendentemente dalle resistenze di contatto dei corsoi, dalla relazione

$$[2] \qquad r = R\,\frac{a}{a+b} = \frac{Ra}{2000}$$

essendo a, b le lunghezze in mm dei tratti $A'C'$, $C'B'$.

I dati riferiti più avanti sono relativi a due campioni di palladio studiati in tal modo, e aventi rispettivamente la lunghezza (I) di mm. 103 e (II) di mm. 72. Misure ripetute ad intervalli regolari di distanza su detti fili prima della loro idrogenazione diedero come risultato a 14,5 °C, milliohm 15,30 ± 0,12 per mm di filo, fatta naturalmente eccezione dei piccoli tratti in immediata vicinanza dei terminali a causa di tracce di stagnatura.

TABELLA 1.

Filo I				Filo II			
AC	$r \cdot 10^4 \pm 8$	resistenza per mm ($\times 10^4$)	volumi di H_2 occluso	AC	$r \cdot 10^4 \pm 8$	resistenza per mm ($\times 10^4$)	volumi di H_2 occluso
mm	ohm	ohm		mm	ohm	ohm	
12,5	1921			5,0	760		
		155				154	
15,5	2388			10,0	1531		
		205	455			158	
17,5	2798			15,0	2320		
		266	1058			219	601
18,5	3064			17,5	2867		
		280	1195			250	905
21,5	3905			20,0	3492		
		260	1001			253	934
24,5	4684			25,0	4757		
		280	1195			251	915
27,5	5525			30,0	6012		
		272	1118			248	885
30,5	6341			35,0	7252		
		276	1157			251	915
60,5	14632			40,0	8507		
		277	1167			252	925
65,5	16020			45,0	9767		
		269	1088			253	934
70,5	17366			50,0	11032		
		277	1167			256	962
75,5	18753			55,0	12312		
		282	1216			225	660
80,5	20166			57,5	12875		
		278	1177			176	181
85,5	21557			60,0	13315		
		279	1187			154	
90,5	22953			62,5	13700		
		274	1137			155	
95,5	24322			65,0	14087		
						151	
103,5	25123			67,0	14389		
				(73,0)	15241		

Tali campioni furono idrogenati facendoli funzionare da catodi in una soluzione di idrato sodico e precisamente:

il I) in un tratto PB (fig. 1) della lunghezza di circa 8 cm., mentre i rimanenti 2 cm circa del tratto AP furono lasciati fuori della soluzione del voltametro. La idrogenazione fu prolungata per 5 ore con una intensità totale di corrente di 40 mA e una densità superficiale di circa 0,20 mA/mm^2.

il II) in un tratto intermedio PQ di circa 4 cm lasciando fuori della soluzione i rimanenti due tratti laterali AP, QB. La idrogenazione durò circa un'ora con pari densità di corrente del caso precedente.

I risultati delle misure effettuate dopo tale idrogenazione sono riassunti nella precedente tabella I. Per le predette ragioni, dai calcoli sono esclusi i dati relativi agli estremi dei filamenti (posti in parentesi). I volumi di H_2 occluso per ogni volume del metallo sono calcolati in base alla [1] dalla quale per $r = 153.10^{-4}$ ohm·mm e Δr misurato in ohm·10^{-4}·mm si ottiene

$$[3] \qquad v = 9{,}78\,\Delta r - 44\,.$$

Dai dati di questa tabella risulta che il filo I era stato portato in condizioni di soprassaturazione, ammesso con il Fischer che la saturazione sia raggiunta poco prima dei 1000 volumi di H_2 per volume di palladio; tale filo era quindi in condizione di riemettere con una certa facilità l'eccesso di idrogeno assorbito.

Dopo le misure riportate ciascuno dei fili fu centrifugato fissandolo con i sostegni saldati, su di un telaietto metallico introdotto a sua volta nel tratto periferico di un tubo lungo circa un metro, fissato nella sua parte centrale all'asse di un motore elettrico. L'estremità A del filo di palladio risultava a circa 48 cm dall'asse di rotazione. Poichè il motore arrivava ad una frequenza di 1400 giri al minuto, l'accelerazione all'estremità del filo era di $1{,}04.10^6$ cm/sec^2 e la forza centrifuga esercitata sull'atomo di H (o sul protone) di $1{,}73.10^{-18}$ dine.

In entrambi i casi la centrifugazione fu effettuata per tre ore e mezza consecutive dopo le quali furono eseguite le misure riportate nella tabella II compilata con gli stessi criteri della precedente.

L'insieme dei risultati appare più evidente dai diagrammi ricavati dalle precedenti tabelle.

Nelle figure 2, 3 la retta AD rappresenta le resistenze dei tratti di filo non idrogenato in funzione della lunghezza ossia della distanza dall'estremo A. La spezzata $ACEE'$ le stesse resistenze dei fili idrogenati prima della centrifugazione, mentre la tratteggiata indica invece la resistenza dei fili a centrifugazione avvenuta. Nella prima di tali figure (filo I) relativa al campione idrogenato nel tratto PB in condizioni di soprassaturazione, lo spostamento nel filo centrifugato dell'idrogeno occluso è mostrato dall'aumento della resistenza (tratteggiata AE) rispetto al filo non cen-

trifugato. Però a destra del punto E la resistenza del filo centrifugato diventa inferiore a quella del filo non centrifugato. Rimanendo evidente il fenomeno dello spostamento si può osservare che tale abbassamento della resistenza totale del filo è indice di una parziale riemissione, durante le esperienze, dell'eccesso dell'idrogeno occluso.

TABELLA 2.

Filo I				Filo II			
AC	$r \cdot 10^4 \pm 8$	resistenza per mm ($\times 10^4$)	volumi di H_2 occluso	AC	$r \cdot 10^4 \pm 8$	resistenza per mm ($\times 10^4$)	volumi di H_2 occluso
mm	ohm	ohm		mm	ohm	ohm	
7,5	1186			5,2	796		
		164	63			154	
10,0	1596			8,0	1227		
		168	102			161	35
12,5	2016			11,0	1710		
		190	327			230	710
15,0	2492			14,0	2401		
		240	806			248	886
17,5	3093			19,0	3641		
		256	970			252	924
22,5	4374			24,0	4901		
		267	1071			249	895
25,0	5042			29,0	6146		
		270	1100			251	915
27,5	5717			34,0	7401		
		276	1159			253	934
30,0	6408			39,0	8666		
		276	1159			248	885
32,5	7099			44,0	9904		
		276	1159			243	836
35,0	7990			49,0	11121		
		267	1070			231	720
37,5	8457			51,5	11700		
		281	1207			230	612
42,5	9863			54,0	12276		
		275	1149			182	240
47,5	11239			56,5	12731		
		268	1080			162	45
50,0	11908			59,0	13136		
		274	1139			158	
55,0	13277			61,5	13530		
		285	1246			157	
62,5	15417			64,0	13921		
		264	1041				
72,5	18058			(73,0)	(15208)		
		267	1070				
77,5	19396						
		239	807				
82,5	20595						
		234	748				
87,5	21763						
		211	523				
92,5	22818						
		183	250				
97,5	23733						
103,5	(24578)						

Nel filo II invece, nel quale la saturazione non è stata raggiunta, la resistenza totale del filo centrifugato rimane sensibilmente eguale a quella del filo solamente idrogenato; e infatti la tratteggiata per detto filo raggiunge la linea continua in corrispondenza del punto dove termina la idrogenazione (punto di ascissa Q), confondendosi poi con il segmento continuo EE'.

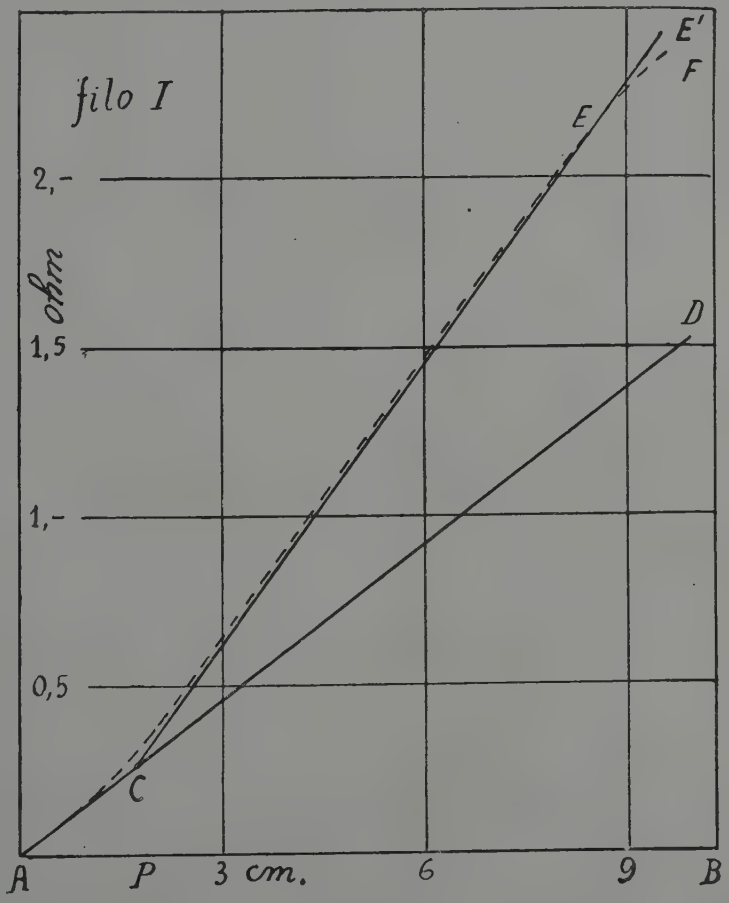


Fig. 2.

Più evidente è l'andamento dello spostamento nei diagrammi delle figure 4 e 5 dove sono riportati in ordinate i valori medi dei volumi di H_2 occluso in funzione delle distanze dall'estremo A dei fili. La curva continua è relativa a detti volumi prima della centrifugazione, quella tratteggiata agli stessi volumi dopo la centrifugazione. Nei fili non centri-

fugati in corrispondenza del punto P per il I e dei punti P, Q per il II si riscontra la brusca salita dell'idrogeno occluso: che la curva in detti punti non sia addirittura una normale alle ascisse è del tutto spiegabile (più che per un effetto di diffusione a causa del gradiente di concentrazione) come dovuto a piccole oscillazioni della superficie del bagno di idrogenazione.

Nella figura relativa al filo I idrogenato dal punto P fino all'estremo B, la centrifugazione ha prodotto un netto spostamento del fronte del-

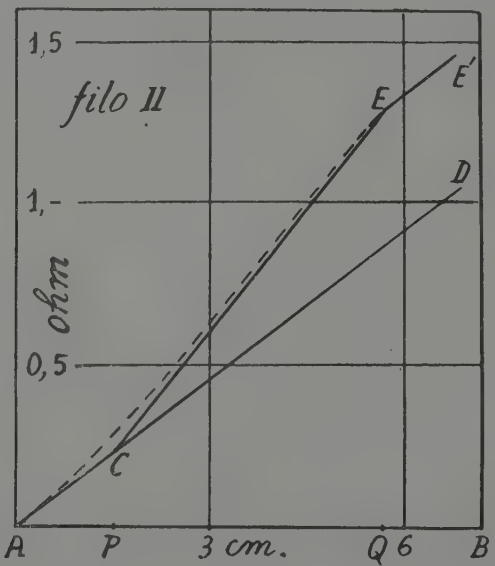


Fig. 3.

l'idrogeno verso sinistra e a destra un impoverimento altrettanto evidente dell'idrogeno occluso. Nel filo II invece i due fronti P e Q dell'idrogeno occluso risultano spostati entrambi nello stesso senso.

Sarà utile un confronto con i dati di Coehn relativi a fili di Pd pure di mm 0,1. Con campi di 0,32 volt/cm ossia con una forza agente sul protone di 3.10^{-13} dine il Coehn otteneva uno spostamento di idrogeno corrispondente a 2.10^{13} protoni al secondo. Nelle presenti esperienze con una forza agente di $1,7.10^{-18}$ dine ho ottenuto uno spostamento di 8.10^{12} atomi al secondo, cioè di poco inferiore a quello di Coehn per quanto la forza agente fosse minore di vari ordini di grandezza. Il contributo allo spostamento dell'idrogeno ionizzato dovuto al campo elettrico creato dalla coesi-

stente centrifugazione elettronica è del tutto trascurabile perchè con i dati delle presenti esperienze tale campo si ridurrebbe a circa 6.10^{-8} volt/cm. Mi pare pertanto che non resti che ammettere una percentuale piuttosto

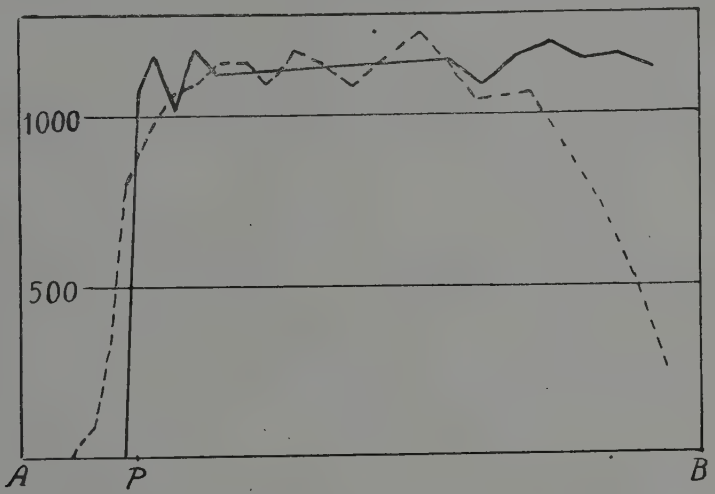


Fig. 4.

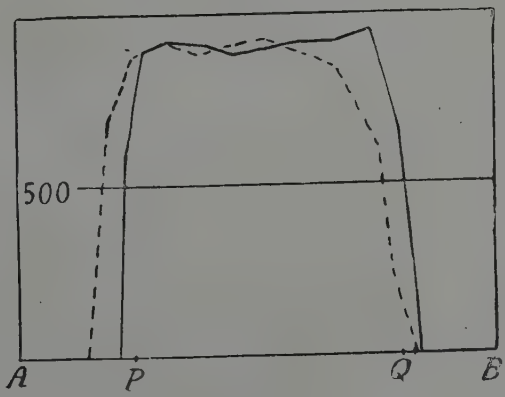


Fig. 5.

bassa di idrogeno ionizzato sul quale possa agire il campo elettrico (rispetto al quale la presenza del rimanente idrogeno non ionizzato rappresenta un puro ostacolo) mentre nelle presenti esperienze è ovvio come la centrifugazione agisca su tutti gli atomi di idrogeno, ionizzati o no.

Paleontologia. — *Sul genere « Pseudopygurus » Lambert* (1). Nota (2) di GIUSEPPE CHECCHIA-RISPOLI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

Nel 1911 il LAMBERT segnalava nel Sequaniano di Tonnerre (Yonne, Francia), col nome di *Pseudopygurus*, un nuovo genere di *Echinobrissidae*, senza darne alcuna descrizione, limitandosi solamente a metterlo in rapporto con *Pygurus* Agassiz. Questo Nucleolide, come è noto, ha le aree ambulacrali petaloidi omogenee, essendo l'impari simile alle altre; *Pseudopygurus*, invece, ha l'area ambulacrale impari diversa dalle altre, costituita da due serie rettilinee divergenti di piccolissimi pori uguali fra di loro.

Il tipo del genere è *Pseudopygurus Letteroni* dello stesso autore; anche la specie non è descritta, nè figurata, ma avvicinata a *Pygurus Blumenbachi* Kock e Dunker del Rauraciano, da cui si distingue unicamente per la costituzione dell'ambulacro anteriore (3).

Più tardi il LAMBERT ed il THIÉRY hanno dato la seguente breve diagnosi di *Pseudopygurus*: « Lampadiforme, deprimé, sinueux en avant, rostré en arrière, rappelant la forme de *Echinopygus* et notamment celle du *E. Blumenbachi*, dont il se distingue seulement par son pétale impair différent des autres simple, composé de pores arrondis, separés par un granule » (4).

È bene tener presente che nell'*Essai* il termine *Echinopygus* d'Orbigny ha sostituito *Pygurus*, che è posteriore (5).

Oltre le pochissime notizie, ora riportate, non mi è riuscito di trovare in tutta la letteratura paleontologica altri dati sul genere in questione, nè sull'unica sua specie, la quale, dall'epoca della sua istituzione ad oggi, è

---

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Geo-paleontologico dell'Università di Roma.

(2) Presentata nell'Adunanza del 21 marzo 1941-XIX.

(3) J. M., LAMBERT, *Notes sur quelques Échinides Éocènes des Corbières septentrionales*, in « Ann. d. l'Université de Lyon », nouv. ser., I, fasc. 30, pag. 24, 1911.

(4) LAMBERT et THIÉRY, *Essai de nomenclature raisonnée des Échinides*, pag. 358, 1924.

(5) LAMBERT et THIÉRY, loc. cit., pag. 354.

rimasta indescritta e non figurata. Il fortunato rinvenimento, dopo trenta anni, in località molto lontana da quella in cui fu trovato *Pseudopygurus Letteroni*, di due esemplari identificabili a questa specie, viene molto opportunamente a colmare una lacuna; il perfetto stato di conservazione di uno di questi due esemplari permette di fissare in modo inequivocabile, insieme con i caratteri del genere, anche quelli della unica sua specie rimasta sino ad oggi nominale.

I due esemplari fanno parte della collezione echinologica raccolta dalla Missione geologica, organizzata dall'Azienda Generale Italiana Petroli (AGIP), nella Somalia Italiana, durante gli anni 1936–1939, diretta dal prof. ing. Carlo Migliorini.

* * *

Descrizione di « Pseudopygurus Letteroni » Lambert. — Echinide di medie dimensioni, clipeiforme, trapezoidale, alquanto più largo che lungo, ristretto e sinuoso avanti, dilatato e subrostrato indietro; faccia superiore poco elevata, convessa, nell'insieme conica, con la maggiore altezza verso il primo terzo anteriore; di qui il profilo scende rapidamente verso il bordo anteriore e più dolcemente verso il posteriore; faccia inferiore pulvinata, concava; bordo arrotondato, più spesso in corrispondenza delle aree interambulacrali che in quelle ambulacrali.

Apparecchio apicale un po' spostato avanti, compatto, tetrabasale: le ocellari posteriori sono a contatto fra di loro. I pori genitali disposti a trapezio e gli anteriori molto più avvicinati dei posteriori.

Aree ambulacrali eterogenee: l'anteriore situata in un solco molto largo e molto svasato, che a partire dall'apice lentissimamente si approfondisce riuscendo ad intaccare sensibilmente il bordo. L'area ambulacrale è molto larga ed è costituita di due serie lineari, strettissime di coppie di pori, lentamente dirvergenti sino al bordo: a partire da qui esse si restringono sino al peristoma. I pori sono piccolissimi, uguali, circolari, disposti a paia obliqui in una leggera depressione e separati da una sporgenza granuliforme. Le coppie sono molto avvicinate e lentissimamente si allontanano l'una dall'altra: in un centimetro, verso la metà della lunghezza, si contano sino a 30 coppie di pori. Spazio interzonale molto largo.

Aree ambulacrali pari a forma di petali, di eguale forma e dimensioni, allungate, affilate all'estremità, pur restando un po' aperte, specialmente le due anteriori. Zone porifere larghe, composte di coppie di pori disuguali, stretti, coniugati: gli esterni più allungati degli interni. Ogni paio è separato dall'altro da una stretta costolina, coperta di granuli allineati molto regolarmente. Le coppie sono molto avvicinate tanto che in 1 cm. se ne contano da 28 a 39. Spazi interzonali larghi circa due volte una zona porifera.

Verso le estremità le zone porifere si riducono a piccoli pori semplici, disposti a paia obliqui; sulla faccia inferiore gli ambulacri si collocano in solchi, che si vanno scavando sempre più verso il peristoma, dove i pori si moltiplicano per formare i fillodi.

Peristoma situato in una profonda depressione della faccia inferiore, spostato avanti, di forma pentagonale, poco più lungo che largo, circondato da una fioscella bene sviluppata: i fillodi situati in solchi poco profondi alternano con i carelli sporgenti e appuntiti verso il peristoma.

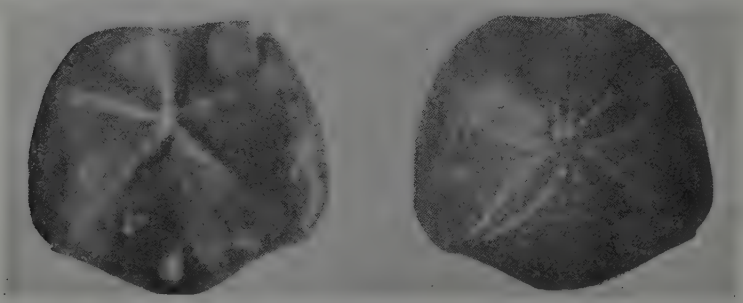


Fig. 2 Fig. 1

Fig. 3

Fig. 1, visto dalla faccia abactinale; fig. 2, visto dalla faccia actinale; fig. 3, profilo antero-posteriore.
(Tutte le figure sono a grandezza naturale).

Periprocto poco profondo e situato a breve distanza dal margine posteriore al termine della carena interambulacrale: esso è piccolo, ovale ed appuntito anteriormente.

Sulla faccia inferiore le aree interambulacrali sono gonfie e la impari è subcarenata; esse alternano con i profondi solchi ambulacrali.

Tubercoli crenulati, perforati e scrobicolati; piuttosto radi sulla faccia superiore, più fitti sul bordo e di nuovo più radi verso il peristoma. Piccoli e radi tubercoli si osservano negli spazi interzonali. Lo spazio intermedio è ricoperto da una fine ed irregolare granulazione.

Dimensioni: lunghezza, mm. 41,1; larghezza, mm. 44,4; altezza, mm. 16.

« Mt. 14085 – Migiurtina Settentrionale – Ripa dell'Ahl Medò, circa 5 km. ad E della Miniera di stagno di Magiajan. Calcare arenaceo grossolano a grossi banchi con ricca fauna di Brachiopodi ed Ostreidi, subito sopra alle arenarie con cui inizia la locale serie sedimentaria ».

Le coordinate geografiche della località sono: Lat. N 11°3′; Long. 49°4′30″ E Grw.

* * *

Come ho detto, il Lambert non figura, nè descrive *Pseudopygurus Letteroni*, riguardo al quale così si esprime: « Le type du genre, *P. Letteroni*, est très voisin du *Pygurus Blumenbachi* jeune et en diffère par son ambulacre impair simple, tandis que cet ambulacre est nettement pétaloïde chez des individus du *P. Blumenbachi* de même âge et de même taille. Pour tous les autres caractéres, on croirait être en présence d'un *Pygurus Blumenbachi* et il semble réellement que l'on assiste ici a la genèse d'une forme nouvelle dont les différences, encore indécises, en s'accentuant au cours des âges, conduiront aux *Archiacia* du Crétacé » (1). Per la mancanza quindi di ogni illustrazione di *P. Letteroni* il confronto degli esemplari della Somalia non può essere fatto che con l'*Echinopygus Blumenbachi* (olim *Pygurus*). Questo echinide, noto da moltissimo tempo, ha una ricca letteratura; una completa descrizione è quella della *Paléontologie Française*; le figure migliori per stabilire il confronto sono quelle della tavola XXXX (figure 2, 3 e 4) della stessa opera, le quali rappresentano un individuo presso a poco delle medesime dimensioni degli esemplari della Somalia (2).

Da un minuto paragone tra questi e le figure risulta la grandissima corrispondenza dei primi con *Echinopygus Blumenbachi*, dai quali effettivamente sarebbe molto difficile una separazione, se il carattere della diversa costituzione del petalo impari non intervenisse a separare genericamente questi echinidi. Se poi la corrispondenza di alcune parti può apparire in qualche dettaglio non perfettissima, bisogna tener presente che noi ci siamo limitati al paragone con il solo esemplare di *E. Blumenbachi* a figure 2, 3 e 4 della tavola XL del Cotteau; mentre si sa che *E. Blumenbachi* è un poco variabile per quanto riguarda la maggiore o minore sporgenza del rostro posteriore; per i petali più o meno larghi, per il profilo antero-posteriore più o meno conico; per il peristoma più o meno

(1) Lambert, loc. cit., nota a piè' di pag. 24.

(2) Cotteau, *Terrain Jurassique, tom. neuv., Échinides irréguliers*, pag. 157, tav. XXXX, 1874.

allungato; tutte queste variazioni però sono comprese in limiti molto ristretti. La sola differenza che sembra esistere tra gli esemplari somali ed *E. Blumenbachi* riguarda la forma dei pori: nell' ultimo i pori esterni sono strettissimi e molto allungati, gli interni ovali e più aperti e lo spazio che separa gli uni dagli altri è strettissimo. In *P. Letteroni*, i pori interni sono presso a poco della stessa forma di quelli esterni, ma solo più corti; inoltre essi sono più distanziati fra di loro; per tutti gli altri caratteri non vi sono differenze di sorta.

* * *

Dalle osservazioni compiute sugli esemplari raccolti nella Somalia italiana la diagnosi del genere *Pseudopygurus* può venire ora così completata: « Echinide lampadiforme, depresso, sinuoso avanti, subrostrato indietro. Apice compatto, tetrabasale, eccentrico avanti. Solco anteriore poco accentuato, ma che riesce tuttavia ad intaccare il bordo anteriore: ambulacro impari composto di due serie rettilinee e divergenti di piccolissimi pori, circolari, uguali; ambulacri pari a forma di petali con pori esterni più allungati degli interni. Peristoma regolare, pentagonale, circondato da una fioscella molto sviluppata. Periprocto infero, avvicinato al bordo posteriore, longitudinale, appuntito avanti. Tubercoli scrobicolati, crenulati e perforati ».

Il genere comprende una sola specie, *Pseudopygurus Letteroni* Lambert del Sequaniano.

Nell'*Essai* il genere *Pseudopygurus* è collocato nella sottofamiglia degli *Archiacidae*, stabilita dal Cotteau per quei generi di Procassidulodoi, in essa compresi, presentanti il singolare carattere di aver l'area ambulacrale anteriore differente dalle altre per la forma e la disposizione dei pori, mentre poi hanno strettissimi rapporti con quelli di altre sottofamiglie di Procassiduloidi (aree ambulacrali petaloidi, peristoma circondato da una fioscella, ecc.).

Il rinvenimento di *P. Letteroni* nell'Africa Orientale è veramente importante: esso, oltre ad aver colmato una lacuna, ha permesso di estendere considerevolmente la distribuzione geografica dell' unica specie di *Pseudopygurus*, nota finora in due localisà molto distanti fra di loro.

RELAZIONI

Il lavoro nelle scuole e l'insegnamento scientifico.

Relazione (1) di GUSTAVO BRUNELLI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

La Carta della Scuola tendente a risolvere i problemi delle scuole dei diversi ordini in relazione a quelle che sono le nuove direttive della vita nazionale e il nuovo orientamento sociale dell'andare verso il popolo, ha posto il problema del lavoro nelle scuole e quindi dei rapporti tra tecnica ed educazione al fine di trovare un equilibrio tra educazione professionale o specializzata e cultura umanistica moderna, e quindi sollevando numerose discussioni intorno all'attuazione della quinta e sesta dichiarazione della Carta della Scuola (2).

La quinta dichiarazione dice in sostanza che il lavoro è introdotto in tutti gli ordini di scuole dall'elementare all'università, e la sesta dichiarazione dice che studio, esercizio fisico e lavoro forniscono alla scuola i mezzi per saggiare le attitudini, ossia che il lavoro serve in sostanza all'orientamento professionale.

Se altri enunciati della Carta della Scuola hanno sollevato numerose discussioni, quanto si riferisce più precisamente al lavoro ha dato luogo ai più svariati commenti di insegnanti, di pedagoghi, di uomini di scienza e di filosofi.

Non posso dire che si sia raggiunto un accordo, anzi per alcuni punti siamo ancora in alto mare. Anche la graduità con la quale il lavoro viene introdotto nelle scuole mostra che vi sono difficoltà da superare, che non sono solo d'ordine finanziario.

Ognuno vede il problema dal suo punto di vista e questo è un bene, ma anche un male. Basterebbe perciò citare, ma sono alieno da polemiche, le contraddittorie asserzioni di molti commentatori.

Lo stesso Ministro, di ciò consapevole, ha detto che prima di varare una legge sul lavoro nelle scuole ha preferito consentire alla scuola, secondo la sua iniziativa ed esperienza, di cominciare ad introdurre il lavoro nella propria struttura, nella propria opera insegnativa.

---

(1) Letta nell'Adunanza del 5 aprile 1941–XIX. Roma, 1939–XVII.

(2) Vedi *La Carta della Scuola*. Angelo Signorelli Editore, Roma.

Ripeterò quello che ha scritto genericamente il CARLINI (1) sulla Carta della Scuola: « Il Ministro lascia che le discussioni dilaghino sempre più; a lui resta, si sa bene, l'ultima parola in ogni caso ».

La nostra relazione pertanto potrà come altre servire a una chiarificazione del problema, per quanto si attiene ai rapporti tra lavoro e insegnamento scientifico.

S'intende che poniamo in primo piano tanto il rispetto per la scienza quanto quello per il lavoro.

Il problema del valore educativo del lavoro ne investe altri di più elevato ordine pedagogico e filosofico, ossia i rapporti tra umanesimo e tecnica, in cui il problema della scienza, talvolta frainteso, richiede una più vasta comprensione.

Rileggevo pochi giorni addietro l'opera di un noto geometra sulla storia della scienza, in cui si vuol dimostrare che nell'antichità la tecnica precede la scienza.

Ma qui la discussione diventa sottile. Come evoluzionista dovrei dire che vi è una tecnica anche negli animali, ma è la scienza umana che ha nobilitato la tecnica. L'uomo che vuol conoscere e asservire le forze della natura, è già un uomo in cui palpita il sentimento della scienza.

Come ha scritto SEVERI (2) nonostante lo sforzo applicativo, reso straordinariamente fecondo dal suo genio, in Archimede non si estinse mai l'inesauribile passione per la scienza astratta che in tutti i tempi, per fortuna della civiltà, ha soggiogato gli intelletti più alti. Lo stesso SEVERI (3) giustamente osserva che « l'Umanesimo nasceva non solo da aspirazioni artistiche o letterarie nè da mere curiosità filologiche, ma altresì dalla passione di riallacciare le fila interrotte del più alto pensiero nella geometria e nella meccanica ». Ecco il frainteso motivo della contesa se i progressi della tecnica derivino o no dall'Umanesimo.

Scienza e tecnica ci appariscono insieme nella grande figura di Leon Battista Alberti, architetto, pittore, matematico, colui che fu Maestro di Leonardo.

Nota è l'asserzione di Leonardo che la scienza è il capitano e la tecnica sono i soldati, ma più vasto ancora è l'orizzonte a cui si affigge l'occhio di Leonardo, quell'universale concezione della scienza, cui accenna la postilla del Codice atlantico: « O Leonardo perchè tanto penate? ».

---

(1) A. CARLINI, *La Carta della Scuola e le nuove concezioni dell'opera educativa*. « Nuova Antologia », giugno 1940-XVIII.

(2) F. SEVERI, *Archimede*, Estratto dall'opera in tre volumi delle *Celebrazioni siciliane*, Urbino. R. Istituto d'Arte del Libro, 1939-XVII.

(3) F. SEVERI, *Galilei e il metodo sperimentale*. « Atti della Società Progresso Scienze ». Convegno di Pisa, 1939-XVII.

Si intende perciò che la tecnica non appariva a Leonardo innanzi alla scienza, nè appariva allo stesso Galilei malgrado il dialogo di Sagredo e Salviati all'Arsenale di Venezia, che suole ripetersi, per mostrare l'ammirazione di Galilei per la tecnica.

Nessun dubbio, si intende, che la tecnica abbia influito sulla scienza e reciprocamente, ma non è oggi il caso di discuterlo, e questi rapporti sono troppo noti agli illustri Colleghi.

In fondo, a parte le discussioni sull'origine dell'Umanesimo, ciò che oggi separa la cultura umanistica dalla tecnica è l'adattarsi della scienza al progresso sociale, e quindi l'esigenza di quell'umanismo di cui parla Carlini per raggiungere questo adattamento, cioè un aspetto umano della scienza. Rispondendo alla sua richiesta di distinguere umanesimo da umanismo, il Bottai osserva che egli parla di umanesimo per tutto ciò che educa ed eleva l'umanità.

« Proprio perchè, come Carlini dice, per noi l'Umanesimo non si fissa una volta per sempre ma si apre continuamente, noi possiamo parlare legittimamente di una sua modernità. Chi succede all'uomo religioso del Medioevo, chi succede all'uomo moderno della Rinascenza, chi succede all'uomo deluso della scienza ? Chi succede all'uomo della tecnica asservito alla macchina ? Ecco il problema. Ecco prima informe poi sempre più chiara l'esigenza di restaurare l'uomo nell'uomo, dico l'esigenza dell'Umanesimo ».

* * *

Ma dopo questo preambolo un po' storico un po' filosofico, e scendendo dall'olimpo del pensiero alla pratica della vita, torniamo a questi rapporti tra scienza e lavoro.

Quelli che oggi parlano di lavoro nelle scuole, non parlano quasi più mai di scienza, ma solo di tecnica, e qui secondo me è l'errore fondamentale.

Perchè, chi garantisce la serietà di tale lavoro, chi garantisce il modo di controllarlo e di regolarlo in ordine anche all'insegnamento scientifico ? Ecco altrettanti interrogativi di cui si compiacciono i colleghi filosofi, e mi compiaccio anch'io.

Lo stesso Ministro dell'Educazione di recente e giustamente ha scritto che il lavoro non deve essere avulso dalla realtà produttiva, nè avere il carattere o di fatica senza costrutto, o di mero esibizionismo e dilettantismo.

Non basta, come riconosce frate Agostino Gemelli [1], mettere una zappa in mano a uno studente universitario, pur lodando gli studenti che sono andati a fare gli sterratori alla Triennale di Napoli.

---

[1] A. Gemelli, *Il lavoro manuale nell'Università.* « Rivista internazionale di Scienze sociali », anno XLVIII, fasc. IV–V, 1940–XVIII.

E qui debbo dire che la prima confusione nasce da due diversi scopi che si vogliono raggiungere, uno d'ordine sociale e l'altro didattico. Se è quello di fare provare all'intellettuale le fatiche dell'operaio allora predomina il concetto nazista dell'Arbeitsdienst, che è altra cosa, in cui lo studente deve per sei mesi fare la vita dura dell'operaio. Similmente in Germania le studentesse passano sei mesi in camerate presso famiglie di contadini condividendone le fatiche e la vita semplice nel lavoro agreste e domestico, meno duro del lavoro operaio, ma pur sempre rude lavoro manuale a contatto con la classe lavoratrice. L'Arbeitsdienst per gli uomini e il Landjahr per le donne sono la riforma attuata nel campo del lavoro dal Nazionalsocialismo, dopo anzi che si era soppresso, a quel che so, il lavoro nelle Scuole introdotto dal pedagogo Kerschensteiner, le cui vedute invece sono assai più simili a quello che la Carta della Scuola vuol introdurre.

L'Arbeitsdienst è una sorta di disciplinato servizio sociale che precede quello militare, al quale proposito sarebbe anche da valutarsi l'importanza etico-sociale del servizio militare ai fini dell'affratellamento delle classi sociali, servizio militare che, per molti motivi, converrebbe forse anche in tempi normali non rinviare dopo la laurea. Ma non voglio proprio ora allargare la già difficile discussione.

Tornando alla nostra Carta della Scuola io credo che il lavoro introdotto nelle nostre scuole, nell'intenzione di chi lo ha concepito, debba essere qualche cosa di differente o di nuovo, come dice Volpicelli [1], ma è arduo, aggiungo io, precisare il nuovo. Una cosa è certa: L'inquadramento del lavoro nei tre ordini di scuole è già un problema difficilissimo.

È da lunghissimo tempo che i pedagogisti hanno attratto la loro attenzione sul valore educativo del lavoro. Lo stesso autore ricorda il Seminario di *Näas*, mèta dei pellegrinaggi di tutta Europa, in cui il Salomon diffuse l'idea del lavoro quale mezzo di cultura formale. Sul lavoro manuale educativo sorse così, già molti anni addietro, una letteratura quanto mai vasta, proprio nel tempo in cui col primo sorgere delle industrie, nascevano i relativi problemi sociali, e s'imponeva il problema della Scuola industriale.

Il Ministro Bottai ha precisato in un suo notevole discorso pronunciato nello scorso anno il 21 aprile, Natale di Roma e festa del lavoro, che egli intende che il lavoro si compia nell'ambiente della scuola e non fuori della scuola, insomma non in antitesi col lavoro intellettuale.

In un altro scritto egli ha anche precisato di riconoscere il valore delle riforme introdotte dal pedagogista di Monaco, Kerschensteiner, cioè

---

[1] L. Volpicelli, *Commento alla Carta della Scuola*, « Quaderni dell'Istituto di Cultura Fascista », ser. Decima, I, Istituto Nazionale di Cultura Fascista. Roma, 1940-XVIII.

della finalità educativa del lavoro nella scuola, poichè si è passati dalla educazione dell'individuo in sè all'uomo membro della Società (1).

Quello che oggi si vuol far risorgere non è il lavoro che serva alle mostre didattiche come quello di Froebelina memoria.

Se Gemelli critica lo studente universitario messo a vangare, che ci dice nel lavoro nella scuola media il Carlini, con profonda competenza pedagogica ?

« Si pensa infatti a una scuola che stia tra la caserma e il laboratorio, con in più i banchi per le ore dello studio vero e proprio. (Questa è la sottile ironia del filosofo). Errore ! Questa invece vuol essere e sarà la scuola per la prima volta restituita alla giovinezza nella quale la salute del corpo accompagna quella dello spirito, e la vita non sarà mortificata prima del tempo. Ginnastica e sport, gare e campeggi, viaggi, la partecipazione a cerimonie nazionali e alla politica militante, cinematografo e radio, concerti; e la vita attiva a costruire e a fabbricare, il prendere parte alle meraviglie ogni giorno rinnovate del lavoro meccanico o ai lavori dei campi nell'aria aperta, forse gustando per la prima volta la bellezza delle fresche albe o delle sue notti solenni sotto i cieli stellati, e la dolcezza del sonno alla fine di una giornata di lavoro, come quella impiegata nella marcia o nella salita di un monte; e i sentimenti di cameratismo, di lealtà, di sacrificio, di rischio, di conquista e padronanza delle proprie forze fisiche e morali, e la scoperta si può dire giornaliera di nuovi aspetti del mondo e della vita: tutto convergerà a far di questa scuola la scuola più giovanile che sia mai esistita; non diciamo « zojosa » come quella di Vittorino, ma lieta e insieme seria e impegnativa come la vuole il Fascismo. Anche pei giovani che vorranno proseguire gli studi e dedicarsi alle lettere o alle scienze, quale migliore preparazione di questa ? ».

Fin qui il filosofo, ed io stesso non posso che condividere i suoi apprezzamenti, intesi a dare aria e vita alla scuola.

Soltanto mi viene il dubbio che tutte queste cose si possano fare contemporaneamente allo studio e non sia meglio intercalarle come riposo a periodi di studio, come del resto in parte si fa col così detto servizio scolastico (2). E poi perchè non alternare con le marcie militari, le escursioni scientifiche, perchè non rimettere le scienze nella scuola media inferiore, che pur ponevano gli studenti a contatto colla natura ?

---

(1) *Il nuovo concetto del lavoro scolastico.* « Il Giornale della Scuola media », marzo-aprile 1940-XVIII.

(2) Analoga idea è stata espressa da Alberto Calza Bini nella sua *Relazione allo stato di previsione della spesa del Ministero della Educazione Nazionale per l'Esercizio finanziario 1941-42 presentata alla Camera dei Fasci e delle Corporazioni il 27 febbraio 1941-XIX.* Tipografia della Camera dei Fasci e delle Corporazioni, Roma, 1941-XIX.

E qui mi assisterebbe Rousseau che se fu un pedagogista rivoluzionario quando nel suo *Emilio* predicava il lavoro, sino al punto di scrivere paradossalmente che i nostri primi maestri di filosofia sono i nostri piedi, le nostre mani e i nostri occhi, fu anche un innamorato della botanica e delle passeggiate campestri. Qui risorge la grande figura di Goethe col *Wilhelm Meister* il quale celebra il lavoro, ma celebra anche la Natura ed esalta il valore della scienza. Mai mi apparve più bella la contemplazione della Natura che in Volfango Goethe, il quale non disdegna visitare le miniere di Ilmenau, raccogliere piante e animali.

La sua opera di pedagogista dei « Lehrjahre » e dei « Wanderjahre » non è ancora commentata a fondo. Ma il suo squisito senso dell'arte e della scienza ritrova nella natura e nell'esercizio fisico il suo campo di azione, non disgiunto dall'esercizio intellettuale.

Per esprimerci col Farinelli questa è la visione pedagogica di Goethe: « L'uomo nuovo è il cittadino, e il cittadino di una grande umanità, che tende all'utile e al progresso. Va a fertilizzare terre, e considera la vita come campo di azione e di lotta, solo degna di essere vissuta. Alle chimere e ai sogni dell'*Émile*, col fervore, la dottrina e l'esperienza di un Pestalozzi e di un Fellenberg, il poeta ora sostituisce la sua " provincia pedagogica ", per i giovani e gli inesperti. Grande scuola che provvede al dirozzamento progressivo e all'allevamento dell'umanità e piega l'anima a quell'unica religione ch'era la salda ferventissima religione di *Humanus* nei Geheimnisse, la Menschheitsreligion ».

Dalle visioni del Poeta dobbiamo però rientrare nella più umile realtà, di considerare come debba svolgersi il lavoro nella scuola media. Perchè questo lavoro sia una cosa di una certa serietà, è necessario che l'insegnamento del lavoro sia controllato da uomini di scienza.

Parlo naturalmente della scuola media umanistica che dà accesso all'università, non della scuola tecnico-professionale dove, il lavoro rientra nelle discipline proprie delle scuole di tipo industriale, e perciò nulla, o poco di nuovo, viene introdotto o modificato col nuovo ordinamento.

Che significato ha un falegname che in un liceo insegni a piallare e a mettere chiodi, se gli insegnanti di liceo di scienze e di chimica, mancano molte volte di preparatori e di meccanici (pur troppo più nei licei nuovi che nei vecchi). Insegna a fabbricar cassette il buon falegname, mentre il professore di scienze forse nello stesso momento che rintrona la martellata, non ha strumenti per dimostrare che la percossa genera il fuoco, come diceva Leonardo.

Sarà meglio allora accompagnare gli studenti in una fabbrica a vedere traforare un cannone e ripetere l'esperienza del conte di Rumford.

D'intesa col Ministro, nessun ragazzo lascerà la scuola e andrà dal fabbro o dal falegname a lavorare. È però necessario, aggiungo io, che

l'officina della scuola sorga vicino al laboratorio scientifico, e sarà tanto di guadagnato per entrambi.

Se noi insistiamo sulla scuola media classica, è perchè sappiamo quanti di noi debbano ad essa per la sua serietà i fondamenti più solidi della propria cultura.

Precisiamo il nostro punto di vista: il lavoro nella Scuola media deve essere controllato dagli insegnanti di scienze, di fisica e di scienze naturali in specie, i quali prenderanno contatto colle Scuole industriali e se occorre coi Politecnici. Sarà il caso anche di pensare se non sia giunto il momento di creare un Istituto Nazionale per i materiali didattici, pei quali dobbiamo ancora ricorrere agli stranieri.

Si dovranno poi fare commissioni di controllo, se occorre aggiungendovi lo psicotecnico che vuole frate Agostino Gemelli. Il quale frate Agostino ha avuto il buon senso di dire che lo psicotecnico non può però sostituire, come da taluno si vuole, il Maestro. Ma dell'orientamento professionale parleremo dopo.

Il Ministero dell'Educazione ha curato recentemente una pubblicazione riguardante gli *Esperimenti di lavoro svolti nella Scuola Fascista anno 1939-40-XVII*. Come di recente ha scritto l'ing. Terzaghi [1] nella rivista dell'*E. N. I. O. S.* quasi dovunque, come era prevedibile, le difficoltà principali da superare sono state costituite da un lato dalla deficienza dei locali, di attrezzature, di materiali didattici e, dall'altra, dalla scarsa disponibilità di personale insegnante idoneo.

Ora passiamo al lavoro nelle Scuole d'ordine Universitario.

E qui debbo subito premettere quanto, colla sua solita lucidità, ha scritto il Severi [2] sulla preminente funzione scientifica che deve avere l'Università, chiedendo di scongiurare il pericolo avvertito dallo stesso ministro Bottai che l'indirizzo professionale tenda ormai a sovravanzare lo scientifico e sopravanzandolo lo mini alle radici.

Il Gemelli dopo aver discusso in un profondo articolo il lavoro nella scuola d'ordine universitario riconosce la complessità del problema.

Per la facoltà di Medicina il Gemelli finisce coll'ammettere che l'unico lavoro serio da farsi dallo studente di medicina è quello di infermiere (qualcuno troverà evidentemente che è un po' poco); lo studente di lettere vada al Magistero di insegnamento. Il lavoro si restringe pertanto al proprio campo professionale. Da questo punto di vista sarebbe oppor-

---

[1] Ing. G. Terzaghi, *Il lavoro sulla Scuola Fascista*. « L'organizzazione scientifica del lavoro », marzo 1941-XIX, anno XVI, fasc. III.

[2] F. Severi, *La funzione scientifica dell'Università*. « Annali dell'Università d'Italia », anno II, n. 3, XIX.

tuno che nella Facoltà di lettere, si studiasse la musica, la recitazione. La musica per esempio, ha reso possibile il caratteristico indirizzo del compianto Ettore Romagnoli, contro il quale si appuntarono indarno gli strali dei linguisti: il culto cioè di due arti sorelle come la musica e la poesia, rese solo possibile le sue mirabili traduzioni dei capolavori greci e la risurrezione del teatro greco.

Per l'archeologia appresi da Giacomo Boni la importanza della conoscenza della metodica degli scavi assistita da vera competenza tecnica, quale solo può aversi dalla ingegneria. Ecco un meraviglioso campo di lavoro per lo studente archeologo, il quale dovrà anche apprendere a eseguire calchi e restauri.

Più facile ancora è il lavoro per i geografi tenendo conto del vasto campo della geofisica, che si studia dentro e fuori del laboratorio e che in Italia ha insigni Maestri!

Del lavoro nelle facoltà giuridiche e nelle Scuole di Commercio non è il caso di occuparsi, esse d'altra parte trovano già largo campo di azione nello Stato corporativo, in cui vi è contatto tra produttori e lavoratori, e sarà di facile realizzazione.

Quanto alle scienze naturali di cui sono particolarmente competente, il lavoro dovrebbe constare nella frequenza presso le Stazioni agrarie, ivi comprese le zooculture, la scienza forestale, la meccanica agraria. Sarebbe altresì utile il lavoro applicato a materiali autodidattici e questo anche per gli studenti di medicina.

Per le scienze geologica e mineraria la conoscenza diretta delle miniere e degli impianti industriali è bene anche che facciano parte della cultura del naturalista.

Molti anni da me passati in contatto cogli agrari e cogli industriali mi hanno dimostrato le lacune della laurea in scienze naturali, che deve più accostarsi a problemi della vita nazionale.

L'insegnamento tecnico superiore è già stato discusso al Convegno autarchico di Venezia al quale ho avuto la fortuna di assistere. In seguito, in relazione colla Carta della Scuola sono poi sortite diverse pubblicazioni.

Per la Chimica, l'Ingegneria è più facile trovare il campo di lavoro nelle fabbriche e nelle officine. Tratto di esse da ultimo, ma è proprio il caso di dire che gli ultimi saranno i primi. La discussione già iniziata dal Giordano se sia meglio che lo studente vada a lavorare cogli operai invece che il laureato, mi trova consenziente.

La pratica del lavoro nelle facoltà di Ingegneria è stata discussa dal Giordano [1] il quale ritiene che neppure il puro e semplice invio di lau-

---

[1] F. Giordano, *La pratica del lavoro nelle Facoltà di Ingegneria in applicazione della Carta della Scuola*. « Gli Annali dell'Università d'Italia », anno I, n. 3, febbraio 1940–XVIII.

reati ingegneri presso stabilimenti industriali risolve il difficile problema: le prove fatte hanno dimostrato che tutto il profitto si riduce alla fine per tante ragioni a una passiva assistenza al lavoro. S'intende che prima che gli studenti entrino a lavorare negli stabilimenti questi dovranno essere illustrati dagli stessi Maestri, precisamente per attenersi a quanto vuole lo stesso Ministro: « Nel contatto col mondo produttore la Scuola deve rimanere intera, deve rimanere Scuola, col suo carattere, coi suoi Maestri ».

Quello che poi il Giordano scrive circa il campo del lavoro nella meccanica mi trova ugualmente consensiente. La grande guerra col servizio dei collaudatori ha già indicato questa strada e dobbiamo anche a un Generale di grande sapere ma anche di grande modestia, e perciò non abbastanza ricordato, il Dallolio, aver riavvicinato le Università e le officine con una rapida comprensione e con una rapidissima realizzazione dei problemi sorti dalla guerra.

S'intende che qui andrebbe rifatta anche la storia dei nostri gloriosi Politecnici, i quali in questi grossi problemi del lavoro da introdursi nelle Università, dovranno tra i primi essere valorizzati, anche per portare il loro consiglio dove Politecnici non ci sono.

È passato il tempo in cui Pasteur poteva scrivere: « Se volete fare della scienza andate alla Scuola normale, (ove il Pasteur insegnava), se volete brecciare una strada andate al Politecnico ».

Quando Pasteur scrisse questo (a parte che la costruzione di ponti di cui si occupavano i Politecnici richiedeva la soluzione di elevati problemi, come ha detto Picard), non esistevano le grandi industrie chimiche, nè quelle dei trasporti, nè sopratutto l'elettrotecnica, cosicchè la loro attività riguardava sopratutto il servizio dei ponti e strade.

Quanti rapporti non ha la chimica con l'ingegneria industriale? Dalla duplice cultura di chimico, e di ingegnere nasce il metallurgico nella sua più alta espressione, come era il compianto Sirovich, nel magnifico campo della metallurgica dove ormai ci vuole il laboratorio vicino all'officina. Come giustamente ha scritto il conte Volpi di Misurata [1] la possibilità di un Alfredo Krupp, non laureato formatosi nella piccola acciaieria paterna e giunto attraverso una lunga serie di esperienze alla più ampia e profonda conoscenza della tecnica appare attualmente esclusa.

La siderurgia poi è il campo più bello in cui si può formare quel tecnico economista di cui l'industria sente la necessità.

Le entrate delle materie prime, i cascami, i ricuperi, la trasformazione del rottame, le spuntature a rifondere, tutto si compendia in un meraviglioso quadro di fattori economici e di rendimento. Non a caso il grande

---

[1] Volpi di Misurata, *L'Università e la vita industriale della Nazione*. « Gli Annali dell'Università d'Italia », anno I, n. 3, 1940-XVIII.

Vilfredo Pareto prima di diventare economista, fu direttore di una grande Ferriera.

Passando alla sesta dichiarazione della Carta della Scuola se dovessimo discutere storicamente il progresso degli studi sulla orientazione professionale nei diversi Paesi del vecchio e del nuovo mondo, della organizzazione dei diversi laboratori che se ne occupano, tra i quali il celebre Pestalozzianum e l'Istituto Rousseau in Svizzera, ciò formerebbe già argomento di una vasta trattazione, che non è il caso di esporre. La selezione umana pedagogico-professionale è in Italia abbastanza nota grazie ai lavori di Mosso, Patrizi, Pizzoli, Sergi, Gatti, Ferrari, De Sanctis, Padre Gemelli, Pende per non dire di altri. Ho già accennato all'impostazione del problema fatta da Padre Gemelli: il Maestro deve essere quello che giudica l'orientamento professionale dello scolaro, lo psicotecnico può assistere il Maestro in questo campo, il Maestro dovrà conoscere la psicologia. Ma secondo me vi sono alcuni Maestri che anche dopo averla studiata, non hanno l'intuito che guida altri nel giudicare i propri alunni.

È nella scuola elementare e nella scuola media che si debbono selezionare i più adatti a proseguire gli studi, in confronto a quelli più adatti per esercitare un mestiere.

Il valore dell'orientamento professionale nell'Università è diverso: si tratta di fare una selezione di affinamento, una selezione di selezioni. Lo stesso Gemelli accenna ai problemi che si connettono alle selezioni dei medici: il chirurgo, per esempio, deve avere requisiti speciali che mancano a molti studiosi di medicina. Anche la figura del ricercatore deve sortire da quella selezione di attitudini, tenendo però presente la complessità del problema del lavoro scientifico e della sua valutazione nei riguardi della selezione dei ricercatori, problema intorno al quale si è espresso magistralmente G. Vallauri nel suo scritto: *Colloquio con i ricercatori* in « Ricerca scientifica », XI, settembre 1940-XVIII.

Per l'orientamento degli studenti della Facoltà di fisica e matematica e di ingegneria, Severi ha scritto giustamente: «Se anche da noi si adottassero, come nell'alleata Germania nazista criteri di orientamento e di selezione rigidamente controllati secondo metodi ed accertamenti psicologici di cui di recente ha dato un'interessante sintesi Padre Gemelli, resterebbe tuttavia la necessità di non spingere all'inizio questi criteri al di là di certi limiti, e di non dare alla classificazione degli allievi ed alla conseguente delimitazione di indirizzi, di facoltà un criterio troppo rigido e specializzato che sarebbe contrario alle qualità sintetiche e artistiche del nostro spirito, il quale pur nell'esercizio di attività particolari, tanto più se elevate e direttive, ha bisogno di illuminare la concreta realtà e il tecnicismo con più larghe visioni.

Se per esempio matematici e fisici venissero fin da principio e dovunque separati dagli studenti di ingegneria si renderebbe ancor più difficile di quanto oggi non sia il reclutamento di elementi adatti alla ricerca scientifica, nel campo matematico e fisico ».

Per i laureati di matematica e di ingegneria risultati già evidentemente buoni si hanno nei grandi istituti di perfezionamento, quali il Reale Istituto di Alta matematica di Roma [1] e, presso il Politecnico di Torino l'Istituto elettrotecnico Nazionale Galileo Ferraris [2]. L'elettrotecnica è un campo nel quale la scienza più elevata e la pratica sono continuamente vicine. Galileo Ferraris ci ha lasciato il retaggio di una elevata poesia della scienza. Quando l'altro giorno si parlava in quest'aula di brevetti, la mia mente ricorreva a quei pessimi venditori di brevetti che furono Pacinotti e Galileo Ferraris; ma quali insegnamenti ci hanno tramandato della nobiltà del loro lavoro disinteressato, posto al servizio della Nazione ! È perciò che la scuola italiana nei suoi sviluppi ha in sè il lievito perenne della trasformazione. Ed è perciò che la scienza italiana nella nuova fase dell'educazione unita al lavoro può entrare a testa alta ad affrontare i nuovi cimenti.

Credo che sia altrettanto necessario che gl'intellettuali conoscano e rispettino il lavoro, che i lavoratori conoscano e rispettino il valore della scienza e il lavoro intellettuale.

Si è discusso a lungo sulla crisi di una scuola borghese, ma non ci vogliamo impegolare nella disputa tra gentiliani e antigentiliani, d'altra parte, dopo tante frecciate tra filosofi, è proprio il problema scientifico che risorge.

La crisi della scuola che non comprende il lavoro era stata preconizzata da De Amicis, drammatizzando per le sue convinzioni socialiste e per la sua arte emotiva di letterato, la descrizione dei figli di contadini dalle spalle robuste con fresche forze dell'ingegno destinate a irrompere nella vecchia scuola borghese.

Il De Amicis ha esagerato, perchè esistono in Italia due borghesie, e alla modesta borghesia che visse e vive in grande umiltà appartengono quasi sempre gli insegnanti, il cui lavoro è altrettanto sacro come quello della vanga, e che questa irruzione perciò non paventano.

Non si vuole però negare che esista un problema della scuola chiamata ad associarsi al progresso sociale, quel tale umanesimo del Bottai, od

---

[1] F. Severi, *In occasione dell'inizio dell'anno accademico 1940-41 del Reale Istituto Nazionale di Alta Matematica.* « Bollettino dell'Istruzione Matematica Italiana », dicembre 1940; gennaio 1941-XIX.

[2] G. Vallauri, *Sul problema dei ricercatori* in « Ricerca Scientifica » IX, novembre 1938-XVII.

umanismo del Carlini. Esiste inoltre la difficoltà di un reciproco rispetto del lavoro manuale e intellettivo, lavoro anche esso, come dice lo psicologo Gemelli. Tale è la difficoltà di questo reciproco rispetto che ha costituito il dramma della rivoluzione russa, dramma che portò Gorkj ad allontanarsi dal bolscevismo proprio quando provò a dirigerne la restaurazione culturale. Nel paese di Aristide Gabelli e di Pasquale Villari, non è il caso di insistere oltre sul valore educativo del lavoro, in un più sano ambiente di rapporti sociali.

Per comprendere il lavoro bisogna però che sovratutto gli insegnanti si rendano conto di ciò che il lavoro deve alla tecnica, e di ciò che la tecnica deve alla scienza.

Avendo avuto anche consuetudine con gli industriali mi sono talvolta espresso rudemente: l'industria dimentica volentieri ciò che deve alla tecnica, la tecnica ciò che deve alla scienza, così la scienza è dimenticata due volte. Quest'amnesia colpisce talvolta anche pedagogisti e filosofi.

È inesatto per chi conosce la vita dello stesso Edison dire che egli non apprezzasse la pura scienza.

Lo stesso Marconi [1], come noi tutti ricordiamo, scrisse che se noi esaminiamo il bilancio delle ricerche scientifiche che appassionano gli studiosi, noi troviamo che i campi aperti sono vastissimi e che ormai anche le ricerche, considerate dapprima del tutto teoriche, hanno una grande probabilità di portare al progresso del benessere umano.

Scegliamo a caso alcuni esempi caratteristici, scrisse Marconi: « i maggiori progressi dell'ingegneria moderna sono dovuti alle leghe d'acciaio con alcuni metalli rari, leghe considerate dapprima curiosità senza importanza pratica; la lampadina a gas di tungsteno quattro volte più efficente della migliore lampadina a filamento di carbone, la valvola termoionica che ha sviluppato enormemente il sistema delle comunicazioni di tutto il mondo e via di seguito ».

È pertanto necessario che anche l'operaio conosca quanto è costato il progresso industriale ed agricolo, attraverso quali e quanti sacrifici la scienza ha perfezionato la tecnica.

Si può capolvolgere il problema e affermare che è tanto necessario che gli uomini colti conoscano la santità del lavoro e scendano tra i lavoratori, quanto che gli operai e i contadini imparino a conoscere ciò che debbono alla tecnica e ciò che la tecnica deve alla scienza.

La Carta della Scuola troverà gli insegnanti italiani preparati ad assolvere il loro còmpito se si ispireranno alle tradizioni disinteressate della

---

[1] G. Marconi, *Per la ricerca scientifica. Discorsi raccolti a cura del Consiglio Nazionale delle Ricerche.* Tip. delle Terme, Roma, 1936-XIV.

scienza italiana, sin da Leonardo che non era pittore da quattrini, come disse con disprezzo al cassiere che gli offriva la moneta, e sino da tutti i grandi Maestri da Volta a Pacinotti, a Galileo Ferraris che rifulsero di civili virtù.

Il Rinascimento italiano ha mostrato al mondo l'equilibrio della scienza della tecnica e del lavoro, nonchè la reciproca comprensione della scienza e dell'arte. Esso risplende nelle opere d'arte e nei monumenti della scienza. È sovratutto questo patrimonio della nostra cultura che ci permette di guardare il lavoro nella scuola, con un senso preciso dei valori che spettano alla scienza e quindi alla cultura.

NOTE E COMUNICAZIONI

Matematica. — *Invarianti proiettivi di calotte.* Nota (1) di Enrico Bompiani, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

1. Credo che l'invariante differenziale proiettivo più noto sia quello di due curve di un piano tangenti in un punto (invariante che in realtà impegna soltanto gli elementi del 2° ordine, E_2, delle due curve tangenti uscenti dal punto): per esso il Mehmke (2) ha dato il significato, metrico, quando le due curve, o i due E_2, si suppongono in un piano euclideo, di rapporto delle loro curvature. Ciò è, stabilita l'esistenza dell'invariante proiettivo, conseguenza immediata del fatto che gli E_2 delle due curve possono pensarsi appartenenti ai loro cerchi osculatori (3).

---

(1) Presentata nell'Adunanza del 5 aprile 1941-XIX.

(2) I lavori di R. Mehmke relativi ad invarianti di elementi differenziali (di curve o di superficie) sono i seguenti:

Einige Sätze über die raümliche Collineation und Affinität welche sich auf die Krümmung von Curven und Flächen beziehen. « Zeitschr. f. Math. u. Phys. », *36*, 1891, 56-60.

Ueber zwei die Krümmung von Curven und das Gauss'sche Krümmungsmass von Flächen betreffende charakteristiche Eigenschaften der linearen Punkttransfortionen. Ibidem, *36*, 1891, 206-213.

Ueber die geodätische Krummung der auf einer Fläche gezogenen Kurven und ihre Aenderung bei beliebiger Transformation der Flächen. Ibidem, *37*, 1892, 186-189.

Untersuchungen über die auf die Krümmung von Curven und Flächen bezüglichen Eigenschaften der Berührungstransformationen (Erste Mittheilung). Ibidem, *38*, 1893, 7-26.

Queste due ultime Note (la cui indicazione debbo ad En. Bortolotti) contengono già i teoremi dati nella mia Nota: *Sulle trasformazioni puntuali e di contatto nel piano*, « Rend. R. Acc. dei Lincei », *4*, 1926, 435-437. Il punto di vista è tuttavia differente: perchè per il Mehmke le trasformazioni riguardano sempre ambienti euclidei.

(3) L'esistenza dell'invariante risulta nel modo più semplice considerando gli E_2 di curve, di uno stesso piano, tangenti in un punto, come punti di una retta sulla quale sono eccezionali i due punti rappresentativi dell'elemento di flesso e dell'elemento cuspidale relativi a questa tangente. Sulla retta si ha quindi una metrica non euclidea e di qui l'esistenza dell'invariante di due punti, cioè di due E_2 complanari tangenti.

Il MEHMKE ha pure considerato il caso analogo di due superficie tangenti in un punto (che interessa di fatto le sole calotte del 2° ordine, σ, di esse aventi il punto come centro); ed ha dimostrato che è loro invariante proiettivo il rapporto delle curvature gaussiane nel punto.

Questo invariante si è ripresentato a me nel caso (al quale, come qui si vedrà, ci si può sempre ridurre) di due calotte con le stesse tangenti asintotiche (4); è stato poi ritrovato, insieme ad uno nuovo, dalla sig.na M. MASCALCHI (5), ed infine esteso alle calotte di ipersuperficie (V_{n-1} in S_n proiettivo) dal BUZANO (6).

Però l'analogia di questo invariante con quello relativo a curve piane è , in certo senso, ingannevole: perchè nel caso delle superficie non si può

Di questo invariante si conoscono ormai vari significati, o costruzioni, come birapporto. Può consultarsi, per esempio, il mio lavoro: *Alcuni risultati di geometria proiettivo-differenziale.* « Rend. Sem. Mat. Fis. di Milano », *10*, 1936, 9–36.

Ivi si trovano molti altri invarianti (finiti o infinitesimi) e il modo di costruire con essi quanto è essenziale nella teoria delle applicabilità proiettive delle superficie.

Un'esposizione d'insieme di vari risultati dovuta ad EN. BORTOLOTTI, *Invarianten von Linienelemente. Projektive Geometrie der Kurvengewebe* comparirà presto nei « Monatshefte für Mathematik ».

Analoga rappresentazione degli E_2 per un punto può farsi, senza eccezione, sui punti di una rigata cubica di S_4 (e su questa si vede immediatamente, per es., l'esistenza di un invariante finito di due E_2 e di una retta uscenti da un punto).

Il problema della *rappresentazione minima* (senza eccezioni) degli E_2 di un piano (proiettivo) è stato risoluto solo recentemente da G. GHERARDELLI, *Sul modello minimo della varietà degli elementi differenziali del 2° ordine del piano proiettivo* (« Rend. Acc. d'Italia », ser. VII, 1941).

(4) E. BOMPIANI, *Determinazioni proiettivo-differenziali relative ad una superficie dello spazio ordinario.* « Atti R. Acc. di Torino », *59*, 1924, 409–429, § 4. Ivi si fa vedere che l'invariante (unico in questo caso) di due calotte tangenti con le stesse tangenti asintotiche è uguale all'invariante delle sezioni prodotte da un piano *qualsiasi* per il centro.

Il teorema ivi dato comprende, in particolare, un teorema di MOUTARD (« Nouv. Annales », 1860, pag. 195 e 431) secondo il quale le polari di una superficie algebrica rispetto ad un suo punto regolare O sono tagliate da un piano qualsiasi per O in curve i cui raggi di curvatura in O sono inversamente proporzionali agli ordini delle superficie diminuiti di uno.

(5) M. MASCALCHI, *Un nuovo invariante proiettivo di contatto di due superficie.* « Boll. Unione Mat. Ital. », *13*, 1934, 43–49.

(6) P. BUZANO, *Interpretazione proiettiva dell'invariante di Mehmke.* « Boll. Un. Mat. Ital. », *15*, 1936, 173–175.

Per altre ricerche del Buzano su calotte superficiali si veda la Memoria: *Invarianti proiettivi di una coppia di elementi superficiali del 2° ordine.* « Rend. di Mat. e delle sue applicazioni », ser. V, *1*, 139–162; ivi si trovano altre citazioni.

sostituire senz'altro ad una calotta σ una sfera di ugual curvatura; questa non rispecchia che una parte dei caratteri di σ, quindi il risultato non è a priori giustificabile come nel caso precedente. C'è quindi qualche fatto nuovo da porre in luce: a ciò è dedicata questa Nota.

Rappresentazione delle calotte del 2° ordine fra loro tangenti in un punto.

2. Si consideri in S_3 proiettivo un elemento regolare del 2° ordine (o calotta) di superficie nell'intorno di un suo punto O, calotta che possiamo rappresentare con lo sviluppo:

$$z = a_{11}\,x^2 + 2\,a_{12}\,xy + a_{22}\,y^2 + \cdots .$$

La totalità degli elementi superficiali di 2° ordine aventi in O lo stesso piano tangente è uno spazio proiettivo a tre dimensioni R_3: alla calotta precedente si può far corrispondere in R_3 il punto di coordinate omogenee $(1 : a_{11} : a_{12} : a_{22})$.

Fanno naturalmente eccezione i punti di R_3 per i quali la prima coordinata è nulla: ad essi, che riempiono un piano ω, non corrispondono calotte regolari (cioè dotate in O di *un* piano tangente). Un punto di ω determina (in relazione allo sviluppo precedente) una coppia di rette in $z = 0$: queste appartengono ad ∞^3 coni quadrici ed ogni superficie con punto conico in O che abbia per cono tangente (asintotico) uno di questi coni è rappresentata (fino all'intorno del 2° ordine), e in relazione al piano tangente fissato $z = 0$) dallo stesso punto di ω.

Ciò è d'accordo col fatto che se a partire da O ci si sposta sul piano tangente e su una di queste superficie ciò è possibile solo su quelle due rette: quindi due di queste superficie non sono distinguibili fino all'intorno del 2° ordine e in relazione al piano tangente.

Per riprodurre esattamente, nel linguaggio, la situazione, bisognerebbe parlare di calotte coniche con assegnato piano tangente: due di queste calotte sono equivalenti (rappresentate da uno stesso punto di ω) quando hanno sul piano tangente una stessa coppia di tangenti; per brevità si parlerà in tal caso di *una* calotta conica.

Queste calotte coniche formano una totalità invariante rispetto al gruppo delle omografie.

Un'altra totalità invariante è costituita dalle *calotte paraboliche*, cioè a tangenti asintotiche coincidenti: queste si rappresentano in R_3 nei punti di un cono quadrico T, il cui vertice rappresenta la *calotta inflessionale* di centro O e piano tangente $z = 0$ (per cui ogni tangente in O è tripunta). È chiaro che il vertice di T *non* appartiene ad ω.

Il piano ω e il cono T costituiscono un «assoluto», rispetto alle omografie, delle calotte tangenti in O. Quindi:

Le calotte superficiali del 2° ordine di S_3 tangenti in un punto O ad un piano assegnato, considerate rispetto alle omografie, si rappresentano nei punti di uno spazio proiettivo R_3 nel quale è dato un assoluto costituito da un piano ω e da un cono quadrico T il cui vertice non appartiene ad ω.

Si ha corrispondenza biunivoca senza eccezione fra i punti di R_3 non appartenenti ad ω e le calotte regolari del sistema; i punti di ω corrispondono invece a calotte non regolari.

3. È immediato attraverso questa rappresentazione, che due calotte del sistema hanno due invarianti proiettivi. Basta pensare ai due punti rappresentativi delle due calotte, e ai punti d'intersezione della loro congiungente con T e con ω.

Il *fascio* di calotte (entro il sistema in esame) individuato da due di esse, cioè in R_3 la congiungente i due punti rappresentativi, può definirsi in S_3 come l'insieme delle calotte tali che l'intersezione di due di esse abbia le stesse tangenti nodali di quella delle due date. Ogni calotta del fascio può costruirsi geometricamente così: su una retta arbitraria prossima ad O (ma non al piano tangente) si determini il punto che forma birapporto assegnato con i punti d'intersezione della retta con le due calotte date e con un punto arbitrario su di essa a distanza finita da O.

I punti così ottenuti appartengono fino all'intorno del 2° ordine di O ad una ben determinata calotta del fascio (dipendente unicamente dal birapporto fissato).

Nel fascio vi sono due calotte paraboliche (a tangenti asintotiche coincidenti) ed inoltre una calotta conica (che può pensarsi appartenente ad un qualsiasi cono quadrico di vertice O avente per generatrici le tangenti nodali nominate).

Se la retta rappresentativa del fascio passa per il vertice del cono T tutte le calotte del fascio hanno le stesse tangenti asintotiche e com'è evidente si ha in questo caso un solo invariante di due tali calotte (è questo il caso di cui mi ero occupato nel 1924).

Più in generale i due invarianti di una coppia di calotte vengono a coincidere se la retta rappresentatrice del fascio è tangente a T (anche senza passare per il vertice); cioè quando le due calotte paraboliche del fascio divengono coincidenti.

4. Una *rete* di calotte è determinata da tre di esse non appartenenti ad un fascio: in R_3 essa è rappresentata da un piano. In S_3 si tratta delle ∞^2 calotte che a due a due si tagliano in curve con coppie di tangenti nodali appartenenti ad una stessa involuzione individuata da tre calotte.

Tre calotte (non di un fascio) hanno cinque invarianti proiettivi; infatti in R_3 si hanno tre punti e sul loro piano la retta e la conica sezione di esso con ω e con T: e questa configurazione ha *cinque* invarianti.

Analogamente si vede che quattro calotte fra loro tangenti in O (ma non appartenenti ad una rete) hanno *otto* invarianti proiettivi.

Interpretazioni proiettive e metriche degli invarianti di due calotte tangenti.

5. Ritorniamo a considerare le cose nello spazio S_3 delle calotte tangenti date avendo in vista di trovare il significato metrico dell'invariante di Mehmke: si vedrà poi che anche l'altro invariante può interpretarsi come invariante di Mehmke (sostituendo ad una delle calotte date un'altra del loro fascio).

Come ho ricordato, se le due calotte tangenti in O hanno ivi le stesse tangenti asintotiche il loro (unico) invariante è quello delle loro sezioni fatte con un piano qualsiasi per O (diverso dal piano tangente). In questo caso la ricerca è esaurita.

Per passare al caso generale consideriamo una calotta σ regolare in O.

Assegnata *ad arbitrio* una coppia di tangenti a σ in O consideriamo le ∞^4 quadriche che posseggono quella coppia di tangenti come generatrici: e fra queste consideriamo quelle, che segano σ in una curva dotata in O di cuspide. Si trova che vi sono *due* tali sistemi ∞^3 di quadriche in relazione a *due* tangenti cuspidali, fornite dalla coppia di tangenti assegnate; e le ∞^3 quadriche di ciascuno dei due sistemi hanno in O una stessa calotta del 2° ordine.

Sicchè, in relazione alla coppia di tangenti assegnata, σ definisce una coppia di tangenti cuspidali e una coppia di calotte del 2° ordine aventi per generatrici le tangenti assegnate; indichiamo queste calotte con τ, τ'.

Sia ora data una seconda calotta $\bar{\sigma}$ (tangente in O a σ). Rispetto alla *stessa* coppia, fissata ad arbitrio, di tangenti, anche $\bar{\sigma}$ definisce due calotte $\bar{\tau}$, $\bar{\tau}'$ con le stesse generatrici.

Poichè τ, τ', $\bar{\tau}$, $\bar{\tau}'$ hanno in O le stesse tangenti asintotiche, due di esse hanno un invariante di contatto di significato noto. Orbene:

Il prodotto degli invarianti di contatto delle coppie τ, $\bar{\tau}$ *e* τ', $\bar{\tau}'$ *di calotte* ($\sigma\tau$, $\bar{\tau}'$ *e* τ', $\bar{\tau}$) *è affatto indipendente dalla coppia di tangenti fissata ed è un invariante proiettivo delle calotte date* σ, $\bar{\sigma}$.

6. Si tratta di far vedere che l'invariante così costruito è proprio l'invariante di Mehmke (cioè di trovarne l'espressione metrica in uno spazio euclideo).

Allo scopo si scelga come coppia di tangenti (da fissare ad arbitrio) quella delle tangenti isotrope: per ciascuna calotta le due tangenti cuspidali risultano quelle di curvatura e le calotte τ , τ' sono quelle appartenenti alle due sfere per O che hanno i centri nei centri di curvatura della calotta.

Dopo ciò, se R_1 , R_2 (o $\bar{R}_1$, $\bar{R}_2$) sono i raggi di curvatura di σ (o di $\bar{\sigma}$) l'invariante precedente vale

$$R_1 R_2 / \bar{R}_1 \bar{R}_2$$

e coincide con l'invariante di Mehmke.

7. La precedente costruzione (proiettiva) dell'invariante di due calotte ne fornisce anche il significato metrico in una geometria non euclidea, il cui assoluto sia una quadrica non degenere Ω.

Consideriamo le ∞^1 *sfere* (quadriche tangenti ad Ω lungo una conica) che toccano una calotta σ nel suo centro O: queste formano un sistema quadratico (non lineare come nel caso euclideo, ma ciò non disturba affatto i ragionamenti precedenti).

Queste *sfere* hanno per generatrici le tangenti isotrope (cioè ad Ω) per O e a σ. Nel sistema ∞^1 si determinino le due *sfere* τ , τ' che dànno luogo a tangenti cuspidate (dell'intersezione con σ). Altrettanto si faccia con $\bar{\sigma}$ ottenendo le *sfere* $\bar{\tau}$, $\bar{\tau}'$ con le stesse generatrici (isotrope) per O.

L'invariante di contatto di due di queste sfere, come τ e $\bar{\tau}$, può esprimersi sia come invariante di contatto delle loro sezioni con un piano per O; sia per mezzo dell'invariante di contatto di ciascuna sfera con Ω. Questo ultimo, per τ ed Ω, è il birapporto di τ , Ω e delle due quadriche degeneri nel fascio da esse determinato (piano della conica di contatto contata due volte e cono); e può assumersi come *raggio* (o come una sua funzione) di τ. Il rapporto dei *raggi* di τ , $\bar{\tau}$ è un loro invariante (proiettivo) di contatto.

Allora il teorema proiettivo del n. 5 si enuncia in geometria non – euclidea così:

Date due calotte tangenti in O si costruiscano le due coppie di sfere (di curvatura) che dànno luogo per ciascuna calotta a sezioni cuspidate. Il rapporto dei prodotti dei raggi delle sfere relativi a ciascuna calotta è un invariante proiettivo di queste.

L'enunciato è del tutto simile a quello di Mehmke per il caso euclideo.

8. Anche l'altro invariante di due calotte tangenti, di cui nella Nota della sig.na Mascalchi è dato il significato metrico, affatto differente da quello di Mehmke, può presentarsi come invariante di Mehmke servendosi della nozione di fascio (n. 3).

Infatti ogni calotta del fascio individuato da σ e $\bar{\sigma}$, e definita da un valore $-k$ del birapporto che serve a costruirla, insieme a σ (o a $\bar{\sigma}$) ha un invariante di Mehmke.

Al variare di k questo invariante è una funzione di k; precisamente moltiplicata per $(1+k)^2$ è una funzione intera di 2° grado in k di cui un coefficiente ha un ben determinato valore numerico; gli altri due coefficienti dànno i due invarianti delle due calotte.

Estensione dei risultati precedenti alle calotte di 2° ordine di ipersuperficie.

9. Le cose precedenti si estendono come segue alle calotte (regolari) di 2° ordine di V_n in S_{n+1} proiettivo.

Fissato un punto O e un S_n per esso le calotte di 2° ordine per O tangenti ad S_n formano un sistema lineare $\infty^{\frac{n(n+1)}{2}}$; quindi si possono rappresentare biunivocamente sui punti di uno spazio proiettivo $R_{n\frac{(n+1)}{2}}$. Le calotte che sono eccezionali dal punto di vista proiettivo e che quindi danno sistemi invarianti, entro il sistema dato, per collineazioni sono:

1° le calotte per cui O non è regolare (cioè con S_n tangente indeterminato); queste si rappresentano nei punti di uno iperpiano ω entro R;

2° le calotte (da dirsi paraboliche) per cui il cono quadratico delle tangenti asintotiche è degenere (o specializzato una o più volte); esse si rappresentano in R sui punti di un cono T di dimensione $n\frac{(n+1)}{2}-1$ e di ordine n. Il vertice del cono rappresenta la calotta inflessionale definita da O e dallo S_n tangente (per cui ogni tangente in O è inflessionale).

L'iperpiano ω e il cono T costituiscono in R un *assoluto* e gli invarianti proiettivi di due o più calotte sono gli invarianti proiettivi dei loro punti rappresentativi in R e dell'assoluto (ω, T).

Così per esempio due calotte, cioè due punti di R, definiscono in R la loro congiungente e quindi il punto d'intersezione di essa con ω e gli n punti d'intersezione con T: cioè sulla retta si hanno $n+3$ punti (due sono quelli dati) e quindi n invarianti. *Due calotte tangenti ad n dimensioni in S_n hanno quindi n invarianti proiettivi.*

Ma appena $n > 2$, l'assoluto (ω, T) definisce sopra una retta $n+1$ punti e questi hanno $n-2$ invarianti proiettivi. Se dalla retta in R passiamo alla nozione equivalente di fascio di calotte in S_{n+1} vediamo che *due fasci di calotte, per $n > 2$, non sono in generale proiettivamente equivalenti;* si ha equivalenza solo se i due fasci hanno gli stessi $n-2$ invarianti.

Il *fascio* di calotte può definirsi in S_{n+1} in modo analogo a quello seguito per $n = 2$, a partire da due di esse e per mezzo di un birapporto che serve a caratterizzare ogni altra calotta del fascio.

10. Anche per $n > 2$ si può ridurre la ricerca degli invarianti di due calotte al caso in cui queste abbiano nel punto di contatto O lo stesso cono asintotico: caso in cui si ha un unico invariante e questo uguaglia l'invariante dei due elementi E_2 sezioni delle due calotte con un piano generico per O.

Il procedimento, cui basterà qui accennare, è il seguente.

Si prenda, entro lo S_n tangente in O e con questo vertice un cono quadrico ad arbitrio (non degenere) e si cerchino le quadriche per esso che segano una delle calotte date σ in una V_{n-1} il cui cono tangente in O sia specializzato: si definiscono con questo procedimento n calotte del 2° ordine $\tau', \cdots, \tau^{(n)}$. Altrettanto si faccia per la calotta $\bar{\sigma}$ e si definiscano le calotte $\bar{\tau}', \cdots, \bar{\tau}^{(n)}$. Le nuove calotte così introdotte hanno *tutte* lo stesso cono asintotico in O: quindi per es. τ' e $\bar{\tau}$ hanno, come s'è ricordato, un invariante proiettivo. Si formino gli invarianti delle coppie $(\tau', \bar{\tau}'), \cdots, (\tau^{(n)}, \bar{\tau}^{(n)})$: il loro prodotto, che è funzione simmetrica sia delle prime n calotte che delle seconde, è un *invariante proiettivo delle calotte* σ e $\bar{\sigma}$ affatto indipendente dal cono quadrico che è servito a costruire la τ e la $\bar{\tau}$.

Se siamo in uno S_{n+1} euclideo e specifichiamo quel cono come il cono isotropo tangente alle calotte si vede che l'invariante ottenuto è proprio l'analogo di quello di Mehmke (considerato dal Buzano).

Ottenuto questo invariante anche i rimanenti possono presentarsi come invarianti di Mehmke relativi per esempio a σ e ad altre calotte del fascio. Infatti se si considera una generica calotta del fascio (definita rispetto alle due prime dal valore $-k$ del birapporto) si vede che il suo invariante di Mehmke con σ (moltiplicato per $(1+k)^n$) è espresso da un polinomio di grado n in k: uno dei coefficienti ha un valore numerico ben determinato (indipendente da σ e $\bar{\sigma}$); gli altri n sono gli invarianti delle due calotte.

Meccanica. — *Forze non conservative nella meccanica quantistica.* Nota di PIERO CALDIROLA, presentata (1) da UMBERTO CISOTTI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

1. Il metodo più razionale che si segue nella quantizzazione delle equazioni del movimento di un sistema dinamico a N gradi di libertà sembra essere quello esposto dal DIRAC (2) che parte dalle equazioni della meccanica classica scritte facendo uso delle parentesi di Poisson:

$$[1] \qquad \dot{q}_r = [q_r , H] \qquad \dot{p}_r = [p_r , H].$$

In esse le q_r sono le coordinate lagrangiane che soddisfano il sistema di equazioni:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial L}{\partial q_r} = 0 \qquad r = 1, 2, 3 \cdots N;$$

la L è la lagrangiana del sistema: $L = T + V$, essendo $2T = \sum_{1}^{N}{}_{r,s}\, a_{rs}\, \dot{q}_r \dot{q}_s$ e V il potenziale che nel caso di una $V = V(q_h , \dot{q}_k , t)$ dà origine alle forze:

$$[3] \qquad Q_r = \frac{\partial V}{\partial q_r} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_r}\right);$$

le $p_r = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}$ sono i momenti coniugati alle coordinate q_r e la H è la funzione hamiltoniana: $H = \sum_{1}^{N}{}_r \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\, \dot{q}_r - L$.

Le equazioni quantistiche si deducono dalle [1] generalizzando le parentesi di Poisson $[x , y]$ con l'imporre la condizione di non commutabilità alle variabili x e y. Si trova allora che se si vuole che tali parentesi conservino nel campo quantistico le proprietà caratteristiche di cui godono nel campo classico, si deve prendere:

$$xy - yx = iK\,[x , y]$$

---

(1) Nell'Adunanza del 5 aprile 1941–XIX.

(2) P. A. DIRAC, *Quantum Mechanics*. Oxford, 1930, pag. 92.

dove $i = \sqrt{-1}$ e K è una costante reale dalle dimensioni di una azione. Il confronto con l'esperienza determina il valore numerico di K: $K = \frac{h}{2\pi}$ essendo h la nota costante di Planck ($h = 6{,}547 \cdot 10^{-27}$ erg. sec.).

L'equazione quantistica del moto si riduce in questo caso all'equazione differenziale di Schrödinger, che appare perciò strettamente vincolata alle equazioni lagrangiane della dinamica classica e quindi alla possibilità di derivare le forze agenti sul sistema da un potenziale V. È stato d'altra parte dimostrato [1] che se si vuole che le Q_h siano funzioni delle q_r, $\dot{q}_s$ e di t ma non delle derivate successive delle q, il potenziale V deve essere una funzione lineare delle $\dot{q}_r$, cioè:

$$V = \sum_0^1{}_n \sum_1^N{}_i \frac{\partial f_{ni}}{\partial q_n} \dot{q}^n$$

da cui si deducono le componenti delle forze:

$$[4] \qquad Q_h = \sum_1^N{}_i \left\{ \frac{\partial f_{0\,i}}{\partial q_h} + \left(\frac{\partial f_{i\,i}}{\partial q_h} - \frac{\partial f_{i\,h}}{\partial q_i} \right) \dot{q}_i \right\} - \frac{\partial f_{i\,i}}{\partial t} .$$

In particolare per un punto materiale si ha, introducendo le funzioni Φ e $\vec{A}$ di x, y, z, t:

$$[4'] \qquad \begin{cases} V = -\Phi + \vec{A} \times \vec{v} \\ \vec{F} = -\operatorname{grad} \Phi - \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \wedge \operatorname{rot} \vec{A} \end{cases}$$

che contengono le note proprietà dei campi tipo elettromagnetici (ad es., il campo di Maxwell e quello mesotonico o di Proca).

Da quanto premesso risulta fra l'altro che non esiste nessun sistema dinamico sottoposto a forze dipendenti dalle $\dot{q}$ ma che non siano del tipo [4] per cui si possa effettuare il passaggio dalle equazioni classiche a quelle quantistiche nel modo detto.

Quando sul sistema operano anche delle forze $F_h = F_h(q_r, \dot{q}_s, t)$ non derivabili da potenziali le equazioni del moto si scrivono:

$$[5] \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_h} = \frac{\partial V}{\partial q_h} + F_h(q_r, \dot{q}_s, t) .$$

Osserviamo che queste equazioni, invarianti per trasformazioni del tipo:

$$x_i = f_i(q_1, \cdots, q_N) \qquad i = 1, 2, \cdots, N$$

---

[1] G. RACAH, « Rend. R. Acc. Lincei » XXV, 223 (1937); P. CALDIROLA, « Rend. R. Istit. Lomb. Scienze », *72*, 379 (1939).

non sono tali per trasformazioni che operano anche sulla variabile t e quindi in particolare per una trasformazione puramente temporale:

[6] $$\tau = \psi(t).$$

Fisicamente questa trasformazione rappresenta una continua alterazione della unità di misura del tempo, avendosi per un intervallo infinitesimo:

$$dt = \varphi(t)\, d\tau \qquad \text{dove:} \qquad \varphi(t) = \frac{1}{\dot{\psi}(t)}.$$

Ci proponiamo ora di cercare se è possibile mediante la [6] trasformare il sistema [5] in un sistema lagrangiano, cioè del tipo [2]. La possibilità di questo passaggio nel caso in cui le Q_r sono proporzionali alle $\dot{q}_r$ è già stata dimostrata da Levi-Civita [1]. Noi supporremo invece le F_r a priori qualsiasi. Dalle [6] si deduce:

$$\frac{dq_r}{d\tau} = \frac{dq_r}{dt}\,\frac{dt}{d\tau}$$

cioè, indicando con f^* la derivata di una funzione f rispetto a τ:

$$\dot{q}_r^* = \dot{q}_r\,\varphi(t) \qquad \text{da cui:} \qquad T^* = T\varphi(t)^2.$$

Si tratta quindi di cercare una funzione $\varphi(t)$ tale che il sistema [5] si trasformi in:

[7] $$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_r^*}\right) - \frac{\partial T^*}{\partial q_r} = \frac{\partial V^*}{\partial q_r}.$$

Passando dalla variabile τ alla t avremo:

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_r^*}\right) - \frac{\partial T^*}{\partial q_r} = \varphi(t)^2 \left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\right) + \frac{\dot{\varphi}(t)}{\varphi(t)}\,\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial T}{\partial q_r} \right\}$$

per cui la [7] può scriversi:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\right) + \frac{\dot{\varphi}(t)}{\varphi(t)}\,\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial T}{\partial q_r} = \frac{\partial V^*}{\partial q_r}\,\varphi(t)^{-2}.$$

Affinchè questa equazione sia del tipo [5] occorrerà determinare la funzione $\varphi(t)$ in modo che sia:

$$\frac{\dot{\varphi}(t)}{\varphi(t)}\,\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} = -F_r \qquad V = V^*\varphi(t)^{-2}.$$

---

[1] T. Levi-Civita, « Atti R. Istit. Veneto Scienze », *53*, 1004 (1896).

Integrando l'equazione differenziale si ha:

$$\varphi(t) = C_1 e^{-\int F_r / \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\right) \cdot dt}.$$

Ma dovendo la φ essere funzione della sola t sarà:

$$\frac{F_r}{\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}} = f(t).$$

Le componenti delle forze non conservative suscettibili di essere trasformate nel modo voluto sono perciò del tipo:

$$F_r = f(t) \sum_1^N{}_k a_{rk} \dot{q}_k.$$

Ne viene che la funzione cercata sarà:

$$\varphi(t) = C_1 e^{-\int f(t)\, dt}$$

e quindi:

$$d\tau = C_1 e^{-\int f(t)\, dt} dt \qquad \text{e} \qquad \tau = C_1 \int e^{-\int f(t)\, dt} dt + C_2$$

essendo C_1 e C_2 due costanti di integrazione che si possono determinare con opportune condizioni iniziali.

Si conclude quindi:

a) Il tipo più generale di forze non conservative che determina un moto tale che, mediante una trasformazione puramente temporale, sia descritto da equazioni del tipo [7] è dato da: $Q_i = f(t) \sum_1^N{}_k a_{ik} \dot{q}_k$;

b) La trasformazione temporale che permette tale passaggio è del tipo:

$$\tau = C_1 \int e^{-\int f(t)\, dt} dt + C_2;$$

c) Per l'equivalenza dei due sistemi deve poi essere: $V^* = V\varphi(t)^2$.

Il caso trattato da LEVI-CIVITA è quindi un caso particolare del precedente in cui $f(t) = \lambda$, essendo λ una costante.

2. Il passaggio dalla meccanica classica a quella quantistica si ottiene partendo dalla lagrangiana $L^* = T^* + V^*$ relativa al sistema (q_r, τ) ed esprimendo l'hamiltoniana $H^* = \sum_1^N{}_r \frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_r^*} \dot{q}_r^* - L^*$ mediante le variabili canoniche q_r e i nuovi momenti coniugati $p_r^* = \frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_r^*}$; trasformando poi la $H^*(q_r, p_r^*)$

nel solito operatore $\mathcal{H}^*$ mediante sostituzione delle p_r^* con gli operatori $-i\frac{h}{2\pi}\frac{\partial}{\partial q_r}$ si arriva alla equazione di Schrödinger:

$$i\frac{h}{2\pi}\frac{\partial\psi}{\partial\tau} = \mathcal{H}^*\left(q_r\,,\ -i\frac{h}{2\pi}\frac{\partial}{\partial q_r}\,,\ t\right)\psi\,.$$

Applicheremo i risultati ottenuti studiando quantisticamente due casi di moto di un punto materiale sottoposto all'azione di forze non conservative.

a) *Punto materiale soggetto a sole forze di attrito* $F = -\lambda mv$:

Le equazioni classiche del moto si scrivono:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{x}_i}\right) + \lambda\frac{\partial T}{\partial\dot{x}_i} = 0 \qquad (i = 1\,,2\,,3)$$

con:

$$T = \frac{1}{2}\,m\,(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2)\,.$$

La trasformazione [6], fissando le costanti C_1 e C_2 in modo che inizialmente $(t = 0)$ si abbia $(d\tau)_0 = (dt)_0$ e $\tau = 0$ diventa:

$$\tau = -\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\,.$$

Avendosi poi:

$$H^* = T^* = Te^{2\lambda t} = \frac{p^{*2}}{2\,m} \qquad \text{e} \qquad V^* = V = 0$$

si dovrà discutere l'equazione di Schrödinger:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial\tau} = \frac{h}{4\pi m}\Delta\psi$$

che ammette per ogni valore di p^* soluzioni periodiche del tipo:

[8] $$\psi = u\,(x_1\,,x_2\,,x_3)\,e^{-\frac{2\pi i}{h}E^*\tau}$$

dove la u è una soluzione dell'equazione:

$$\Delta u + \frac{8\pi^2 m}{h^2}E^* u = 0$$

e quindi del tipo:

$$u = Ae^{2\pi i(\vec{k}\times\vec{r})}$$

con:

[9] $$k^2 = \frac{2\,mE^*}{h^2} = \frac{p^{*2}}{h^2}\,.$$

Queste soluzioni semplici hanno una interpretazione fisica immediata: Trovandosi il sistema in uno stato caratterizzato da un valore ben definito dell'osservabile $\vec{p}^* = \vec{p}e^{\lambda t}$ e quindi di $H^* = He^{2\lambda t}$ la probabilità che la particella si trovi in un punto dello spazio compreso fra x_1, x_2, x_3 e e $x_1 + dx_1$, $x_2 + dx_2$, $x_3 + dx_3$ è la stessa per tutti i punti ed è indipendente dal tempo.

La soluzione più generale si ottiene dalle [8] e [9]:

$$[10] \qquad \psi = h^{-3/2} \iiint \varphi_0(\vec{p}^*)\, e^{-\frac{2\pi i}{h}\left(\vec{l}^* \times \vec{r} - \frac{p^{*2}}{2m}\tau\right)} dp_1^*\, dp_2^*\, dp_3^*$$

e si interpreta fisicamente dicendo che anche quando la particella si trova in uno stato non semplice caratterizzato dalla [10], la probabilità di ottenere per l'osservabile $\vec{p}^* = \vec{p}e^{\lambda t}$ un valore compreso fra $\vec{p}^*$ e $\vec{p}^* + d\vec{p}^*$ è data da:

$$|\varphi^2|\, dp_1^*\, dp_2^*\, dp_3^* = |\varphi_0^2|\, dp_1^*\, dp_2^*\, dp_3^*$$

ed è quindi ancora costante nel tempo.

Assumendo [1] una ψ_0 iniziale praticamente diversa da zero solo in una regione limitata dello spazio:

$$\psi_0(\vec{r}) = Ce^{-\frac{a_0^2}{2}(\vec{r}-\vec{r}_0)^2 + \frac{2\pi i}{h}\vec{l}_0 \times \vec{r}} \qquad (\vec{p}_0^* = \vec{p}_0)$$

si deduce che la probabilità di trovare la particella in un punto qualsiasi si evolve nel tempo secondo l'equazione:

$$P(\vec{r}, \tau) = C|^2 \frac{\alpha_\tau}{\alpha_0} e^{-\alpha_\tau^2\left(\vec{r} - \vec{r}_0 - \frac{\vec{l}_0}{m}\tau\right)}$$

che rappresenta un pacchetto d'onde che si muove sparpagliandosi ($\alpha_\tau < \alpha_0$) secondo la legge:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \frac{\vec{p}_0}{m}\tau = \vec{r}_0 + \frac{\vec{p}_0}{m}\frac{1}{\lambda}(1 - e^{-\lambda t})$$

che è la equazione del moto che si dedurrebbe trattando il problema classicamente.

b) *Punto materiale mobile su una retta attratto verso in punto* 0 *da una forza tipo* $-Ke^{-2\lambda t}x$ *e soggetto a resistenze di attrito* $-\lambda mv$.

---

[1] E. PERSICO, *Fondamenti della Meccanica Atomica*. Bologna, 1936, pag. 180 e 211.

Colla trasformazione:

$$\tau = \frac{1}{\lambda}(1 - e^{-\lambda t})$$

il problema è ricondotto allo studio del moto di un oscillatore armonico nel sistema (x, τ). Infatti si ha:

$$H^* = T^* + V^* = \frac{p^{*2}}{2m} + Kx \quad \text{con} \quad p^* = pe^{\lambda t}.$$

L'equazione temporale di Schrödinger nel nuovo sistema di riferimento ammette soluzioni del tipo:

$$\psi(x, t) = u(x)\, e^{-\frac{2\pi i}{h} E^* \tau}$$

essendo la $u(x)$ una soluzione dell'equazione:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(E^* - 2\pi^2 m \nu_0^2 x^2)\, u = 0 \qquad (K = 4\pi^2 m \nu_0^2)$$

che, come è noto, ammette una serie discreta di autovalori:

$$E_n^* = \left(n + \frac{1}{2}\right) h\nu_0$$

a cui corrispondono le autofunzioni normalizzate:

$$u_n = \frac{1}{N_n} H_n(\xi)\, e^{-\frac{1}{2}\xi^2}$$

dove:

$$\xi = x\sqrt{\frac{4\pi^2 m \nu_0}{h}} \qquad N_n = \sqrt[4]{\frac{h}{4\pi^2 m \nu_0}}\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}$$

essendo H_n i polinomi di Hermite.

Nel tornare al sistema primitivo di riferimento (x, t) osserviamo che gli operatori $\mathcal{H}^*$ e $\mathcal{H} = \mathcal{H}^* e^{2\lambda t}$ sono commutabili e quindi ammettono un sistema comune di autofunzioni; si ha cioè:

$$\mathcal{H}^* \psi_n = \mathcal{H} e^{2\lambda t} \psi_n = E_n^* \psi_n \quad ; \quad \mathcal{H}\psi_n = E_n \psi_n$$

da cui:

[11] $$E_n = E_n^* e^{-2\lambda t} = \left(n + \frac{1}{2}\right) h\nu \quad \text{con} \quad \nu = \nu_0 e^{-2\lambda t}.$$

Si può quindi ancora parlare di stati stazionari caratterizzati da un valore costante dell'osservabile H^*; in questi stati il valore dell'energia (osservabile $H^* e^{-2\lambda t}$) va decrescendo esponenzialmente col tempo. Lo

stesso avviene per le frequenze spettroscopiche emesse nelle transizioni fra due stati:

$$\nu_{n,m} = \frac{E_n - E_m}{h} = (n - m)\, h\nu_0\, e^{-2\lambda t}.$$

Si può ancora studiare quantisticamente il moto del punto materiale partendo con Schrödinger [1] dalla considerazione di un pacchetto di onde del tipo:

$$\psi(x, \tau) = \sum_0^\infty{}_n \left(\frac{A}{2}\right)^2 \frac{\psi_n}{n!} = e^{\pi i \nu_0 \tau} \sum_0^\infty{}_n \left(\frac{A}{2}\, e^{2\pi i \nu_0 \tau}\right)^n \frac{1}{n!}\, e^{-\xi^2/2} H_n(\xi)$$

essendo A una costante. Si ha allora che la probabilità di trovare la particella in x si evolve col tempo secondo la:

$$P(x, \tau) = e^{\frac{A^2}{2} - (\xi - A\cos 2\pi\nu_0\tau)^2} \cdot$$

$$\cdot \cos^2\left[\pi\nu_0\tau + (A \operatorname{sen} 2\pi\nu_0\tau)\left(\xi - \frac{A}{2}\cos 2\pi\nu_0\tau\right)\right]$$

che si interpreta dicendo che il pacchetto di onde, che rappresenta il corpuscolo, si muove approssimativamente senza dispersione di un moto oscillatorio dato da:

[12] $$\xi = A\cos 2\pi\nu_0\tau = A\cos\left[\frac{2\pi\nu_0}{\lambda}(1 - e^{-\lambda t})\right]$$

chè è il risultato a cui si perviene per via classica. Dalla [12] si vede che al variare del tempo l'ampiezza delle oscillazioni rimane costante, mentre la frequenza meccanica si smorza secondo la legge:

$$\nu_m(t) = \frac{\nu_0}{\lambda}\,\frac{(1 - e^{-\lambda t})}{t}.$$

Tale frequenza non è più eguale come nel caso dell'oscillatore armonico alla frequenza spettroscopica $\nu_{n,n-1} = \dfrac{E_n - E_{n-1}}{h}$ data dalla [11] pur tendendo come questa alla frequenza classica ν_0 al tendere di λ allo zero. La velocità della particella va invece diminuendo col tempo secondo la:

$$\dot{\xi} = -A\,\frac{2\pi\nu_0}{\lambda}\, e^{-\lambda t} \operatorname{sen}\left[\frac{2\pi\nu_0}{\lambda}(1 - e^{-\lambda t})\right].$$

Dai problemi trattati si vede l'interesse analitico e forse applicativo dei sistemi quantistici soggetti a forze non conservative, i quali possono possedere stati stazionari in cui certe osservabili conservano valore costante al variare del tempo.

---

[1] E. SCHRÖDINGER, « Naturwiss. », H. *28*, 664 (1926).

Chimica (Chimica biologica). — *La sintesi enzimatica dell'acido ippurico in vitro* [1]. Nota di FRANCESCO CEDRANGOLO e VINCENZO BACCARI, presentata [2] da GAETANO QUAGLIARIELLO, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

In una precedente Nota [3] pubblicata pure in questi « Rendiconti », si venne alla conclusione, sulla base dei dati termodinamici, che la sintesi dell'ac.ippurico da ac. benzoico e glicocolla corrisponde a un guadagno di energia libera e si spiegarono così i risultati negativi, ottenuti con estratti acquoso–glicerici di rene, nei quali certamente era presente l'istozima.

È prevedibile quindi che la sintesi possa procedere solamente in sistemi naturali complessi quali organismi ed organi *in toto* o sezioni sopravviventi, nei quali hanno luogo contemporaneamente altre reazioni con variazione negativa dell'energia libera, oppure in sistemi artificiali formati dall'accoppiamento di soluzioni d'istozima con miscele di altri enzimi e substrati capaci di fornire sufficiente energia libera.

Mentre le nostre ricerche con modelli acellulari, in cui le reazioni accoppiate sono quelle di fondamentale interesse biologico, non hanno ancora fornito risultati degni di rilievo, riferiamo in questa Nota sui risultati ottenuti con fettine e poltiglie di organo.

Sia qui ricordata sull'argomento una brevissima comunicazione di WENDELL GRIFFITH [4] alla 187ª riunione della « Biochemical Society », tenutasi a Glasgow nei primi del giugno 1937 e un successivo articolo di H. BORSOOK e J. W. DUBNOFF [5], ai quali la precedente comunicazione del GRIFFITH risulta sconosciuta. Sia GRIFFITH, sia BORSOOK e DUBNOFF riferiscono di aver dimostrata la sintesi dell'acido ippurico isolandolo da una soluzione in cui fettine sopravviventi erano incubate a pH 7,3–7,4, in presenza di benzoato di sodio e glicocolla. La sintesi avverrebbe, se-

---

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica biologica della R. Università di Napoli.

[2] Nell'Adunanza del 5 aprile 1941–XIX.

[3] Questi « Rendiconti », ser. VII, vol. II, 1940–XVIII, pag. 62.

[4] W. H. GRIFFITH, « J. of Soc. of Chem. Industry », 1937, *56*, 552.

[5] H. BORSOOK e J. W. DUBNOFF, « J. Biol. Chem. », 1940, *132*, 307.

condo Borsook e Dubnoff, nel rene come nel fegato del ratto e del coniglio, secondo Griffith, invece, solo nel fegato di questi animali. I tessuti tritati non sarebbero più in grado di operare la sintesi e Borsook e Dubnoff ne vedono la ragione nella perdita della struttura cellulare (in nessuno dei due lavori sono riferiti dati numerici su questo punto).

Tecnica e risultati.

Gli organi, prelevati dall'animale appena ucciso, erano sezionati come usualmente con un rasoio ben affilato. Le fettine, appena tagliate, erano lavate con Ringer preparato secondo Krebs ed Henseleit [1], già equilibrato con una miscela di 95 % di O_2 e 5 % di CO_2. Come vasi di reazione servivano comuni beutine da 25 cc., attraverso le quali, dopo immessi le fettine, i substrati e il Ringer, si lasciava passare per 5′ la suddetta miscela di O_2–CO_2. Le beutine, attaccate a sostegni montati sull'usuale agitatore del Warburg, erano immerse per i 3/4 nel bagno ad acqua a 37° C; durata dell'incubazione = 6 h. Un eventuale aumento di pressione era evitato grazie a una valvola connessa al tappo della beutina.

Nel caso di poltiglie, il tessuto era tritato per « Latapie » e le modalità dell'esperimento erano quelle precedenti.

La composizione delle singole miscele, come le particolarità di ogni esperimento, risultano dalle tabelle allegate. Alla fine dell'incubazione, i liquidi erano travasati quantitativamente in palloncini da 15 cc. e si aggiungeva cc. 1 di H_2SO_4 2/3N e cc. 1 di tungstato 10 %. Si portava a volume e si filtrava. Un'aliquota del filtrato, pari a cc. 5, era analizzata.

Per gli esperimenti di scissione, riferiti nella tabella III, si rimanda alla tecnica in proposito già descritta nella nostra Nota precedente; per il consumo di O_2 riferito nella tabella V alla nota tecnica manometrica di Warburg.

Il dosaggio dell'azoto aminico è stato eseguito coll'apparecchio manometrico di v. Slyke e i risultati (spesso media di 2 analisi) riportati al volume delle miscele di reazione.

La tabella I mostra che la sintesi dell'ac. ippurico da ac. benzoico e glicocolla in soluzioni equimolecolari (0,005 mol) è positiva in tutti gli undici esperimenti riportati. L'asserzione di W. Griffith che le sezioni sopravviventi di rene di coniglio non sono in grado di operare tale sintesi, non viene perciò confermata dai nostri esperimenti.

Dal valore della costante di equilibrio della reazione: benzoato + + glicocolla ⟶ ippurato + H_2O, H. Borsook e H. M. Huffman [2] calcolano che la sintesi è del 3 % con concentrazione iniziale dei corpi reagenti di 0,1 mol; meno dell'1 % con concentrazioni pari o inferiori

---

[1] H. A. Krebs e K. Henseleit, « Zeit. f. physiol. Chem. », 1932, *210*, 33.

[2] H. Borsook e H. M. Huffman in C. L. A. Schmidt, *The Chem. of the Aminoacids and Proteins*. Ed. C. C. Thomas, 1938, pag. 866.

a 0,01 mol. Poichè nelle nostre esperienze con concentrazione iniziale inferiore a quelle indicate, abbiamo riscontrato una sintesi che va dal 9 al 45 %, possiamo affermare che questa ha dovuto verificarsi in associazione con altre reazioni capaci di fornire sufficiente energia.

TABELLA I.

Sintesi dell'acido ippurico con fettine di rene di coniglio.

Miscela I: glicocolla 0,05 mol. cc. 0,5; puffer sec. KREBS ed HENSELEIT cc. 4,5. Miscela II: fettine mg. 300; puffer cc. 5. Miscela III: fettine mg. 300; glicocolla cc. 0,5; puffer cc. 4,5. Miscela IV: fettine mg. 300; glicocolla cc. 0,5; ac. benzoico 0,05 mol. cc. 0,5; puffer cc. 4.
Periodo d'incubazione a 37° C = 6 h.

Esp. n.	mg. di N aminico in 5 cc. della misc.						$N\text{-}NH_2$ % scomparso	Ac. benzoico sintetizzato ad ac. ippurico %	mg. di ac. ippurico formato
	I	II	I+II	III	IV	III–IV			
a	*b*	*c*	*d* (*b*+*c*)	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*	*l*
1	0,369	0,171	0,540	0,513	0,478	0,035	6,8	10	0,447
2	0,363	0,220	0,583	0,571	0,414	0,157	27,4	45,5	2,007
3	0,335	0,150	0,485	0,460	0,360	0,100	21,7	28	1,278
4	0.327	0.170	0.497	0,465	0,442	0,023	4,9	6,5	0,294
5	—	—	—	0,427	0,375	0,052	12,1	14,8	0,664
6	0,325	0,180	0,505	0,405	0,386	0,019	4,6	5,4	0,242
7	—	—	—	0,517	0,427	0,090	17,4	25,7	1,15
8	—	—	—	0,480	0,395	0,085	17,7	24,2	1,086
9	0,343	0,200	0,543	0,513	0,441	0,072	14	20,5	0,920
10	—	—	—	0,49	0,420	0,070	14,2	20	0,89
11	0,333	0,216	0,549	0,45	0,418	0,032	7,1	9,1	0,409
Media	0,342	0,187	0,529	0,481	0,414	0,067	13,4	19,06	0,844

La tabella II mostra che la sintesi dell'ippurato è possibile anche se il rene, invece che in fettine, è usato sotto forma di poltiglia. Tuttavia, riferita allo stesso peso di tessuto, la sintesi è più grande nel primo che nel secondo caso: posto = 100 la sintesi colle fettine, questa risulta = 26,5 con la poltiglia.

La sintesi è più grande con la poltiglia diluita 5 volte (espl. 1–2) che diluita 15 volte (esp. 3–4). Questo vuol dire che più che l'integrità cellulare ha valore per la velocità della sintesi la diluizione del tessuto, e non conferma quindi la citata conclusione di Borsook e Dubnoff.

Tabella II.

Sintesi dell'acido ippurico con poltiglia di rene di coniglio.

Esp. 1–2 Miscela I: Tessuto passato per Latapie mg. 300; glicocolla 0,05 mol. cc. 0,15; puffer secondo Krebs e Henseleit cc. 1,35. Miscela II: tessuto mg 300; glicocolla cc. 0,15; ac. benzoico 0,05 mol. cc. 0,15; puffer cc. 1,2.
Esp. 3–4 Miscela I: Tessuto mg. 300; glicocolla cc. 0,45; puffer cc. 4,05. Miscela II: tessuto mg. 300; glicocolla cc. 0,45; ac. benzoico cc. 0,45; puffer cc. 3,6.
Periodo d'incubazione a 37° C = 6 h.

Esp. n.	mg. di N aminico della miscela			% $N-NH_2$ scomparso	% ac. benzoico sintetizzato ad ac. ippurico	mg. ac. ippurico formato
	I	II	diff. I–II			
1	0,339	0,304	0,035	10	33	0,447
2	0,325	0,305	0,020	6,1	19	0,255
media	0,332	0,3045	0,027	8,05	26	0,351
3	0,549	0,526	0,023	4,1	7,3	0,294
4	0,545	0,535	0,010	1,83	3,2	0,13
media	0,547	0,5305	0,0165	2,965	5,2	0,212

In stretto rapporto con questi risultati debbono porsi alcuni esperimenti di Krebs [1] i quali mostrano che la *l*–aminoacido–ossidasi è inattivata non dal tritamento e distruzione delle cellule, ma dalla diluizione del protoplasma, che necessariamente accompagna l'estrazione (« effect of dilution »), e che questo vale, oltre che per il suddetto enzima, anche per l'insieme degli enzimi della respirazione cellulare. Ci sembra perciò molto probabile che il diminuire della sintesi coll'aumentare della diluizione possa spiegarsi colla parallela inattivazione di quegli enzimi che

[1] H. A. Krebs, « Bioch. J. », 1935, *29*, 1620.

catalizzano reazioni che per necessità termodinamiche debbono accoppiarsi alla reazione di sintesi dell'acido ippurico.

TABELLA III.

Scissione dell'acido ippurico con organi di cane.
(Estratti preparati secondo KIMURA).

(Miscela I: estratto glicerico cc. 2; puffer fosfati m/15 (ph. 7,4) cc. 5; ippurato di sodio cc. 5 (mg. 150; N = mg 11,73); toluolo gocce 3; acqua a 25 cc. Miscela II: estratto cc. 2; puffer cc. 5; toluolo gocce 3; acqua a 25 cc. Miscela III; puffer cc. 5; ippurato cc. 5; toluolo gocce 3; acqua a 25 cc.

Organo	Ore	mg. N aminico in 25 cc. della miscela			A−(B+C)	Scissione %
		I	II	IV		
rene . .	0	0,63	0,63	0		
	120	6,90	1,51	0,37		
	diff.	+ 6,27 (A)	+ 0,88 (B)	+ 0,37 (C)	+ 5,02	+ 42,79
fegato . .	0	0,5	0,5	0		
	120	2,13	0,63	0,37		
	diff.	+ 1,63 (A)	+ 0,13 (B)	+ 0,37 (C)	+ 1,13	+ 9,63
cuore . .	0	0,25	0,25	0		
	120	1,51	0,88	0,37		
	diff.	+ 1,26 (A)	+ 0,63 (B)	+ 0,37 (C)	+ 0,26	+ 2,2
milza . .	0	0,28	0,30	0		
	120	1,78	1,7	0,25		
	diff.	+ 1,5 (A)	+ 1,4 (B)	+ 0,25 (C)	— 0,15	— 1,3
pancreas .	0	0,41	0,41	0		
	120	4,11	4,11	0,25		
	diff.	+ 3,7 (A)	+ 3,7 (B)	+ 0,25 (C)	— 0,25	— 2,1

Infine le tabelle III e IV mostrano che nel cane la sintesi dell'acido ippurico avviene in quegli organi nei quali avviene pure la scissione. Il grado della sintesi decorre anzi parallelo a quello della scissione. L'idea di

A. L. Quick (1) perciò, che per ragioni teoriche già *a priori* non si potette accettare nella nostra Nota precedente, che cioè l'enzima sintetizzante, cui l'A. dà il nome di ippuricesi, sia diverso da quello scindente, appare evidentemente insostenibile dopo questi risultati.

Tabella IV.

Sintesi dell'acido ippurico con fettine di organi di cane.

Miscela I: fettine mg. 300; puffer sec. Krebs ed Henseleit cc. 4,5; glicocolla 0,05 mol. cc. 0,5. Miscela II: fettine mg. 300; puffer cc. 4; glicocolla cc. 0,5; ac. benzoico 0,05 mol. cc. 0,5.
Periodo d'incubazione a 37° C = 6 h.

Tessuto	mg. di N aminico in 5 cc. della miscela			% $N-NH_2$ scomparso	% Ac. benzoico sintetizzato ad ac. ippur.	mg. ac. ippurico formato
	I	II	I–II			
Rene	0,432	0,346	0,086	19,7	24,5	1,099
Fegato	0,50	0,485	0,015	3	4,2	0,191
Cuore	0,432	0,432	0	0	0	0
Milza	0,445	0,450	— 0,005	0	0	0
Pancreas . . .	0,532	0,531	0,001	0,19	0,3	0,012

I dati della tabella III, che mostrano che nel cane il contenuto d'istozima è molto più grande nel rene che nel fegato, si accordano coi più antichi dati di A. Clementi (2) e con quelli più recenti di H. Kimura (3). Così pure la mancanza dell'enzima nel cuore, nella milza e nel pancreas dello stesso animale, conferma corrispondenti risultati di Kimura. Non così può dirsi del nostro dato positivo di sintesi, certamente al di là dell'errore sperimentale, ottenuto colle fettine di fegato (tab. IV), che viene invece a porsi contro il dato negativo di Borsook e Dubnoff (loc. cit.), relativo ad identico substrato biologico.

Per quanto non direttamente in relazione colla sintesi dell'ac. ippurico, tuttavia degno di rilievo ci sembra il fatto, messo in evidenza dalla tab. I, che per

(1) A. L. Quick, « J. of. biol. Chem. », 1932, *96*, 73.
(2) A. Clementi, « Atti Acc. Lincei », 1923, *32*, II; 172.
(3) H. Kimura, « J. of Bioch. », 1928–1929, *10*, 207; 225.

azione del rene parte dell'N-NH_2 della glicocolla scompare. La somma *d*, infatti calcolata da *b* + *c* (= N-NH_2 della glicocolla + N-NH_2 delle fettine) è sempre, in tutti i sette esperimenti eseguiti, maggiore di *e* (= N-HN_2 trovato delle fettine + glicocolla) e in alcuni casi (esp. 6 e 11) la differenza è molto forte (intorno al 20 %).

TABELLA V.

Consumo di O_2 di fettine di rene di coniglio senza e con aggiunta di glicocolla.

Esp. n.	Durata della respirazione	fettine mg.	mm^3 O_2		Diff. II-I
			Fettine + cc. 5 puffer fosfati m/15 (pH 7,4) I	Fettine + cc. 4,5 puffer + cc. 0,5 glicocolla 0,05 mol. II	
1	1 h	300	369	364	— 5
2	—	—	352	348	— 4
3	2 h	200	403	385	— 18
4	—	—	410	400	— 10

La diminuzione dell'N-NH_2 della glicocolla in presenza di fettine di rene potrebbe far pensare a un processo di deaminazione ossidativa, ma questo è da scartare per i dati della tab. V, i quali mostrano che il consumo di O_2 da parte di fettine di rene, immerse in puffer di fosfati (pH 7,4), è anzi lievemente diminuito dall'aggiunta della glicina. (La stabilità della glicina all'ossidazione e alla deaminazione risulta anche da precedenti ricerche di KREBS loc. cit., BERNHEIM e BERNHEIM [1]; KISCH [2] e NEBER [3]).

La scomparsa anossidativa dell'N-NH_2 della glicina nel rene si presta a molte ipotesi. Anzitutto può pensarsi a una immissione del gruppo NH_2 dell'aminoacido in un legame di natura carboamidica tra glicina e un qualunque altro aminoacido o ac. organico. Ma il fatto che il consumo di O_2 del rene diminuisce, sia pure lievemente, in presenza di glicocolla, fa piuttosto pensare che questa protegga dall'ossidazione qualche substrato facilmente ossidabile.

In 1° luogo è da considerare la possibilità di una condensazione tra glicina e chetocomposti. La condensazione di aminoacidi con aldeidi e chetoni è fatto noto in chimica organica [SCHIFF [4]; SÖRENSEN [5]]. Come prodotto naturale di con-

(1) F. B. BERNHEIM e M. L. C. BERNHEIM, « J. biol. Chem. », 1935, *109*, 130.
(2) B. KISCH, « Enzymol. », 1936, *1*, 97.
(3) M. NEBER, « Zeit. f. physiol. Chem. », 1936, *240*, 59.
(4) H. SCHIFF, « Liebg's Ann. », 1901, *320*, 72.
(5) S. P. SÖRENSEN, « Bioch. Zeit. », 1908, *7*, 45.

densazione è da ricordare l'octopina, isolata da Aksi [1] dal muscolo di *Octopus*, la quale è stata successivamente sintetizzata da Knoop e Martius [2] per riduzione catalitica di una miscela di ac. piruvico e arginina.

Ancora più recente è l'osservazione di S. J. Bach [3], che se la glicina è incubata in anaerobiosi con fettine o estratti di rene, in presenza di ac. piruvico, il 40–60 % dell'$N–NH_2$ dell'aminoacido scompare, senza contemporanea variazione dell'$N–NH_3$, –amidico, –purinico e totale.

Una reazione di transaminazione tra glicocolla ed ac. α – chetoglutarico, certamente possibile nel rene secondo le ricerche di Braunstein e Kritzmann [4], non può però rendere ragione della diminuzione dell'$N–NH_2$, mostrata dai dati della tab. I. Si potrebbe tuttavia supporre che l'ac. glutammico, formato per transaminazione, sia successivamente deaminato, spiegandosi così l'abbassamento dei valori dell'$N–NH_2$. Ma in tal caso è da ricordare che le nostre conoscenze sulla deaminazione dell'ac. glutammico (Euler ed Adler [5]) fanno ritenere tale reazione di natura ossidativa e quindi non potrebbero conciliarsi con tale ipotesi i dati del consumo di O_2 riportati nella tab. V.

Anche il recente schema, suggerito da Bach (loc. cit.), di condensazione della glicina colla glicociammina per formare creatina, non può accordarsi coi nostri risultati, perchè lo schema, ammettendo la condensazione tra l'ac. gliossilico e la glicociammina presuppone una preliminare deaminazione ossidativa dell'aminoacido, la quale invece non appare dai nostri dati.

---

(1) S. Akasi, « J. Bioch. », 1937, *25*, 261.

(2) F. Knoop e C. Martius, « Zeit. f. physiol. Chem. », 1938, *254*, 1.

(3) S. J. Bach, « Bioch. J. », 1939, *33*, 90.

(4) A. E. Braunstein e M. G. Kritzmann, « Enzymol. », 1937, *7*, 129, 138; A. E. Braunstein, « Enzymol. », 1939, *7*, 25.

(5) H. v. Euler, E. Adler, G. Gunther e N. B. Das, « Zeit. f. physiol. Chem. », 1938, *254*, 61.

Geologia. — *Sull'età eodevonica delle «Arenarie ad Harlania» del Sahara.* Nota di ARDITO DESIO, presentata (1) dall'Accademico GIOTTO DAINELLI.

Nella potente serie di conglomerati ed arenarie quarzose che affiora largamente nel Sahara uno dei livelli di riferimento fra i più caratteristici è rappresentato dalle così dette « Arenarie ad *Harlania* ». Si tratta di quelle curiose impronte problematiche che sono state descritte per la prima volta dal CONRAD nel 1838 fra i fossili dei dintorni di New-York e che successivamente sono state segnalate in Russia, in Portogallo e specialmente nel Sahara (Borcu, Ennedi, Tibesti, Hoggar, Fezzan occidentale). La scarsità di altri fossili nella serie suddetta e la comparsa di tali impronte in varie località, spesso molto lontane le une dalle altre, ha richiamato più volte l'attenzione dei geologi sahariani e specialmente di quelli francesi i quali si sono ripetutamente preoccupati di stabilire l'età di questo prezioso livello di riferimento.

A questo proposito si può riconoscere che gran parte degli autori (DALLONI, DENAEYER, FRITEL, KILIAN, LACROIX, TILHO, ecc.) si era accordata intorno ad un'età neosilurica del livello ad *Harlania* per analogia con quelli americani ed europei e ciò specialmente a seguito di una osservazione eseguita da KILIAN (2) presso in Ezzan, a mezzogiorno di Gat.

In questa regione KILIAN avrebbe notato un passaggio laterale fra le Arenarie ad *Harlania* e le argille psammitiche a Diplograptidi di In Geran, località questa distante una cinquantina di chilometri dalla precedente.

Le mie ricerche geologiche nel Fezzan occidentale, sulle quali ho già avuto occasione di riferire più o meno sommariamente in passato (3), mi consentono ora che lo studio paleontologico del materiale raccolto in

---

(1) Nell'Adunanza del 5 aprile 1941-XIX.

(2) C. KILIAN, *Sur l'âge des grès à H a r l a n i a et sur l'extension du Silurien dans le Sahara oriental.* « C. R. Accad. Scienc. », t. 192, pag. 1742, Parigi 1931.

(3) A. DESIO, *Studi geologici sulla Cirenaica, sul Deserto Libico, sulla Tripolitania e sul Fezzan Orientale.* « Missione R. Accad. d'Italia a Cufra », vol. I, Roma, 1935. Id. *Riassunto sulla costituzione geologica del Fezzan.* « Boll. Soc. Geol. Ital. », vol. LV, fasc. II, Roma, 1936 ecc.

quella regione è ultimato, di precisare meglio l'età delle Arenarie ad *Harlania*, tanto più che i miei resultati non coincidono con quelli dei geologi precedentemente ricordati.

Nella valle del Tanezruft fra Sèrdeles e Gat è magnificamente esposta tutta la serie che dalle Arenarie dei Tassili, giacenti con discordanza sulla serie cristallina archeozoica, sale sino ai livelli fossiliferi del Devonico. Le « Arenarie ad *Harlania* », oltre a questo tipo di impronte, contengono anche *Climachtichnites Chiesai* n. f. e *Cruziana* cfr. *furcifera* Delg.

Sotto il livello ad *Harlania* esistono altri livelli con impronte problematiche e cioè uno, ad immediato contatto, con *Kinneya labyrinthica* n. f. e *Sabellarifex parvus* n. f. (m. 110 di potenza); un altro sottostante ad *Interconulites* (m. 0,50) e finalmente un terzo a *Nereites Castroi* Delg. potente m. 40. Sotto a questo giacciono le Argille a Graptoliti del Tanezruft. L'età di queste è ormai ben definita da un recente studio paleontologico (1). Si tratta di Gotlandiano e più precisamente del Llandovery, caratterizzato da una nuova forma di *Climacograptus*, il *Cl. libycus* associata a *Cl. medius* Tornq., a *Diplograptus modestus* Lapw. ecc. Ma livelli a graptoliti più elevati di questo hanno fornito pure Monograptidi e cioè *Mon. Nilssoni* (Barr.) e *Mon.* cfr. *dubius* (Suess), forme diffuse in Inghilterra, Germania ecc. in livelli alti del Gotlandiano e più precisamente la prima nel Ludlow, la seconda tanto nel Ludlow, quanto nel Wenlock. Questo livello corrisponde a livelli molto alti della serie sottostante alle Arenarie ad *Harlania*.

I livelli più elevati della serie a Graptoliti, livelli che anche litologicamente si distinguono dai primi per una facies più arenacea, appartengono dunque al Ludlow e quindi alla parte più elevata del Silurico superiore.

Le Arenarie ad *Harlania* vanno quindi riferite al Devonico, tanto più se si comprende con questa espressione tutta la potente pila di arenarie ch'è interposta tra la serie graptolitica e la serie a fossili marini di Sèrdeles.

Ma una riprova di questa attribuzione si può avere in base all'età delle « Arenarie di Sèrdeles ». Come è stato dimostrato dallo studio paleontologico del dott. Borghi (2), la fauna di tali arenarie caratterizza il Devonico medio; ne fa fede la grande diffusione delle tre specie *Spirifer dombrowiensis* Gür., *Rhipidomella Vanuxemi* Hall e *Camarotoechia neapolitana* Wh. D'altra parte la serie arenacea compresa fra le argille a Grapto-

---

(1) A. Desio, *Fossili neosilurici del Fezzan Occidentale*, « Ann. del Museo Libico di Storia Nat. », vol. II, pag. 13, Tripoli, 1940.

(2) P. Borghi, *Fossili devonici del Fezzan*, « Annali Museo Libico Storia Naturale », vol. I, pag. 115, Tripoli, 1939.

liti del Tanezruft ed il banco fossilifero suddetto appare del tutto continua, senza alcuna traccia di lacune o di discordanze. Ne viene di conseguenza che le arenarie ad *Harlania* devono essere riferite proprio al Devonico inferiore.

Ci si chiede ora: sono da considerarsi contemporanei tutti questi livelli e sono, quindi, da riferirsi tutti al Devonico inferiore ? Per quanto non si possa attribuire un valore cronologico assoluto alle impronte suddette appare tuttavia molto verosimile che tutte le varie segnalazioni di *Harlania* del Sahara appartengano su per giù allo stesso orizzonte, da includersi nel Devonico. Il passaggio laterale segnalato dal KILIAN con la serie a Graptoliti di In Geran meriterebbe di essere riesaminato, data la grande difficoltà di stabilire l'esatta continuità orizzontale di uno stesso gruppo di strati fra due punti distanti una cinquantina di chilometri. Viene fatto di pensare che anche in quella regione si tratti di livelli stratigraficamente molto prossimi, ma uno (quello a Graptoliti) sottoposto all'altro (quello ad *Harlania*).

Fisiologia (Fisiologia comparata). — *Esperienze dirette a precisare i processi di formazione dell'acido urico nei bachi da seta* (1). Nota di Anna Brighenti, presentata (2) dall'Accademico Filippo Bottazzi.

Dalle esperienze condotte lo scorso anno (3) risultava che la iniezione di sali d'ammonio, come formiato e carbonato, è seguìta da un notevole aumento di acido urico nel sangue, che sembra doversi riportare ad una sintesi dell'ammoniaca, malgrado non si verifichi un aumento di acido urico nel corpo *in toto*, il che dipende da intensificata escrezione.

Risultava anche che la iniezione di aminoacidi come glicocolla ed asparagina, anche in dosi assai elevate, non porta variazione nel contenuto in acido urico, come se acido urico non si formasse dall'azoto degli amino-acidi. Invece l'iniezione di acidi tricarbonici (malonico e tartronico) addizionati o no ad urea, porta un forte aumento di acido urico nel sangue come negli escrementi; ma non si sa se per combinazione con l'urea, secondo la teoria di Wiener, o direttamente con CO_2 e NH_3, come, secondo Clementi, avviene negli uccelli. Ad iniezione di urea non è seguito alcun aumento di acido urico, come se l'urea non costituisse un passaggio obbligato per la formazione di acido urico.

Quest'anno ho proseguito attivamente le esperienze dirette a precisare i processi di formazione dell'acido urico nell'organismo dei bachi da seta.

Ho confermato che all'iniezione di carbonato d'ammonio segue aumento di acido urico nel sangue (già dopo 3 ore e più dopo 8). Un aumento non è sicuramente percettibile nella massa dei tessuti (nel corpo già dissanguato), mentre pare aumenti la quantità di acido urico emessa con gli escrementi o almeno la concentrazione (dopo 15 ore hanno emessi escrementi in quantità metà ma con concentrazione doppia di acido urico).

---

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Zoologia « Lazzaro Spallanzani » della R. Università di Pavia.

(2) Nell'Adunanza del 5 aprile 1941-XIX.

(3) Brighenti e Colla, *Esperienze dirette a precisare il processo di formazione dell'acido urico nei bachi da seta*. « Arch. Zool. Ital. », XXVIII, 349-367, 1940.

Ho poi provato ad iniettare xantina e nucleinato di sodio, per vedere se acido urico potesse formarsi da ossidazione di basi puriniche come xantina e dalle nucleine dell'alimento. Nell'esperienza con bachi « Perugia » questa origine sembra molto improbabile (e in ogni modo sarebbe assai poco importante). Però le determinazioni sui bachi in toto (già dissanguati) mostrando dopo 18 ore un sensibile aumento del contenuto in acido urico di fronte al controllo, lascerebbero sospettare che detti processi possano avvenire, se non nel sangue, almeno nell'interno dei tessuti. Tanto più che negli escrementi si trova, dopo iniezione di xantina una quantità di acido urico sensibilmente più elevata. Ma l'esperienza con bachi « Europa 18 » ha dato risultato completamente negativo.

Certo conviene ripetere le esperienze e in caso di risultati positivi esplorare estratti di tessuti per la xantinoossidasi.

Sarebbe anche interessante ripetere le esperienze con ipoxantina e con altre basi puriniche.

Ho voluto poi controllare l'effetto di iniezioni di glicocolla ed ho avuto anche quest'anno risultato negativo; l'introduzione parenterale di questo aminoacido, in soluzione molto concentrata, non eleva la concentrazione in acido urico nè del sangue, nè dei tessuti, nè degli escrementi.

Dunque l'N che deriva dalla desaminazione di questo aminoacido non è utilizzato nella sintesi dell'acido urico.

Anche l'iniezione di urea non determina certo spiccato aumento di acido urico nel sangue e negli escrementi, come si era già visto nello scorso anno.

Pare dunque che l'organismo del baco non sia capace di utilizzare l'urea per la sintesi dell'acido urico. Tuttavia un certo aumento pare risulti da questa esperienza e potrebbe forse spiegarsi con la sintesi di un po' di acido urico a mezzo dell'NH_3 liberata per fermentazione ammoniacale di una piccola quantità dell'urea iniettata in eccesso.

Questa interpretazione è appoggiata anche da un altro risultato sperimentale: l'iniezione di ureasi non diminuisce la quantità di acido urico, ma anzi l'aumenta, fornendo con la decomposizione dell'urea NH_3 per la sintesi di acido urico.

È sopratutto ben evidente il risultato dell'iniezione contemporanea di urea e di ureasi. Nel sangue la concentrazione dell'acido urico è già cresciuta sensibilmente dopo 2 ore; e dopo 15 è salita enormemente, ad un valore quasi sestuplo.

E anche nel corpo *in toto* la concentrazione urica è sensibilmente cresciuta, benchè questo non si possa prendere a sicuro indice di una parimenti elevata concentrazione urica nella massa dei tessuti, data una possibile ritenzione di escrementi.

Difatti dopo 15 ore i bachi hanno emesso soltanto gr. 0,350 di escrementi in confronto a gr. 3,740 del controllo. Onde la quantità di acido

urico escreta è, malgrado la maggiore concentrazione, assai bassa. Vero è che già dopo 15 ore parecchi bachi erano morti; e molti erano ancora paretici, per intossicazione ammoniacale.

* * *

Ho poi eseguito parecchie esperienze di iniezione di acido urico in bachi a pelle opaca e bachi a pelle trasparente, per vedere di confrontare il loro comportamento.

La questione si presentava molto interessante. I bachi a pelle opaca accumulano urati nall'ipoderma, mentre i bachi a pelle trasparente no. Questi in compenso escretano una quantità maggiore di acido urico.

Ora bisognerebbe appurare se i bachi a pelle trasparente non accumulano acido urico nei tegumenti perchè non hanno la capacità di farlo o perchè, allontanandone maggiori quantità con l'escrezione, non hanno bisogno di farlo (Jucci).

In questo secondo caso iniettando un eccesso di acido urico in bachi a pelle trasparente dovrebbe potersi determinare l'accumulo e quindi l'opacità della pelle.

Purtroppo le esperienze hanno dato risultati tutt'altro che dimostrativi.

Iniettavo ai bachi 0,2 cc. (non è ben iniettare una quantità maggiore di liquido) di una soluzione di acido urico 0,1 %: cioè una quantità di mmg. 0,2 per baco.

A dir la verità una quantità così piccola di acido urico c'era probabilità di ritrovarla solo se si fosse in maggior parte sciolta nel sangue, di cui avrebbe potuto decuplicare la concentrazione in acido urico (calcolando a mmg. 4 per 100 cc. la concentrazione e a 0,5 cc. il volume del sangue in un baco – e quindi a mmg. 0,02 il contenuto in acido urico del sangue di un baco – l'iniezione di mmg. 0,2 avrebbe potuto portare il contenuto a 0,22 e quindi la concentrazione a mmg. 44 per 100 cc. Mentre calcolando a mmg. 2 la concentrazione in acido urico di 1 gr. di tessuti, e il peso di 1 baco a gr. 1,5 e quindi la quantità in un baco a mmg. 2, l'incremento di mmg. 0,2 già non sarebbe stato troppo facile a svelare).

Per questo nelle ultime esperienze ho iniettato anzichè la soluzione 0,1%, una sospensione 2 %, cioè una quantità di acido urico 20 volte maggiore: 4 mmg. per baco.

Ora in una di queste ultime esperienze pare che tutto l'acido urico iniettato si ritrovi. Giacchè dopo iniezioni di 4 mmg. per baco (sotto forma di sospensione al 2 %), 3 mmg. se ne sono ritrovati nel corpo dissanguato; mentre di fronte ad un eccesso di acido urico nel sangue (la concentrazione si è più che triplicata), si verifica una deficienza negli escrementi.

Ma già in altra simile esperienza si ritrovano in più, dopo l'iniezione di 4 mmg. per baco, solo mmg. 1,5 per baco nel corpo dissanguato e 0,5 negli escrementi; quindi poco più che la metà dell'acido urico introdotto si ritrova.

E in una terza esperienza di un incrocio a base Novi non si verifica sensibile aumento nella concentrazione nel sangue, non è possibile verificare se ci sia aumento nel corpo, ed è dubbio se vi sia negli escrementi.

Quanto alle quattro esperienze nelle quali è stata iniettata la soluzione di acido urico 0,1 % esse dànno un risultato negativo.

a) Non c'è chiaro aumento di concentrazione nel sangue, è dubbio che ci sia un aumento nella pelle, e negli escrementi compare la quantità normale;

b) Non vi è certo alcun aumento di concentrazione di acido urico nel sangue; non vi è neanche nella pelle; ed anche negli escrementi non compare nemmeno la quantità normale;

c) Non pare vi sia aumento di acido urico nel sangue, e sia dalla pelle che dagli escrementi si ricava una quantità di acido urico inferiore alla normale;

d) L'aumento di acido urico nel sangue è appena percettibile, ma un aumento sensibile c'è nel corpo *in toto* e corrispondentemente una spiccata deficienza negli escrementi.

L'esperienza *d* è su bachi a pelle trasparente, mentre *a*, *b* e *c* su bachi a pelle opaca.

Si può concludere, mi pare, che quando si inietta acido urico questo non resta sciolto se non in piccola quantità nel sangue; il resto si deposita nei tessuti e se la quantità è piccola, come nel caso che venga iniettata una soluzione, è troppo difficile seguirne la sorte.

Se poi si inietta una quantità discreta di acido urico, in forma di sospensione, si urta contro una tossicità grande che riesce letale dopo poche ore dall'iniezione alla maggior parte dei bachi; ed è tutt'altro che facile assodare se l'acido urico si depositi o no nei tegumenti.

Pare che non sempre tutto l'acido urico iniettato si ritrovi nell'organismo e questo ci ha fatto pensare alla possibilità di una parziale trasformazione in allantoina.

Fisiologia (Fisiologia comparata). — *L'acido urico nello sviluppo larvale della «Philosamia ricini»*. Nota di Anna Brighenti [1], presentata [2] dall'Accademico Filippo Bottazzi.

Dopo aver seguìto le variazioni del contenuto in acido urico durante lo sviluppo larvale del *Bombyx mori* ho creduto utile estendere lo studio alla *Philosamia ricini*.

Questo bombice strettamente affine alla *Philos. cynthia* – il bruco dell'ailanto già naturalizzato in Italia, benchè poco frequente e sopratutto poco abbondante – è stato nell'anno 1939 importato dall'India inglese allo stato di uova ed allevato nel nostro Istituto, per avviarne la selezione a scopo industriale.

Una prima generazione in aprile è stata allevata nei primi giorni a ricino e poi ad ailanto. Una seconda generazione in luglio è stata allevata in più lotti, parallelamente a ricino e ad ailanto, per confrontare l'effetto di questi due diversi alimenti nella curva di sviluppo e nel metabolismo.

I dati da me raccolti dimostrano per l'acido urico un comportamento analogo a quello presentato dal *Bombyx mori*.

Di età in età il contenuto in acido urico del corpo va crescendo rapidamente da 0,245 (mmg. per 100 individui) alla nascita a 3,35 al I° sonno e muta, a 15,62 al II° sonno (faccio la media fra il valore trovato per il sonno e il valore trovato per la muta), a 45,8 al III° e 143,2 al IV°.

Calcolando gli accrescimenti assoluti $\left(\text{a. a.} = \frac{\text{peso in sonno}}{\text{peso di nascita}}\right)$ e gli accrescimenti relativi $\left(\text{a. r.} = \frac{\text{peso in sonno}}{\text{peso in sonno precedente}}\right)$:

	I	II	III	IV
valore iniziale	0,245	—	—	—
valore finale	3,35	15,62	45,8	143,2
accresc. assoluti	7,31	63,75	187,34	625,3
accresc. relativi	7,31	4,66	2,93	3,34

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Zoologia «Lazzaro Spallanzani» della R. Università di Pavia.

(2) Nell'Adunanza del 5 aprile 1941-XIX.

si vede che *se la quantità di acido urico nel suo valore assoluto va crescendo sempre più imponentemente, in realtà però questo incremento diviene nelle successive età assai più modesto che nella prima.*

Nella I^a età la quantità di acido urico si moltiplica 7,3 volte; nella II^a 4,6; nella III^a 3,3. È un fenomeno analogo a quello che si verifica per l'accrescimento ponderale:

	I	II	III	IV
peso iniziale	0,125	0,56	2,7	16,8
peso finale	0,58	2,8	17,1	88,8
accresc. assoluto	0,464	22,4	136,8	710,4
accresc. relativo	0,464	50,9	6,33	5,28

Fatto sta che la concentrazione dell'acido urico nel corpo (mmg. di acido urico per 1 gr.) *si abbassa fortemente durante lo sviluppo*: da 19,67 alla nascita a 5,8 in I° sonno e 6,05 in I^a muta; a 4,9 in II° sonno e 6,15 in II^a muta; a 2,6 in III° sonno e 2,7 in III^a muta; a 1,7 in IV° sonno.

Si ha anzi una progressiva ipouristia come quella riscontrata per il *Bombyx mori.*

Quanto al contenuto in acido urico del sangue e della pelle ho raccolto soltanto pochi dati, dai quali sembra che nel passaggio da massimo accrescimento a maturità la concentrazione del sangue diminuisca anzichè aumentare, mentre nei tegumenti rimane presso a poco costante. Non si scorge indizio da questi dati di una ridissoluzione di urati come quella che caratterizza la maturazione di *Bombyx mori.* Sarà molto interessante studiare il metabolismo dell'acido urico, comparativamente negli *Attacus* normali e nella razza a pelle trasparente che abbiamo già isolata in Laboratorio e che sembrerebbe una mutazione parallela ai trasparenti del *Bombyx* (Jucci).

Carattere preliminare hanno pure i pochi dati raccolti per le crisalidi; per ciascun sesso i due dati risultano molto differenti tra loro, probabilmente per diversità di stadio di sviluppo della crisalide.

Per gli escrementi è chiara, anche attraverso alcune oscillazioni, una curva ascendente dalla I^a età alla V^a, e in genere un contenuto di acido urico superiore a quello che generalmente si riscontra nei *Bombyx.*

I dati sin'ora raccolti certo incoraggiano a condurre sull'*Attacus* (e magari parallelamente nelle due specie affini: l'*Attacus* (o *Phylosamia*) *ricini* e *l'Attacus cynthia*) un studio accurato dei processi escretivi, come nel *Bombyx mori*: tanto più che l'assenza di una stretta monofagia, (l'Attaco cresce molto bene anche con l'ailanto, benchè certo si sviluppi molto più rapidamente e rigogliosamente col ricino), permette di studiare l'effetto di differenti regimi alimentare sul metabolismo dell'azoto.

Tabella I.

La concentrazione dell'acido urico nei tessuti, durante i periodi di sonno (S) e di muta (M).

Stadio	N. indiv. usati	Peso in gr.	Peso 100 indiv. gr.	Contenuto in acido urico nel corpo in toto (in mg.)	
				per 1 gr. tessuti	per 100 individui
19/4 II° S	5	0,140	2	9,3	26
II^a M	5	0,147	2	10,9	32
24/4 III° S	5	0,904	18	4,1	73
III^a M	5	0,765	15,3	5,3	82
3/5 IV° S	3	2,692	89,6	3	272
IV^a M	3	2,419	80,6	4,4	356
(seconda generazione)					
7/7 neonati	230	0,325	0,13	18,6	0,24
				17,7	0,23
	230	0,305	0,12	21,6	0,26
				21,1	0,25
7/7 I° S	100	0,582	0,58	5,9	3,4
				5,7	3,3
8/7 I^a M	100	0,553	0,55	5,6	3,1
				5,5	3,6
10/7 II° S	10	0,286	2,8	4,7	13,6
				5,1	14,7
II^a M	10	0,278	2,7	6,3	17,3
				6	16,7
17/7 III° S	5	0,858	17,1	2,6	45,8
III^a M	5	0,840	16,8	2,7	45,8
21/7 IV° S	3	2,665	88,8	7,7	153,2

TABELLA II.

L'acido urico nel sangue e nella pelle della larva, e nel corpo della crisalide.

Stadio	N. indiv. usati	cc. sangue prelevati	Conten. in acido urico sangue mmg. per 100 cc. di sangue
14/5 V^a e.	3	1	4,3
25/5 mass. cresc.	2	1	6,1
maturi	2	1	4,3

	N. pelli	Peso (fresc.) in gr.	Cont. in acido urico pelle	
			mmg. per 1 gr.	mmg. per 100 pelli
22/5 mass. cresc.	2	2,649	5,2	699,2
maturi	2	2,564	5	582,4

	N. cris.	Peso	Peso cris.	Conten. in acido urico delle crisalidi	
				mmg. per 1 gr.	mmg. per 100
vigilia sfarfall.	2 ♂	3,932	196,6	11	21,8
	2 ♂	3,742	187,1	6,8	12,8
	2 ♀	4,275	213,7	9,4	20,3
	2 ♀	4,906	245,4	11,2	27,5

Un tale studio può presentare, oltre l'interesse teorico, anche possibilità di applicazioni pratiche, dato che l'*Attacus* è probabilmente destinato ad avere una parte importante nello sviluppo della sericultura nel nostro Impero Africano.

L'allevamento del bombice del gelso incontra sempre maggiori difficoltà, per un complesso di ragioni agricole, economiche e sociali, specialmente nell'Italia settentrionale. Lo sviluppo della sericoltura nelle nostre Colonie dell'Africa orientale potrebbe fornire all'industria serica Italiana la materia prima indispensabile (JUCCI).

Ma occorrono parecchi anni prima che la cultura del gelso si diffonda largamente laggiù e frattanto l'importazione dell'*Attacus ricini* in Abissinia e il suo allevamento col ricino già largamente diffuso in quelle regioni, potrebbe fornire all'industria nazionale milioni di quintali di prodotto serico.

COMMEMORAZIONE DI EMILIO CHIOVENDA

tenuta (1) da Enrico Carano, Aggregato alla R. Accademia d'Italia

Con profonda commozione richiamo alla Vostra mente la dotta, documentata relazione che Emilio Chiovenda ci lesse nell'adunanza del 20 dicembre scorso intorno ai rapporti fra il botanico inglese James Bruce e l'italiano Luigi Balugani, tenendo desta la nostra attenzione per oltre mezz'ora sopra un argomento scientifico sì, ma a sfondo storico-patriottico.

Al termine della seduta il collega Longo ed io, suoi vecchi amici, ci rallegrammo con Lui non solo per la bella relazione, ma anche e non meno per l'aspetto sano e vegeto che dimostrava.

Ebbene, appena a due mesi di distanza, la mattina del 20 febbraio, alle 9, un istante prima che entrassi in lezione, un telegramma della signora Chiovenda mi gettava nel più grande sconforto: « Emilio mancato questa mattina ». Non avrei sofferto di più se mi fosse giunta la notizia della morte di un fratello. Il caro Collega era morto il giorno 19 alle ore 8,15, come seppi dal suo assistente prof. Vignoli.

Egli era per chiudere quest'anno la sua carriera didattica, essendo nato il 18 maggio 1871; ma il fato aveva stabilito che Egli dovesse soccombere al suo posto di lavoro, prima di raggiungere i comodi ma tristi ozî della pensione. Onorevole fine, come forse il caro Amico la desiderava, a coronamento di una vita operosa, tutta pervasa di nobili ideali per la scienza prediletta, cui Egli si era dato con vero trasporto già prima che intraprendesse gli studi universitari.

Conobbi Emilio Chiovenda nella primavera del 1899, quando, studente del 2° anno di Scienze Naturali, ero per sostenere l'esame di Botanica e dovevo quindi in precedenza frequentare le esercitazioni obbligatorie di sistematica, da Lui impartite in qualità di assistente del Pirotta. Ebbi l'impressione, la prima volta che si presentò nella sala delle esercitazioni, che l'assistente non fosse meno rigido del Direttore, con l'aggravante di un contegno più riservato verso di noi studenti. Com'ero lontano

(1) Nell'Adunanza del 5 aprile 1941-XIX.

dalla realtà in quel mio primo giudizio sul carattere dell'Amico! Quando tre anni dopo, appena laureato, fui assunto anch'io al posto di assistente e divenni suo collega, potei conoscerlo molto meglio ed ammirarne, modificando completamente la mia iniziale impressione, la delicatezza del sentire, la grande bontà d'animo, l'affettuosità sincera ed incondizionata verso gli amici.

Quante passeggiate fatte insieme la sera uscendo dai nostri laboratori; quante escursioni botaniche nei dintorni della città e nei centri vicini, con l'intento di raccogliere materiale per la scuola o per le nostre private collezioni! Ricordo ancora i suoi malcontenuti entusiasmi allorchè c'imbattevamo in un esemplare raro o in una specie nuova per la regione; bastava quel ritrovamento a renderlo felice e soddisfatto per tutto il resto della gita. Talvolta succedeva, andando in comitiva, che non vedevamo più il caro Amico in mezzo a noi; allora il più giovane veniva distaccato per andare in cerca di Lui e ritrovarlo, dopo percorsa parecchia strada, tutto intento a raccogliere non uno, ma vari esemplari di una medesima specie per Lui interessante ed a studiarne l'ambiente, dimentico del tutto della compagnia degli altri gitanti!

Le distrazioni del Nostro suscitavano spesso la meraviglia dei colleghi di laboratorio e del personale subalterno. Quando per esempio era assorto in un argomento che Gli premeva in modo particolare, spesso astraeva completamente dal mondo esterno e si scordava perfino di allontanarsi per l'ora del pranzo; cosicchè quando il custode puntualmente riprendeva servizio nel pomeriggio e Gli chiedeva perchè fosse rientrato così presto nell'Istituto, Egli per tutta risposta domandava a sua volta se era sonato mezzogiorno! Era un forte lavoratore, capace di rimanere ore ed ore inchiodato al suo tavolo, anche nelle giornate rigide d'inverno, quando nel suo laboratorio senza riscaldamento, che poi era una delle grandi sale dell'erbario, esposta a tramontana, la temperatura si abbassava fino a pochi gradi sopra zero e le sue mani divenivano gelide come quelle di un cadavere.

Romano di nascita, Emilio Chiovenda era nel sangue di origine piemontese. I suoi genitori Andrea Chiovenda, facoltoso proprietario, e Maria Antonia Pirazzi Maffiola, donna di eletti sentimenti, si erano stabiliti nella capitale dello Stato pontificio e quivi vissero per molti anni, finchè in età avanzata si decisero a ritornare nel loro nativo Piemonte, a Premosello, comune della provincia di Novara.

Il piccolo Emilio visse appena l'infanzia in famiglia, chè già a sei anni fu affidato al Collegio Rosmini di Stresa per frequentarvi le scuole primarie, donde passò a quello di Domodossola per compiervi gli studî medî. Egli sempre mi raccontava che già negli anni del ginnasio e poi del liceo un suo insegnante lo aveva addestrato nello studio e nella determina-

zione delle piante, evidentemente, io immagino, perchè aveva scorto nel giovane allievo una particolare disposizione per tale ramo dell'amabile scienza. Difatti quando il Nostro giungeva all'Università era abbastanza edotto della flora della sua provincia, nonchè di quella delle finitime Alpi Pennine e Lepontine. Tuttavia Egli, che possedeva le doti precipue del naturalista, s'iscrisse nell'anno accademico 1890–91 al primo corso per la laurea in Medicina nella Università di Roma. Soltanto quando sentì che l'aria della sala anatomica era meno salutare di quella dei campi in cui era abituato a scorazzare, si avvide che aveva sbagliato strada e si mise subito su quella giusta, facendo nell'anno successivo passaggio al secondo corso di Scienze Naturali, nelle quali discipline avrebbe dovuto laurearsi, compiuti i quattro anni, nel luglio o nell'ottobre del 1894. Ma non fu così, perchè tutto preso dalla esplorazione della vasta campagna romana che allora, allo stato incolto, esercitava un fascino particolare non solo sugli artisti, ma anche su noi botanici, si era distratto completamente dalla laurea ed aveva, ancora studente, iniziato la pubblicazione di una serie di contributi alla migliore conoscenza della flora di Roma.

Aggiungo che in quell'epoca l'Erbario del nostro Istituto veniva arricchendosi di abbondanti materiali provenienti dall'Africa Orientale, lo studio dei quali non poteva non allettare il caro Collega, che in tal modo avrebbe fatto conoscenza anche con la flora esotica. Trascorsero in tali preferite occupazioni gli anni dal 1895 al 1898, durante i quali Egli, pur lavorando con un'assiduità ed un fervore ammirevoli ed arricchendo di nuovi lavori la sua produzione scientifica, nulla faceva per laurearsi. A farlo decidere non valsero tanto le esortazioni, prima, e poi le minacce del suo maestro Pirotta, quanto la posizione imbarazzante in cui lo mise il futuro suocero, il comm. Camillo Lanza, in quei tempi civilista di grido del foro romano, col suo preciso e categorico *aut aut*. Non c'era più da esitare: Emilio Chiovenda abbandonò per qualche tempo il vascolo e le piante dell'Africa e ritornò studente. Nel giugno di quell'anno si addottorò in Scienze Naturali e il 30 dello stesso mese condusse a nozze l'avvenente signorina Matilde Lanza, alla quale dedicò, finchè visse, tutte le sue premure e ne riebbe uguale affetto.

Già prima che Egli fosse laureato, il prof. Pirotta, riconoscendone appieno i meriti e la speciale disposizione per la sistematica, lo nominò dal 1° novembre 1896 «Conservatore dell'Erbario». Da questo posto passò nel 1905 a quello di «Conservatore dell'Erbario Coloniale» in seguito alla fondazione presso l'Istituto Botanico di Roma, per opera del Pirotta, di un Erbario il quale, oltre a raccogliere tutte le specie viventi nelle nostre colonie, doveva, nelle intenzioni del Pirotta, riuscire di pubblica utilità per informazioni e notizie intorno alle piante ed ai prodotti vegetali coloniali più importanti.

Nel 1909 conseguì la libera docenza e poco dopo, in quello stesso anno, partì per un viaggio in Abissinia, accompagnando come botanico il commendatore G. Ostini, R. Agente commerciale a Gondar. Colà si trattenne fino alla fine di dicembre, durante il quale tempo ebbe agio di raccogliere in varie regioni, Eritrea, Tigrè, Tzelemti, Semien, Uogerà e Dembia, un materiale considerevole di piante che valse ad arricchire in larga misura le collezioni dell'Erbario Coloniale.

Nel 1915, essendo passato detto Erbario col rispettivo personale da Roma a Firenze, dove era in progetto la creazione di un grandioso Erbario Nazionale, anche il Chiovenda dovè trasferirsi in quella città e vi rimase fino al 1° marzo 1926, allorchè, vinto un concorso universitario e riuscito il primo della terna dei vincitori, passò a dirigere l'Orto Botanico di Catania. Il 1° novembre 1929 fu chiamato all'Università di Modena e il 29 ottobre del 1935 a quella di Bologna, dove avrebbe terminato onorevolmente la sua carriera accademica se la morte non lo avesse rapito anzitempo.

Come maestro ed educatore della gioventù studiosa Emilio Chiovenda possedè doti ammirevoli, fra tutte le altre principalmente l'assiduità e la costanza al lavoro, per cui riusciva di nobile esempio ai suoi allievi ed al personale dipendente dell'Istituto. Dapertutto, nella scuola, nel laboratorio, nelle gite d'istruzione, Egli, con la sua infinita modestia che, come dissi, ad un giudizio superficiale poteva confondersi con una eccessiva riservatezza, si prodigava nel consigliare, nel suggerire, nel mettere a disposizione degli altri le sue vaste conoscenze nei più diversi rami della nostra disciplina. Nè s'impazientiva e tanto meno si rifiutava di sottrarre ore ed ore al suo tempo prezioso, pur di togliere dall'imbarazzo un giovane studioso che fosse alle prime armi coi metodi di studio e con le ricerche bibliografiche; cosicchè se era un buon insegnante nella scuola, diveniva eccellente nel laboratorio per la guida dei praticanti. Per mia personale esperienza ricordo ancora le esercitazioni di sistematica che Egli impartiva a noi interni del laboratorio di Botanica, fatte a base di « perchè » e di « come » che, rivolti in forma di domande, mettevano in serio imbarazzo le nostre vacillanti conoscenze tassonomiche, ma che infine riuscivano efficacissimi per eliminare dubbi ed assodare idee malferme, in quanto attraverso la discussione ciascuno di noi aveva bene impresse nella mente le caratteristiche delle famiglie, dei generi e delle specie studiate in quell'esercizio. Adagio adagio, col suo metodo semplice e preciso e con l'impiego di testi appropriati, Egli ci guidava fino a renderci pratici anche nella determinazione delle specie esotiche.

Ma il nome di Chiovenda, ancora più che come didatta, rifulge come scienziato. Non mi fanno affatto velo la stima e il grande affetto per il Collega se di Lui affermo che fu fino alla sua morte il migliore rappresentante della sistematica floristica in Italia. Valga a sostegno di questa mia

affermazione il fatto, fra gli altri, che non esiste relazione a stampa sui risultati di grandi spedizioni fatte da Italiani all'estero dal 1890 ad oggi, la quale per lo studio delle collezioni vegetali non registri il nome di Emilio Chiovenda.

Vari sono i rami della Botanica che il caro Amico ha coltivato, ma di essi il principale senza dubbio è stato quello della sistematica, quello cioè al quale egli ha consacrato la sua maggiore attività e nello stesso tempo ha legato in modo indelebile il suo nome.

I generi nuovi da Lui stabiliti assommano ad alcune decine, le specie a circa un migliaio, e degli uni come delle altre la grande maggioranza è passata nel novero delle entità buone, definitivamente accettate.

Fra i contributi floristici più importanti devo anzitutto ricordare quelli apportati alla flora italiana, particolarmente alla regione del Lazio ed a quella dell'Ossola. Per quest'ultima Egli veniva preparando un lavoro di lunga lena dal titolo *Flora delle Alpi Lepontine occidentali*, avendo accumulato nel suo erbario privato un materiale cospicuo fin da quando, giovanissimo, esplorava in lungo e in largo quei valichi e quelle montagne, ed avendolo continuamente incrementato per molti anni consecutivi, specialmente durante le ferie estive, che andava a trascorrere con la famiglia a Premosello, dove aveva i beni ereditati dai genitori. La parte finora pubblicata, un complesso di circa 350 pagine, riguarda la bibliografia, le Pteridofite e le Gimnosperme. Se si riflette che la sola bibliografia occupa quasi 200 pagine, si può comprendere quale sviluppo Egli si proponesse di dare a questa opera, cui nella sua grande modestia apponeva per sottotitolo « Saggio di flora locale ». Per ciascuna entità specifica descritta si trovano indicate con straordinaria diligenza le località, le epoche della raccolta e il nome del raccoglitore, le numerose varietà e forme, di modo che si rimane ammirati davanti ad un lavoro di tal genere, che richiama alla mente le classiche opere sistematiche dei nostri autori dell'800, quali il Bertoloni, il Moris, il Tenore, il Gussone, il Parlatore, con la differenza che l'analisi diagnostica è spinta ad un grado di maggiore dettaglio. Sarebbe davvero un peccato per la nostra letteratura botanica che un tale lavoro rimanesse incompleto, mancando ancora tutta la parte riguardante le Angiosperme. Non è improbabile che il Chiovenda abbia lasciato completo o quasi il manoscritto, nel qual caso farebbe davvero opera meritoria chi, amico del Nostro e competente in materia, si assumesse la non lieve fatica di curarne la stampa.

Oltre che dalla flora italiana l'attività del Collega è stata assorbita, ed in molto maggiore misura, dalla flora esotica. Si può dire che di tutti i continenti extraeuropei Egli si è occupato, studiandone la flora, sia pure di piccole regioni; ma più che di ogni altro del continente africano. Non credo di esagerare affermando che non vi è studioso, anche straniero, che abbia tanto contribuito quanto il Chiovenda ad illustrare la flora del con-

tinente nero. Egli cominciò fin da giovane, come ho già accennato, a collaborare allo studio delle piante abissine, che il Pirotta veniva accumulando nel nostro Istituto per la creazione dell'Erbario coloniale; e fin d'allora furono sempre a Lui affidate, fra le altre, le famiglie più difficili e più vaste, quali le Graminacee, le Ciperacee, le Leguminose, le Asteracee. Quando il Pirotta iniziò la pubblicazione della *Flora della Colonia Eritrea*, il Chiovenda fu il più assiduo e attivo collaboratore, al punto che la maggior mole del pubblicato spetta a Lui. Più tardi da solo ha avviato lo studio della *Flora somala* sulle collezioni che a Lui venivano continuamente affidate dalle numerose esplorazioni eseguite da Italiani in quel vasto lembo di Africa nostra; sicchè Egli a poco a poco ne era diventato l'autorevole specialista, pubblicando molti contributi, di cui alcuni, assai importanti e voluminosi, illustrati da splendide fotografie e da disegni, contengono le diagnosi latine di centinaia e centinaia di specie nuove. Lavoro enorme, paziente, che ha richiesto sacrificio non solo di tempo, ma anche di moneta per la pubblicazione a proprie spese di interi volumi, ma che in compenso Gli ha procurato la maggiore notorietà nel mondo dei botanici. Oltre che dell'Africa italiana, il Chiovenda ha avuto ad occuparsi anche di altre località africane, come dell'Angola, del Congo Belga, dell'Uganda, del Sudan Egiziano, del Kenya.

Nello studio della flora dell'Africa il compianto Collega non si è limitato alla descrizione dei paesaggi filoristici e alla illustrazione delle nuove entità sistematiche, ciò che avrebbe avuto soltanto una importanza scientifica, ma ha procurato in appositi lavori e in conferenze lette in occasione di congressi, in esposizioni nazionali ed internazionali di mettere in evidenza la possibilità di una pratica valorizzazione di molte di quelle piante sotto vari punti di vista, agrario, industriale, alimentare, terapeutico. Citerò al riguardo i seguenti lavori: *Intorno ad alcune graminacee da essenze ed a quelle della Colonia Eritrea*; *Le collezioni dei cereali della Colonia Eritrea all'Esposizione internazionale di Torino del 1911*; *Le piante alimentari delle nostre colonie*; *Vegetali utilizzati nella medicina indigena dell'Eritrea, Somalia e regioni vicine*; *Utilizzazione della flora spontanea delle nostre colonie*, tutte pubblicazioni ricche di notizie interessantissime e di informazioni sui costumi della gente indigena, che si leggono con massimo diletto. In tal modo Egli dimostrava di tenere in considerazione il lato pratico non meno che quello teorico dei problemi che imprendeva a trattare.

Un altro ramo che molto attirava il collega Chiovenda è stato quello della fitogeografia. Sempre ne trattava più o meno ampiamente nella introduzione ai suoi lavori di floristica. Ma qui voglio accennare a due monografie scritte di proposito per esprimere il suo parere sulla patria di origine, molto controversa, di due piante importanti. Uno di questi lavori Egli l'ha intitolato *La culla del cocco*. La questione, com'è noto, si

dibatte fra varie opinioni, di cui una attribuisce alla palma del cocco una patria asiatica, un'altra una patria americana e finalmente una terza una origine intermedia, cioè da alcune isole del Pacifico. Il Collega si schiera in favore della prima opinione ed a sostegno di essa raccoglie una tal massa di argomentazioni botaniche, geologiche, etnologiche, preistoriche e storiche, da renderne la lettura quanto mai avvincente e persuasiva. La conclusione a cui Egli giunge è che il cocco abbia avuto la sua culla in alcune isole coralline dell'Oceano Indiano settentrionale e di là si sia diffuso per via spontanea e per mezzo dell'uomo da occidente ad oriente, occupando molte isole del Pacifico e località diverse dell'America centrale e meridionale.

L'altra monografia riguarda l'indigenato del papiro in Italia, argomento anche questo fra quelli che meglio si prestano a cimentare la cultura e la perspicacia dei veri studiosi; e il Nostro lo ha affrontato col suo solito metodo d'indagine serio e profondo, per concludere che il *Cyperus papyrus* deve considerarsi come un elemento arcaico della flora mediterranea, un tempo con un'area di maggiore diffusione nell'Italia meridionale, oggi invece limitato ad un angusto territorio della Sicilia. Alcuni degli argomenti addotti dal Chiovenda sono stati contraddetti, cosa naturalissima in questioni controverse; cosicchè ne è nata una discussione alquanto vivace fra colleghi. Non è questo il luogo nè il momento per discutere da quale parte stia il torto o la ragione; a me importa mettere in evidenza che anche questo sul papiro è un lavoro erudito, largamente documentato e, come quello sul cocco, di grande godimento intellettuale a seguirsi nella lettura.

Emilio Chiovenda fu infine valentissimo storico della Botanica. Numerosi sono i suoi lavori in questo campo. Insieme col Pirotta iniziò questa sua particolare attività illustrando alcuni erbari antichi romani conservati nella Biblioteca Casanatense, nell'Alessandrina e nella Corsiniana ed appartenenuti in parte a Giovan Battista Triumfetti, che fu professore di Botanica a Roma fra la fine del secolo XVII ed il principio del secolo XVIII, in parte al suo allievo Liberato Sabbati. In seguito si diede a far ricerche su due erbari anonimi conservati nella Biblioteca Angelica di Roma per rintracciarne l'autore, che Egli identificò sicuramente nella persona del medico viterbese Francesco Petrollini, contemporaneo e amico di Ulisse Aldrovandi, contro il parere del prof. Penzig dell'Università di Genova e del Celani Direttore dell'Angelica, che ne attribuivano la paternità al nobile genovese Gherardo Cibo.

Due altri lavori storici molto importanti eseguiti dal Nostro meritano di essere ricordati; l'uno riguarda un erbario anonimo conservato nel Museo Botanico di Firenze, l'altro la fondazione degli Orti Botanici di Pisa e di Padova, che si contendono da lunga pezza il primato dell'antichità. Chiovenda ritiene che quello di Pisa sia più antico e ne fa risalire la

istituzione al 1543, mentre quello di Padova sarebbe sorto circa due anni dopo, nel 1545. Circa il piccolo erbario del Museo fiorentino la storia riesce interessante in quanto che dagli studi del Chiovenda risulta che esso sarebbe uno dei più antichi, e sarebbe stato allestito fra il 1540 e il 1545 dal sacerdote lucchese Michele Merini, discepolo del celebre Luca Ghini, ostensore dei semplici in quel tempo nell'ateneo pisano.

Troppo mi dilungherei in questa rassegna se volessi ricordare altri contributi storici del Chiovenda; però non posso tacere di quell'opera preziosa che, avviata in collaborazione col Pirotta, è rimasta purtroppo incompleta, ed è la parte storica introduttiva alla *Flora romana*, fonte inesauribile di notizie, ricavata da mille documenti sparsi ovunque, indispensabile per seguire lo sviluppo e le vicende della Botanica in Roma dai tempi più remoti fino quasi ai nostri giorni, e la vita di coloro che vi professarono questa disciplina.

Notevole è stata anche l'attività consacrata dal Chiovenda alla elaborazione di circa duecentocinquanta voci della *Enciclopedia Italiana*.

Emilio Chiovenda nella sua vita di studioso non ebbe ambizioni di sorta, data la sua grande, forse esagerata modestia. I suoi svaghi furono sempre i libri, le piante, le gite. Possedeva una vasta biblioteca privata per il cui incremento non lesinò mai mezzi, anzi spese quello che poteva spendere, spesso affrontando le difficoltà, per quanto amorevoli, dei suoi famigliari. Quando dimorava a Roma io ricordo che era la cosa più facile sorprenderlo a frugare nelle librerie degli antiquari. Fra i suoi libri ve ne sono molti di notevole valore. Sopra uno solo di essi richiamo l'attenzione dell'Accademia ed è la copia del *Tesoro messicano* posseduta da Federico Cesi, il principe dei Lincei, e dallo stesso riccamente postillata. Di questo prezioso cimelio il Chiovenda ha fatto cenno in una breve recente pubblicazione. Egli alcuni anni addietro lo portò a Roma per mostrarlo gelosamente a me ed al nostro Bibliotecario, chiarissimo storico anche lui, prof. Giuseppe Gabrieli.

Non meno imponente della Biblioteca è l'erbario, l'aumento progressivo del quale minacciava a poco a poco d'invadere tutta l'abitazione del caro Amico!

Chiovenda amava le gite non soltanto per amore alle sue piante, ma anche per il godimento spirituale che Gli procuravano i paesaggi agresti. Egli era terribilmente contrario ai tagli inconsulti, spesso operati in alcuni boschi, specialmente demaniali, dalle tolleranti amministrazioni pubbliche; perciò in una nota illustrante una gita campestre fatta ai Bagni di Craveggia in quel di Domodossola, ammirando il bosco comunale ben conservato e ricco di rigoglioso novellame, scriveva: « Ciò torna a grande onore del comune di Craveggia ». E continuava: « In Italia in generale il bosco lasciato crescere liberamente, come la Natura consente, non è cosa fre-

quente. Io traggo sempre più il convincimento che per il ripopolamento dei nostri boschi non vi sia necessità assoluta di ricorrere a soggetti esotici e che si prestino egregiamente i nostri alberi paesani ».

Anche come cittadino e padre di famiglia Emilio Chiovenda fu esemplare. Chi mai di noi, suoi intimi amici, apprese direttamente da Lui che fosse decorato di medaglia di argento al valore civile? Egli sempre mi diceva che amava tanto i suoi valligiani, ma mai mi fece un cenno dell'alta decorazione ricevuta, schivo, com'era, di parlare di sè. Soltanto di recente seppi che la medaglia Gli era stata conferita per l'alto spirito di abnegazione dimostrato, a rischio della sua stessa esistenza, nel salvataggio di suoi concittadini durante una forte alluvione, che nell'autunno del 1900 molto danneggiò il comune di Premosello.

Amante della famiglia, adorò la moglie e i suoi due figliuoli, che ad esempio del padre crebbero seri e studiosi e Gli procurarono legittime soddisfazioni, raggiungendo giovanissimi il primo, l'ingegnere Camillo, un alto grado nella Milizia forestale, il secondo, il professore Mario, la direzione dell'Istituto di Anatomia patologica dell'Università di Milano.

Alla signora ed ai figli, inconsolabili per la prematura scomparsa del loro Caro, non sono in grado di recar in questo momento una parola di conforto; soltanto dico loro che possono essere orgogliosi di aver avuto a marito ed a padre un Uomo che col suo ingegno e il suo lavoro onorò tanto la scienza e la patria.

RELAZIONI

Gli idrocarburi gassosi naturali in Italia e la loro importanza.

Relazione (1) dell'Accademico Ramiro Fabiani.

Premessa.

Fra i temi trattati nella collana « Problemi e Discussioni » della Reale Accademia dei Lincei negli ultimi suoi anni, aveva destato molto interesse quello su *L'attività endogena quale fonte di energia*, svolto con profonda competenza di scienziato e di realizzatore dal compianto senatore principe Piero Ginori Conti nell'adunanza del 3 aprile 1938–XVI.

Un anno prima aveva formato oggetto di una relazione per la stessa collana il tema *Prospezione geologica e geofisica del Petrolio in Italia*, redattori, per la prima parte chi ha l'onore di parlarvi, e per la seconda il compianto senatore prof. Soler.

In ambedue le relazioni – escluse le « macalube » di Aragona in Sicilia, sulle quali si soffermava il Ginori Conti – le manifestazioni d'idrocarburi gassosi erano accennate di sfuggita e solo per qualche parte d'Italia.

Poiché da qualche anno agli idrocarburi gassosi del nostro sottosuolo si rivolge un nuovo e intenso fervore di studi, di ricerche e di opere per aumentarne e migliorarne la produzione e l'utilizzazione, si è creduto convenisse riferire sull'argomento, in certo modo anche a integrazione delle ricordate relazioni, con entrambe le quali esso presenta evidentemente assai stretti legami. E ciò pur riconoscendo che ben poco di nuovo resterebbe da dire di fronte alla ricchissima serie di scritti che in relazione ai più svariati suoi aspetti è andata ultimamente formandosi (2).

---

(1) Letta nell'Adunanza del 30 maggio 1941–XIX.

(2) Sarebbe troppo lungo riportare l'elenco delle pubblicazioni sia pur limitatamente *all'ultimo quinquennio* e riguardanti solo la parte geologica e geofisica o argomenti a queste più affini.

Come impostazione generale geologica relativa a tutta la Penisola va segnalato lo scritto del prof. C. Migliorini, *Considerazioni sui giacimenti di metano*

Alcuni dei problemi che lo riguardano, e anche nel solo campo in cui circoscriveremo questa relazione, sono però sempre di viva attualità.

È a tutti noto che dalle « salse » del Modenese e dai « fuochi » di Barigazzo alle « macalube » siciliane, emanazioni spontanee d'idrocarburi gassosi esistono in varie regioni italiane e che alcune di esse, per antiche testimonianze, sono attive da qualche millennio. Quanto notevole sia la diffusione di gas – con predominio di metano – nel sottosuolo di alcune parti del nostro paese si è però rivelato soltanto negli ultimi decenni, in conseguenza specialmente di lavori per la ricerca del petrolio o di acque ad uso potabile od irriguo.

E solo da pochi lustri si sono iniziati metodicamente il censimento delle manifestazioni e lo studio delle loro caratteristiche chimiche, da principio in funzione specialmente dei problemi petroliferi.

Entro tale quadro ricadono tutte le notizie sulle venute spontanee di gas riferite dai collaboratori dell'opera *Studi geologici per la ricerca del petrolio in Italia* edita nel 1926 dal R. Ufficio Geologico, opera che doveva rappresentare una messa a punto delle conoscenze geopetrolifere del paese, come premessa a un programma di ricerche, che il Governo Nazionale, conscio dell'alto interesse del problema petrolifero, aveva demandato per la preparazione e l'esecuzione alla Direzione Generale Combustibili. Costituita poi dallo Stato anche con tali finalità di ricerca l'Azienda Generale Italiana Petroli (A. G. I. P.), questa promosse pure quasi subito lo studio dei gas, sia di quelli, com'era naturale, che s'incontravano nelle esplorazioni petrolifere, sia di quelli delle altre manifestazioni.

Tale studio fu dall'A. G. I. P. affidato da prima (fra il 1926 e il 1930) ai professori G. M. Levi e C. Padovani della Sezione Combustibili del

---

dell'Italia continentale. « Atti III Conv. Metano, Bologna, 1940-XVIII ». Della Sicilia ha trattato più specialmente l'autore della presente Relazione (*Sulle manifestazioni di idrocarburi gassosi della Sicilia* ». « Boll. Soc. Sc. Nat. ed Ec. di Palermo », vol. XXI, 1939-XVIII).

La massima parte delle pubblicazioni trovasi raccolta negli « Atti » dei tre Convegni per il gas Metano tenutisi a Bologna nell'ultimo triennio e nella rivista « Il Metano », che entra nel suo quarto anno di vita. Altri scritti sono raccolti negli « Atti del Convegno Nazionale combustibili » tenutosi a Roma nella sede della Mostra Autarchica del Minerale Italiano (3-4 maggio 1939-XVII).

Fra le pubblicazioni più recenti, ove sono nominate anche le manifestazioni di gas, va ricordata la monografia del prof. S. Zuber, *Manifestazioni e prospettive petrolifere dell'Italia alla luce degli accertamenti dell'ultimo trentennio.* Roma, 1940, Anno XVIII. Dell'Appennino settentrionale si è occupato, riguardo ai gas, l'ing. Signorini (*Condizioni geologiche dei giacimenti di Metano nell'Appennino settentrionale.* Roma, 1940-XVIII).

R. Politecnico di Milano, in seguito continuato nel proprio laboratorio chimico ed esteso a tutta l'Italia continentale e alla Sicilia. Ciò andava ricordato, perchè con tale lavoro, i cui risultati vennero pubblicati nel 1938 e integrati nel 1940, l'A. G. I. P. ha portato un contributo di primaria importanza a servizio non solo dei problemi più strettamente petroliferi, ma anche di quelli, generalmente inscindibili dai primi, che interessano particolarmente la ricerca e l'utilizzazione dei gas.

A sviluppare e completare in ogni regione il censimento delle manifestazioni gassifere rivolge ora la sua opera l'« Ente Nazionale Metano », che il nostro Governo ha di recente costituito, con finalità delle quali si dirà più avanti.

Cenni sulla distribuzione geografica delle manifestazioni e sui loro rapporti con le condizioni geologiche generali.

Emanazioni di idrocarburi gassosi, con predominio di metano, appaiono poco ad est di Torino (Castagneto Po, Moncucco ecc.) e, attraverso a tutta la regione appenninica, alla pianura padana alta e bassa, via via s'incontrano con maggiore o minore frequenza in gran parte delle regioni della Penisola ed in Sicilia.

Allo stato attuale delle conoscenze e comprendendo nel novero le manifestazioni scoperte dai sondaggi petroliferi, dallo scavo di pozzi per acqua o da altri lavori, la massima concentrazione si ha, com'è ben noto, nell'Appennino settentrionale e nella pianura padana.

Nell'Italia centrale le manifestazioni sono poco numerose e a distribuzione sporadica, con prevalenza sul versante adriatico. Più frequenti si presentano invece in alcune plaghe dell'Italia meridionale, specie nelle provincie di Avellino e di Potenza. E altrettanto frequenti si riscontrano in Sicilia soprattutto lungo una zona arcuata che iniziandosi nell'Agrigentino volge a nord e pei monti Sicani, le Madonie e le Caronie giunge alle falde occidentali dell'Etna.

Con riferimento originario all'Italia settentrionale i gas della regione appenninica vennero indicati col nome di « gas di montagna » e quelli della pianura padana « gas di pianura », considerando i primi di origine petrolifera e invece, generalmente, di genesi alluvionale i secondi, cioè provenienti dai letti torbosi intercalati nelle alluvioni del Po e dei fiumi minori che sfociano nell'alto Adriatico.

Il concetto della ubicazione morfologico–topografica delle manifestazioni spontanee o provocate connesso a tale distinzione può considerarsi valido anche in rapporto ad alcuni problemi generali della ricerca dei giacimenti di gas, ma non altrettanto può dirsi per quello che riguarda l'implicito significato assoluto della genesi delle due categorie di gas. Infatti, prescindendo dai gas dell'alta pianura subappenninica, da consi-

derarsi essenzialmente di origine petrolifera, non è ancora provato che quelli della bassa pianura padana abbiano esclusiva origine alluvionale. Ed è questa una particolare questione che merita d'essere risolta, come diremo più avanti.

Per tutta la parte montuosa appenninica, dalla settentrionale alla meridionale, si può affermare che la grande maggioranza delle emanazioni di idrocarburi gassosi è legata, almeno originariamente, a formazioni petrolifere. Il che è provato dai reciproci rapporti di giacitura geologica e per molti casi dai risultati delle esplorazioni per la ricerca del petrolio, oltre che dalla frequente o non rara presenza di idrocarburi superiori in aggiunta al metano, che è il costituente predominante, nei gas di venuta spontanea.

Altrettanto e ancor più si può affermare per le manifestazioni dei monti siciliani, nei quali idrocarburi superiori, come etano, sono quasi sempre presenti e talora in quantità che oltrepassano quelle riscontrate in tutte le altre parti d'Italia, giungendo in un caso, presso Bronte, a 21,3 %

Alla pari degli indizi d'idrocarburi liquidi le manifestazioni gassose delle accennate regioni montuose sono per lo più localizzate in corrispondenza a formazioni del Terziario in genere e di quello inferiore in particolare, il quale presenta caratteristiche tettoniche per lo più assai movimentate, e non soltanto nell'Appennino settentrionale, ove però le complicazioni sono spinte al più alto grado per lo sviluppo e il comportamento tettonico delle plasticissime « argille scagliose » riferibili in parte anche ad età preterziaria.

In queste regioni la geologia degli idrocarburi gassosi è, si può dire, la geologia stessa dei petroli. Ma sappiamo come, dopo tante ricerche, alle quali da molti anni portano il loro contributo pressochè tutti i migliori studiosi nostri, ed anche alcuni stranieri, tutta una serie di problemi, qualcuno d'importanza notevole, non ha trovato ancora soluzioni o almeno interpretazioni, sulle quali la maggioranza sia concorde. Sono infatti ancora controverse alcune questioni stratigrafiche, strutturali, di evoluzione geologica, di provenienza dei petroli, delle formazioni e zone ove meglio convenga rivolgere le esplorazioni per poter scoprire quei giacimenti veramente cospicui finora invano cercati.

La ricerca pratica dei gas nelle regioni accennate richiede evidentemente gli stessi metodi che la ricerca dei petroli e allo stato attuale sembra presentare prospettive di risultati poco diverse, cioè assai modeste, almeno ad esplorazioni di moderate profondità (sui 1000 m.).

Lo spezzettamento tettonico colle complicazioni di dettaglio derivanti da rapporti di giacitura fra masse rocciose eminentemente plastiche, come quelle argillose, e rigide, come quelle calcaree e arenacee, deve aver determinato, se non la totale dipersione dei giacimenti originari – che la presenza di così frequenti indizi fa ritenere esistessero – certo

il loro frazionamento in numerosi, ma generalmente modesti e talora minimi adunamenti, almeno nei complessi rocciosi superficiali.

Da ciò sempre scarse produzioni anche nelle aree che fino ad ora si sono presentate nelle migliori condizioni, quali quelle di Velleja–Montechino e Vallezza. Basti considerare che da esse proviene la maggior parte del petrolio della Penisola, ma che in qualche decennio la produzione complessiva è stata appena di poche centinaia di migliaia di tonnellate! Ed altrettanto modesto è stato il rendimento in gas delle stesse aree.

Queste ed altre circostanze, risultanti anche da ricerche in altre parti del nostro paese, hanno fatto sorgere la convinzione che se esistono giacimenti veramente importanti di idrocarburi debbano trovarsi a grande profondità e che comunque, e anzitutto in Alta Italia, fossero di preferenza da cercare nella « zona esterna » rappresentata dalle ultime colline appenniniche e dalla susseguente pianura alluvionale.

Questa coltre di terreni terziari più recenti, ad andamento tettonico tranquillo, e di depositi alluvionali era infatti presumibile che in eventuali strutture sepolte, continuazione di quelle appenniniche, avesse preservato dalla dispersione gli orizzonti petroliferi, dei quali era giustificato ritenere possibile l'esistenza.

È noto che in tale regione a sussidio delle induzioni geologiche si procedette, precipuamente da parte dell'A. G. I. P., a una metodica esplorazione geofisica, anzitutto gravimetrica con la bilancia di Eötvös e subordinatamente magnetometrica, e che in base agli elementi ottenuti e alla loro interpretazione [1] furono poi praticati numerosi sondaggi (zone di S. Colombano, Fontevivo, Podenzano, Vicenza Nuova ecc.), spinti anche alle massime profondità finora raggiunte in Italia, cioè 2500 m. circa. Questi sondaggi portarono a un complesso di constatazioni stratigrafiche e strutturali di grande interesse, ma purtroppo non ebbero l'esito sperato in quanto a scoperta di importanti giacimenti di petrolio, mentre invece dimostrarono l'esistenza di cospicui adunamenti gassosi.

A darne un'idea si può ricordare che a Fontevivo (Parma) al primo sondaggio dell'A. G. I. P. (1929) si ebbe una repentina violenta eruzione di gas di entità valutata a oltre un milione di metri cubi in 24 ore. Al gas si è accompagnata un'ingente quantità di acqua salata e di sabbia, determinandosi agli effetti petroliferi una profonda irreparabile perturbazione del giacimento.

Altro campo di gas fu individuato dalla stessa A. G. I. P. a Podenzano presso Piacenza. Allo stato attuale esso è il più produttivo d'Italia, avendo raggiunto di recente i 40.000 mc. al giorno.

---

[1] Per la parte geologica va segnalato il contributo portato dal prof. Mario Anelli e per la geofisica quello del prof. Belluigi.

Non escludendosi che ulteriori ricerche con sondaggi in corso o in programma, orientate in base anche ai risultati di nuove esplorazioni geofisiche eseguite con altri apparecchi e con altri metodi oltre quello della bilancia di torsione (gravimetri, apparati geosismici) abbiano a risolvere finalmente il problema petrolifero, risulta oggi che l'accennata « zona esterna » è in ogni modo relativamente ricca di gas.

Dico relativamente, in rapporto alla produzione del petrolio, come chiarirò meglio in seguito con poche cifre e qualche raffronto.

Nella bassa pianura padana la diffusione di orizzonti gassiferi – si può dire esclusivamente di metano – fu rivelata dallo scavo di pozzi comuni o trivellati per ricerca d'acqua. Solo in questi ultimi anni si è però proceduto a ricerche con lo scopo esclusivo di captare il gas. Ho accennato che tale gas – che sarebbe il vero « gas di pianura » – è ritenuto dai più di origine non petrolifera e proverrebbe specialmente dai depositi torbosi intercalati nelle alluvioni.

Noto che, in ottemperanza a disposizioni superiori, i sondaggi di ricerca si limitarono, in genere, ai 300 metri circa. In alcuni casi risulterebbe essere stato incontrato gas anche in livelli sottostanti ai depositi torbosi.

Comunque, orizzonti di metano furono trovati al di sotto delle alluvioni fluviali, entro sedimenti da ritenersi marini per i resti di molluschi in essi presenti [1].

Non può escludersi che anche tali manifestazioni di metano siano originate dalle sostanze organiche accumulatesi in quegli stessi sedimenti, ma allora sarebbe improprio di chiamarlo metano alluvionale.

E già questa sarebbe una ragione per indurre a cercare il gas a maggiore profondità, con la prospettiva di trovare orizzonti in migliori condizioni di quelli più superficiali. Le plaghe che finora hanno dato risultati più favorevoli ricadono nelle provincie di Venezia, Rovigo, Ferrara e Ravenna e specialmente nella seconda e nella terza.

Alcuni orizzonti – in parte anche perché voluti sfruttare troppo intensamente – si sono però esauriti assai rapidamente, ma in qualche caso, esempio presso Adria, dopo vario tempo, hanno ripreso a fornire

---

[1] Ad esempio nel pozzo n. 3 trivellato presso Adria dalla Società Gasaut di Rovigo, ho riscontrato gusci di *Trochus*, *Cerithium*, *Pectunculus*, *Venus*, provenienti da un banco sabbioso, attraversato fra m. 62,50 e m. 90. Gas venne trovato a livelli inferiori anche di molto (esempio 300 m. circa).

Per uno dei sondaggi di ricerca di metano eseguiti allo Zuccherificio di Porto Tolle, in un orizzonte sabbioso assai gassifero incontrato a circa 293 metri di profondità ho osservato la presenza di gusci di *Turritella*, *Capulus*, *Pecten*, *Ostrea*, *Venus*.

del gas, oppure questo è stato trovato sugli stessi luoghi a livelli alquanto più profondi (Ca' Capello).

Come ho detto in altre occasioni, e non sono stato il solo, il problema della provenienza di questo metano della bassa pianura merita di essere considerato attentamente, e non solamente in riferimento alle circostanze testè accennate.

Non si può infatti scartare l'ipotesi che detto metano possa avere *in parte* altra provenienza ancora, cioè con genesi profonda petrolifera [1] e localizzazione e dispersione legate a certi fenomeni tettonici disgiuntivi, interessanti i sedimenti prequaternari, che si manifestano con tutta evidenza nella regione prealpina e che con molta probabilità si continuano a sud di questa al di sotto della copertura alluvionale quaternaria.

Tale, ad esempio, la « linea Schio–Vicenza » dei vecchi autori, che io pure ho ripetute volte esaminata ed illustrata, linea di frattura che ha il carattere di « parafora », cioè con prevalente movimento orizzontale e sviluppo fino a notevole profondità.

Detta linea – che trae origine ben più a nord di Schio [2] – idealmente prolungata a sud–est di Vicenza, lasciando al suo margine ovest i Berici e gli Euganei, verrebbe a passare verso Cavarzere e Loreo, cioè in corrispondenza alla zona delle più importanti manifestazioni di metano messe in evidenza da recenti trivellazioni nella bassa pianura tra Adige e Po.

Risolvere la questione o almeno accertare se esistano giacimenti gassosi profondi nella bassa padana avrebbe dunque notevole ed ovvio interesse. E basterebbe forse un paio di sondaggi da 1000 m. o poco più, per la cui ubicazione potrebbe dare un orientamento l'accennata ipotesi tettonica, magari investigandone in precedenza la probabilità con determinazioni geofisiche appropriate.

Dando uno sguardo ad altre zone alluvionali della Penisola, qualche risultato ebbero le ricerche di gas fatte nei bacini dell'Arno (dintorni di Pisa) e dell'Ombrone (presso Grosseto) e indizi di manifestazioni si rilevano nel bacino del Tevere, specie nella sezione verso mare (ove sono in corso ricerche su mie direttive), e così pure nelle finitime plaghe delle paludi ora prosciugate e redente a nuova vita rurale.

In altri bacini, le cui piane alluvionali potrebbero offrire qualche prospettiva (Volturno, Sele, basso Bradano ecc.) non mi consta siano state eseguite finora ricerche.

---

[1] Per quel valore che può avere, noto che anche nei gas di pianura vennero in rari casi trovate tracce di idrocarburi superiori (Padovani, A. G. I. P.) e che essi sono presenti nelle « salse » termali di Abano al margine est degli Euganei (analisi Levi e Padovani) per quanto qui si possa trattare di altra cosa.

[2] Fabiani R., *La regione del Pasubio.* « Pubbl. N. 110 dell'Uff. Idr. del R. Mag. alle Acque ». Venezia, 1920.

Delle due principali piane alluvionali della Sicilia – quella di Catania e quella del Gela – diversi sondaggi per ricerche di acqua eseguiti nella seconda non hanno mai rivelato l'esistenza di gas. Per la prima viene invece riferito che una trivellazione eseguita vari anni addietro nella zona presso mare ha incontrato una manifestazione di metano a 80 m. di profondità.

Per le zone alluvionali ora accennate dovrebbe trattarsi in prevalenza di metano alluvionale, derivato specialmente da depositi di origine vegetale (torbe, ligniti). E altrettanto può dirsi in genere per il metano dei bacini lacustri disseccati della Toscana e dell'Umbria. Decise riserve ho invece già altra volta fatte [1], e le confermo ora, riguardo alle cospicue manifestazioni di gas della conca del prosciugato Fucino, ritenendole, per varie circostanze che qui tralascio, in parte di origine petrolifera.

Utilizzazione, produzione, importanza degli idrocarburi gassosi.

Malgrado l'incitamento di illuminati pionieri, malgrado l'esempio, che da anni, e talora da molti anni, davano alcune società o stabilimenti industriali e perfino qualche privato, la ricerca e l'utilizzazione degli idrocarburi gassosi ha avuto solo di recente un impulso veramente notevole, da quando cioè l'imperativo del Duce di convergere tutti gli sforzi ai problemi autarchici investì anche il settore delle risorse del sottosuolo.

I problemi del metano vennero trattati e discussi in riunioni varie e in convegni ad essi esclusivamente dedicati, che fecero fiorire tutta una serie di iniziative, promossero in qualche zona quasi una frenetica ricerca, e portarono comunque a risultati veramente notevoli.

Degli svariati impieghi ai quali si presta il metano si è presentato d'interesse più immediato, per evidenti necessità contingenti, quello di carburante per l'autotrazione, impiego che ha dato ottimi risultati, sicché l'aumento e la disciplina della sua produzione e non solo di quello naturale, costituiscono oggi un problema di grandissima importanza per il nostro paese. Ne è prova anche l'accennata recente istituzione da parte del Governo dell'« Ente Nazionale Metano » con le finalità di eseguire, coordinare e controllare la ricerca di giacimenti metaniferi e la loro coltivazione, di sviluppare la produzione e di promuovere e disciplinare l'utilizzazione accanto a quello naturale anche del metano tecnico e biologico.

---

[1] Fabiani R., *Ancora uno sguardo ai problemi della ricerca del metano in Italia*, ristampa con poche varianti nel bollettino « Il Metano » (n. di gennaio 1940–XVIII, Bologna) dell'articolo « *Lo sfruttamento del metano naturale e i risultati della sua ricerca in Italia* », pubblicato il 14 gennaio 1940–XVIII nel « Giornale di Sicilia » di Palermo.

La produzione del metano naturale che nel 1936 era di 10 milioni di metri cubi, è andata sempre aumentando in modo da far ritenere che nel corrente anno raggiungerà una cifra quadrupla.

Sono attualmente in vigore oltre 30 concessioni, 7 delle quali producono ciascuna oltre 100.000 mc. al mese. Il contributo principale è dato dall'A. G. I. P. coi giacimenti già ricordati di Podenzano e Fontevivo e con quello di Tramutola (Potenza).

Seguono l'Azienda delle RR. Terme di Salsomaggiore, la Petrolifera Italiana (Vallezza ecc.), la Società Idrocarburi Nazionali (Pietramala), la Società Petroli d'Italia (Montechino, Velleja), tutte concessioni in zone petrolifere.

Di quelle della bassa pianura il maggior numero è in provincia di Rovigo, con una produzione complessiva che nel mese di gennaio u. s. ha dato circa 370 mila m. c.

In atto esistono circa 35 centrali di compressione e tre gasdotti (Podenzano–Piacenza dell'A. G. I. P., Montechino–Fiorenzuola della Società Petroli d'Italia e Pietramala–Firenze della Società Idrocarburi Nazionali).

La misura dell'importanza del metano estratto dal nostro sottosuolo è data dunque dalla produzione che può stimarsi attualmente in ragione di 40 milioni di metri cubi anno. Se si pensa alle produzioni di tanti altri paesi d'Europa (esempio Transilvania) e d'America (esempio Texas), che raggiungano molte centinaia e anche migliaia di milioni di mc., la nostra produzione appare estremamente esigua. Salvo che per poche voci, quali lo zolfo, il mercurio, l'alluminio, la nostra terra se è ricca in varietà non lo è altrettanto in quantità per i prodotti del suo sottosuolo. Ma bisogna far tesoro anche del poco, anche il poco è prezioso. Basti considerare che codesti 40 milioni di mc. sostituiscono come rendimento almeno altrettanti milioni di litri di benzina e paragonare la produzione del metano naturale con quella del petrolio, che si aggira per la Penisola sulle 12.000 tonnellate.

C'è chi ha concluso che l'Italia è piuttosto paese di gas che di petrolio e chi ha perfino proposto di abbandonare, almeno per ora, le ricerche petrolifere per dedicare tutti gli sforzi a quelle degli idrocarburi gassosi. Concetto ben diverso quest'ultimo da quello che informava certe volte in passato i cercatori di petrolio . . ., i quali abbandonavano le indagini se trovavano soltanto gas!

Ritengo che sarebbe un errore sospendere le ricerche petrolifere, le quali, se non altro, dovranno un giorno risolvere in qualche modo il problema dell'esistenza o meno di cospicui giacimenti nel nostro sottosuolo. Comunque, sono stati proprio i sondaggi con finalità petrolifera che hanno fatto scoprire quei giacimenti di gas che danno ora le maggiori produzioni, e ciò senza contare il contributo da essi portato alla conoscenza della complessa e tormentata struttura geologica della nostra terra.

Nelle zone, che, anche col sussidio talora prezioso dei più progrediti metodi ed apparecchi d'indagine geofisica, si rivelano più adatte a investigazioni con finalità petrolifere, conviene pertanto intensificare le esplorazioni mediante sondaggi da spingersi anche alle maggiori profondità. Se tali sondaggi dovessero dare soltanto o prevalentemente gas, sarebbe già egualmente un vantaggio.

Alla ricerca esclusiva del gas per le zone ove lo sprigionamento di questo si presume non abbia a perturbare eventuali giacimenti di petrolio, coi quali si trovasse legato, converrà moltiplicare le esplorazioni. Salvo casi speciali, ove cioè si trattasse di risolvere qualche problema di particolare interesse (es. nella bassa pianura padana), sarà preferibile, per evidenti ragioni di praticità e rapidità di avere risultati, limitarsi a sondaggi di modesta profondità (alcune centinaia di metri). Questo va detto soprattutto per le zone dei depositi quaternari fluviali e lacustri, in parte anche per quelle montuose, generalmente terziarie, ove si vogliano captare accumuli gassosi in corrispondenza a manifestazioni spontanee. Ma anche queste ricerhe di modesta profondità, e quindi di più facile esecuzione, devono praticarsi con adatta attrezzatura e con perizia tecnica tali da evitare in quanto possibile quelle perturbazioni nei giacimenti gassiferi, che purtroppo in vari casi ebbero già a lamentarsi, specie nelle zone alluvionali.

Conclusione.

Da quanto esposto, l'Alta Italia risulta la parte anche potenzialmente più ricca di idrocarburi gassosi. È presumibile che realmente lo sia, come è quella che forse presenta ancora le migliori prospettive per ulteriori ricerche petrolifere. Non si deve però dimenticare che l'Alta Italia, come la più studiata, è anche la più intensamente esplorata, giacché, parte per ricerca di petrolio o di gas, parte per trarre acqua dal sottosuolo, si può contare su alcune migliaia di trivellazioni in essa regione finora eseguite.

E l'Alta Italia con la presenza di impianti industriali più numerosi e convenientemente distribuiti, è anche nelle migliori condizioni per sfruttare, in collegamento coi centri di produzione del metano naturale, quello tecnico fornito dalle cokerie o da altri impianti. Si può pertanto vedere assai vicino il giorno, in cui, con una ben congegnata rete di condutture e di stazioni di compressione e di distribuzione del gas, l'autotrazione a metano avrà in Alta Italia tale sviluppo da far risparmiare un 30 % e forse più del suo normale fabbisogno di benzina.

Invece nell'Italia Centrale e Meridionale e in Sicilia, dove pure esistono tante manifestazioni di gas idrocarburati, si hanno oggi solo due o tre centri di produzione in tutto, dei quali più importante quello di Tra-

mutola in Lucania, con una resa mensile complessiva di poche decine di migliaia di metri cubi (1).

E altrettanto rari sono gli stabilimenti industriali che possano fornire metano tecnico per l'autotrazione (principale quello di Terni che ne invia a Roma).

È pertanto evidente l'urgenza – non da oggi segnalata e non soltanto da chi vi parla (2) – che anche in queste parti d'Italia vengano intensificate le ricerche che sono in corso (purtroppo in un assai piccolo numero di aree) (3) e che ne siano apprestate di nuove, specie in quelle località che interessano le zone più sprovviste di risorse e che risentono quindi maggiormente delle restrizioni imposte dalle attuali contingenze.

Nel promuovere e sviluppare tali ricerche non si deve però avere lo sguardo alle sole necessità del momento, pensando che ne resti frustrata la convenienza col ripristino delle condizioni normali. L'impiego del metano ha così importanti e meravigliose prospettive che quello per l'autotrazione può considerarsi in seconda linea. Potessimo dunque scoprirne giacimenti veramente grandiosi!

---

(1) Una parte di questo gas trova impiego per azionare le automotrici delle ferrovie calabro–lucane.

(2) Vi insiste recentemente anche l'ing. Ugo Baldini, l'entusiasta e combattivo pioniere della ricerca e dell'utilizzzione del metano. (Ved. « Il Metano », anno III, n. 3–4, dicembre–gennaio, 1940–41–XIX).

(3) Per la Sicilia noto la zona Gioitto–Bronte (a ovest dell'Etna). Da anni ne avevo segnalato l'interesse e consigliato di farvi esplorazioni. I risultati dei sondaggi che, accogliendo le mie proposte, l'A. G. I. P. vi sta eseguendo confermano ora tale interesse e inducono a intensificarvi le ricerche.

NOTE E COMUNICAZIONI

Matematica. — *Su una formula integro–differenziale relativa alle funzioni di Laplace.* Nota (1) di CORRADINO MINEO, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

In questa Nota dimostro una formola integro–differenziale, riguardante le funzioni di LAPLACE, che mi si è presentata come fondamentale in una mia ricerca (2) e che d'altra parte non sembra conseguenza immediata di formole note.

1. – Siano P e M due punti d'una superficie sferica σ di raggio unitario, le cui coordinate polari rispetto a un punto P_0 della sfera, scelto come polo, e a una linea sferica di riferimento uscente dal polo P_0, siano ordinatamente θ_0, φ_0 e θ, φ. Sia

$$Y_n = Y_n(\theta, \varphi)$$

una qualunque funzione sferica di LAPLACE d'ordine n. La formola che si tratta di dimostrare è la seguente:

$$[1] \qquad \int_\sigma \left[Y_n^{(0)} - Y_n + (\operatorname{sen}\theta \cos\theta_0 \cos(\varphi - \varphi_0) - \cos\theta \operatorname{sen}\theta_0) \frac{\partial Y_n^{(0)}}{\partial \theta_0} + \right.$$

$$\left. + \frac{\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}(\varphi - \varphi_0)}{\operatorname{sen}\theta_0} \frac{\partial Y_n^{(0)}}{\partial \varphi_0} \right] \frac{d\sigma_M}{(2 - 2\cos\gamma)^{\frac{3}{2}}} = 2\pi n \, Y_n^{(0)},$$

essendo: γ l'arco PM di circonferenza massima,

$$[2] \qquad Y_n^{(0)} = Y_n(\theta_0, \varphi_0)$$

$$[3] \qquad d\sigma_N = \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\varphi .$$

Per dimostrar la [1], si assuma come nuovo polo su σ il punto P e come nuova linea di riferimento la circonferenza massima $P_0 P$ (orientata

(1) Presentata nell'Adunanza del 30 maggio 1941–XIX.

(2) Vedi C. MINEO, *Forma d'un pianeta dedotta dai valori della gravità in superficie.* « Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei », vol. XXIX, serie 6ª, maggio 1939–XVII, pag. 535, formola [25].

positivamente nel senso da P_0 verso P, essendo naturalmente $\widehat{P_0 P} < \pi$). Le nuove coordinate del punto M sono γ e $w = \widehat{Q P_0 M}$, essendo Q un punto del prolungamento dell'arco $P_0 P$ dalla parte di P; e le formole di trasformazione, immediatamente deducibili dalla considerazione del triangolo sferico $P_0 P M$, sono

$$[4] \qquad \begin{cases} \cos\theta = \cos\theta_0 \cos\gamma - \operatorname{sen}\theta_0 \operatorname{sen}\gamma \cos w\,, \\ \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}(\varphi - \varphi_0) = \operatorname{sen}\gamma \operatorname{sen} w\,. \end{cases}$$

Con la trasformazione [4] la $Y_n(\theta, \varphi)$ si muta in una funzione sferica $Z_n(\gamma, w)$ e si ha:

$$[5] \qquad Y_n(\theta, \varphi) = Z_n(\gamma, w) = A_0 P_n(\mu) + \\ + \sum_{k=1}^{n} (A_k \cos kw + B_k \operatorname{sen} kw) \operatorname{sen}^k \gamma \frac{d^k P_n(\mu)}{d\mu^k},$$

essendo $\mu = \cos\gamma$, $P_n(\mu)$ il polinomio di LEGENDRE di grado n in μ, $A_0, A_1, B_1, \cdots, A_n, B_n$ coefficienti dipendenti da θ_0 e φ_0. Facendo tendere il punto M a P sull'arco MP, con che γ tende a zero, dalla [5] si deduce

$$Z_n(0, w) = Y_n(\theta_0, \varphi_0) = A_0;$$

sicchè si può scrivere

$$[6] \qquad Y_n(\theta, \varphi) = Z_n(\gamma, w) = Y_n(\theta_0, \varphi_0) P_n(\mu) + \\ + \sum_{k=1}^{n} (A_k \cos kw + B_k \operatorname{sen} kw) \operatorname{sen}^k \gamma \frac{d^k P_n(\mu)}{d\mu^k}.$$

Da questa segue

$$[7] \qquad \left(\frac{\partial Z_n}{\partial \gamma}\right)_{\gamma=0} = (A_1 \cos w + B_1 \operatorname{sen} w) \left(\frac{dP_n(\mu)}{d\mu}\right)_{\mu=1}.$$

D'altra parte si ha:

$$\frac{\partial Z_n}{\partial \gamma} = \frac{\partial Y_n}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \gamma} + \frac{\partial Y_n}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma};$$

e dalle [4]:

$$\operatorname{sen}\theta \frac{\partial \theta}{\partial \gamma} = \cos\theta_0 \operatorname{sen}\gamma + \operatorname{sen}\theta_0 \cos\gamma \cos w\,,$$

$$\cos\gamma \operatorname{sen} w = \cos\theta \operatorname{sen}(\varphi - \varphi_0) \frac{\partial \theta}{\partial \gamma} + \operatorname{sen}\theta \cos(\varphi - \varphi_0) \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma}.$$

Facendo tendere, come prima, il punto M a P lungo l'arco MP, e quindi γ a zero, si deduce facilmente dalle tre ultime formole:

$$[8] \qquad \left(\frac{\partial Z_n}{\partial \gamma}\right)_{\gamma=0} = \frac{\partial Y_n^{(0)}}{\partial \theta_0} \cos w + \frac{\partial Y_n^{(0)}}{\partial \varphi_0} \frac{\operatorname{sen} w}{\operatorname{sen}\theta_0}.$$

Dalla seconda delle formole [2] tenendo conto che, per una nota formola di trigonometria sferica applicata al triangolo $P_0 PM$, si ha

$$[9] \qquad \operatorname{sen}\gamma \cos w = \operatorname{sen}\theta \cos\theta_0 \cos(\varphi - \varphi_0) - \cos\theta \operatorname{sen}\theta_0 ,$$

si deduce dalle [6], [7], [8] e [9]:

$$[10] \quad \begin{cases} Y_n^{(0)} - Y_n + (\operatorname{sen}\theta\cos\theta_0\cos(\varphi-\varphi_0) - \cos\theta\operatorname{sen}\theta_0)\dfrac{\partial Y_n^{(0)}}{\partial\theta_0} + \\ + \dfrac{\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}(\varphi-\varphi_0)}{\operatorname{sen}\theta_0}\dfrac{\partial Y_n^{(0)}}{\partial\varphi_0} = [1 - P_n(\mu)]\,Y_n^{(0)} + \\ + \left[\left(\dfrac{dP_n(\mu)}{d\mu}\right)_{\mu=1} - \dfrac{dP_n(\mu)}{d\mu}\right](A_1\cos w + B_1\operatorname{sen} w)\operatorname{sen}\gamma - \\ - \operatorname{sen}^2\gamma \sum_{k=2}^{n}(A_k\cos kw + B_k\operatorname{sen} kw)\operatorname{sen}^{k-2}\gamma\dfrac{d^k P_n(\mu)}{d\mu} . \end{cases}$$

Ora, i due polinomi in μ:

$$1 - P_n(\mu) \quad , \quad \left(\frac{dP_n(\mu)}{d\mu}\right)_{\mu=1} - \frac{dP_n(\mu)}{d\mu}$$

sono divisibili per $1-\mu$. D'altra parte, dalle [4] segue

$$\operatorname{sen}\theta\,\frac{\partial(\theta,\varphi)}{\partial(\gamma,w)} = \operatorname{sen}\gamma ,$$

e quindi, si ha, come del resto è geometricamente evidente:

$$d\sigma_M = \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\varphi = \operatorname{sen}\gamma\, d\gamma\, dw .$$

Se ne deduce allora che non soltanto l'integrale a primo membro della [1] ha senso, ma che, tolte le parti del 2° membro di [10] che dànno contributo nullo, esso si riduce a

$$[11] \qquad Y_n^{(0)} \int_\sigma \frac{1 - P_n(\mu)}{(2 - 2\cos\gamma)^{\frac{3}{2}}}\, d\sigma_M .$$

2. – Per calcolare l'integrale che compare nella [11], si noti che

$$[12] \qquad \frac{1 - P_n(\mu)}{1-\mu} = a_0 + a_1 P_1(\mu) + \cdots + a_{n-1} P_{n-1}(\mu) ,$$

dove $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$ sono determinati coefficienti.

Moltiplicando per $1-\mu$ e tenendo presente che

$$\mu P_r = P_1 P_r = \frac{r P_{r-1} + (r+1) P_{r+1}}{2r+1},$$

si deduce l'identità

$$\left(\frac{n}{2n-1} a_{n-1} - 1\right) P_n + \left(\frac{n-1}{2n-3} a_{n-2} - a_{n-1}\right) P_{n-1} + \cdots +$$
$$+ \left(\frac{r+1}{2r+3} a_{r+1} + \frac{r}{2r-1} a_{r-1} - a_r\right) P_r + \cdots + \left(\frac{2}{5} a_2 + a_0 - a_1\right) P_1 +$$
$$+ \left(\frac{1}{3} a_1 + 1 - a_0\right) = 0.$$

E da questa si trae

$$\frac{a_{n-1}}{2n-1} = \frac{1}{n}, \quad \frac{a_{n-2}}{2n-3} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1}, \cdots, \frac{a_1}{3} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \cdots + \frac{1}{2},$$
$$a_0 = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \cdots + \frac{1}{2} + 1;$$

donde

$$\frac{a_{n-1}}{2n-1} + \frac{a_{n-2}}{2n-3} + \cdots + \frac{a_1}{3} + a_0 = n. \qquad [13]$$

Dopo ciò, si può scrivere:

$$\int_\sigma \frac{1 - P_n(\mu)}{(2-2\cos\gamma)^{\frac{3}{2}}} d\sigma_M = \frac{1}{2} \int_\sigma \frac{a_0 - a_1 P_1(\mu) - \cdots - a_{n-1} P_{n-1}(\mu)}{\sqrt{2-2\cos\gamma}} d\sigma_M =$$
$$= 2\pi \left(a_0 + \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{5} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{2n-1}\right) = 2\pi n.$$

E la formola [1] è dimostrata.

Analisi matematica. — *Risoluzione in termini finiti del problema di Cauchy, con dati iniziali su una ipersuperficie qualunque.* Nota di LUIGI FANTAPPIÈ, presentata (1) dall'Accademico FRANCESCO SEVERI.

1. – In una Memoria precedente (2) ho esposto un metodo generale con cui si perviene a costruire effettivamente, con un numero finito di integrazioni, la soluzione z del problema di CAUCHY, per ogni equazione a derivate parziali, lineare e a coefficienti costanti, *qualunque sia l'ordine m e il numero $n+1$ delle variabili*, cioè del tipo

$$[1] \qquad \frac{\partial^m z}{\partial x_0^m} + \sum a_{r_0 r_1 \cdots r_n} \frac{\partial^{r_0+r_1+\cdots+r_n} z}{\partial x_0^{r_0} \partial x_1^{r_1} \cdots \partial x_n^{r_n}} = f(x_0, x_1, \cdots, x_n)$$

(con $r_0 < m$, $r_0 + r_1 + \cdots + r_n \leq m$), in corrispondenza alle condizioni iniziali

$$[2] \qquad \left(\frac{\partial^r z}{\partial x_0^r}\right)_{x_0=0} = \varphi_r(x_1, \cdots, x_n) \qquad (r = 0, 1, 2, \cdots, m-1)$$

quando dunque i dati iniziali siano noti sull'iperpiano $x_0 = 0$, o, più generalmente, *su un qualunque iperpiano*, potendosi sempre ricondurre questo caso al precedente $x_0 = 0$, con un cambiamento d'assi cartesiani, senza alterare il tipo dell'equazione [1].

Poichè anche gli altri metodi finora applicati nello studio delle equazioni del tipo [1], tanto quelli di carattere formale e poco rigoroso, come quelli basati sulla trasformazione di LAPLACE, con le loro difficoltà relative all'inversione della trasformazione stessa, si riferiscono sempre a dati iniziali assegnati su iperpiani, con le sole eccezioni dei metodi di HADAMARD (3),

(1) Nell'Adunanza del 30 maggio 1941-XIX.

(2) *Integrazione in termini finiti di ogni sistema od equazione a derivate parziali, lineare e a coefficienti costanti, d'ordine qualunque.* « Mem. Acc. d'Italia », vol. VIII, n. 13, 1937, pag. 613 e seg., v. in particolare la formula risolutiva [108] a pag. 644.

(3) HADAMARD, *Le problème de Cauchy*. Paris, Hermann, 1932.

per le equazioni iperboliche di 2° *ordine*, e di HOLMGREEN [4], e miei [5], per le equazioni *in due sole variabili indipendenti* (metodi che però, tranne i miei, presuppongono la conoscenza di « soluzioni fondamentali » o di « integrali principali »), ritengo particolarmente interessante estendere il metodo d'integrazione esposto nella mia Memoria, già citata, al caso generale che i dati iniziali siano invece assegnati su una qualunque ipersuperficie Γ, *non caratteristica*, di equazione

$$[3] \qquad x_0 = \psi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

e siano quindi della forma

$$[4] \qquad \left(\frac{\partial^r z}{\partial x_0^r}\right)_\Gamma = \left(\frac{\partial^r z}{\partial x_0^r}\right)_{x_0=\psi} = \varphi_r(x_1, x_2, \cdots, x_n) \quad (r = 0, 1, 2, \cdots, m-1)$$

Con tale estensione vengono poi a crearsi anche i necessari presupposti per la risoluzione di problemi *in grande*, come quello di DIRICHLET e di NEUMANN nel campo reale, mediante il metodo delle « funzioni analitiche », che consiste nell'imporre la regolarità della soluzione analitica z del problema di CAUCHY (che si suppone già risolto), non solo in un intorno conveniente dell'ipersuperficie Γ, ma, per esempio, quando questa è *reale* e *chiusa*, in tutto il dominio reale da essa racchiuso; metodo che ho già esposto, per il problema di DIRICHLET nel piano, in un precedente lavoro [6].

2. – Ricordiamo perciò brevemente il metodo esposto nella Memoria già citata in [2], per l'integrazione dell'equazione generale [1] con le condizioni iniziali [2] sull'iperpiano $x_0 = 0$. Introdotto l'operatore lineare

$$[5] \qquad If = \int_0^{x_0} f(t, x_1, x_2, \cdots, x_n)\, dt$$

e gli altri n operatori lineari

$$[6] \qquad B_s f = I \frac{\partial}{\partial x_s} f = \int_0^{x_0} f'_s(t, x_1, x_2, \cdots, x_n)\, dt \quad (s = 1, 2, \cdots, n)$$

---

[4] HOLMGREEN, *Sur les systèmes linéaires aux dérivées partielles du premier ordre.* « Ark. för. mat. », ecc., v. 6, n. 2, 1910.

[5] *Integrazione con quadrature dei sistemi a derivate parziali lineari e a coefficienti costanti in due variabili, mediante il calcolo degli operatori lineari.* « Rend. Circ. Mat. di Palermo », t. 57, 1933.

[6] *Il punto di vista reale e quello analitico nella teoria delle equazioni a derivate parziali.* « Boll. U. M. I. », s. 2ª, a. 3°, 1941.

si riconosce subito che, *essendo gli estremi di integrazione costanti rispetto alle variabili* $x_1, x_2, \cdots, x_n$, questi operatori lineari I e B_s sono tutti *permutabili* fra loro, come pure con le derivazioni rispetto a $x_1, x_2, \cdots, x_n$ e che inoltre è soddisfatta anche l'altra condizione (risolubilità univoca delle equazioni fondamentali) sufficiente ad assicurare, insieme alla permutabilità, la possibilità di istituire un calcolo perfettamente rigoroso delle funzioni $g(B_1, B_2, \cdots, B_n, I)\, f$ degli $n+1$ operatori B_s e I, corrispondenti a una qualunque funzione $g(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n, \lambda_{n+1})$, analitica e regolare nell'origine.

Applicando allora m volte l'operatore I ad ambo i membri dell'equazione differenziale [1] e tenendo conto delle condizioni iniziali [2], si perviene all'equazione integro-differenziale, del tutto equivalente a [1] e [2],

$$[7] \qquad z + \Sigma a_{r_0 r_1 \cdots r_n} B_1^{r_1} B_2^{r_2} \cdots B_n^{r_n} I^{r_{n+1}} z = \bar{f}(x_0, x_1, \cdots, x_n)$$

ove $r_{n+1} = m - (r_0 + r_1 + \cdots + r_n)$ e $\bar{f}$ è la funzione nota

$$8] \qquad \bar{f}(x_0, x_1, \cdots, x_n) = I^m f + \sum_0^{m-1} I^k \varphi_k +$$

$$+ \Sigma'_{r_0 r_1 \cdots r_n} a_{r_0 r_1 \cdots r_n} \sum_0^{r_0 - 1} B_1^{r_1} B_2^{r_2} \cdots B_n^{r_n} I^{r_{n+1}+k} \varphi_k .$$

Ma la [7] si può scrivere

$$[9] \qquad Q(B_1, B_2, \cdots, B_n, I)\, z = \bar{f}(x_0, x_1, \cdots, x_n)$$

se indichiamo con Q il polinomio

$$[10] \qquad Q(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n, \lambda_{n+1}) = 1 + \Sigma a_{r_0 r_1 \cdots r_n} \lambda_1^{r_1} \lambda_2^{r_2} \cdots \lambda_n^{r_n} \lambda_{n+1}^{r_{n+1}}$$

che è certo diverso da 0 nell'origine, assumendovi il valore 1, e quindi la [7] stessa, e perciò anche la [1] con le condizioni iniziali [2], si risolve subito con la formula

$$[11] \qquad z(x_0, x_1, \cdots, x_n) = \frac{1}{Q(B_1, B_2, \cdots, B_n, I)} \bar{f}$$

cioè applicando alla funzione nota f l'operatore lineare, funzione dei B_s e di I, che corrisponde alla funzione razionale $g(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{n+1}) = \frac{1}{Q}$ (la quale è certo regolare nell'origine, essendovi $Q - 1$), operatore che si può calcolare effettivamente con un numero finito di quadrature.

3. – Quando invece si ha l'equazione a derivate parziali [1], con le condizioni iniziali [4] su una ipersuperficie Γ qualunque (non caratteristica), possiamo bensì introdurre, invece di [5] e [6], gli operatori lineari

$$[12] \qquad If = \int_{\psi(x_1, x_2, \cdots, x_n)}^{x_0} f(t, x_1, x_2, \cdots, x_n)\, dt$$

$$[13] \qquad B_s f = I \frac{\partial}{\partial x_s} f = \int_{\psi(x_1, x_2, \cdots, x_n)}^{x_0} f'_s(t, x_1, x_2, \cdots, x_n)\, dt \quad (s = 1, 2, \cdots, n)$$

differenti da quelli considerati al numero precedente solo per l'estremo inferiore di integrazione, ma ora si presenta il grave inconveniente che tali operatori, avendo questo estremo di integrazione *non più costante* rispetto a $x_1, x_2, \cdots, x_n$, non sono più permutabili con le derivazioni rispetto a queste variabili, e quindi non sono più permutabili, almeno in generale, nemmeno fra loro.

Si avrà infatti

$$\frac{\partial}{\partial x_s} If = \frac{\partial}{\partial x_s} \int_{\psi}^{x_0} f(t, x_1, x_2, \cdots, x_n)\, dt = \int_{\psi}^{x_0} f'_s(t, x_1, \cdots, x_n)\, dt - f(\psi, x_1, \cdots, x_n) \frac{\partial \psi}{\partial x_s}$$

cioè

$$[14] \qquad \frac{\partial}{\partial x_s} If = I \frac{\partial}{\partial x_s} f - f_\Gamma \frac{\partial \psi}{\partial x_s} \qquad (s = 1, 2, \cdots, n)$$

e inversamente

$$[15] \qquad I \frac{\partial}{\partial x_s} f = \frac{\partial}{\partial x_s} If + f_\Gamma \frac{\partial \psi}{\partial x_s} \qquad (s = 1, 2, \cdots, n)$$

e quindi, operando nel campo lineare A delle funzioni f analitiche e regolari nell'intorno di un punto P_0 di Γ, si avrà la permutabilità di I con le derivazioni e coi B_s solo se i termini aggiuntivi $f_\Gamma \frac{\partial \psi}{\partial x_s}$ *sono nulli*. Ma ciò può accadere, oltre che nel caso $\frac{\partial \psi}{\partial x_s} = 0$ ($\psi =$ costante), anche quando l'altro fattore f_Γ è nullo, quando cioè la funzione f, a cui si applicano gli operatori, *è nulla sull'ipersuperficie* Γ. Se dunque ci limitiamo a considerare *quella parte di* A, *costituita dalle funzioni* f *regolari e nulle su* Γ, *che forma pure un campo lineare* A_0, gli ultimi termini delle [14] e [15] si annullano identicamente, cioè *in* A_0 *l'operatore* I *è ancora permutabile con le derivazioni rispetto a* $x_1, x_2, \cdots, x_n$ *e quindi anche coi* B_s, *prodotti di* I *per queste derivazioni.*

Di più, tanto l'operatore I quando gli n operatori lineari B_s, *fanno sempre corrispondere a ogni funzione* f *di* A_0, *anzi a qualunque funzione di* A, *ancora una funzione del campo* A_0, *cioè sempre nulla su* Γ, come è evidente dalle formule di definizione [12] e [13].

Inoltre questi $n+1$ operatori lineari I e B_s del campo lineare A_0 sono non solo ivi permutabili, *ma soddisfano anche all'altra condizione, sufficiente per stabilire un calcolo rigoroso delle loro funzioni* $g(B_1, B_2, \cdots, B_n, I)\, f$, *di avere le corrispondenti «equazioni fondamentali»*

$$[16] \qquad \begin{cases} \alpha_s \gamma_s - B_s \gamma_s = f & (s = 1, 2, \cdots, n) \\ \alpha_{n+1} \gamma_{n+1} - I\gamma_{n+1} = f \end{cases}$$

univocamente risolubili in A_0, per ogni f di A_0; infatti da tali equazioni integro-differenziali si ottengono, derivando rispetto a x_0, le equazioni differenziali del 1° ordine

$$[17] \qquad \begin{cases} \alpha_s \dfrac{\partial \gamma_s}{\partial x_0} - \dfrac{\partial \gamma_s}{\partial x_s} = \dfrac{\partial f}{\partial x_0} & (s = 1, 2, \cdots, n) \\ \alpha_{n+1} \dfrac{\partial \gamma_{n+1}}{\partial x_0} - \gamma_{n+1} = \dfrac{\partial f}{\partial x_0} \end{cases}$$

(v. Memoria citata in (2), n. 4) con le condizioni iniziali che, su Γ, le funzioni incognite γ_s si riducano a $\dfrac{1}{\alpha_s} f_\Gamma$ cioè, essendo f in A_0, e quindi nulla su Γ, le soluzioni delle [16] restano univocamente determinate come *quelle soluzioni delle* [17] *che si annullano su* Γ, e quindi risultano automaticamente appartenenti ancora al campo lineare A_0.

4. – Ciò premesso, passiamo a risolvere il problema di CAUCHY per l'equazione [1], con le condizioni iniziali della forma generale [4]. Applicando m volte ad ambo i membri della [1] l'operatore I, definito dalla [12], e tenendo conto di queste condizioni iniziali, si perviene, come nella memoria citata in (2), n. 12, all'equazione integro-differenziale

$$[18] \qquad z + \sum a_{r_0 r_1 \cdots r_n} I^{m-r_0} \frac{\partial^{r_1+r_2+\cdots+r_n} z}{\partial x_1^{r_1} \partial x_2^{r_2} \cdots \partial x_n^{r_n}} = \bar{f}(x_0, x_1, \cdots, x_n)$$

ove $\bar{f}$ è la funzione nota

$$[19] \qquad \bar{f} = I^m f + \sum_0^{m-1}{}_k I^k \varphi_k + \sum'_{r_0 r_1 \cdots r_n} a_{r_0 r_1 \cdots r_n} \sum_0^{r_0-1}{}_k I^{m-r_0+k} \frac{\partial^{r_1+r_2+\cdots+r_n} \varphi_k}{\partial x_1^{r_1} \partial x_2^{r_2} \cdots \partial x_n^{r_n}}.$$

Ma nei termini della [18], per cui $r = r_1 + \cdots + r_n = m - r_0 - r_{n+1} > 0$,

possiamo scambiare uno degli operatori I con una derivazione, ottenendo, per le formule [15],

$$I\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial^{r-1}z}{\partial x_1^{r_1-1}\cdots\partial x_n^{r_n}}=\frac{\partial}{\partial x_1}I\frac{\partial^{r-1}z}{\partial x_1^{r_1-1}\cdots\partial x_n^{r_n}}+\left(\frac{\partial^{r-1}z}{\partial x_1^{r_1-1}\cdots\partial x_n^{r_n}}\right)_\Gamma\frac{\partial\psi}{\partial x_1}$$

ove, al 2° membro, l'ultimo termine è noto, per le condizioni iniziali, mentre nel 1° termine la derivazione rispetto a x_1, essendo applicata a una funzione del tipo Iq, e quindi nulla su Γ, cioè di A_0, è permutabile (a sinistra) con gli operatori I e B_s, in particolare si ha quindi

$$a_{r_0r_1\cdots r_n}I^{m-r_0}\frac{\partial^r z}{\partial x_1^{r_1}\cdots\partial x_n^{r_n}}=$$

$$=a_{r_0r_1\cdots r_n}I^{m-r_0-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}I\frac{\partial^{r-1}z}{\partial x_1^{r_1-1}\cdots\partial x_n^{r_n}}+\cdots\right)=$$

$$=a_{r_0r_1\cdots r_n}I^{r_n+1}\frac{\partial}{\partial x_1}I^r\frac{\partial^{r-1}z}{\partial x_1^{r_1-1}\cdots\partial x_n^{r_n}}+\cdots$$

ove i termini non scritti sono noti, per le condizioni iniziali. Se $r-1>0$, possiamo poi scambiare ancora I^{r-1} con un'altra derivazione, applicando sempre la [15], e così via, fino a ottenere, da ciascun termine del 1° membro della [18], l'espressione

$$a_{r_0r_1\cdots r_n}I^{m-r_0}\frac{\partial^r z}{\partial x_1^{r_1}\cdots\partial x_n^{r_n}}=$$

$$=a_{r_0r_1\cdots r_n}I^{r_n+1}\frac{\partial}{\partial x_1}I\frac{\partial}{\partial x_1}I\cdots\frac{\partial}{\partial x_n}Iz+\text{termini noti}$$

e portando anche questi termini noti al 2° membro, si ha infine la [18] sotto l'altra forma

$$[20]\qquad z+\Sigma a_{r_0r_1\cdots r_n}I^{r_n+1}\frac{\partial}{\partial x_1}I\frac{\partial}{\partial x_1}I\cdots\frac{\partial}{\partial x_n}Iz=\bar f_1(x_0,x_1,\cdots,x_n)$$

ove la $\bar f_1$ è pure una funzione nota, data da $\bar f$ meno i termini noti (su Γ), provenienti dagli scambi degli operatori I con le derivazioni, mentre nel 1° membro si trovano, in ciascun termine, r operatori I alternati con le r derivazioni che vi compaiono. Applicando ancora I ad ambo i membri della [20] e indicando con z_1 l'altra funzione incognita ausiliaria

$$[21]\qquad z_1(x_0,x_1,\cdots,x_n)=Iz=\int_\psi^{x_0}z(t,x_1,\cdots,x_n)\,dt$$

da cui

$$[22] \qquad z(x_0, x_1, \cdots, x_n) = \frac{\partial z_1}{\partial x_0}$$

si ha infine per z_1 l'equazione integro-differenziale

$$[23] \qquad z_1 + \Sigma a_{r_0 r_1 \cdots r_n} I^{r_{n+1}} I \frac{\partial}{\partial x_1} I \frac{\partial}{\partial x_1} \cdots I \frac{\partial}{\partial x_n} z_1 = I\bar{f}_1$$

che, per la definizione [13] degli operatori B_s, possiamo anche scrivere nell'altra forma

$$[24] \qquad z_1 + \Sigma a_{r_0 r_1 \cdots r_n} I^{r_{n+1}} B_1^{r_1} B_2^{r_2} \cdots B_n^{r_n} z_1 = I\bar{f}_1 .$$

Ma ora possiamo osservare che tanto il termine noto If_1, quanto la funzione incognita ausiliaria $z_1 = Iz$, essendo ottenute applicando I ad altre funzioni, sono *nulle su* Γ e quindi *sono funzioni del campo lineare* A_0, ove tutti gli operatori I e B_s sono permutabili, e ove si può anzi stabilire, per quanto s'è visto al numero precedente, un calcolo rigoroso delle funzioni di questi operatori. Dunque la soluzione z_1 della [24] si otterrà subito con la formula

$$[25] \qquad z_1(x_0, x_1, \cdots, x_n) = \frac{1}{Q(B_1, B_2, \cdots, B_n, I)} I\bar{f}_1$$

ove Q è il solito polinomio [10], con gli stessi coefficienti dell'equazione [1] di partenza, e quindi *la soluzione z della* [1] *con le condizioni iniziali* [4] *si avrà, per la* [22], *con l'altra formula*

$$[26] \qquad z(x_0, x_1, \cdots, x_n) = \frac{\partial}{\partial x_0} \frac{1}{Q(B_1, B_2, \cdots, B_n, I)} I\bar{f}_1 .$$

5. – Per quanto riguarda il calcolo effettivo della funzione degli operatori I e B_s, corrispondente a una qualunque funzione analitica $g(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n, \lambda_{n+1})$ regolare nell'origine, ricordiamo poi (v. Memoria citata in (²)) che essa è un funzionale analitico e lineare $F[g]$ della funzione g, si ha cioè

$$[27] \qquad g(B_1, B_2, \cdots, B_n, I) \cdot I\bar{f}_1 = F[g(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{n+1})]$$

che si può calcolare con quadrature, secondo quanto è esposto nella Memoria citata, quando ne sia nota l'« indicatrice emisimmetrica » o « proiettiva ». Indicando con $p(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n+1})$ l'indicatrice proiettiva di F, cioè la funzione

$$[28] \qquad p(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n+1}) = F\left[\frac{1}{1 + \alpha_1 \lambda_1 + \cdots + \alpha_{n+1} \lambda_{n+1}}\right]$$

il valore di F per la funzione g è infatti dato dal « prodotto funzionale proiettivo » $\overset{\Delta}{g}\overset{\Delta}{p}$, cioè dall'espressione (v. anche una mia Memoria che uscirà prossimamente negli *Annali di Matematica*)

$$[29] \qquad F[g] = g(B_1, B_2, \cdots, B_n, I) \therefore I\bar{f}_1 = \overset{\Delta}{g}\overset{\Delta}{p} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^{n+1}} \int_{C_1} d\alpha_1 \int_{C_2} d\alpha_2 \cdots \int_{C_{n+1}} d\alpha_{n+1} \int_0^1 d\tau_n \cdots$$

$$\cdots \int_0^{\tau_2} d\tau_1 \frac{1}{\alpha_1 \cdots \alpha_{n+1}} g\left(\frac{\tau_1}{\alpha_1}, \frac{\tau_1 - \tau_2}{\alpha_2}, \cdots, \frac{\tau_n - 1}{\alpha_{n+1}}\right) p_1(\alpha_1, \cdots, \alpha_{n+1})$$

ove è

$$[30] \qquad p_1(\alpha_1, \cdots, \alpha_{n+1}) = \frac{\partial^n}{\partial t^n_{t=1}} \{t^n p(t\alpha_1, t\alpha_2, \cdots, t\alpha_{n+1})\}$$

e i circoli C_s hanno centro nell'origine e un raggio ρ tale che la p, e quindi anche p_1, sia regolare su essi e all'interno, e invece la g sia regolare sui circoli C'_s, con centro nell'origine e raggio $\rho' = \frac{1}{\rho}$ e nel loro interno.

L'indicatrice proiettiva p è data poi, in base alle formule di definizione [28] e [27] di p e di F, dall'espressione

$$[31] \qquad p(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n+1}) = F\left[\frac{1}{1 + \alpha_1 \lambda_1 + \cdots + \alpha_{n+1}\lambda_{n+1}}\right] =$$

$$= \frac{1}{1 + \alpha_1 B_1 + \cdots + \alpha_n B_n + \alpha_{n+1} I} \cdot I\bar{f}_1$$

da cui si ricava p come soluzione dell'equazione integro-differenziale

$$[32] \qquad p + \alpha_1 B_1 p + \cdots + \alpha_n B_n p + \alpha_{n+1} Ip = I\bar{f}_1$$

che è equivalente all'equazione differenziale

$$[33] \qquad \frac{\partial p}{\partial x_0} + \alpha_1 \frac{\partial p}{\partial x_1} + \cdots + \alpha_n \frac{\partial p}{\partial x_n} + \alpha_{n+1} p = \bar{f}_1$$

con la condizione iniziale

$$[34] \qquad p_\Gamma = (I\bar{f}_1)_\Gamma = 0 .$$

Integrando la [33] con la condizione [34] si ha infine

$$[35] \qquad p(\alpha_1, \cdots, \alpha_{n+1}, x_0, x_1, \cdots, x_n) =$$

$$= \int_{x_0}^{x_0} e^{\alpha_{n+1}(t - x_0)} \bar{f}_1(t, x_1 + \alpha_1(t - x_0), \cdots, x_n + \alpha_n(t - x_0)) \, dt$$

ove $\bar{x}_0$ è la prima coordinata del punto $\bar{P} \equiv (\bar{x}_0, \bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n)$, ottenuto come intersezione della retta, spiccata coi coefficienti di direzione $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ dal punto generico $P \equiv (x_0, x_1, \cdots, x_n)$ (nelle vicinanze del punto P_0 di Γ, in cui tutte le funzioni sono analitiche e regolari) con l'ipersuperficie Γ, su cui si conoscono i dati iniziali, e quindi *la p non è altro che l'integrale di f_1, a meno del fattore esponenziale, lungo il segmento di questa retta, compreso fra la sua intersezione $\bar{P}$ con Γ e il punto P stesso.*

La soluzione z del problema di CAUCHY per la [1] coi dati iniziali [4] sulla ipersuperficie generica Γ, data dalla [26] si avrà dunque nella forma

$$[36] \qquad z(x_0, x_1, \cdots, x_n) = \frac{\partial}{\partial x_0} \left\{ \frac{1}{Q} \right\} \overset{\Delta}{p}$$

con la p data dalla [35], per cui il punto essenziale consiste nel calcolo del prodotto funzionale proiettivo con l'espressione integrale [29] (mediante $2n+1$ integrazioni), con la particolarità interessante, però, che *la g è ora la funzione razionale* $\frac{1}{Q}$.

Meccanica. — *Incompatibilità dell'adesione completa al contorno con la regolarità e le condizioni asintotiche euleriane per correnti viscose stazionarie.* Nota di PAOLO UDESCHINI, presentata (1) da UMBERTO CISOTTI, Aggregato alla Reale Accademia d'Italia.

Si consideri un solido S, delimitato da una superficie σ investito da una corrente stazionaria di velocità asintotica c. La corrente sia costituita da un fluido reale qualsivoglia (viscoso), comprimibile o no, per il quale si fanno solo le due ipotesi seguenti:

1ª Il movimento fluido sia regolare.

2ª La velocità v del fluido all'infinito tenda a c e differisca da c a meno di termini infinitesimi di un ordine abbastanza grande: precisamente, se r è la distanza tra un punto O e un punto $P \to \infty$ sia:

$$[1] \qquad \lim_{P \to \infty} r^2 (v - c) = 0 .$$

Le condizioni asintotiche siano cioè euleriane.

In queste condizioni si trova che è nullo il risultante delle azioni dinamiche, cioè nulla la resistenza diretta e nulla l'azione deviatrice.

La stessa cosa avviene se, invece della corrente che investe l'ostacolo fisso, si considera il solido S uniformemente traslante con velocità $C = -c$ in seno al fluido indefinitamente esteso. Tale risultato che generalizza il paradosso di d'ALEMBERT, è dovuto a CISOTTI (2).

Dunque la viscosità *direttamente* considerata non è atta a rimuovere il paradosso di D'ALEMBERT e le sue estensioni.

Per rimuovere la conclusione manifestamente contraddetta dalla esperienza, grazie alla quale è nullo il risultante delle azioni dinamiche, si è condotti di necessità a rigettare almeno una delle due ipotesi precedenti, dalle quali scende il paradosso stesso.

---

(1) Nell'Adunanza del 30 maggio 1941-XIX.

(2) CISOTTI, « Rend. Ist. Lomb. », v. *50*; pag. 502 (1917). Per la conferma energetica di tale paradosso cfr. FINZI, « Comptes Rend. », v. *182*, pag. 1076 (1926).

Vortici, superficie vorticose di discontinuità, sorgenti, circolazioni sono tutti elementi fisici atti ad eludere le due ipotesi 1ª e 2ª comportando singolarità analitiche nella rappresentazione del movimento o condizioni asintotiche non euleriane. Introducendo anche uno solo di questi elementi si costruiscono le teorie idro ed aerodinamiche più notevoli, come la teoria di HELMHOLTZ sulla scia mediamente in quiete, quella di KARMAN sulla scia di vortici, la teoria di JOUKOWSKI per l'ala indefinita, quella di PRANDTL per l'ala finita, ecc. Tutte queste teorie fisiche portano ad azioni dinamiche non nulle, appunto grazie alla rimozione delle ipotesi 1ª e 2ª [1].

Mi sembra molto significativo mostrare che la necessità di respingere almeno una delle ipotesi 1ª e 2ª, oltre che dalla rimozione del paradosso di D'ALEMBERT, è anche imposta dalla condizione, assolutamente richiesta dall'esperienza, di adesione completa al contorno dei fluidi viscosi, anche se la loro viscosità è estremamente tenue.

Tale impossibilità è stata dimostrata da FINZI [2] nel caso di un fluido viscoso, incomprimibile e sottratto alle forze di massa, e ciò attraverso al calcolo della potenza dissipata da una corrente traslatoria che investe il solido.

In questa nota dimostrerò l'impossibilità di conciliare le ipotesi 1ª e 2ª con l'adesione al contorno di un fluido qualsivoglia, comunque comprimibile, qualunque ne sia l'energia potenziale esterna. Questo risultato, che costituisce un'ampia estensione di quello di FINZI, è ottenuto con un nuovo procedimento che si presta a trattare nello stesso modo le varie forme di energia che intervengono nel bilancio energetico.

* * *

La corrente che investe il solido S sia stazionaria, aderisca completamente al contorno σ ed inoltre sussistano le condizioni 1ª e 2ª, cioè il movimento sia regolare esternamente a σ e all'infinito si riduca, conformemente alla [1], a una traslazione uniforme $\boldsymbol{c}$.

$\boldsymbol{p}_n$ rappresenti lo sforzo specifico che si esercita sopra un elemento superficiale che ha per normale $\boldsymbol{n}$. Osservo intanto che si può porre:

$$\boldsymbol{p}_n = p\boldsymbol{n} + \boldsymbol{q}_n$$

dove p rappresenta la pressione mentre $\boldsymbol{q}_n$ reca il contributo della viscosità e dipende dalla velocità di deformazione, annullandosi con questa.

---

[1] Sull'influenza in generale delle singolarità e delle condizioni asintotiche nella meccanica dei fluidi cfr. FINZI, « Atti del Congr. Int. dei Matematici », Bologna 1928, v. 6 pag. 269. Cfr. FINZI e BOZZA, *Resistenza idro ed aerodinamica*, Messina, Milano 1935, cap. VI.

[2] FINZI e BOZZA loco citato pag. 148.

In forma tensoriale, il tensore degli sforzi, nella metrica $ds^2 = a_{ik}\,dx^i\,dx^k$, $(i, k = 1, 2, 3)$ [1] assume l'aspetto:

$$p_{ik} = p_{ki} = pa_{ik} + q_{ik}$$

dove $p = \frac{1}{3}\,p_{ik}\,a^{ik}$, e l'invariante $q_{ik}\,a^{ik} = 0$.

Il tensore q_{ik} è simmetrico, legato da una relazione lineare ed omogenea al tensore velocità di deformazione

$$\eta_{ik} = \frac{1}{2}\,(v_{i/k} + v_{k/i})\,.$$

Tenuto conto della simmetria dei due tensori q_{ik} ed η_{ik} e nell'ipotesi di isotropia, il legame tensoriale assume, come è ben noto, la forma seguente:

$$[2] \qquad q_{ik} = \frac{2}{3}\,\mu\theta\,a_{ik} - 2\,\mu\eta_{ik}$$

μ è il coefficiente di viscosità, $\theta = \eta_{ik}\,a^{ik} = v_i^{/i} = \operatorname{div} \boldsymbol{v}$.

Se Ω è una sfera con centro al finito e raggio r tendente all'infinito, consideriamo il fluido che occupa il volume τ delimitato dalle due superficie σ ed Ω.

Indichiamo con k la densità, con $\boldsymbol{F}$ la forza unitaria di massa (l'accelerazione di gravità nei casi più comuni) e supponiamo che $\boldsymbol{F}$ derivi da un potenziale U.

Le equazioni di movimento sono allora le seguenti:

$$[3] \qquad \text{entro } \tau \begin{cases} k\,\dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt} = k\,\operatorname{grad} U - \operatorname{grad} p - q_i^{/i} \\ \operatorname{div} k\boldsymbol{v} = 0 \\ \mathcal{F}(p\,,\,k) = 0 \end{cases}$$

$$[3'] \qquad \begin{aligned} &\text{sopra } \sigma \{\ \boldsymbol{v} = 0\,, \\ &\text{all'}\infty \quad \{\ \boldsymbol{v} = \boldsymbol{c}\,. \end{aligned}$$

Nella prima equazione indefinita s'intende che q_{ik} è un tensore simmetrico espresso dalla [2]; la seconda traduce il principio di conservazione della massa, quando si ricordi che il moto è stazionario e quindi $\frac{\partial}{\partial t} = 0$; la terza è l'equazione complementare.

---

[1] Gli indici nello spazio ordinario sono suscettibili dei valori 1, 2, 3; posti in basso indicano covarianza, in alto controvarianza; il segno di sommatoria è soppresso quando si satura un'indice di covarianza con un indice di controvarianza; la lineetta precedente indici è simbolo di derivazione.

Introduciamo le energie in gioco nel volume τ cioè: l'energia cinetica T, la potenziale V e l'energia intrinseca W, nonchè la potenza Λ dissipata dal fluido. Esse sono definite rispettivamente dalle seguenti relazioni:

$$T = \frac{1}{2}\int_\tau k v^2 \, d\tau \quad , \quad V = \int_\tau U k d\tau \quad , \quad W = \int_\tau E k d\tau \quad , \quad \Lambda = \int_\tau q_{ik} \, v^{i/k} \, d\tau$$

dove $E = -\int p d \frac{1}{k}$.

Il bilancio energetico per il fluido in esame soggetto a forze di massa conservative e nell'ipotesi di regolarità di movimento e quindi, grazie a [2], di sforzi, risulta, tenuto conto della prima delle [3], così espresso (1):

$$[4] \quad \frac{d}{dt}(T + V + W) = \int_\sigma p\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{v} d\sigma + \int_\sigma \boldsymbol{q}_n \times \boldsymbol{v} d\sigma + \int_\Omega p\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{v} d\Omega + \int_\Omega \boldsymbol{q}_n \times \boldsymbol{v} d\Omega + \Lambda$$

dove $\boldsymbol{n}$ è il versore normale al contorno volto verso τ.

Il I e il II termine del secondo membro, che rappresentano (cambiati di segno) la potenza dissipata al contorno σ, risultano nulli per la condizione di adesione al contorno ($\boldsymbol{v} = 0$ su σ).

Pure nulli risultano il III e il IV termine, infatti:

$$\int_\Omega p\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{v} d\Omega = p_\infty \boldsymbol{c} \times \int_\Omega \boldsymbol{n} d\Omega = 0 \, ,$$

$$\int_\Omega \boldsymbol{q}_n \times \boldsymbol{v} d\Omega = \boldsymbol{c} \times \int_\Omega \boldsymbol{q}_n \, d\Omega = 0 \, ,$$

perchè grazie a [2] e a [1] $\boldsymbol{q}_n$ tende a zero per $r \to \infty$ più rapidamente di r^{-3}.

La [4] diventa così:

$$[5] \quad \frac{d}{dt}(T + V + W) = \Lambda \, .$$

Calcoliamo le derivate sostanziali rispetto al tempo dei tre termini che compaiono al primo membro della [5].

$$\frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_\tau v^2 k d\tau = \frac{1}{2}\int_\tau \frac{dv^2}{dt} k d\tau \, .$$

Ma per la stazionarietà del movimento $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ ossia $\frac{dv^2}{dt} = v^2{}_{/i} \, v^i$. Ne segue

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{2}\int_\tau v^2{}_{/i} \, v^i \, k d\tau = \frac{1}{2}\int_\tau [\, (k v^2 \, v^i)_{/i} - v^2 \, (k v^i)_{/i} \,] \, d\tau \, .$$

---

(1) Cfr. Finzi e Bozza, loco citato, p. 93 form. [73].

Ma per l'ipotesi 1ª di regolarità, sfruttando la trasformazione di un integrale di volume in un integrale di superficie, si ottiene

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{1}{2}\int_\sigma kv^2\, \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{n}d\sigma - \frac{1}{2}\int_\Omega kv^2\, \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{n}d\Omega - \frac{1}{2}\int_\tau v^2 \operatorname{div} kv\, d\tau .$$

Ma per la seconda delle [3] e la prima delle [3′]

$$\int_\tau v^2 \operatorname{div} kv\, d\tau = 0 \qquad \int_\sigma kv^2\, \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{n}d\sigma = 0$$

per la 2ª ipotesi asintotica (la [1])

$$\int_\Omega kv^2\, \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{n}d\Omega = k_\infty c^2\, \boldsymbol{c}\times\int_\Omega \boldsymbol{n}d\Omega = 0 .$$

Dunque $\dfrac{dT}{dt} = 0$ (1).

Lo stesso procedimento può essere applicato alle derivate sostanziali rispetto al tempo delle energie V, W. Precisamente:

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_\tau Uk\, d\tau = -\int_\tau \frac{dU}{dt}\, kd\tau = -\int_\tau U_{/i}\, v^i\, kd\tau =$$

$$= -\int_\tau [(Ukv^i)_{,i} - U\,(kv^i)_{,i}]\, d\tau = \int_\sigma kU\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{n}d\sigma + \int_\Omega kU\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{n}d\Omega + \int_\tau U \operatorname{div} kv\, d\tau = 0$$

$$\frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}\int_\tau Ek\, d\tau = \int_\tau \frac{dE}{dt}\, kd\tau = \int_\tau E_{,i}\, v^i\, kd\tau = \int_\tau [(Ekv^i)_{,i} - E\,(kv^i)_{,i}]\, d\tau =$$

$$= -\int_\sigma Ek\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{n}d\sigma - \int_\Omega Ek\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{n}d\Omega - \int_\tau E \operatorname{div} kv\, d\tau = 0 .$$

---

(1) Si noti che per pervenire alla conclusione precedente è essenziale sfruttare, oltre all'ipotesi di stazionarietà, ambedue le ipotesi 1ª e 2ª (regolarità e condizioni asintotiche euleriane).

La sola ipotesi di stazionarietà non basta, perchè essa porta all'annullarsi della derivata parziale di T rispetto a t, non all'annullarsi della derivata sostanziale. Così ad esempio nel caso della corrente costituita da un liquido viscoso in moto *lento* che, in assenza di forze di campo, investe una sfera di raggio a, pure essendo il moto stazionario e valendo anche l'ipotesi 1ª di regolarità, ma non sussistendo la 2ª ipotesi relativa alle condizioni asintotiche euleriane, la derivata sostanziale di T rispetto a t non è nulla, e precisamente, in modo conforme al notissimo risultato di STOKES, si trova che

$$\frac{dT}{dt} = 6\pi\mu c^2 a .$$

Per [5] deve dunque essere:

$$\Lambda = \int_\tau q_{ik} v^{i/k} \, d\tau = 0 .$$

Ma in virtù della [2]

$$[6] \qquad \Lambda = \int_\tau \left(\frac{2}{3} \mu \theta a_{ik} - 2 \mu \eta_{ik} \right) v^{i\,k} \, d\tau = \int_\tau 2 \mu \left(\frac{1}{3} \theta^2 - \eta_{ik} \eta^{ik} \right) d\tau .$$

La funzione sotto il segno di integrale (cambiata di segno) è la funzione di dissipazione di Lord Rayleigh [1]. Quest'ultima è sempre positiva, nulla soltanto (per fluidi viscosi $\mu \neq 0$) se:

$$a) \ \eta_{ik} = 0 \quad \text{e più generalmente} \quad b) \ \eta_{ik} = \frac{1}{3} \theta a_{ik} \ [2] .$$

Nell'ipotesi *a*) il movimento del fluido è rigido; ma sul contorno σ, per la condizione di adesione completa, la velocità è nulla quindi deve essere nulla dappertutto; anche all'infinito deve dove essere $c = 0$. Dunque l'effettivo movimento non può aver luogo, cioè le condizioni 1ª e 2ª non sono compatibili con quella di completa adesione al contorno.

Nella ipotesi *b*) il tensore velocità di deformazione diventa isotropo e in coordinate cartesiane si ha:

$$[7] \quad v_{1/1} = v_{2/2} = v_{3/3} \ ; \ v_{1,2} + v_{2\,1} = 0 \ ; \ v_{1/3} + v_{3/1} = 0 \ ; \ v_{2/3} + v_{3/2} = 0$$

da ciò segue per la componente di velocità v_1

$$[8] \qquad v_{1/11} + v_{1/22} = 0 \qquad v_{1/11} + v_{1/33} = 0 .$$

La funzione v_1 è pertanto armonica rispetto a x_1 , x_2 in ogni piano $x_3 = \text{cost}$, e così pure armonica rispetto a x_1 , x_3 in ogni piano $x_2 = \text{cost}$.

Riferendoci ad un sistema cartesiano $x_1 x_2 x_3$, con l'asse x_2 parallelo al vettore costante c (velocità sintotica della corrente), la funzione v_1 è regolare in tutto il campo esternamente alla superficie σ grazie all'ipotesi 1ª, nulla al contorno per la condizione di adesione completa, nulla all'infinito grazie all'ipotesi 2ª. Dunque la funzione v_1 deve essere nulla in ogni piano

---

[1] Lord Rayleigh, *Sc. Papers*, I, 170.

[2] Infatti, la *a*) è evidente; in quanto alla *b*) si noti che $\eta_{ik} = \frac{1}{3} \theta a_{ik} + \chi_{ik}$ essendo $\chi_{ik} a^{ik} = 0$. Ne segue $\eta_{ik} \eta^{ik} = \frac{1}{3} \theta^2 + \chi_{ik} \chi^{ik}$ e quindi $\frac{1}{3} \theta^2 - \eta_{ik} \eta^{ik} = -\chi_{ik} \chi^{ik}$. Questo invariante è nullo allora e allora soltanto che $\chi_{ik} = 0$, cioè allorchè è verificata la *b*).

$x_3 =$ cost che interseca la superficie σ, ricordando un ben noto teorema sulle funzioni armoniche (1).

Pure nulla risulta v_1 in ogni piano $x_2 =$ cost, sia che intereschi la superficie σ come non la intersechi, nel primo caso per la ragione precedente, nel secondo perchè la funzione armonica è nulla in una striscia di ogni piano $x_2 =$ cost. Possiamo concludere che v_1 è nulla dappertutto.

Analogamente si può mostrare che anche v_3 è nulla dappertutto. Da [7] scende allora $v_2 =$ cost, ma al contorno $v_2 = 0$, quindi v_2 è zero ovunque.

Dunque la velocità è nulla in tutto il campo di movimento anche all'infinito dove deve essere $c = 0$. Anche nel caso *b*), come nel caso *a*), l'effettivo movimento non può aver luogo.

Resta così dimostrato che *l'adesione completa al contorno di una corrente stazionaria, costituita da un fluido viscoso qualsivoglia, comunque comprimibile, qualunque ne sia l'energia potenziale esterna, non è conciliabile con la condizione di regolarità di movimento unita con le condizioni asintotiche euleriane* (2).

---

(1) Cfr. ad esempio, Marcolongo, *Equilibrio dei Corpi elastici*. Milano, 1904, pag. 24 e 40.

(2) Vale la pena notare come il risultato precedente da noi ottenuto nel caso di un fluido generico e senza trascurare nessun termine nelle equazioni indefinite concorda con quello trovato da Stokes nel caso di liquidi in moto *piano* e *lento* (per cui si trascurano nelle equazioni iudefinite i termini $v_j v^{i\,j}$). « Stokes, *On the Effect of Internal Friction of Fluids on the Motion of Pendulums*. « Math. and Phys. Papers », t. III Cambridge 1901. Cfr. anche Picciati, *Sul moto di un cilindro indefinito in un liquido viscoso*. « Rend. della R. Acc. dei Lincei », vol. XVI, 1907, II sem. Cfr. anche Brillouin, *Leçons sur la viscosité des liquides et des gaz*. Paris, 1907, pag. 49.

Astronomia (Astrofisica). — *Altezza della cromosfera nel 1940 e andamento del ciclo solare* (1). Nota (2) di GIORGIO ABETTI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

I risultati delle osservazioni dell'altezza della cromosfera effettuate ad Arcetri nel 1940, come usualmente di 30° in 30° di latitudine, sono raccolti nella seguente tabella. Da VIARO e CIPRIANI sono state eseguite, scegliendo le giornate più favorevoli, 31 osservazioni, che dánno le seguenti medie:

TABELLA I.

Arcetri.

Latitudine	Altezza	Latitudine	Altezza
+ 90° N	10″.74	— 90° S	10″.51
+ 60 E	10 .63	— 60 W	10 .21
+ 30 E	10 .33	— 30 W	10 .35
0 E	10 .46	0 W	10 .13
— 30 E	10 .28	+ 30 W	10 .34
— 60 E	10 .33	+ 60 W	10 .35

Da questi dati si ricava l'altezza media generale per il 1940: 10″.39. Facendo il confronto con il precedente anno si ottiene:

$$1940 - 1939 = -0'',03$$

In base ai risultati degli anni precedenti a questi si può concludere che l'altezza della cromosfera è rimasta costante, e uniformemente distribuita attorno al globo solare, circa dal 1935 all'epoca presente. Poichè

(1) Lavoro eseguito nel R. Osservatorio di Arcetri, Firenze.

(2) Presentata nell'Adunanza del 30 maggio 1941-XIX.

ora si va rapidamente verso il minimo dell'attività solare, vedremo nelle future osservazioni se il lieve accenno di maggiore altezza ai poli, che sembra presentarsi in quest'anno, verrà confermato con un eventuale aumento come avvenne nei precedenti cicli.

L'area totale delle protuberanze dedotta dalle stazioni di Arcetri, Catania, Tashkent, risulta diminuita di 71 unità di protuberanza rispetto al 1939 confermando la lenta diminuzione dell'attività solare verso il minimo. Nei due emisferi l'attività delle protuberanze risulta quasi uguale durante il 1940, ma mentre in quello nord non vi è un massimo deciso di frequenza alle medie latitudini, presentandosene tre: a 17°, 32° e 47°, nell'emisfero sud il massimo è invece bene definito a 27° come nel precedente anno. È interessante di confrontare queste latitudini con quella media occupata dalle macchie nel 1940, che è stata di circa 12°.

Quanto alle altre caratteristiche dell'attività solare, dalle sole osservazioni di Arcetri si hanno per il 1940 i seguenti dati:

Numero relativo delle macchie: 97,2.

Per i flocculi di calcio (K_3) chiari: 2,45.

Per i flocculi di idrogeno (H_α) chiari: 2,24.

Per i flocculi di idrogeno (H_α) oscuri: 2,40.

Anche questi in attività lievemente decrescente rispetto al 1939. Si deve concludere che durante il 1940 l'attività del Sole è stata relativamente alta, paragonabile infatti al massimo del 1928. Soltanto le eruzioni cromosferiche hanno presentato una notevole diminuzione rispetto agli anni precedenti perchè infatti, mentre si può calcolare che nel 1935 si sono presentate 11 eruzioni in una media di 100 ore e 10 nel 1937, invece nel 1940 se ne sono avute soltanto 2.

Il 24 marzo 1940 si ebbe sulla terra una notevolissima tempesta magnetica, che per parecchie ore ha interrotto tutte le comunicazioni a lunga distanza per telegrafo e per radio. Essa con tutta probabilità è stata prodotta da un grande gruppo attivo di macchie uscito dal bordo est del Sole il 20 marzo. Durante il massimo della tempesta magnetica, nella giornata del 24, il gruppo si trovava 20° all'est del meridiano centrale che fu da esso attraversato il giorno 26 marzo alla latitudine di 12°.

Il giorno 29, col gruppo a 40° ad ovest del meridiano centrale, si iniziava un'altra tempesta magnetica. Anche in questo caso si conferma quindi che le tempeste non avvengono in conseguenza del passaggio delle macchie al meridiano centrale con il ritardo che si calcolava in base a tale passaggio [1], ma in séguito alle varie eruzioni che vanno via via sviluppandosi nel gruppo stesso. A Monte Wilson è stato notato che questo

[1] Cfr. per esempio «Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei», vol. V, ser. 6ª, maggio 1927, pag. 721 e sgg. Roma.

gruppo di macchie presentava campi magnetici multipolari, ciò che è piuttosto raro, perchè come si sa i gruppi di macchie sono in maggioranza bipolari, e ciò sembra favorire l'efflusso degli sciami di particelle cariche che influiscono sul magnetismo terrestre. Contemporaneamente fu osservata anche un'aurora boreale, e la grande tempesta magnetica, che è una fra le maggiori finora registrate, fu seguìta da quattro altre tempeste di intensità decrescente, tutte probabilmente associate con lo stesso gruppo.

Lo studio delle eruzioni cromosferiche ha portato a perfezionare i metodi teorici escogitati per prevedere l'andamento dell'attività solare. STEWART e EGGLESTON [1], che hanno portato queste previsioni ad una notevole precisione dal 1933 in poi, possono stabilire che la lenta diminuzione nel numero relativo delle macchie continuerà fino al 1944-5.

---

[1] « Publ. Astr. Soc. of the Pacific. », vol. 52, dicembre 1940, pag. 379. San Francisco.

Astronomia. — *Il termine solare dell'aberrazione e la struttura del sistema planetario.* Nota (1) di GIOVANNI SILVA, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

1. In questa Nota riprendo in esame, per lo scopo che chiarirò alla fine, il problema del moto del Sole intorno al centro di massa del sistema solare, che fu già oggetto di ricerche e di discussioni in precedenti pubblicazioni del prof. NOBILE (2) e mie (3).

Si considerino n pianeti P_i, di masse singole m_i e di massa complessiva μ, ed il Sole S di massa M. Detto G il centro di massa dell'intero sistema e Γ quello del sistema costituito dai soli pianeti, si ha facilmente, dalla definizione stessa di centro di massa:

$$[1] \qquad S - G = -\Sigma_i \frac{m_i}{M+\mu}(P_i - S) = -\frac{\mu}{M+\mu}(\Gamma - S).$$

Dette poi v_i, Γ'_r le velocità, relative al Sole, dei pianeti e del loro centro di massa Γ e V la velocità del Sole rispetto a G, risulta, derivando la [1] rispetto al tempo:

$$[2] \qquad V = -\Sigma_i \frac{m_i}{M+\mu} v_i = -\frac{\mu}{M+\mu} \Gamma'_r$$

La [1] e le formole, come la [2], che ne conseguono, mostrano che il moto del Sole intorno al centro di massa G del sistema solare è la composizione degli n moti planetarî relativi al Sole, invertiti, e ridotti nei raggi vettori, nelle velocità, nelle accelerazioni ecc. secondo le rispettive scale $m_i/(M+\mu)$.

---

(1) Presentata nell'Adunanza del 30 maggio 1941-XIX.

(2) VITTORIO NOBILE, 1ª *Preliminari per una necessaria revisione della teoria dell'aberrazione annua.* « Acta Pont. Ac. Scient. », vol. II, pag. 29, 1938; 2ª *Sulle premesse fondamentali per una rettifica alla teoria dell'aberrazione.* « Rend. R. Accademia dei Lincei », vol. XXIX, ser. 6ª, 1° semestre 1939; 3ª *Il termine solare dell'aberrazione e la struttura del sistema planetario.* « Mem. classe di Sc. Fisiche Matematiche e Naturali della R. Accademia d'Italia, », vol. XII, pag. 25, 1941.

(3) GIOVANNI SILVA, 1ª *Moti kepleriani e teoria dell'aberrazione annua della luce.* « Rend. R. Acc. dei Lincei », vol. XXVIII, ser. 6ª, 2° sem. 1938; 2ª *Sul moto del Sole intorno al centro di massa del sistema solare.* « Mem. classe di Sc. Fisiche Matematiche e Naturali della R. Accademia d'Italia », vol. XI, pag. 245, 1940.

I vettori

$$\Gamma - S = \Sigma_i \frac{m_i}{\mu} (P_i - S) \qquad \Gamma'_r = \Sigma_i \frac{m_i}{\mu} r_i$$

variano con la variabile distribuzione dei pianeti attorno al Sole e i loro moduli possono raggiungere, ma solo in casi eccezionali e per sistemi planetarî specialissimi, i limiti superiori corrispondenti alle due combinazioni nelle quali tutti i pianeti sono in esatta congiunzione rispetto al Sole e, per il primo dei due vettori, sono tutti alla loro distanza afelia, per il secondo sono tutti alla loro distanza perielia ed hanno velocità parallele.

Per ottenere più facilmente un termine di confronto, si tenga conto della piccola eccentricità delle orbite e si ammetta una generale congiunzione con i pianeti alle loro distanze medie a_i dal Sole; il limite che così si ottiene per mod $(\Gamma - S)$:

$$a_m = \Sigma_i \frac{m_i}{\mu} a_i$$

sarà ancora, nella generalità dei casi, un limite superiore irraggiungibile e solo per sistemi planetarî specialissimi potrà in casi eccezionali essere raggiunto e di poco superato. Semplificando ulteriormente, si sostituisca al limite superiore del modulo di Γ'_r sopra indicato la velocità v_m di un pianeta fittizio che giri intorno al Sole, di moto uniforme, lungo una orbita circolare di raggio a_m. Nell'approssimazione data dalle leggi di Keplero, risulta, con f costante dell'attrazione universale:

$$[3] \qquad fM = a_m v_m^2$$

Per i pianeti noti del sistema solare a_m è circa 7 volte la distanza media della Terra dal Sole e v_m è circa 2/5 della velocità annua della Terra. Il rapporto $\mu/(M + \mu)$ vale circa 1/700 e quindi, per la [1], la distanza SG può al più raggiungere 1/100 della distanza media della Terra dal Sole, equivalente a poco più del diametro solare, e, per la [2] la velocità orbitale V del Sole, nel suo moto intorno a G, può al più raggiungere 1/1700 della velocità annua della Terra.

L'esistenza di pianeti ultraplutoniani [1], le cui velocità sono tanto più piccole quanto più essi sono lontani, può accrescere di ben poco questa

[1] Nel 1931 terminavo una mia conferenza con le parole: « questi astri (le comete) potranno esserci di ausilio prezioso per la conoscenza del nostro sistema planetario, la cui estensione supera *certo, e di molto*, i limiti a cui Plutone l'ha ora portata ». (*I calcoli d'orbita e l'orbita di Plutone*. « Rend. del Seminario Matematico e Fisico di Milano », vol. V, 1931, pag. 202). Quanto scrivo nella mia seconda Memoria citata, alla fine di pag. 250 e principio di pag. 251, come pure alla fine del § 4, pag. 255, dimostra che la mia opinione in proposito non è affatto mutata.

seconda frazione, la sola che abbia importanza per le osservazioni utili agli scopi prospettati dal Nobile nelle sue ricerche.

Per un generico sistema di $n+1$ *corpi*, si consideri il rapporto μ/M come quantità piccola di primo ordine. Le [1] e [2], con la presenza dell'analogo fattore $\mu/(M+\mu)$ nel loro terzo membro, dimostrano che la distanza di S da G e la velocità V di S rispetto a G sono grandezze di primo ordine rispetto alla distanza a_m e alla velocità v_m dianzi definite.

A partire da una certa configurazione iniziale, le esatte posizioni P_i e le velocità $\boldsymbol{v}_i$ dei pianeti vanno via via scostandosi, in causa delle perturbazioni reciproche, dalle posizioni e dalle velocità che i pianeti avrebbero se i loro moti soddisfacessero esattamente le leggi di Keplero, ma, se si esclude l'effetto progressivo raggiunto dopo lunghi periodi, le differenze rimangono notoriamente grandezze di primo ordine rispetto alle distanze e alle velocità planetarie e danno quindi un contributo di secondo ordine alle espressioni [1] e [2] di $S-G$ e di $\boldsymbol{V}$.

Ne segue che, *quando si studiano le caratteristiche del moto del Sole intorno al centro di massa* G *del sistema solare facendo uso delle* [1] *e* [2], *è lecito, in via approssimata, sostituire agli esatti moti perturbati dei pianeti, i loro moti kepleriani* [1].

Nonostante che le [1] e [2] derivino dalle prime nozioni di geometria delle masse e di cinematica, il Nobile dichiara assurdi i modelli *geometrico-cinematici* ai quali applico questo principio, in quanto cessano di essere allora valide per essi le leggi della dinamica relative ad un sistema isolato di $n+1$ corpi.

2. Il Nobile, allo scopo di dedurre qualche caratteristica generale del moto del Sole intorno al centro di massa G del sistema solare, abbandona la [1] e fa ricorso ai due integrali delle aree e dell'energia, che, con facili passaggi da lui indicati, possono mettersi sotto la forma:

$$[4] \qquad (M+\mu)\,(S-G)\wedge\boldsymbol{V}=\Sigma_i\, m_i\,(P_i-S)\wedge\boldsymbol{v}_i-\boldsymbol{K}$$

$$[5] \qquad (M+\mu)\,\boldsymbol{V}^2=\Sigma_i\, m_i\left(\boldsymbol{v}_i^2-\frac{2f\,M}{\rho_i}\right)-2f\,\Sigma_{ij}\,\frac{m_i\,m_j}{\rho_{ij}}-2h$$

dove $\boldsymbol{K}$, h sono, con f, costanti e ρ_i, ρ_{ij} sono le distanze di P_i rispettivamente da S e da P_j.

Anche nelle [4] e [5] le posizioni S e P_i del Sole e dei pianeti, le loro velocità $\boldsymbol{V}$ e $\boldsymbol{v}_i$ derivano dalle attrazioni reciproche di tutti gli $n+1$ corpi, sono cioè le posizioni e le velocità *perturbate*.

---

[1] Ulteriori semplificazioni possono evidentemente introdursi, sempre in via approssimata, quando siano grandezze di primo ordine: 1° le eccentricità delle orbite (i moti planetari possono ritenersi circolari uniformi); 2° le loro inclinazioni su uno stesso piano (i moti possono ritenersi complanari); 3° il rapporto $\Sigma_j\, m_j/\mu$ per un particolare gruppo di pianeti (tutto il gruppo può essere trascurato).

Il NOBILE ritiene di poter dedurre da quei due integrali delle conseguenze molto prossime al vero, trascurando le sole perturbazioni sui pianeti, per modo da poter ammettere che, nonostante sussista il moto del Sole dovuto all'attrazione dei pianeti, i moti dei pianeti rispetto al Sole rimangano kepleriani, come lo sono nell'ipotesi del Sole fisso. Così il NOBILE, che vuole rigorosamente rispettate le leggi della dinamica, anche quando si studia il problema dal punto di vista geometrico e cinematico, applica quegli integrali alterando le condizioni *dinamiche* necessarie alla loro validità (1).

Il procedimento che egli segue può essere meglio chiarito se, ad evitare confusioni, si indicano con Q_i, w_i, r_i le posizioni, le velocità e le distanze dal Sole dei singoli pianeti nell'ipotesi che i loro moti siano kepleriani e si pone per conseguenza:

$$P_i = Q_i + \delta Q_i \qquad v_i = w_i + \delta w_i \qquad \rho_i = r_i + \delta r_i$$

$$(M + \mu)\,\Pi_1 = \Sigma_i\, m_i\,[\delta Q_i \wedge w_i + (Q_i - S) \wedge \delta w_i]$$

$$(M + \mu)\,\pi_2 = \Sigma_i\, m_i \left[w_i \times \delta w_i + \frac{fM}{r_i^2}\,\delta r_i \right].$$

Usufruendo di queste posizioni e tenendo conto che nei moti kepleriani considerati dal NOBILE si ha:

$$[6] \qquad \Sigma_i\, m_i\,(Q_i - S) \wedge w_i - K_1 = 0$$

$$[7] \qquad \Sigma_i\, m_i \left[w_i^2 - \frac{2f\,(M + m_i)}{r_i} \right] - 2\,h_1 = 0$$

con K_1 e h_1 costanti, le [4] e [5] si possono scrivere, a meno di termini in $\delta Q_i \wedge \delta w_i$, δw_i^2, δr_i^2:

$$[8] \qquad (M + \mu)\,(S - G) \wedge V = K_1 - K + (M + \mu)\,\Pi_1$$

$$[9] \qquad \frac{1}{2}\,(M + \mu)\,V^2 = h_1 - h + (M + \mu)\,\pi_2 + f \left(\Sigma_i \frac{m_i^2}{r_i} - \Sigma_{ij} \frac{m_i\, m_j}{\rho_{ij}} \right).$$

Il NOBILE, ammesso il principio che si possano trascurare le perturbazioni, e cioè Π_1 e π_2, osserva che il secondo membro della [4] è costante; esso si riduce infatti alla differenza costante $K_1 - K$ della [8]. Di qui la sua prima conclusione: *è lecito ritenere che la traiettoria relativa del centro del Sole intorno al centro di massa dell'intero sistema sia piana e percorsa con la legge delle aree.*

Per lo stesso principio il NOBILE, partendo dalla [5] e passando alla [9], ritiene di poter trascurare non soltanto il termine con π_2 dovuto alle perturbazioni, ma anche la sommatoria a due indici. Quella ad un solo

(1) Nella ipotesi del NOBILE ogni pianeta, in luogo della attrazione effettiva che esso riceve dagli altri $n - 1$, sarebbe sollecitato da una attrazione eguale a quella che questi altri $n - 1$ pianeti esercitano sul Sole.

indice, se le eccentricità delle orbite sono piccole, è pressochè costante, sicchè anche il secondo membro della [9] viene ritenuto dal Nobile approssimativamente costante. Di qui la seconda sua conclusione: *la velocità orbitale del Sole nel suo moto intorno a G può considerarsi costante.*

Poichè è da escludere un moto rettilineo uniforme, seguirebbe, in definitiva, che il Sole descrive approssimativamente un'orbita circolare, con il centro in G, di moto uniforme.

È opportuno notare in primo luogo, poichè il Nobile è di parere opposto, che questa dimostrazione vale qualunque sia il numero dei pianeti e qualunque siano le inclinazioni delle loro orbite rispetto a un dato piano di riferimento; la prima delle due conclusioni è indipendente anche dalle eccentricità delle orbite stesse.

Senza ripetere le semplici considerazioni intuitive che fanno riconoscere come le due conclusioni sopra riportate siano generalmente non prossime al vero, ma da esso lontane, ricordo i casi di $n+1$ corpi da me considerati, in cui quelle conclusioni sono in assoluto contrasto con le conseguenze che si possono trarre dalle [1] e [2], per le quali la considerazione di moti kepleriani è, come s'è visto, perfettamente lecita. Essi sono:

a) il caso di due pianeti con orbite fortemente inclinate fra loro e con periodi di rivoluzione non multipli uno dell'altro;

b) il caso di due pianeti con orbite complanari, per i quali $m_1 r_1 = m_2 r_2$, essendo $r_1 \neq r_2$;

c) il caso dei quattro pianeti di maggiore massa fra quelli attualmente noti del sistema solare, con estensione a tutti i pianeti noti;

d) il caso che comprende, oltre i pianeti noti del sistema solare, un pianeta ultraplutoniano di massa sensibile.

L'errore della dimostrazione del Nobile proviene dal trascurare, con la sua ipotesi semplificativa, termini dello stesso ordine di grandezza di quelli sui quali si fondano le sue conclusioni.

Per riconoscerlo nel modo più evidente, si supponga che le perturbazioni planetarie cessino a un dato istante t_0 e si indichi con l'indice 0 il valore di ogni grandezza per tale istante.

In particolare si ha $\Pi_{1\cdot 0} = \pi_{2\cdot 0} = 0$ e le [8] e [9] determinano le costanti $K_1 - K$ e $h_1 - h$ in funzione delle altre grandezze che esse contengono, calcolate per il detto istante. Le stesse [8] e [9] possono allora scriversi, dividendone ambo i membri per $M + \mu$, ed usufruendo dell'espressione di f che si ricava dalla [3]:

$$[10] \qquad (S - G) \wedge V = [(S - G) \wedge V]_0 + \Pi_1$$

$$[11] \qquad V^2 = [V^2]_0 + \pi_2 + 2\, v_m^2 \left\{ \Sigma_i \frac{m_i^2}{M(M+\mu)} \left(\frac{a_m}{r_i} - \frac{a_m}{r_{i\cdot 0}} \right) - \right.$$

$$\left. - \Sigma_{ij} \frac{m_i m_j}{M(M+\mu)} \left(\frac{a_m}{\rho_{ij}} - \frac{a_m}{\rho_{ij\cdot 0}} \right) \right\}.$$

La distanza SG e la velocità V sono, come si è visto, di primo ordine rispetto ad a_m e v_m; i primi membri e i primi termini a secondo membro delle [10] e [11] sono quindi del secondo ordine. Di eguale ordine sono Π_1, π_2 e le due sommatorie che seguono nella [11], salvo a considerare la prima di esse di terzo ordine, se si considerano di primo ordine anche le eccentricità delle orbite.

Non è pertanto lecito ritenere trascurabili, nei secondi membri delle [10] *e* [11], *i termini variabili di secondo ordine e conservare in essi soltanto quelli costanti dello stesso ordine di grandezza, per concludere la approssimata costanza dei primi membri.*

L'*unico* valore approssimativamente *costante* che si possa legittimamente attribuire ai secondi membri delle [3] e [4] divisi per $M + \mu$ quando vi si trascurano termini di secondo ordine è lo zero, e l'unica *sicura* soluzione a cui si può arrivare per mezzo delle [3] e [4], trascurando le perturbazioni planetarie (ciò che è molto prossimo a trascurare le attrazioni planetarie) è quella logica ed immediata della approssimata coincidenza del Sole con il centro di massa G.

3. Il Nobile osserva nella sua prima Nota:

I. – Che il moto rettilineo uniforme che si attribuisce al sistema solare compete non al centro del Sole, ma al centro di massa G; che la Terra segue il Sole nel suo moto intorno a G; che perciò al termine *annuo* dell'aberrazione della luce, dipendente dalla velocità di rivoluzione della Terra attorno al Sole, deve aggiungersi un termine *solare*, dipendente dalla velocità V comune ai due corpi. E muove appunto agli astronomi di essersi disinteressati di questo termine solare, ciò che non è del tutto esatto.

Il Nobile dà poi la riportata « dimostrazione »:

II. – Che il Sole descrive intorno a G un'orbita circolare di raggio R, con velocità angolare costante n, alla quale dimostrazione segue l'altra che opportune osservazioni stellari sull'aberrazione della luce, le quali diano il modulo e la direzione orientata di V a tempi diversi, permettono di calcolare R ed n.

Nelle sue due successive Memorie egli vuole mostrare il nesso di queste questioni con la struttura del sistema solare, giungendo nella terza Memoria alla conclusione:

III. – Che « si rende – per la prima volta – evidente la possibilità di pervenire, con procedimento teoricamente giustificato e in base ad opportuni dati di osservazione, alla determinazione *della massa totale del sistema planetario* e della posizione, ad una data epoca, *del centro di massa dell'insieme dei pianeti ancora ignoti* » [1].

---

[1] Dal riassunto premesso alla terza Memoria del Nobile.

Questioni di tale importanza non possono essere trascurate da un astronomo pratico, ma è naturale che prima di accingersi alle osservazioni e ai calcoli accuratissimi e laboriosissimi che esse richiedono, egli voglia assicurarsi di poter arrivare ad un risultato positivo, sia tenendo conto della precisione raggiungibile nelle osservazioni, sia discutendo anche per proprio conto il problema.

Avendo ciò fatto dopo la prima pubblicazione del Nobile in occasione di mie ricerche affini all'argomento, scrivevo, quanto al punto I, che « la correzione di aberrazione dovuta al moto del Sole intorno al centro di massa del sistema solare, è certamente trascurabile nei calcoli più frequenti dell'astronomia, ma che, per i casi di ricerche particolarmente precise, l'osservazione del Nobile va presa in giusta considerazione ».

Quanto al punto II dovevo osservare che nella « trattazione teorica del problema, quale è fatta dal Nobile » è usata una schematizzazione « che può essere bensì accettata per il calcolo pratico della correzione di aberrazione in questione, ma non per quella trattazione teorica, giacchè in questo secondo caso vengono trascurate grandezze dello stesso ordine di quelle che si ricercano » così da giungere « a conclusioni che considerazioni elementari esemplificatrici dimostrano non esatte ». E lo dimostravo.

Osservavo infine che alla determinazione numerica del termine solare dell'aberrazione doveva essere appaiata quella della correzione dovuta alle perturbazioni nel moto orbitale della Terra attorno al Sole, compreso l'effetto proveniente dalla presenza della Luna. Effettivamente alla Terra deve essere attribuito non soltanto il suo moto kepleriano attorno al Sole (che dà il termine *annuo* dell'aberrazione) ed il moto del Sole intorno al centro di massa G (che dà il termine *solare*), ma ancora la deviazione dal suo moto kepleriano per il moto di rivoluzione che essa ha intorno al centro di massa del sistema Terra–Luna (che dà un termine *lunare* di aberrazione) e l'analoga deviazione per le perturbazioni provenienti dagli altri pianeti (che dà un termine *planetario*).

È già stato osservato che il termine solare, quale può essere oggi calcolato, non può superare 1/1700 di quello annuo. Il termine lunare è dello stesso ordine di grandezza di quello solare, mentre il termine planetario, per la piccola massa dei pianeti che più si avvicinano alla Terra e le limitate variazioni della distanza della Terra dai pianeti di massa maggiore, è circa 1/10 di quello solare [1].

Se la massa di Venere fosse 10 volte maggiore, pur restando 40 volte più piccola di quella di Giove, il termine planetario avrebbe importanza pari a quello solare. Prospettare la necessità di una sua valutazione numerica era dunque quanto mai opportuno.

---

[1] F. Zagar, *Sopra un problema relativo all'aberrazione annua*. « Mem. della Soc. Astr. It. », vol. XII, « Pubbl. Oss. Astr. Palermo ». vol. VIII, 1939.

Nella sua seconda Memoria il NOBILE ha risposto che la sua teoria deve considerarsi valida « subordinatamente alle condizioni che seguono:

1ª Esistenza di un numero rilevante di masse planetarie, in modo da realizzare in ogni istante una distribuzione non lontana da quella simmetrica rispetto al Sole;

2ª Piccolezza delle mutue inclinazioni delle orbite ».

Ma egli non ha dato alcuna dimostrazione convincente della loro necessità, continuando a sembrargli sufficiente riconoscere la piccola entità dei termini (di secondo ordine), dipendenti dalle perturbazioni, rispetto a quelli di maggior importo (di primo ordine) delle [4] e [5], senza preoccuparsi che questi ultimi nel successivo procedimento della dimostrazione si elidono.

Più lungamente egli si è diffuso, già in questa seconda sua Memoria nell'attribuirmi infondati preconcetti e molteplici e gravi errori, che nella mia successiva risposta, senza dipartirmi da considerazioni obbiettive, ho dimostrato insussistenti uno per uno.

Nella terza Memoria del NOBILE, che porta il medesimo titolo della presente, uscita qualche settimana fa, egli riprende la controversia, aggiungendo alle due condizioni necessarie alla validità della sua teoria la seguente:

3ª Che sia « limitato il periodo di tempo nel quale le approssimazioni in questione sono lecite ». « Sulla estensione dell'intervallo di validità nulla può essere precisato *a priori* cioè senza il concorso della osservazione ».

Come egli afferma, la condizione è già enunciata nella sua prima Memoria, quando egli osserva ad es., che « la ipotesi fatta riguardo al moto dei pianeti rispetto al Sole equivale a *trascurare per un periodo di tempo non troppo lungo* le perturbazioni » ed è naturale spiegarsi tale limitazione, tenendo conto dell'effetto *progressivo* delle perturbazioni stesse.

Invece in questa terza Memoria il NOBILE sviluppa in serie di potenze del detto intervallo di tempo di validità elementi costanti nei moti kepleriani, e variabili per l'effetto totale, *periodico* e *progressivo*, delle perturbazioni, ed arresta sviluppi siffatti alla prima potenza dell'intervallo di tempo. L'estensione di questo intervallo di validità risulta pertanto non già imprecisata, bensì nettamente limitata.

D'altra parte è da escludere che la limitazione dell'intervallo di tempo intorno all'epoca t_0 di osculazione sia così spinta da poter ritenere senz'altro trascurabili i termini variabili delle [10] e [11] per il fatto che essi sono nulli al tempo t_0. È naturale che per un tale limitatissimo intervallo di tempo si possano ritenere i primi membri delle [10] e [11] confusi con i loro valori relativi al tempo t_0, ma la loro approssimata costanza per così breve tempo deve allora interpretarsi con un moto approssimativamente uniforme del Sole lungo quel brevissimo arco dell'orbita da esso descritta intorno a G, che può confondersi con la tangente. E nella sua

prima Memoria il Nobile esclude il moto rettilineo uniforme che può dedursi, come il moto circolare uniforme, dalla costanza dei primi membri delle [10] e [11], fondandosi proprio sulla non breve durata dell'intervallo di tempo da lui preso in considerazione.

Gli sviluppi in serie dell'intervallo di tempo servono dunque al Nobile soltanto a dimostrare che i termini delle [10] e [11] dovuti alle pertubazioni sono di secondo ordine, sul che non c'è contestazione. Quanto a tutti questi e a tutti gli altri ragionamenti tendenti a dimostrare che la parte variabile a secondo membro delle [4] e [5] è piccola di fronte alla parte costante, essi equivalgono a dimostrare che la parte variabile a secondo membro delle [10] e [11] è piccola di fronte a $[(S-G)\wedge V]_0$ e rispettivamente a $[V^2]_0$. Ora al tempo t_0, che può essere scelto ad arbitrio, *non è punto da escludere* (salvo casi particolari, già da me considerati, quale quello in cui $n = 1$) *ed anzi è particolarmente da ammettere in considerazione della condizione 1ª voluta dal Nobile*, che possano essere molto approssimativamente soddisfatte le condizioni: $S - G = 0$, $V = 0$, od anche l'altra $S - G$ parallelo a V, e questo basta a riconoscere il valore di quei ragionamenti.

Quanto al punto III che il Nobile svolge in questa Memoria, esso si appoggia sul presupposto moto circolare uniforme del Sole intorno al centro di massa di *tutto* il sistema solare (pianeti ultraplutoniani e asteroidi incogniti compresi) paragonato con il moto del Sole intorno al centro di massa del sistema solare *conosciuto*. Le osservazioni di aberrazione della luce non sarebbero certo sufficienti a determinare le costanti di questa teoria del Nobile, ma ciò non ne attenuerebbe punto l'importanza matematica e sarebbe nuovo stimolo agli astronomi per affinare sempre più le loro osservazioni. Ma l'errore del principio su cui la teoria si appoggia non consente di prenderla in considerazione.

Nella rimanente e più ampia parte della sua terza Memoria, il Nobile mi rivolge una serie di accuse di errore, di incomprensione, di falsi concetti, di pregiudizî, di confusionismi, di illogicità, di assurdità, ripetute ad ogni passo, *nessuna* delle quali trova una possibile base di appoggio; *e mi attribuisce ragionamenti e opinioni che non soltanto sono lungi dalla mia mente, ma che sono del tutto opposti a quelli che un qualunque serio studioso possa e debba avere, ed anche a ciò che io ho in varie occasioni esplicitamente detto.*

I miei sentimenti di lealtà scientifica e di decoro professionale ed accademico non mi consentono di prendere in considerazione siffatte asserzioni del Nobile. Ho ritenuto però necessario, in causa di esse, chiarire in questa Nota, nel miglior modo che mi è stato possibile, i punti fondamentali del dissenso, e richiamare l'attenzione dell'Accademia, al momento di presentare la Nota per la sua pubblicazione, sulla forma inconsueta assunta dal dibattito.

Astronomia (Astrofisica). — *La protuberanza eruttiva del 18 Aprile 1941* [1]. Nota di MARIO GIROLAMO FRACASTORO, presentata [2] da GIORGIO ABETTI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

La mattina del 18 aprile 1941 veniva osservata dallo scrivente durante il corso regolare delle osservazioni all'equatoriale di AMICI munito di spettroscopio Zeiss, una protuberanza particolarmente notevole per la sua straordinaria vivacità; essa si trovava al bordo Est del sole ad un angolo di posizione di 52°, corrispondente ad una latitudine di 12° N. La massa principale della protuberanza era congiunta alla cromosfera da un sottile filamento gassoso soggetto a forti velocità radiali ($11^h\,05^m$ T.M.E.C.).

Terminato il giro del bordo solare, si tornava ad osservare questa protuberanza ($11^h\,18^m$), constatando che essa si era staccata del tutto dalla cromosfera; si iniziava allora – come previsto – una rapida ascesa della massa gassosa, controllata da una serie di frequenti misure ($11^h\,21^m$–$12^h\,02^m$) continuata fino a che le osservazioni non furono impedite dal sopraggiungere di nubi, poco dopo che si era misurata un'altezza massima di 351 mila km.

La tabella, dove sono riportate tutte le osservazioni reca nella prima colonna i tempi, nella seconda le altezze date in mm. dell'immagine focale, in secondi di arco ed in km. secondo le relazioni:

$$a)\ 1\ \text{mm.} = 39''$$
$$b)\ 1'' \quad = 726\ \text{km}$$

dove a) è dato dalla distanza focale del rifrattore adoperato e b) vale per il giorno cui riferiamo. Nella colonna intestata V sono date le velocità ascensionali in km al sec; nell'ultima colonna infine sono indicati i noduli luminosi cui le misure si riferiscono.

Secondo quanto ci è stato gentilmente comunicato da parte dell'Osservatorio astrofisico di Catania, la mattina dello stesso giorno 18 aprile a $7^h\,11^m$ T. M. E. C. la protuberanza si presentava come un oggetto vivacissimo alto 55″, pari a 40 mila chilometri.

---

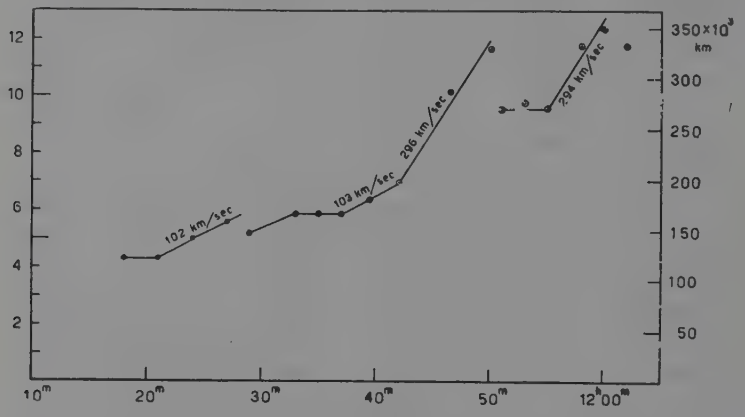
[1] Lavoro eseguito nel R. Osservatorio Astrofisico di Arcetri, Firenze.
[2] Nell'Adunanza del 30 maggio 1941-XIX.

Tabella

Tempi	Altezze			V	Nodo
$11^h\,05^m$	3.0 mm	117″	85×10^3 km.	—	a
18	4.3	168	122	—	a
21	4.3	168	122	0	a
24	5.0	195	142	102	a
27	5.6	218	159		a
29	5.2	203	147		b
33	5.9	230	167	—	b
35	5.9	230	167	0	b
37	5.9	230	167		b
39.5	6.4	250	181	103	b
42	7.0	273	198		b
46.5	10.2	398	289	296	b
50	11.7	456	331		b
51	9.6	374	272		c
53	9.8	382	277	0	c
55	9.6	374	272		c
58	11.8	460	334	294	c
12 00	*12.4*	*484*	*351*		c
02	11.8	460	334	—	d

I dati della tabella sono riportati graficamente nella figura, dalla quale si può vedere facilmente come ambedue le leggi di Pettit si possano considerare soddisfatte, per il fatto che le velocità si mantengono costanti per un certo intervallo di tempo, e crescono poi a scatti, in modo che un certo valore sia un multiplo semplice del suo precedente. Nel nostro caso si può osservare: 1°) che si hanno degli intervalli di stasi durante i quali le altezze rimangono praticamente invariate ($11^h\,18^m$–21^m; 33^m–37^m; 51^m–55^m); 2°) che le velocità di innalzamento rimangono « quantizzate » secondo i medesimi valori anche per noduli diversi nella medesima protuberanza; 3°) che i valori di tali velocità sono molto prossimi a 100 ed a 300 km/sec, rimanendo chiaramente nel rapporto di 1 a 3.

Data la frequenza delle misure, i dati di questa protuberanza risultano altrettanto utili di quelli ottenuti per la grande protuberanza ad arco del 24–25 dicembre 1938 (1) e più indicativi di quelli del 29 maggio 1937 (2), ambedue osservate ad Arcetri, tenuto conto anche che questa volta si è potuto assistere alla fase iniziale del fenomeno. Si conferma in senso ancora più definito quanto si era potuto concludere dall'esame delle



velocità di diverse parti della protuberanza ad arco del 25 dicembre 1938: e cioè che uno stesso valore fondamentale delle velocità vale non in un punto solo di una protuberanza, ma anche per diverse regioni di essa. Ciò significa che gli impulsi successivi verso l'alto forniti dallo stesso centro di perturbazione ai vari noduli della protuberanza comunicano le stesse velocità alle masse gassose.

Come fu detto, questo conferma ed estende il significato fisico della seconda legge di PETTIT e potrebbe avviare il problema verso la sua soluzione, o almeno porre delle condizioni utili alla spiegazione di questi fenomeni solari.

---

(1) « Rend. Acc. Lincei », vol. XXIX, serie 6ª, fasc. 4, 1939.
(2) « Rend. Acc. Lincei », vol. XXV, serie 6ª, fasc. 12, 1937.

Astronomia (Astrofisica). — *Larghezze equivalenti e intensità delle righe cromosferiche nell'eclisse di Sole del 19 giugno 1936* (1). Nota di Mario Girolamo Fracastoro, presentata (2) da Giorgio Abetti, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

Questa ricerca continua la serie di lavori relativi alle lastre eseguite dalla Missione Italiana a Sara (U.R.S.S.) nel 1936. In una nostra Nota precedente abbiamo misurato e discusso le lunghezze d'onda dello spettro della cromosfera, nel quale sono presenti le righe in emissione. In questo lavoro è stato nostro intendimento di misurare le intensità di tali righe secondo un criterio indipendente da ogni apprezzamento soggettivo. In base a tali intensità, determinate su due strisce dello spettro corrispondenti a diversi livelli solari, si sono fatte alcune considerazioni circa la composizione della cromosfera stessa, quale è possibile dedurre dalla distribuizione delle intensità alle diverse altezze raggiunte dai vari elementi sul Sole.

1. – Condizioni di osservazione.

Lo spettrografo usato per lo studio della cromosfera da parte della Missione Italiana, già descritto (3), fu costruito impiegando parti ottiche già esistenti, quali gli obiettivi Amici I ($\varnothing = 28$ cm, $f = 533$ cm) e Amici II ($\varnothing = 24$ cm, $f = 321$ cm), quest'ultimo montatoi n autocollimazione, ed il reticolo Jacomini, di solito in uso alla Torre solare di Arcetri, avente una superficie rigata di 90×125 mm. Dato l'impiego del reticolo, fu deciso di limitarsi alla regione dello spettro compresa fra 5500 e 6600 Å, meno adatta per essere fotografata con forte dispersione mediante uno spettrografo a prismi, e nella quale non mancano righe molto intense, alcune delle quali appartengono ad elementi ionizzati. A causa delle dimensioni del reticolo, l'apertura utile degli obiettivi veniva ad essere in realtà molto ridotta, circa 9 cm per l'Amici II e di conseguenza circa 15 cm per l'Amici I, con un rapporto di apertura utile di 1/35,6. Questa forte diaframmatura ha permesso di utilizzare senza inconvenienti parti ottiche già a disposizione e non appositamente costruite, tuttavia ha anche limitato le presta-

(1) Lavoro eseguito nel R. Osservatorio Astrofisico di Arcetri–Firenze.

(2) Nell'Adunanza del 30 maggio 1941–XIX.

(3) G. Giotti, « Mem. della R. Acc. d'Italia », vol. IX, pag. 155 (1938–XVI),

zioni dello strumento, allungando sia i tempi di posa, sia gli intervalli fra una posa e l'altra, a causa del dispositivo di scambio non troppo rapido e non automatico, dato l'impiego di telai portalastre di dimensioni adeguate alla forte dispersione lineare dello strumento. Questo fatto è di importanza fondamentale per lo studio dello spettro della cromosfera, poichè, per quanto la sua comparsa costituisca un fenomeno progressivo e continuo, tuttavia l'inversione contemporanea di tutte le righe non dura più di un secondo: la probabilità di cogliere questa fase saliente del fenomeno diventa perciò sempre minore, man mano che l'intervallo fra l'istante medio di una posa e l'altro diventa maggiore.

Come è detto nel nostro precedente lavoro (4), il primo spettrogramma, eseguito da G. Righini con tre secondi di posa a partire dal « via » che fu dato da G. Abetti all'apparire dei grani di Baily, mostra tutte le righe di origine solare invertite. Consideriamo brevemente a quali condizioni sperimentali si debba riferire lo spettrogramma. Se non esistesse ai bordi della luna e del sole alcuna accidentalità, ad un certo istante l'arco cromosferico avrebbe uno spessore h regolarmente decrescente dal punto di contatto, ove si ha un h_{max}, verso le punte dell'arco stesso. Inoltre, poichè la luna si muove rispetto al sole, coprendo circa 250 km del suo disco in un secondo di tempo, anche lo spessore massimo dell'arco andrebbe regolarmente decrescendo col tempo. Ma in realtà i dischi non hanno un profilo regolarmente definito, sia a causa delle montagne lunari, che si proiettano sul disco solare ingrandite linearmente 400 volte, sia a causa di eventuali sollevamenti della cromosfera nel punto di contatto preso in esame. Come si vede nelle riproduzioni a suo tempo pubblicate (5) e come risulta anche dalla fig. 1, ottenuta passando al microfotometro lo spettro trasversalmente al senso della dispersione, fra due strisce A e B molto dense, si ha una zona relativamente chiara, ove sono presenti tre strisce scure sottili, dovute ad altrettanti avvallamenti del bordo lunare, accanto alle quali si notano tre strisce chiare, dovute a tre montagne presenti sul bordo della Luna. Queste sei strisce, per la loro giusta densità fotografica, si prestavano ugualmente bene per lo studio delle intensità cromosferiche; esse sono indicate nella figura con le lettere a, b, c, d, e, f. La misura delle lunghezze d'onda fu fatta in corrispondenza della striscia d, che è con la b la più definita lungo tutto lo spettro. Per lo studio delle intensità si è passato al microfotometro lo spettro cromosferico in tutta la sua lunghezza in corrispondenza ancora della striscia d e parzialmente sulla striscia chiara e (da λ 5550 a λ 6500) e sulla striscia scura b (da λ 5610 a

(4) M. G. Fracastoro, « Rend. della R. Acc. d'Italia », fasc. 6, serie VII, vol. I, 1940–XVIII.

(5) G. Abetti, G. Righini, L. Taffara, « Mem. R. Acc. d'Italia », vol. IX, pag. 214 (1938–XVI).

λ 6000). Scopo di questa ripetizione era di poter stabilire fra le intensità misurate nelle diverse strisce un confronto capace di fornire indicazioni utili per lo studio della legge con la quale i diversi elementi sono distribuiti nell'atmosfera solare.

Appare evidente fin d'ora che la scelta della striscia di riferimento, che deve rimanere costante lungo tutto lo spettro, come anche i dati strumentali del microfotometro, ha molta importanza per le conseguenze che essa ha sulle misure di intensità delle righe in relazione alla fase del fenomeno cui lo studio si vuol riferire. In prossimità del secondo contatto

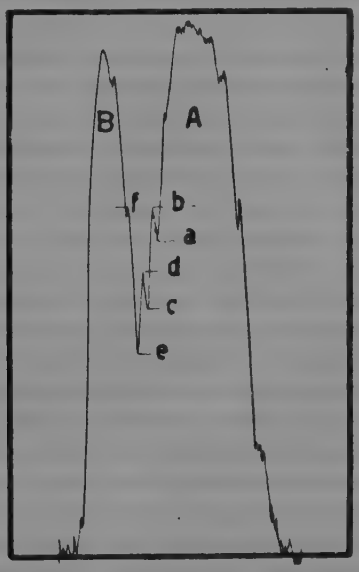


Fig .1.

lo spettro invertito va sovrapponendosi a quello normale e l'assorbimento delle righe va colmandosi fino a che le righe stesse non compaiono in emissione; tuttavia, finchè rimane uno spettro continuo, le righe di emissione vengono indebolite dall'assorbimento latente che si sottrae all'intensità vera. D'altra parte, col proseguire del fenomeno, lo spettro continuo diminuisce rapidamente, ma nello stesso tempo le righe deboli appartenenti agli strati molto bassi dell'atmosfera solare, dopo una fugace comparsa in emissione che dura al massimo un secondo, spariscono, mentre rimangono le righe appartenenti a livelli più alti.

Per quanto si è detto ora, dunque, un tempo di posa minore o al più uguale ad un secondo garantirebbe la massima precisione dei risultati; tuttavia, dati i mezzi strumentali a disposizione, nel nostro caso l'esposizione fu necessariamente almeno tre volte più lunga di quel che sarebbe

stato desiderabile di avere, per evitare la sovrapposizione dei diversi aspetti che il *flash* assume nelle sue varie fasi; vediamo come può avere influito questo fatto sulle intensità misurate delle righe. Se, al secondo contatto, nell'ipotesi di un istante di partenza corretto, dopo un primo secondo di posa utile per la fotografia dello spettro di inversione vero e proprio, la lastra è stata esposta ancora per due secondi, questo non pregiudica gran che l'aspetto e l'intensità delle righe più deboli, le quali, dopo la loro brevissima comparsa, sono sparite contemporaneamente o poco dopo lo spettro continuo fotograficamente efficace, ma rinforza le righe più intense, che rimangono ancora per diversi secondi visibili dopo l'inizio della totalità. Sempre per l'incertezza che la presenza delle montagne lunari porta nella determinazione dell'istante del secondo contatto, può accadere che per talune strisce dello spettro fotografico (nel nostro caso le *A* e *B*, fig. 1) il momento di partenza non risulti corretto, ma un po' anticipato. In tal caso l'intensità dello spettro continuo e l'assorbimento latente diventano notevoli rispetto alle righe più deboli, mentre non disturbano troppo l'aspetto di quelle più intense. Le conseguenze di questo fatto sono analoghe a quelle già viste nel caso di una posa troppo lunga, salvo che diventa ancora più difficile di interpretare quantitativamente le intensità misurate in larghezze equivalenti delle righe in emissione. Si può infine osservare che al terzo contatto il prolungare la posa indebitamente porta ad una sovrapposizione sempre più dannosa dello spettro continuo, il che rende impossibile l'utilizzazione dello spettrogramma, anche se l'istante di inizio della posa è stato scelto convenientemente. Nel nostro caso le strisce *A* e *B* sono troppo dense per ottenerne dei risultati utili, ma quella zona del bordo solare compresa fra di esse ha densità, come si è detto, adatte per essere microfotometrate. Le intensità delle righe misurate sulle due strisce *a* e *b* non presentano, come vedremo, differenze troppo sensibili nè ben determinate. La densità di queste strisce segue lungo lo spettro la curva caratteristica della lastra, cui si aggiungono i fattori di trasmissione dell'atmosfera e dello strumento: al di là di 6500 A la sensibilità dell'emulsione si riduce assai e per questo non è stato possibile di spingersi oltre nello studio della striscia chiara *e*, nonostante che essa desse in complesso i valori più cospicui per le larghezze equivalenti, specialmente nel caso delle righe più notevoli.

2. – Calibrazione delle lastre.

Come si è detto, le intensità dello spettro della cromosfera sono state studiate per mezzo del microfotometro registratore dell'Osservatorio di Arcetri (6). Per risalire dalle trasmissioni misurate da questo strumento

(6) G. Righini, « Oss. Mem. Arcetri », fasc. 54, pag. 11 (1936-XIV).

alle intensità della luce che ha dato origine agli annerimenti occorre conoscere la relazione quantitativa che lega queste due grandezze, la quale si esprime graficamente mediante la curva di trasmissione, che può essere stabilita soltanto con una accurata calibrazione. A questo scopo subito dopo l'eclisse e con lo stesso strumento furono impressionate alcune lastre gemelle di quelle adoperate durante l'eclisse, sviluppando nello stesso bagno contemporaneamente tutto il materiale.

Come è noto, le intensità apparenti i, cioè quelle che si ricavano dalla curva caratteristica della lastra, non sono le reali intensità energetiche, perchè lo stesso numero di erg entrando per la fenditura dello spettrografo ha effetto fotografico diverso a seconda della lunghezza d'onda, della dispersione – ove questa non sia costante – dell'assorbimento selettivo dell'apparecchio e principalmente della sensibilità cromatica dell'emulsione fotografica adoperata.

Per trovare le intensità reali I noi dobbiamo moltiplicare le i per un coefficiente di colore, che dipende soltanto dalla lunghezza d'onda; scriveremo perciò

$$I = i \cdot c(\lambda)$$

A loro volta le intensità I possono essere ridotte ad intensità assolute quando si conoscano le caratteristiche energetiche della lampada fotometrica che ha servito per determinare le curve di calibrazione, oppure, se questa è avvenuta mediante il sole, usando i valori assoluti della radiazione solare, in erg sec^{-1} cm^{-2}. Come vedremo, la determinazione delle intensità assolute è soggetta a diverse cause d'errore, tuttavia i valori trovati saranno ugualmente sufficienti ad illustrare le condizioni energetiche nelle quali avviene l'irraggiamento della cromosfera.

Diverse cause cooperano a far sì che la radiazione della sorgente luminosa alle differenti lunghezze d'onda abbia diversa efficacia sulla lastra. Esse sono:

a) estinzione della luce ad opera dell'atmosfera terrestre;

b) perdita di luce per l'incompleta riflessione del celostata;

c) assorbimento e riflessioni ad opera dell'obiettivo astronomico;

d) perdita di luce nello spettrografo, diffrazione da parte della fenditura, assorbimento e riflessione del filtro graduale e della lente autocollimatrice, diffusione della luce da parte del reticolo;

e) dispersione dello spettrografo, che però nel nostro caso è indipendente dalla lunghezza d'onda, essendosi usato un reticolo;

f) sensibilità della lastra ai differenti colori.

Le prime tre cause fanno parte di quella che viene chiamata trasmissione prima dello spettrografo e che indicheremo con τ. Alcuni di questi fattori sono facilmente calcolabili *a priori* (a , b , c , e); gli altri debbono essere sperimentalmente determinati fotografando lo spettro di una sor-

gente di luce in cui la distribuzione dell'energia sia conosciuta. Tali sorgenti possono essere costituite dal sole oppure meglio da una lampada ad incandescenza di temperatura nota, o *lampada-campione fotometrica*. Ambedue questi metodi di calibrazione sono stati seguiti: nel primo si è usato come sorgente di luce il disco solare, ponendo sulla fenditura dello spettrografo l'indebolitore graduale Zeiss [7], in modo da ottenere sei spettri di diverse intensità secondo rapporti noti; nel secondo, che esporremo più dettagliatamente, è stata invece usata la lampada fotometrica Philips n. 1002 con filamento a nastro di tungsteno e bulbo di vetro, le cui caratteristiche sono state pubblicate [8]. Con essa furono eseguiti diversi spettrogrammi, tutti col tempo di posa di 10^s e con una larghezza della fenditura di 0,036 cm, variando l'intensità della corrente al filamento secondo le quantità:

9,6 - 10,2 - 10,7 - 11,5 - 13,0 - 13,5 amp.

Secondo questo metodo dunque si calcola la trasmissione prima dello spettrografo, mentre gli altri fattori vengono determinati studiando lo spettro della lampada campione; dalla combinazione di questi due procedimenti si derivano la trasmissione totale ed i $c(\lambda)$. Questo metodo ha l'inconveniente che l'incertezza circa la trasparenza dell'atmosfera è trasportata direttamente sui resultati; tuttavia la Missione Italiana disponeva delle accurate determinazioni compiute in occasione della stessa eclisse dalla Missione Ceca, che si trovava anch'essa a Sara. Seguendo l'altro metodo si determina il coefficiente di colore direttamente dallo spettro solare; questo metodo ha l'inconveniente in linea generale che la distribuzione dell'energia nello spettro solare fuori della nostra atmosfera non è così ben conosciuta come la distribuzione planckiana dell'energia sul filamento di una lampada campione. Come del resto Pannekoek e Minnaert [9], noi abbiamo seguito principalmente il primo metodo, tanto più che disponevamo dei dati accuratamente determinati da R. Deaglio e da G. Righini [10] per la lampada fotometrica adoperata in questa ricerca, mentre gli spettri ottenuti dal sole erano complessivamente sovraesposti. Abbiamo usato invece le intensità del fondo continuo del *flash* per un controllo generale dei risultati.

La formula del Planck, applicata al caso di un corpo grigio e corretta per il fattore spettrale di radiazione caratteristico del metallo che costi-

---

[7] Cfr. per esempio: G. Righini, « Rend. Acc. Lincei », fasc. 12, serie VII. (1940-XVIII).

[8] R. Deaglio-G. Righini, « Mem. Soc. Astr. It. », vol. XIII, fasc. (1940-XVIII).

[9] « Verh. der K. Akad. van Wetenschappen te Amsterdam », D. XIII, n. pag. 20 e sgg.

[10] Loc. cit.

tuisce il filamento, fornisce la distribuzione di energia alle varie lunghezze d'onda, secondo le diverse temperature del filamento stesso, le quali sono, secondo le determinazioni fatte proprio sulla lampada in questione da Deaglio e Righini, per le diverse intensità di corrente:

$i =$ 9.0	$T = 1896^{o}$ K
10.0	2062
11.0	2214
12.0	2336
13.0	2484
14.0	2605

Questi valori permettono di interpolare immediatamente le temperature per le diverse intensità di corrente mantenute durante la calibrazione. D'altra parte si conoscono i valori dell'energia irradiata dalla lampada, in unità arbitrarie, proporzionali però al flusso energetico emanato dal filamento per unità di angolo solido, si conosce cioè la brillanza specifica $\sigma(\lambda, T)$ del filamento, a meno di una costante χ, che per la lampada n. 1002, se ci si riferisce ad un intervallo di lunghezze d'onda pari ad 1 cm, è uguale a $1{,}33 \times 10^{8}$, come risulta dal lavoro citato. Così, per esempio, a $\lambda = 5250$ A e per una $T_{ass} = 1800^{o}$, la brillanza specifica energetica del filamento della lampada n. 1002 è pari a

$$3{,}48 \times 10^{1} \times 1{,}33 \times 10^{8} \text{ erg sec}^{-1} \text{ cm}^{-2} \text{ steradiante.}$$

A meno della costante χ i valori della brillanza specifica alle varie lunghezze d'onda ed alle diverse temperature del filamento sono i seguenti:

Tabella I.

λ	$T = 1800$	2000	2200	2400	2600
5250	3,48.1	1,58.2	5,32.2	1,52.3	3,66.3
	1.542	2.198	2.726	3.183	3.564
5500	5,50.1	2,33.2	7,22.2	2,02.3	4,63.3
	1.741	2.368	2.858	3.305	3.666
5750	8,22.1	3,25.2	9,84.2	2,57.3	5,67.3
	1.910	2.512	2.993	3.410	3.754
6000	1,18.2	4,42.2	1,30.3	3,18.3	6,80.3
	2.072	2.645	3.114	3.502	3.832
6250	1,64.2	5,73.2	1,62.3	3,84.3	7.92.3
	2.215	2.758	3.210	3.584	3.899
6500	2,15.2	7,28.2	1,98.3	4,53.3	9,16.3
	2.332	2.862	3.297	3.656	3.962

Dove la scrittura 3,48.1 significa $3{,}48 \times 10^1$ ecc. Sotto i valori numerici sono trascritti anche i logaritmi dell'energia irradiata E.

Riportando in ascisse i log E ed in ordinate i reciproci delle temperature (fig. 2), si ottengono per le varie lunghezze d'onda tante rette di inclinazione progressivamente maggiore, dalle quali è facile interpolare i valori di E e di log E per le temperature e quindi per le intensità di corrente del nostro caso. Si hanno così i valori della tabella II.

TABELLA II.

i	T_{ass}	$\lambda = 5250$	5500	5750	6000	6250	6500
9,6 amp.	1996°	1,54.2	2,27.2	3,16.2	4,33.2	5,61.2	7,13.2
		2.188	2.356	2.500	2.636	2.749	2.853
10,2	2092	2,82.2	3,98.2	5,50.2	7,41.2	9,35.2	1,17.3
		2.450	2.600	2.740	2.870	2.971	3.069
10,7	2168	4,43.2	6,04.2	8,32.2	1,10.3	1,38.3	1,69.3
		2.646	2.781	2.920	3.043	3.140	3.229
11,5	2275	7,91.2	1,07.3	1,41.3	1,82.3	2,24.3	2,69.3
		2.898	3.028	3.149	3.261	3.350	3.430
13,0	2484	2,23.3	2,88.3	3,62.3	4,44.3	5,25.3	6,17.3
		3.348	3.460	3.559	3.647	3.720	3.790
13,5	2544	2,94.3	3,77.3	4,68.3	5,61.3	6,61.3	7,73.3
		3.469	3.576	3.670	3.749	3.820	3.888

Inoltre, riportando i log E in funzione di λ (fig. 3), si sono ottenuti per interpolazione i valori dell'energia irradiata di 50 in 50 Angstrom lungo i sei spettri presi in considerazione. Tali valori hanno permesso di costruire, alle varie $\lambda\lambda$ e nelle condizioni strumentali del testo, le curve di trasmissione caratteristiche delle lastre adoperate in questa ricerca, riportando le trasmissioni lette sui microfotogrammi in funzione dei valori interpolati dell'energia. Per ognuna delle $\lambda\lambda$ considerate risulta così una curva caratteristica monocromatica, diremo così elementare, che è stata riunita in un secondo tempo con quelle che si potevano sovrapporre ad

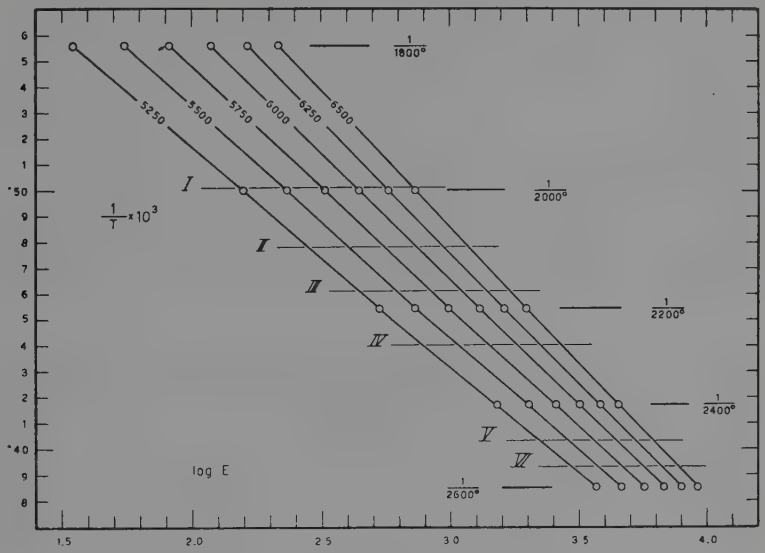

1/1800°
1/2000°
1/2200°
1/2400°
1/2600°
5250
5500
5750
6000
6250
6500
I
II
III
IV
V
VI
1/T x 10³
log E
1.5
2.0
2.5
3.0
3.5
4.0

Fig. 2.

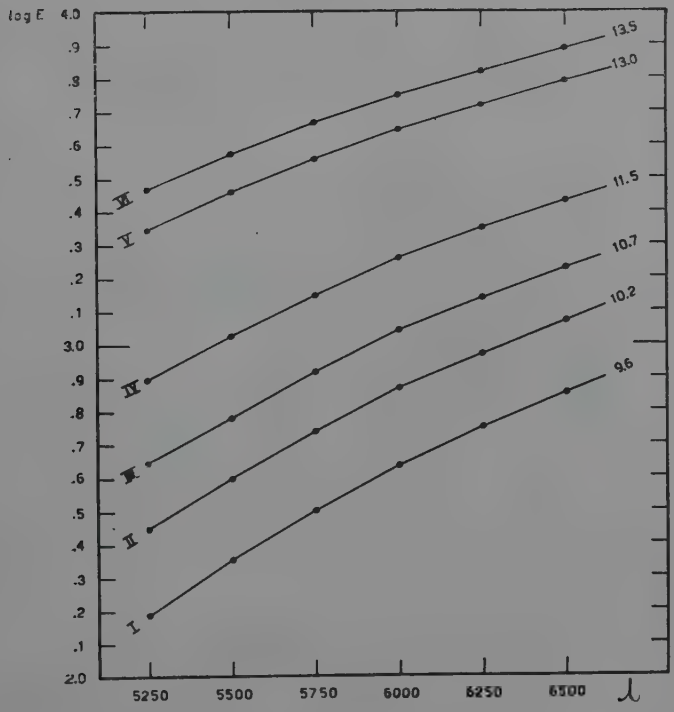

log E
13.5
13.0
11.5
10.7
10.2
9.6
I
II
III
IV
V
VI
5250
5500
5750
6000
6250
6500
λ

Fig. 3.

essa con uno spostamento lungo l'asse orizzontale, sul quale sono riportate le energie del filamento. Essendo necessario seguire scrupolosamente questo criterio, non è stato possibile di raggruppare tutte le curve monocromatiche in una sola che valesse per tutta la regione spettrale presa in esame; è stata invece necessaria una divisione delle curve elementari in tre gruppi, il primo per il tratto compreso fra 5550 e 6100 A circa, il secondo fra 6200 e 6400 A, ed il terzo valido per l'ultima regione spettrale attorno ai 6500 A. Le curve riunite nel primo gruppo hanno la minima pendenza e quelle del secondo la massima, come si vede del resto nella fig. 4. Questa particolarità deve esser messa in relazione con le proprietà generali del-

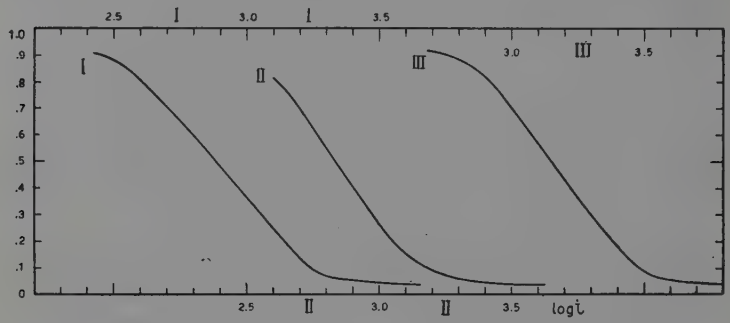


Fig. 4.

l'emulsione adoperata (lastre Cappelli–Ferrania pancromatiche « extrarapide »). Si può notare per inciso che la presenza di un'unica curva di trasmissione avrebbe grandemente semplificato il procedimento.

Trattando analogamente gli spettri di calibrazione ottenuti dal sole col filtro graduale K 58, sono state ottenute curve caratteristiche di cui risultano utilizzabili soltanto quelle riferite all'estremità rossa dello spettro, dove si avevano trasmissioni abbastanza grandi da poter essere misurate con precisione al microfotometro registratore, che notoriamente non è adatto per le grandi densità fotografiche. Nelle altre zone spettrali esse erano troppo forti e gli errori diventavano relativamente troppo alti; tuttavia nella regione misurabile la forma della curva caratteristica si è mostrata in ottimo accordo con quella corrispondente ottenuta dalla lampada fotometrica.

3. – Determinazione dei $c(\lambda)$ mediante la lampada campione.

Come è stato detto a pag. 983 si può risalire dagli annerimenti misurati sulla lastra e prodotti dalla lampada campione, ai coefficienti di colore $c(\lambda)$, calcolando la trasmissione prima dello spettrografo, cioè gli effetti dovuti all'estinzione dell'atmosfera terrestre, alla riflessione del celostata, all'assorbimento ed alle riflessioni dell'obiettivo Amici I. Passiamo in esame questi diversi fattori:

a) *Estinzione atmosferica*: è stata determinata per il giorno del l'eclisse da V. Guth e F. Link [11], appartenenti alla Missione astronomica Ceca che si trovava nei pressi di Sara. Essi hanno seguito il metodo classico, facendo la rappresentazione grafica del logaritmo dell'intensità del Sole in funzione dello strato d'aria attraversato dai suoi raggi; si hanno così delle rette di Bouguer, le cui pendenze dànno la densità ottica allo zenit. Essi dànno, per la nota formula

$$I/I_0 = e^{-b \sec z}$$

valida nel caso di Sara, in cui si aveva $\sec z = 1.63$, i diversi valori di b in funzione di λ da $0^{\mu}.47$ a $0^{\mu}.64$. Riducendo la formula ora scritta a logaritmi decimali e ponendo

$$\log \alpha = 0.434 \times 1.63\, b$$

si ha, interpolando e passando dai logaritmi ai numeri:

λ	α	λ	α	λ	α
5500	0.871	5900	0.879	6300	0.897
5600	0.873	6000	0.881	6400	0.905
5700	0.875	6100	0.885	6500	(0.914)
5800	0.877	6200	0.892	—	—

in cui l'ultimo valore in parentesi è estrapolato, ma con ottima approssimazione.

---

[11] « Mem. and Observ. of the Czech Astronomical Association at Prague », n. 5, 1937; pag. 10.

b) *Riflessione del celostata*: date le ottime condizioni di argentatura, si possono assumere i valori dati per le diverse lunghezze d'onda dalle *Smithsonian Tables* (1933), dalle quali si ricava:

λ	ρ	λ	ρ
4500	0.905	6000	0.927
5000	0.914	6500	0.947
5500	0.927	7000	0.955

in cui ρ indica il fattore di riflessione alle diverse λλ.

c) *Trasmissione dell'Amici I*: si sono calcolati i coefficienti propri dei due vetri, flint e crown, nell'ipotesi che si tratti di materiale di caratteristiche medie, fra i diversi materiali usati per la fabbricazione degli obiettivi; è da tener presente che la maggior parte della luce che va perduta si disperde per riflessione sulle quattro superficie dei vetri, più che per assorbimento vero e proprio del mezzo rifrangente.

Pannekoek e Minnaert determinano la percentuale di luce trasmessa dall'integrale

$$0 = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R e^{-k(x_0 + cr^2)} \, 2\pi r \, dr = \left(1 - \frac{akR^2}{2}\right) e^{-kx_0}$$

dove R è il raggio utile della lente, x_0 il suo spessore al centro espresso in cm, a risulta dall'espressione

$$x_r = x_0 + ar^2$$

nella quale x_r indica lo spessore a distanza r dal centro, e infine k è il fattore di assorbimento del vetro per uno spessore unitario; questo fattore k varia notevolmente con la lunghezza d'onda soltanto nell'ultravioletto e nel violetto; mentre nella regione spettrale che ci interessa la sua variazione è minore, come risulta dal calcolo numerico che è stato fatto da noi in base ai dati contenuti nelle *Smithsonian Tables* e nelle ipotesi di cui sopra.

Per la lente di *crown* si ha;

$x_0 = 2.35$ cm $\qquad\qquad$ $x_R = 1.40$ cm

$R = 7.5$ cm (apertura utile effettivamente adoperata).

$a = -0.01053$

$k_{5500} = 0.018$ $\qquad\qquad$ $k_{6600} = 0.014$

e assumendo per semplicità, date le ipotesi contenute nel procedimento, un valore medio di k, si ha, in logaritmi decimali aumentati di 10:

$$\log 0_{\text{crown}} = 9.986 .$$

Analogamente, per il *flint*, si ha:

$$x_0 = 3.45 \text{ cm} \qquad x_R = 4.04 \text{ cm}$$
$$a = +\,0.00654$$
$$k_{5500} = 0.015 \qquad k_{6600} = 0.012$$

e anche qui, assumendo un valore intermedio di k, si ottiene:

$$\log \theta_{\text{flint}} = 9.978 .$$

Quanto alla luce perduta per riflessione essa, secondo la nota formula di Fresnel, ammonta a $\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2$ per ogni riflessione, dove n è l'indice di rifrazione del vetro, che assumeremo ~ 1.51 per il *crown* e ~ 1.65 per il *flint*, per la lunghezza d'onda delle righe D del Sodio. La luce perduta nei due casi viene ad essere 4.1 % e 6.0 % contate due volte rispettivamente per ogni riflessione. Complessivamente si ha per l'Amici I

$$\theta = 0.76$$

che non deve essere sensibilmente lontana dal vero, nonostante le numerose ipotesi introdotte, e che si può assumere valida per tutte le $\lambda\lambda$ da 5550 A a 6550 A, entro i limiti di errore che ci interessa di non oltrepassare.

Come si è detto la combinazione dei fattori *a*), *b*), *c*) fornisce la trasmissione prima dello spettrografo τ. I dati finali dànno la proporzione alla quale la luce solare è ridotta prima di giungere allo spettrografo; invertendo il ragionamento si può dire che la luce di una sorgente posta davanti alla fenditura deve essere accresciuta nel rapporto reciproco, se noi la vogliamo paragonare alla radiazione di un corpo celeste.

e) *Dispersione*: come è stato determinato nel nostro precedente lavoro, essa fu trovata quasi rigorosamente costante e pari a 0.196 mm/A.

d) f) *Trasmissione entro lo spettrografo e sensibilità della lastra*: poichè sarebbe difficile e in definitiva non troppo necessaria una distinzione fra questi due effetti, noi seguiremo Pannekoek e Minnaert, che li hanno studiati insieme, ricavandone i coefficienti di colore. Le intensità apparenti i ci sono date da uno qualsiasi degli spettri ottenuti con la lampada 1002, poichè di ognuno di essi conosciamo la distribuzione spettrale di energia. Si è scelto lo spettro ottenuto con un'intensità di corrente sul filamento pari a 10.7 ampere, cui corrisponde, come sappiamo, una temperatura del filamento di 2168° K, poichè le trasmissioni assumevano lungo tutto questo spettro valori abbastanza equilibrati corrispondenti al tratto rettilineo delle curve caratteristiche. I diversi valori delle i sono dati nella terza colonna della Tabella III, ove si è fatto in modo che fosse $i_{\max} = 100$.

Riportando le i in funzione delle $\lambda\lambda$ (fig. 5) si nota che la curva ha svariati flessi; in essa sono combinati gli effetti della distribuzione reale di energia nello spettro della lampada, della trasmissione entro lo spettrografo e della sensibilità della lastra.

Ottenuta la curva i (λ), procediamo a calcolare i c (λ). La radiazione della lampada su di 1 mm della lastra è trovata prendendo il quoziente $\frac{\text{Energia planckiana}}{\text{dispersione}}$, che è nel nostro caso costantemente dato da $\frac{P}{0.196}$ dove appunto P indica l'energia emessa dal filamento alle varie $\lambda\lambda$ e per

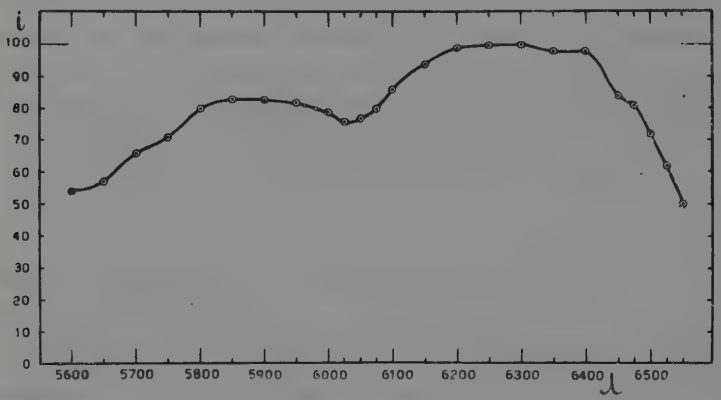


Fig. 5.

la temperatura del testo, sempre a meno della costante χ e nell'ipotesi che il filamento irradi come un corpo grigio, cioè secondo la legge di PLANCK salvo un fattore di correzione minore di uno che dipende dalla natura del metallo che costituisce il filamento stesso. Inoltre, supponendo che la lampada sia posta fuori dell'atmosfera, per avere la stessa densità nello spettrogramma essa dovrebbe irradiare *più* energia alle varie $\lambda\lambda$, in una proporzione data dividendo tale energia per τ. I numeri così ottenuti sono le intensità reali I, che corrispondono al nostro spettrogramma. Per quanto si è detto la relazione fra le intensità apparenti i e quelle reali I è data da:

$$c(\lambda) = \frac{I}{i} = \frac{P}{i \cdot d \cdot \tau} .$$

Nel nostro caso si ha:

Tabella III.

λ	P	i	d	τ	$e(\lambda)$
5600	689	54	0.196	0.873 × 0.927 × 0.76	105.6
5650	731	57	—	—	106.2
5700	780	66	—	0.875 × 0.927 × 0.76	97.8
5750	831	71	—	—	96.8
5800	881	80	—	0.877 × 0.927 × 0.76	91.2
5850	933	83	—	—	93.1
5900	986	83	—	0.879 × 0.927 × 0.76	97.6
5950	1044	82	—	—	104.6
6000	1106	79	—	0.881 × 0.927 × 0.76	115.0
6025	1132	76	—	—	122.3
6050	1156	77	—	—	123.3
6075	1180	80	—	—	120.3
6100	1208	86	—	0.885 × 0.930 × 0.76	114.6
6150	1262	94	—	—	108.7
6200	1317	99	—	0.892 × 0.934 × 0.76	106.9
6250	1380	100	—	—	110.9
6300	1439	100	—	0.897 × 0.938 × 0.76	114.8
6350	1506	98	—	—	121.8
6400	1563	98	—	0.905 × 0.942 × 0.76	125.4
6450	1625	84	—	—	151.1
6475	1660	81	—	—	160.1
6500	1694	72	—	(0.914) × 0.946 × 0.76	182.5
6525	1726	62	—	(0.916) × 0.946 × 0.76	216.0
6550	1759	50	—	(0.918) × 0.947 × 0.76	271.0

I valori dell'ultima colonna sono riportati nella fig. 6. Per controllo si sono determinati i $c(\lambda)$ con un procedimento del tutto analogo anche per lo spettro della lampada ottenuto con 10.2 ampere di corrente sul

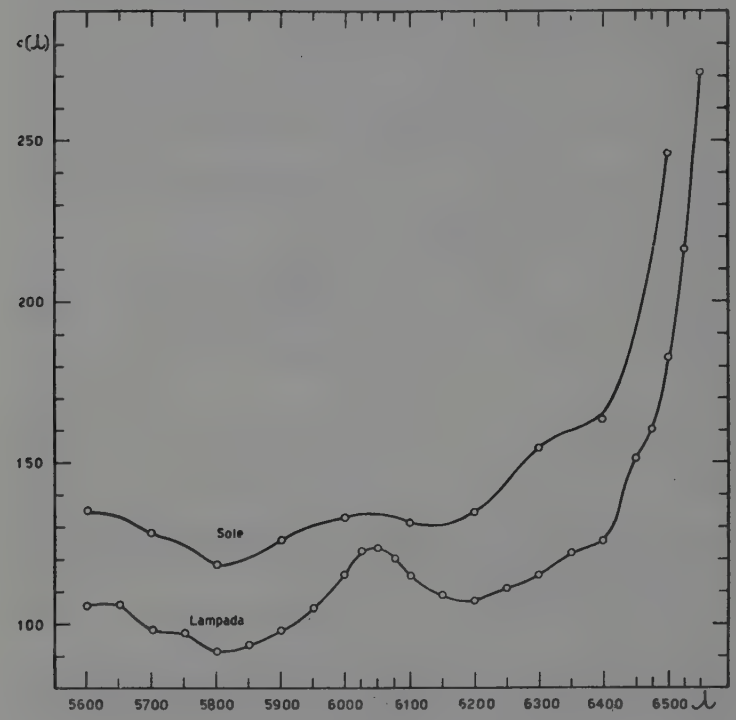


Fig. 6.

filamento, ottenendo dei valori che, salvo un fattore di proporzionalità che non ha importanza, riproducono fedelmente l'andamento della curva $c(\lambda)$ ricavata dalla tabella III.

4. – Determinazione dei $c(\lambda)$ dallo spettro del Sole.

Come già è stato accennato, quando invece della lampada fotometrica si usa il Sole, per questa determinazione, si deve tener conto che esso è già situato fuori dell'atmosfera. Quindi le intensità reali I si avranno direttamente dividendo i valori delle energie emesse alle varie $\lambda\lambda$ per la dispersione dello spettrografo. Come si è detto, gli spettri di calibrazione

ottenuti dal centro del disco solare col filtro graduato K 58 erano generalmente sovraesposti, si è pensato perciò di usare il fondo continuo del *flash* in due strisce di diversa intensità, *d* ed *e*, allo scopo di avere un controllo dei c (λ) ottenuti dalla lampada fotometrica. Si ha in questo caso la difficoltà di conoscere con precisione sufficiente la distribuzione spettrale di energia sul bordo del sole, dal quale si può assumere che abbia origine per diffusione il fondo continuo visibile nel *flash*. Abbot [12] ha determinato i valori dell'energia irradiata alle varie lunghezze d'onda in diversi punti del disco solare, dal centro al lembo, fino ad una distanza di 0.95 R dal centro, per la quale si hanno i valori seguenti:

λ	E
5010	= 254
5340	254
6040	237
6700	210

Perciò, leggendo le intensità apparenti relative alle strisce *d* ed *e* dello spettro studiato, si ha

Tabella IV.

λ	log E	log d	log I	log i_d	log i_e	c_d (λ)	c_e (λ)	$c_d + c_e$
5600	2.396	9.292	1.688	2.970	2.770	52.3	82.8	135.1
5700	.391	—	.683	2.983	2.790	50.1	78.1	128.2
5800	.387	—	.679	3.017	2.820	45.9	72.3	118.2
5900	.382	—	.674	2.926	2.830	56.0	69.8	125.8
6000	.377	—	.669	2.938	2.770	53.8	79.2	133.0
6100	.370	—	.662	2.930	2.775	54.0	77.1	131.1
6200	.364	—	.656	2.910	2.760	55.7	78.7	134.4
6300	.356	—	.648	2.843	2.690	63.8	90.8	154.6
6400	.348	—	.640	2.837	2.640	63.5	100.0	163.5
6500	.340	—	.632	2.659	2.450	94.0	152.5	246.0

dove i c_d ed i c_e sono dati a meno di un fattore 10^3 costante, che non ha importanza; i $c_d + c_e$ sono riportati nella figura 6 per confrontarne l'andamento con i c (λ) della lampada.

[12] « Handbuch der Astrophysik », Bd IV, pag. 13.

Questi coefficienti, moltiplicati per un certo fattore indipendente da λ, dovrebbero dare gli stessi valori determinati col metodo della lampada fotometrica. Le differenze che invece si hanno derivano da una parte dall'inesatta conoscenza delle energie irradiate dal sole al bordo, dall'altra dall'approssimazione delle varie ipotesi circa la trasmissione dell'atmosfera e dell'Amici I e infine circa il potere riflettente dello specchio. Ad ogni modo sostanzialmente le due curve si possono considerare identiche, ciò che depone in favore della precisione dei risultati ottenuti.

5. – Determinazione delle intensità assolute.

Ci è sembrata non priva di interesse teorico la determinazione delle intensità assolute, almeno in via approssimata, se non altro per eventuali considerazioni teoriche sullo stato della cromosfera ai livelli cui si riferisce lo spettrogramma studiato. Intendiamo qui di esporre un procedimento che ci permetterà di determinare in senso assoluto le intensità delle righe cromosferiche, cioè di conoscere il numero di erg per secondo irradiati su di un intervallo di lunghezze d'onda uguale ad 1 angstrom da quell'elemento della cromosfera che dà origine alla riga. Poichè – come vedremo – le intensità sono state misurate in « larghezze equivalenti », cioè mediante il rapporto fra l'area delimitata dalla curva-profilo delle righe e l'area di un rettangolo avente per base un angstrom di spettro e per altezza l'intensità assoluta di una riga basterà moltiplicare semplicemente la larghezza equivalente della riga stessa per l'energia irradiata da 1 *angstrom* dello spettro continuo alla stessa lunghezza d'onda.

Nel procedimento da noi seguito è necessario riferirsi alle condizioni strumentali nelle quali sono stati presi gli spettrogrammi della lampada fotometrica n. 1002. Questa era posta a 46 cm da un obiettivo Steinheil, di cui assumeremo con sufficiente approssimazione una trasmissione $\theta_s = 0.90$; l'immagine del filamento si formava sulla fenditura dello spettrografo a 49 cm dallo Steinheil il quale lavorava con un'apertura utile di 1.48 cm^2. La durata della posa fu di 10^s, per cui, assumendo che il coefficiente p di Schwarzschild sia uguale nel nostro caso a 0,8 (ciò che non dev'essere lontano dal vero), l'intensità osservata su gli spettri di calibrazione è $10^{0.8} = 6{,}3$ volte maggiore di quella che si sarebbe avuta con una posa di 1 secondo.

Ciò premesso, supponiamo che 1 cm^2 dell'arco cromosferico emetta la quantità sconosciuta $X(\lambda)$ erg sec^{-1} steradiante, nell'intervallo di un angstrom dello spettro. Sia al solito $\alpha(\lambda)$ la trasmissione dell'atmosfera, $\rho(\lambda)$ la riflessione del celostata e $\theta(\lambda)$ la trasmissione dell'Amici I; poichè inoltre l'energia che giunge su di 1 cm^2 della fenditura è proporzionale al quadrato

del rapporto fra l'area utilizzata dell'Amici I e la sua distanza focale, come si vede facilmente, si ha in definitiva:

$$0.000617\,\alpha(\lambda)\,\rho(\lambda)\,\theta(\lambda)\,X(\lambda)\ \text{ergsec}^{-1}$$

su 1 cm² della fenditura.

Inoltre, pensando alla fenditura effettivamente utilizzata (cioè 0.02×0.02 cm² tenuto conto dell'altezza dell'immagine della 1ª fenditura del microfotometro sulla lastra del *flash*) si ha:

$$2{,}47\times10^{-7}\,\alpha\cdot\rho\cdot\theta\,X(\lambda)\,.$$

Analogamente, per la lampada fotometrica, sappiamo che per una temperatura $T_{ass} = 2168^{o}$, 1 cm² del filamento emette

$$P(\lambda)\,\chi\ \text{ergsec}^{-1}\ \text{ster}$$

dove $P(\lambda)$ indica i valori della tabella II per la temperatura del nostro caso e χ, riferendosi ad un intervallo $\Delta\lambda = 1\,A$, diventa semplicemente uguale ad 1,33. Ripetendo considerazioni analoghe a quelle fatte per il caso del sole e tenendo presenti le condizioni sperimentali, si trova che l'energia irradiata è ridotta, arrivando su di 1 cm² della fenditura, dopo aver attraversato lo Steinheil, a

$$P(\lambda)\times1{,}33\times0{,}9\times\frac{1.48}{2401} = 7{,}40\times10^{-4}\,P(\lambda)\ \text{ergsec}^{-1}$$

e infine, tenendo conto delle dimensioni reali della fenditura ($0{,}2\times$ $\times\ 0{,}036$ cm²) e del tempo di posa si trova che su di un intervallo di spettro $\Delta\lambda = 1\,A$ arrivano

$$7{,}40\times10^{-4}\times0{,}0072\times6{,}3\,P(\lambda) = 3{,}35\times10^{-5}\,P(\lambda)\ \text{erg sec}^{-1}\ \text{ster}.$$

Tale energia ha dato un annerimento sulla lastra corrispondente ad un'intensità apparente $i_L(\lambda)$. Si vede subito che, se $i_C(\lambda)$ è l'intensità apparente dovuta allo spettro continuo cromosferico si deve avere semplicemente:

$$\frac{i_L(\lambda)}{i_C(\lambda)} = \frac{3{,}35\times10^{-5}\,P(\lambda)}{2{,}47\times10^{-7}\,\alpha\rho\theta\,X(\lambda)}$$

oppure, ricordando la formula che dava i coefficienti di colore a pag. 990:

$$X(\lambda) = \frac{3{,}35 \times 10^{-5}\, c(\lambda)\, i_C(\lambda)\, d}{2{,}47 \times 10^{-7}}$$

e infine, scrivendo per la costante d che rappresenta la dispersione il suo valore 0,196, si ottiene:

$$X(\lambda) = 26{,}6\, c(\lambda)\, i_C(\lambda)$$

dove le i_C vanno misurate *sulla stessa scala* delle i_L che servirono a determinare i coefficienti di colore. In base all'ultima formula trovata sono stati calcolati gli $X(\lambda)$ che esprimono, come si è detto, l'energia irradiata da 1 cm^2 della cromosfera (vedi tabella V). Il calcolo è stato fatto sia per la striscia *d*, sia per la striscia *e*; quest'ultima dà valori numerici minori per le energie, come era naturalmente da attendere trattandosi di un livello più alto sul sole. Le energie risultano dell'ordine di 10^4 erg cm^{-2} sec^{-1} ster.

Poichè la posa sulla cromosfera fu di 3^s, occorre dividere gli $X(\lambda)$ per $3^{0,8}$, poichè, per quanto il fenomeno dell'inversione duri per la generalità delle righe circa un secondo, cui si riduce quindi la posa *effettiva* del *flash* da noi misurato, nonostante che sia stato esatto l'istante d'inizio della posa, il fondo continuo non deve aver cessato verosimilmente di *impressionare* la lastra dopo il primo secondo di esposizione. Ad ogni modo nella tabella V, dove la scrittura 5,45.4 significa al solito 5.45×10^4 sono dati sotto $X(\lambda)$ i valori dell'energia irradiata in erg sec^{-1} cm^{-2} ster nell'ipotesi di 3 secondi di posa e sotto $X'(\lambda)$ i valori corrispondenti nell'ipotesi di un'esposizione utile di 1^s soltanto. Poichè l'energia emessa da 1 cm^2 della fotosfera solare è intorno a 6000 *A* dell'ordine di $3{,}4 \times 10^6$ ergsec^{-1} ster si vede che i nostri valori sono all'ingrosso 50 volte più piccoli. Questo conferma che la luce dello spettro continuo del *flash* è luce diffusa dal bordo solare.

Tabella V.

λ	$c(\lambda)$	$\log i_e$	i_e	$\log i_d$	i_d	$X_e(\lambda)$	$X'_e(\lambda)$	$X_d(\lambda)$	$X'_d(\lambda)$
5600	105.6	1.668	46.5	1.836	68.5	5,45.4	1,31.5	7,97.4	1,92.5
5650	106.2	.686	48.5	.884	76.5	5,67.4	1,37.5	8,95.4	2,16.5
5700	97.8	.694	49.5	.892	78	5.35.4	1,29.5	8,42.4	2,03 5
5750	96.8	.712	51.5	.892	78	5,55.4	1,34.5	8,32.4	2,01.5
5800	91.2	.720	52.5	.905	80.5	5,30.4	1,28.5	8,12.4	1,96.5
5850	93.1	.746	56	.884	76.5	5,72.4	1,38.5	7,90.4	1,90.5
5900	97.6	.729	53.5	.859	72	5,78.4	1,39.5	7,75.4	1,87.5
5950	104.6	.705	51	.850	71	5,88.4	1,41.5	8,22.4	1,98.5
6000	115.0	.669	46.5	.841	69	5.92.4	1,43.5	8,77.4	2,11.5
6025	122.3	.674	47	.837	68.5	6,32.4	1,52.5	9,25.4	2,23.5
6050	123.3	.688	49	.841	69	6,65.4	1,60.5	9,40.4	2,27.5
6075	120.3	.688	49	.834	68	6,52.4	1,57.5	9,05.4	2,18.5
6100	114.6	.674	47	.829	67.5	5,97.4	1,44.5	8,58.4	2,06.5
6150	108.7	.669	46.5	.824	66.5	5,60.4	1,35.5	8,00.4	1,93.5
6200	106.9	.663	46	.803	63.5	5,45.4	1,31.5	7,50.4	1,81.5
6250	110.9	.637	43	.776	60	5,30.4	1,28.5	7,35.4	1,77.5
6300	114.8	.608	40.5	.742	55	5,15.4	1,24.5	6,95.4	1,68.5
6350	121.8	.584	38	.728	53.5	5,10.4	1,23.5	7,20.4	1,74.5
6400	125.4	.569	37	.728	53.5	5,10.4	1,23.5	7,45.4	1,80.5
6450	151.1	.533	34	.669	46.5	5,48.4	1,32.5	7,75.4	1,87.5
6475	160.1	.470	29.5	.612	41	5,12.4	1,23.5	7,25.4	1,75.5
6500	182.5	.355	23	.556	36	4,65.4	1,12.5	7,25.4	1,75.5
6525	216.0	—	—	—	—	—	—	—	—
6550	271.0	—	—	—	—	—	—	—	—

6. – Studio al microfotometro dello spettro cromosferico.

Lo spettro prescelto per la misura delle intensità cromosferiche è stato diviso in 52 zone di 4 mm (circa 20 *A*) ognuna e passato al microfotometro registratore con un rapporto di trasmissione di circa 1:72, in modo che ad ogni microfotogramma corrispondesse una zona e le sue adiacenze. Si è avuto cura di registrare la trasmissione del fondo della lastra con continuità da un estremo all'altro del microfotogramma, o almeno all'inizio ed alla fine di esso, e di tracciare diversi segmenti corrispondenti ad una trasmissione fatta artificialmente uguale a zero. 11 microfotogrammi furono eseguiti con un rapporto di trasmissione assai minore, per orientamento ed identificazione delle righe; 49 microfotogrammi furono eseguiti sulla striscia *e*, 84 (con alcune ripetizioni) sulla striscia *d*, 20 sulla striscia *b*. La deviazione del galvanometro fra le due trasmissioni estreme si è mantenuta, salvo piccoli spostamenti, attorno al valore di 8 cm sulla carta sensibile. La prima fenditura del microfotometro è stata tenuta di dimensioni costanti lungo tutto il lavoro e il più sottile possibile compatibilmente con la necessità di avere una deviazione sufficiente, e questo per aumentare il potere risolvente del microfotometro e quindi avere il profilo più fedele delle righe. La velocità è stata costantemente di 0,712 mm sec sulla carta sensibile e quindi di appena 0,01 mm sec sulla lastra, ciò che permette di escludere dai profili osservati l'inerzia dello strumento ([13]).

L'immagine della prima fenditura del microfotometro che si forma sulla lastra risulta assai impiccolita (0,02 cm) e la sua altezza è rimasta ben inferiore allo spessore delle strisce *d*, *b*, *e* esaminate.

La grana molto grossa della lastra ha reso assai difficile di individuare con sicurezza il profilo delle righe e, in particolare, anche di mettere in evidenza rispetto al fondo continuo le righe più deboli. Il lavoro di integrazione delle oscillazioni del galvanometro dovute alla grana ha richiesto molte precauzioni per non incorrere in errori troppo forti nella determinazione dell'andamento vero delle curve-profilo. Di conseguenza, poichè si preferiva di portare a termine sopratutto uno studio comparativo di tutte le righe cromosferiche fotografate, si è ritenuto più conveniente di limitarsi alla misura delle larghezze equivalenti W facendo soltanto alcune considerazioni generali per quel che riguarda il profilo.

Seguendo il contorno integrato delle righe si sono lette punto per punto sui microfotogrammi le trasmissioni delle righe, riducendo poi le ascisse in lunghezze d'onda (moltiplicandole per il rapporto di trasmissione e per

([13]) v. G. Righini, « Ottica », anno I, n. 2, pag. 200 (1936).

la dispersione della lastra), e le ordinate in intensità apparenti i, mediante le curve di calibrazione. Dopo di ciò si poteva tracciare il profilo della riga, delimitante un'area che è stata misurata singolarmente per ogni riga con un pantografo, prendendo per unità di misura – come si è accennato – l'area di un rettangolo avente 1 A di base ed altezza pari all'intensità del fondo continuo espressa nelle stesse unità adoperate per le righe secondo il metodo ormai classico applicato di M. Minnaert e G. Mulders [14] per lo studio dell'intensità delle righe d'assorbimento nello spettro solare.

Poichè nel *flash* le righe sono in emissione, quando l'intensità del fondo continuo tende a diventare nulla (e in tali circostanze il gas cromosferico si può considerare spettroscopicamente come del tutto indipendente dagli strati luminosi sottostanti ed il suo spettro diventa uno spettro di righe puro e semplice), le W crescono oltre ogni limite e perdono ogni significato, mentre nel caso di righe d'assorbimento, anche al limite di un assorbimento totale, l'intensità centrale può diventare nulla, ma la W resta sempre finita. Di tale differenza sostanziale si deve tener conto nella valutazione delle intensità ricavate col metodo delle larghezze equivalenti, per quanto nel nostro caso generalmente l'intensità del fondo continuo (tranne che per le righe D 1 e D 2 del Sodio, per la D 3 dell'Elio e per la H_α dell'Idrogeno) resti sempre dello stesso ordine di quella del vertice delle righe.

7. – Il profilo delle righe.

Come è noto, nel caso di righe d'assorbimento, l'intensità centrale osservata è maggiore di quella teorica, a causa del potere risolvente finito dello spettrografo, e il profilo osservato di una riga $J(l)$ è determinato dall'integrale [15].

$$J(l) = \int_0^\infty K(\lambda - l)\, I(l)\, d\lambda$$

in cui l è la posizione nello spettro in unità λ, $K(l)$ è il profilo strumentale ed $I(l)$ il profilo vero della riga considerata; quest'ultimo è il più sottile, mentre $J(l)$ è il più allargato.

Si può domandare quali sono i fattori che determinano la forma del profilo normale osservato; nel nostro caso la larghezza della fenditura non ha alcuna importanza, poichè gli archi cromosferici erano generalmente più sottili (0,077 mm) almeno se si fa eccezione per le righe più intense. Cause *strumentali* dell'allargamento osservato delle righe possono essere quindi, oltre ad un eventuale focheggiamento imperfetto dello spettro-

[14] «ZfA», 1, pag. 192 (1930).

[15] C. W. Allen, «Mem. Commonwealth Obs.», pag. 11 (1934).

grafo, l'acromatismo delle lenti e sopratutto le imperfezioni delle superficie ottiche. Cause *naturali* invece sono la forma irregolare degli archi cromosferici, il loro allargamento per scintillazione e l'accavallamento (*blend*) del profilo di due righe vicine. La curva che risulta dalla concomitanza di queste cause si approssima ad una curva di probabilità, come era da attendersi dalla cooperazione di numerose sorgenti di errore. Per quanto riguarda l'acromatismo delle lenti, che spiegherebbe un effetto dipen-

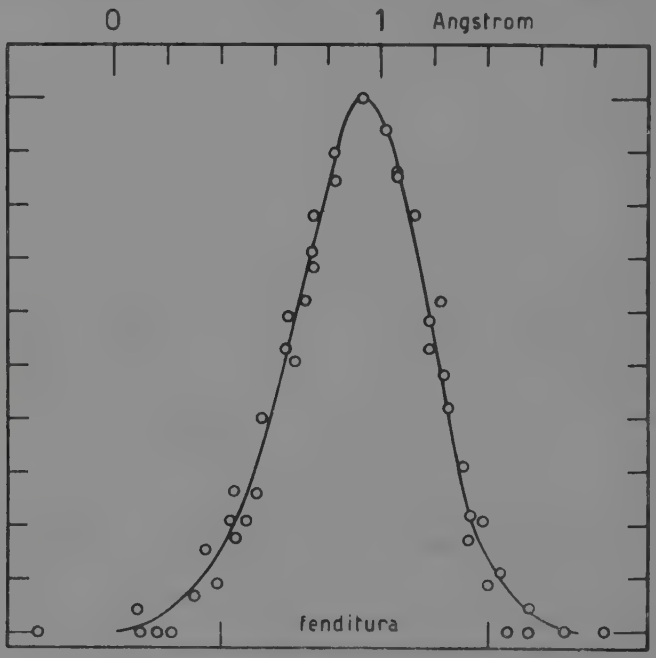


Fig. 7.

dente da λ, si potrebbe fare qualche speciale considerazione, dato che si è realmente osservata nella striscia *d* del *flash*, presa in esame una definizione delle immagini variabile con λ e, in particolare, decrescente verso il rosso. Tuttavia uno studio riferito agli obiettivi Amici I e Amici II, quest'ultimo posto come si è detto in autocollimazione nell'interno dello spettrografo, eseguito da V. Ronchi ([16]), ha dato valori molto bassi sia per l'aberrazione cromatica che per quella zonale in ambedue gli obiettivi.

Limitando le nostre considerazioni al contorno osservato, noi ci proponiamo di studiare il profilo normale degli archi cromosferici esenti da

([16]) « Rivista d'ottica e meccanica di precisione », vol. III, fasc. 3 (1922).

blend, A tale scopo abbiamo scelto 4 righe semplici, nelle quali si è fatto per tutte $I_v/I_f = 2$, dove I_v ed I_f indicano le intensità del vertice e del fondo rispettivamente, ottenendo in media il profilo riprodotto nella fig. 7. Si può subito osservare che l'area totale (0,626) non è divisa simmetricamente rispetto al vertice della riga: la parte violetta è più sviluppata (0,334) di quella rossa (0,292), ciò che si spiega tenendo presente che nelle condizioni strumentali del testo dalla parte rossa il bordo lunare intercetta bruscamente i raggi luminosi, mentre da quella violetta l'arco cromosferico diventa gradatamente meno splendente con l'altezza, senza alcuna delimitazione netta, in quanto che il numero di atomi capaci di emettere si annulla nella maggior parte delle righe ad un'altezza ben minore di quella cui corrisponde il bordo violetto della fenditura (nelle condizioni del testo [17]) i 0,20 mm della fenditura equivalgono infatti a 5736 km sul Sole).

Le righe scelte per dare il profilo normale delle righe sono le seguenti:

	λ	W	h	r	Δ
1)	5576.10	0.172	1.30	0.60	0.96
2)	5853.69	0.395	1.58	0.62	0.91
3)	6347.10	0.290	1.45	0.57	0.88
4)	6432.69	0.332	1.57	0.55	0.94

dove W è la larghezza equivalente, h l'intensità centrale della riga posta uguale ad 1 l'intensità del fondo continuo, r è la larghezza in angstrom misurata a metà del profilo, Δ esprime il rapporto $\frac{(h-1)}{W}$. Altre righe di forma regolare, quasi tutte semplici, ma meno sicure, dànno analogamente:

5)	5859.60	0.129	1.22	0.52	0.89
6)	5905.68	0.106	1.19	0.54	0.97
7)	6108.13	0.157	1.23	0.63	0.92
8)	6141.73	0.960	2.36	0.65	0.92
		1.368	2.41	0.78	0.81
9)	6301.52	0.150	1.30	0.50	1.00
10)	6327.61	0.110	1.17	0.64	0.99
11)	6335.34	0.213	1.36	0.56	0.95
12)	6416.94	0.197	1.31	0.63	0.99
13)	6496.92	1.190	2.56	0.72	0.94

Da questi due elenchi si vede che i valori di r sono poco differenti l'uno dall'altro e in prima approssimazione non dipendono nè da λ nè da W. D'altra parte il fatto che Δ sia quasi costante a meno di un errore che in media non supera quello coinvolto nella determinazione del con-

[17] M. G. Fracastoro, loc. cit., pag. 29.

torno delle righe, significa che la larghezza equivalente di ogni riga si può all'incirca rappresentare con l'area di un rettangolo avente per base r e per altezza h; ma poichè gli r sono quasi sempre gli stessi, se ne deduce che, almeno nel caso di righe semplici, l'intensità centrale è una misura direttamente proporzionale alla larghezza equivalente. Tuttavia, poichè nelle condizioni strumentali del testo, righe anche abbastanza separate venivano a formare un *blend* nello spettro della cromosfera, si è preferito misurare ogni volta l'area col planimetro, piuttosto che dedurla dalle intensità centrali seguendo il metodo di cui sopra o analoghi di altri ricercatori. L'errore commesso nelle misure col pantografo è da ritenersi trascurabile rispetto a quello necessariamente coinvolto col tracciamento del contorno dei microfotogrammi a causa – come abbiamo accennato – della forte grana della lastra. Inoltre la presenza di numerose righe atmosferiche, naturalmente in assorbimento, nella regione spettrale fotografata ha reso necessaria in certe zone un'attenta determinazione del fondo.

Nello studio delle larghezze equivalenti si sono ritrovate per lo più quelle stesse righe di cui si era misurata la lunghezza d'onda nel nostro precedente lavoro; alcune nuove sono state identificate, altre si sono perdute di vista.

8. – Le intensità delle righe.

Poichè le larghezze equivalenti delle righe cromosferiche vengono riferite al fondo continuo, è necessario fare alcune considerazioni sull'origine della luminosità stessa di questo fondo continuo.

Pannekoek e Minnaert [18] pensano che in parte essa si debba attribuire al sovrapporsi delle ali delle righe in emissione. Questa ipotesi può aver valore nella regione violetta dello spettro, dove le righe sono effettivamente quasi ininterrottamente una di seguito all'altra e molto spesso anche accavallate fra di loro: ma nella regione da noi esaminata l'intervallo fra una riga ed un'altra è bene spesso più che sufficiente a mettere in evidenza l'esistenza di un vero e proprio fondo continuo, la cui luce proviene dal bordo solare o in certo senso anche dalla cromosfera stessa, se si pensa che le particelle degli strati più bassi della cromosfera diffondano la luce fotosferica in misura sufficiente a spiegare la luminosità relativamente grande del fondo continuo, che abbiamo visto capace di irradiare all'incirca un decimo dell'energia emessa da un'area uguale della fotosfera. Ad ogni modo, sia nelle strisce più scure d e b, che in quella più chiara e dovuta all'interposizione di una montagna lunare, l'ammontare della luce continua è abbastanza notevole. Se ne deduce che le intensità misurate nello spettro cromosferico non sono le vere intensità, perchè le righe in assorbimento di Fraunhofer, che devono esser presenti nello spettro

[18] Loc. cit.

continuo osservato, diminuiscono l'intensità delle righe in emissione in misura diversa a seconda della durata del periodo d'inversione della riga rispetto al tempo in cui sussiste lo spettro continuo. Il problema però è assai complicato dal fatto assai notevole che in un altro spettrogramma del *flash* eseguito da Righini a Sara e precisamente quelle eseguito al lembo *W* (III contatto), con 4 secondi di posa, si vedono le righe *D*1 e *D*2 sia in emissione che in assorbimento, queste ultime spostate verso il violetto e non affette dalla curvatura propria degli archi cromosferici. Questo fatto tuttavia ci sembra sufficiente di per sè a concludere che la luce dello spettro continuo è luce fotosferica diffusa nelle immediate vicinanze del bordo solare e viene a confermare l'interpretazione dei risultati numerici ottenuti a pag. 994 e nella tabella V.

9. – Il catalogo delle righe cromosferiche.

Le righe osservate, delle quali è stata misurata la larghezza equivalente in almeno una delle strisce *d*, *b*, *e*, sono riportate nella tabella VI, che riassume tutti i risultati. Essa reca nella colonna (1) la lunghezza di onda delle righe. I valori della colonna (2), che riporta le notazioni a stima delle intensità date nel nostro precedente lavoro, si riferiscono alla riga o al gruppo di righe che cooperano alla formazione del *blend*. Nelle colonne (3), (5) e (7) sono date le *W* misurate in questo lavoro, rispettivamente in corrispondenza delle strisce *d*, *e*, *b*. Nelle colonne (4), (6) e (8) si hanno le intensità centrali delle righe riferite all'intensità del fondo che si è presa uguale a 1. Nella colonna (9) sono date le larghezze equivalenti determinate in assorbimento da Allen [19] e nella (10) son date le intensità centrali quali si leggono sulle Tavole dell'Atlante fotometrico dello spettro solare pubblicato recentemente da Minnaert, Mulders e Houtgast. Nella colonna (11) è menzionato l'elemento cui appartiene la riga secondo la Rowland Revision o altre sorgenti di informazione; nella (12) è riportato il potenziale di bassa eccitazione e infine nella (13) il multipletto di appartenenza; questi ultimi due dati sono presi dal catalogo di C. E. Moore [20], cui rimandiamo per la spiegazione dei simboli.

10. – Paragone delle strisce *b*, *e*, *d*.

Esaminando nella zona comune dello spettro le larghezze equivalenti *W* riferite alle strisce *b* e *d*, dovute ambedue ad un avvallamento lunare, non si nota alcuna differenza sostanziale, mentre invece la striscia *e* fornisce delle *W* sensibilmente superiori in genere a quelle corrispondenti su

[19] Loc. cit.

[20] C. E. Moore, *A Multiplet Table of astrophysical interest*. Princeton, 1933.

b e su *d*, specialmente per le righe più intense. Se cerchiamo di interpretare questo fatto, si vedrà che tale differenza è da attribuire essenzialmente al fondo continuo. Per maggiore chiarezza si pensi ad un rapporto $R(h)$ fra il potere emettente degli strati cromosferici e l'intensità della luce fotosferica riflessa che costituisce uno spettro assorbimento: ambedue queste grandezze *decrescono* man mano che cresce l'altezza h sul livello del sole, ma con un andamento diverso, per cui il loro rapporto raggiunge un massimo per un dato elemento ad una certa altezza h_0, che rappresenta l'« optimum » di osservabilità del fenomeno. Tale altezza tuttavia non è la stessa da un elemento all'altro, anche se, nella maggior parte delle righe, essa varia soltanto di poco. Perciò, in corrispondenza dell'istante in cui la luna ha coperto gli strati di altezza immediatamente inferiore ad h_0, si ha l'inversione generale dello spettro.

In pratica, nello studio del *flash*, quale si può fare dal nostro spettrogramma, si deve tener conto che durante la posa la luna si sposta al secondo contatto verso i più alti livelli dell'atmosfera solare, e che di conseguenza l'effetto fotografico di quegli strati che sono stati visibili soltanto per una parte della posa deve esser differente a seconda del livello cui essi si trovano, cioè in definitiva da un elemento all'altro. Se invece la posa fosse stata istantanea, allora ognuna delle strisce avrebbe rappresentato fedelmente l'aspetto dello spettro d'inversione per il livello cui esse corrispondono, e le larghezze equivalenti avrebbero dato una misura precisa del rapporto $R(h)$ di cui abbiamo detto sopra. Ci si dovrebbe attendere in tal caso un risultato diverso a seconda dell'istante in cui la posa è stata fatta, e in particolare si troverebbero le massime W per la striscia che corrisponde al livello-istante « optimum ». Invece nelle condizioni strumentali del testo l'interpretazione delle W di ogni singola striscia diventa alquanto complessa. Si ha che la posa è stata effettivamente di 3^s soltanto per quelle pochissime righe che s'innalzano a più di 750 km sul sole. Per le altre essa è stata minore in misura variabile a seconda del livello cui esse si trovano. Tuttavia, il fatto che le W_e siano generalmente maggiori significa che il rapporto $R(h)$ è stato complessivamente maggiore sulla striscia *e* che sulle altre e, siccome esse hanno agito contemporaneamente sulla lastra, vuol dire che quella parte di spettro continuo, che la montagna *e* ha intercettato, ha agito negativamente su le strisce *d* e *b* agli effetti delle intensità, alle quali si è venuto in tali casi a sottrarre l'assorbimento fraunhoferiano. D'altra parte il fatto che il fondo continuo del nostro spettro abbia ancora una parte preponderante su $R(h)$ e quindi sulle W conferma i forti valori numerici trovati per l'energia emessa da 1 cm^2 del bordo solare al livello rappresentato dalle strisce esaminate.

11. – Intensità dei multipletti.

Come è noto ([21]) si può teoricamente calcolare l'intensità di una certa riga, classificata per il suo multipletto di appartenenza, in funzione della sua probabilità di transizione, quale è espressa dai numeri quantici, e di v^4. Pannekoek e Minnaert hanno discusso ampiamente le intensità delle righe cromosferiche da loro osservate fra 4154 *A* e 4768 *A*, trovando che esse crescono con quelle teoriche, ma più lentamente; questo fatto significa che la cromosfera non costituisce uno strato ottico sottile, ma invece presenta in proporzione notevole entro lo strato gassoso visto tangenzialmente un autoassorbimento ben diverso quantitativamente da quello dovuto allo strato invertente quale noi osserviamo in un punto del centro del disco solare. Nel nostro caso, come abbiamo detto nella pagina precedente, la posa di 3^s, rinforzando quelle righe che sono già di per sé più intense, tende a mascherare l'effetto di autoassorbimento osservato da Pannokoek e Minnaert. Per di più noi torniamo a mettere in rilievo che, oltre all'autoassorbimento dovuto proprio allo strato cromosferico, è presente nelle intensità che si sono misurate l'assorbimento fraunhoferiano della luce fotosferica che costituisce il fondo continuo dello spettro.

Ciò premesso esaminiamo alcuni multipletti del Fe, Fe^+, Ca, Na, V ove sono presenti in numero sufficiente righe esenti da *blend*. Nella 1ª colonna son date le lunghezze d'onda, nella seconda la *W* media fra le strisce *b* e *d*, nella terza la W_e nella quarta la *W* secondo Allen, nella quinta l'intensità di laboratorio e nella sesta l'altezza misurata da Mitchell ([22]).

Righe del Fe:

a) multipletto $y^3F^0—f^3D$

	W_{db}	W_e	W_A	I_{lab}	h_M	Note
5554.90	0.222	0.195	0.079	4	400 km	Manca l'ultimo com-
65.72	0.232	0.248	0.091	4	500	ponente del multi-
98.31	blend	blend	0.070	4	500	pletto nello spet-
5679.03	0.096	0.114	0.053	(2)	350	tro del *flash*.
5706.01	—	—	(0.062)	(2)	350	

([21]) Pannekoek e Minnaert dànno la bibliografia degli autori che hanno pubblicato intensità teoriche di righe, dedotte per i diversi multipletti con regole di somma (loc. cit., pag. 78) v. anche: H. B. Dorgelo, « Physik. Z. », XXVI, 1925 pag. 756 e segg.

([22]) Mitchell, « ApJ », 71.

b) multipletto $z^3G^0 - e^3G$

λ	W_{db}	W_e	W_A	I_{lab}	h_M	Note
5557.99	0.049	—	0.046	1n	350	Ultimi due componenti del multipletto; i precedenti non sono compresi entro le $\lambda\lambda$ studiate.
62.72	0.040	0.052	0.056	(2)	350	

c) multipletto $z^5F^0 - e^5D$

5569.63	0.276	0.463	0.174	20	600 km	Contiene righe molto intense. I valori fra parentesi si riferiscono a *blend* con elemento più debole.
72.85	(0.374)	0.604	0.235	30	600	
76.10	0.172	0.191	0.127	10	500	
86.77	0.254	0.271	0.246	40	600	
5602.97	(0.298)	(0.275)	(0.131)	10	600	
15.66	(0.526)	(0.503)	(0.359)	50	600	
24.56	blend	blend	0.132	10	400	
58.54	blend	blend	(0.060)	(1)	300	
58.83	blend	blend	0.120	10		
5709.39	blend	blend	0.104	10	400	
12.14	blend	blend	0.053	(2)	300	
84.67	blend	blend	0.022	(1)	—	

d) multipletto $y^3F^0 - e^3G$

5650.29	—	—	—	—	—	La presenza del primo componente del multipletto è dubbia.
5752.04	0.087	0.105	0.049	(2)	300	
5806.74	0.100	0.111	0.048	(2)	300	
62.37	0.140	0.102	0.088	8	400	
5914.12	0.271	0.168	(0.091)	8	400	
30.19	0.145	blend	0.080	8	400	

e) multipletto $z^3F^0 - e^3F$

5804.04	blend	blend	0.019	(1)	(350)	Righe di media intensità; valori piuttosto discordanti da una striscia all'altra. Le altezze in parentesi sono riferite a *blend*.
38.38	—	—	0.011	—	(300)	
5952.73	0.072	0.101	0.056	3	400	
76.79	0.109	0.048	0.066	5	350	
6003.03	0.171	0.088	0.085	8	400	
96.68	0.078	—	0.039	(1)	300	
6188.00	—	0.090	0.044	(2)	400	

f) multipletto $b^3F - y^3F^0$

λ	W_{db}	W_e	W_A	I_{lab}	h_M	Note
6005.56	—	0.070	0.017	(1)	300	Alcuni componenti
51.04	—	—	—	—	—	intensi; per i va-
65.50	0.266	0.203	0.124	15	500	lori in parentesi
6137.71	0.277	0.337	0.142	18	600	vedi *c*); notare
6200.33	0.195	0.102	0.069	4	400	l'andamento delle
30.74	(0.353)	0.330	0.159	25	600	W_{db} e delle W_e
6322.70	blend	0.126	0.076	5	400	con *h*.

g) multipletto $a^3H - z^3G^0$

6136.63	blend	(0.605)	0.144	20	800 km	Alcuni componenti
91.58	blend	blend	0.139	20	600	assai notevoli.
6252.57	0.292	0.288	0.121	20	500	
56.37	0.234	0.239	0.098	4	400	
6344.16	0.235	0.123	0.061	2	400	
6412.24	—	—	—	—	—	

h) multipletto $a^5P - y^5D^0$

6137.01	blend	blend	0.069	(2)	—	Numerosi compo-
51.63	0.093	0.156	0.049	(2)	300	nenti liberi da
73.35	0.128	0.119	0.073	3	400	*blend* e sensibil-
6213.44	0.187	0.230	0.079	5	500	mente rinforzati
19.29	0.252	0.201	0.095	6	500	rispetto alle I_{lab}
65.15	0.182	0.169	0.077	6	400	ed alle W_A.
97.81	0.206	0.248	0.075	5	500	
6335.34	0.213	0.285	0.106	10	500	
6430.86	0.231	0.280	0.113	10	600	

i) multipletto $z^5P^0 - e^5D$

6141.73	blend	blend	(0.129)	4	(1500)	Il primo componente
6232.66	0.151	0.121	0.081	5	400	del multipletto è
46.33	blend	0.147	0.131	15	500	dovuto prevalen-
6301.52	0.150	0.190	0.114	15	500	temente al Ba+.
02.51	0.100	0.088	0.079	6	500	
36.84	0.255	0.172	0.100	12	500	
6400.02	blend	blend	0.170	25	600	
08.03	0.169	0.187	0.114	8	400	
11.66	0.210	0.200	0.137	12	500	

j) multipletto $a^3P - z^3P^0$

λ	W_{db}	W_e	W_A	I_{lab}	h_M	Note
6254.25	(0.209)	(0.270)	(0.112)	6	400	Altri componenti del multipletto seguono oltre le λλ studiate.
6421.37	0.353	0.261	0.114	10	600	
—	—	—	—	—	—	

h) multipletto $a^3H - z^5G^0$

6318.04	(0.290)	(0.282)	0.104	10	600	Alcuni componenti molto notevoli purtroppo affetti da *blend*. Altri seguono oltre le λλ studiate.
93.62	0.265	0.250	0.132	15	600	
6462.76	blend	blend	—	5	(600)	
69.20	0.094	—	0.054	2	400	
95.00	(0.481)	(0.529)	0.181	25	600	
—	—	—	—	—	—	

Righe del Fe+:

a) multipletto $d^4D - z^4P^0$

6147.75	(0.223)	(0.268)	—	(0)	600 km	Tutte righe rinforzate; i *blend* sono prevalentemente dovuti al Fe+.
49.26	0.175	0.238	0.039	(00)	600	
6238.40	0.229	0.252	0.047	(0)	500	
39.96	(0.216)	(0.133)	0.012	—	400	
47.57	0.291	0.412	0.058	(1)	600	
6407.31	0.034	0.025	0.024	—	400	
16.94	0.197	0.133	0.046	0	500	
56.40	(0.665)	(0.436)	0.065	(3)	600	

b) multipletto $a^6S - z^6D^0$

6369.48	0.219	0.176	0.017	—	500	Righe rinforzate.
6432.69	0.332	0.380	0.038	—	600	
6516.09	0.588	—	0.058	(00)	800	

Righe del Ca:

a) multipletto $3^3D - dp^3D^0$

5581.98	—	0.090	0.089	25	500	Nonostante i *blend* si nota che le intensità sono indebolite rispetto a quelle di laboratorio.
88.77	0.259	0.319	0.170	80	600	
90.13	0.121	0.123	0.086	20	400	
94.47	blend	blend	0.145	60	500	
98.49	blend	blend	0.131	50	500	
5601.29	0.116	0.174	0.111	30	600	
02.87	blend	blend	—	25	(600)	

b) multipletto $4^3P^0 - 5^3S$

λ	W_{db}	W_e	W_A	I_{lab}	h_M	Note
6102.73	blend	blend	0.141	20?	800	Intensità maggiori rispetto al multipletto precedente.
22.23	0.345	0.483	0.220	22?	800	
62.18	blend	blend	0.269	25?	1000	

c) multipletto $3^3D - 5^3P^0$

6156.04	blend	blend	(0.006)	(1)	—	
61.30	blend	blend	0.056	10	300	
63.76	blend	blend	0.054	10	400	
66.45	0.068	—	0.073	15	400	
69.05	0.220	bl. 0.264	0.080	25	600	
69.57	0.298	bl.	0.114	40	600	

d) multipletto $3^3D - dp^3F^0$

6439.09	0.308	0.265	0.182	11	600 km	Intensità indebolite rispetto alle W_A, specie nella striscia *e*.
62.58	blend	blend	(0.163)	9	600	
71.68	0.148	—	0.096	8	400	
93.80	0.155	0.322	0.134	8	400	
99.66	0.189	0.134	0.092	8	300	
6508.86	—	—	0.008	3	—	

Righe del Na;

a) $3^2P^0 - 4^2D$

5682.65	blend	blend	0.093	(8)	300	Purtroppo i dati sono scarsi, oltre alle D1 e D2; tuttavia non sembra che le intensità siano rinforzate.
88.22	blend	blend	0.131	(10)	350	

b) $3^2S - 3^2P^0$

5889.98	4.417	6.372	0.753	(8 R)	1500
95.94	3.929	5.464	0.544	(10 R)	1500

c) $3^2P^0 - 5^2S$

6154.24	blend	blend	0.035	(8 r)	300
60.76	—	0.044	0.049	(8 r)	300

Righe del V:

Appaiono complessivamente molto indebolite rispetto alle loro intensità di laboratorio, ma rinforzate rispetto alle W_A. Del multipletto $a^4D - y^4D^0$ è presente solo il componente 5627.65 che è il più intenso in

laboratorio, ed anche assai debole, come componente di un *blend*. Delle altre righe presenti si ha:

a) multipletto $a^4D - y^4F^0$

λ	W_{db}	W_e	W_A	I_{lab}	h_M
5698.53	blend	blend	0.031	60	500
5703.59	0.124	0.081	0.024	40	400
06.99	blend	blend	—	30	350
27.06	0.137	0.212	0.034	60	350
27.66	—	0.106	0.008	20	—
37.08	0.082	—	0.008	25	—
43.44	—	—	(0.003)	18	—
61.63	—	—	—	2	—
82.60	—	—	—	2	—

b) multipletto $b^4D - z^4P^o$

6002.66	—	—	—	4	—
39.74	—	—	0.010	25	300
58.18	—	—	—	5	—
81.46	0.069	0.072	0.012	25	300
90.22	blend	0.084	0.034	50	300
6111.67	0.095	—	(0.008)	25	300
19.54	blend	blend	0.024	40	300
35.38	—	0.093	—	15	—

Dai dati riportati si può avere un'idea del diverso comportamento dei vari elementi ed anche dei vari multipletti di uno stesso elemento. Tutte le righe appartenenti ad elementi ionizzati hanno un comportamento analogo a quanto si è visto nel caso del Fe^+ e cioè presentano un grande aumento nell'intensità. Questo conferma quanto si conosce circa la distribuzione con l'altezza dei gas che compongono lo strato invertente e la cromosfera, secondo la teoria di SAHA. Tuttavia la determinazione quantitativa delle intensità, ottenuta col metodo delle larghezze equivalenti è la sola capace di portare alla definizione completa del problema che verte sulla costituzione della cromosfera solare. Infatti dalle larghezze equivalenti si può risalire al numero di atomi capace di emettere in una certa radiazione corrispondente ad un dato processo quantistico e si possono paragonare i valori osservati con quelli previsti dalla teoria, in base alle ipotesi che si possono fare circa la costituzione dell'atmosfera solare e alle condizioni sperimentali cui le lastre studiate corrispondono. Appunto per la complessità di queste ipotesi – cui abbiamo accennato nella nostra discussione – il problema risulta di notevole difficoltà e tale da essere integralmente solubile solo attraverso l'esame del più largo materiale omogeneo di osservazione.

TABELLA VI.

λ (1)	int. (2)	W_d (3)	h_d (4)	W_e (5)	h_e (6)	W_b (7)	h_b (8)	W_A (9)	h_m (10)	El. (11)	Pot. ecc. (12)	Multipletto (13)
5553.59	0–1	0.094	0.17	0.162	0.20	—	—	(0.036)	0.64	Fe	4.416	$z^3\,G^o$–40
.71									0.77	Ni	1.927	$a^3\,P$–$y^3\,F^o$
54.90	2 d	0.222	0.30	0.195	0.22	—	—	0.079	0.43	Fe	4.529	$y^3\,F^o$–$f^3\,D$
57.92	00	0.049	0.13	—	—	—	—	0.046	0.65	Fe	4.454	$z^3\,G^o$–$e^3\,G$
.99												
60.22	00	—	—	0.054	0.10	—	—	0.051	0.65	Fe	4.416	$z^3\,G^o$–55
61.25	—	0.090	0.15	—	—	—	—	—	0.95	Nd^+	—	—
62.72	00	0.040	0.09	0.052	0.17	—	—	0.056	0.60	Fe	4.416	$z^3\,G^o$–$e^3\,G$
63.61	0–1	0.145	0.18	0.103	0.19	—	—	0.074	0.50	Fe	4.173	$y^5\,D^o$–$f^5\,D$
.70										Co–Fe	—	—
65.72	2 d	0.232	0.29	0.248	0.29	—	—	0.091	0.48	Fe	4.588	$y^3\,F^o$–$f^3\,D$
67.40	0–1 d	0.059	0.11	0.064	0.13	—	—	0.057	0.58	Fe	2.597	$b^3\,F$–$y^3\,D^o$
68.27	—	0.018	0.06	—	—	—	—	—	0.98	Cr?	—	—
69.63	2	0.276	0.32	0.463	0.46	—	—	0.174	0.35	Fe	3.402	$z^5\,F^o$–$e^5\,D$
70.61	—	0.054	0.13	—	—	—	—	—	—	Mo?	—	—
72.85	2–3 d	0.374	0.40	0.604	0.63	—	—	0.235	0.33	Fe	3.382	$z^5\,F^o$–$e^5\,D$
73.11									0.63	Fe	4.173	$y^5\,D^o$–$e^3\,D$
76.10	1–2	0.172	0.30	0.191	0.29	—	—	0.127	0.38	Fe	3.415	$z^5\,F^o$–$e^5\,D$
78.73	0	0.170	0.17	0.209	0.27	—	—	0.057	0.61	Ni	1.669	$b^1\,D$–$z^1\,D^o$
81.98	—	—	—	0.090	0.15	—	—	0.089	0.42	Ca	2.512	$3^3\,D$–$dp^3\,D^o$
84.78	1 d	0.213	0.20	0.158	0.22	—	—	0.035	0.76	Fe	—	—
86.77	2–3	0.254	0.40	0.271	0.43	—	—	0.246	0.31	Fe	3.354	$z^5\,F^o$–$e^5\,D$
87.58	0–1	0.188	0.25	0.177	0.26	—	—	0.031	0.74	Fe	—	—
.87								0.055	0.60	Ni	1.927	$a^3\,P$–$y^3\,D^o$
88.77	2	0.259	0.36	0.319	0.52	—	—	0.170	0.32	Ca	2.515	$3^3\,D$–$dp^3\,D$
90.13	0	0.121	0.20	0.123	0.20	—	—	0.086	0.81	Ca	2.510	$3^3\,D$–$dp^3\,D^o$

(*Segue* TABELLA VI)

λ	int.	W_d	h_d	W_e	h_e	W_b	h_b	W_A	h_m	El.	Pot. ecc.	Multipletto
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)
5592.16	1-2	0.170	0.26	0.174	0.25	—	—	(0.037)	0.71	Ni	4.217	$y^3\,D^o–f^3\,F$
.27					0.15	—	—	(0.050)	0.57	Ni	1.942	$a^3\,P–y^3\,F^o$
93.75	0	0.098	0.18	—	—	—	—	0.039	0.70	Ni	3.881	$z^1\,D^o–e^3\,F$
94.47	2	0.254	0.46	0.400	0.55	—	—	0.145	0.32	Ca	2.512	$3^3\,D–dp\,D^o$
.67								0.050	0.56	Fe	—	
98.31	2 d	0.246	0.43	0.380	0.46	—	—	0.070	0.47	Fe	4.632	$y^3\,F^o–f^3\,D$
.49								0.131	0.34	Ca	2.510	$3^3\,D^o–dp^3\,D$
5600.10	00	0.081	0.18	0.087	0.17	—	—	(0.020)	0.81	Ni?	4.072	$z^1\,P^o–e^3\,F$
.24								0.030	0.73	Fe	4.242	$z^3\,P^o–f^5\,D$
01.29	0 d	0.116	0.20	0.174	0.20	—	—	0.111	0.42	Ca	2.515	$3^3\,D–dp^3\,D^o$
02.78								—		Fe	4.136	$y^5\,D^o–f^5\,D$
.87	1–2	0.298	0.40	0.275	0.40	—	—	—	0.37	Ca	2.512	$3^3\,D–dp^3\,D^o$
.97								(0.131)	0.35	Fe	3.415	$z^5\,F^o–e^5\,D$
10.25	0 d	0.106	0.16	—	—	—	—	—	0.96	C-Ce		
14.28				0.059	0.15			—	0.90	—		—
14.78	4	0.494	0.50	0.074	0.17	0.557	0.18	0.041	0.70	Ni	4.136	$y^3\,D^o–f^3\,F$
15.31				0.503	0.64		0.49	(0.065)	0.47	Fe	2.577	$b^3\,P–y^3\,D^o$
.66								(0.359)	0.28	Fe	3.318	$z^5\,F^o–e^5\,D$
17.24	—	—	—	0.060	0.12	—	—	(0.014)	0.85	Fe	—	—
18.64	0	—	—	0.039	0.08	—	—	0.048	0.66	Fe	4.191	$z^3\,P^o–e^3\,D$
20.50	0	—	—	0.040	0.08	—	—	0.032	0.76	Fe	4.136	$y^5\,D^o–e^3\,D$
22.97	0 d	0.067	0.14	0.029	0.05	—	—	—	0.94	C-Ce	—	—
24.03	1 d	0.192	0.14	0.285	0.49	0.241	0.32	0.047	0.61	Fe	—	—
.56								0.132	0.34	Fe	3.402	$z^5\,F^o–e^5\,D$
25.33	0 d	—	—	0.125	0.24	0.150	0.19	0.036	0.68	Ni	4.072	$z^1\,P^o–f^1\,D$
27.05										V	1.076	$a^4\,D–y^5\,D^o$
.38	00	—	—	0.060	0.10	—	—	0.019	0.92	—	—	
.51									0.84	—	—	—

(*Segue* TABELLA VI)

λ (1)	int. (2)	W_d (3)	h_d (4)	W_e (5)	h_e (6)	W_b (7)	h_b (8)	W_Δ (9)	h_m (10)	El. (11)	Pot. ecc. (12)	Multipletto (13)
5628.36	—	—	—	0.073	0.10	—	—	0.012	0.88	Ni	4.072	$z^1\,p^o$–e^5 F
.65								0.013	0.88	Cr	—	—
33.96	0–1	—	—	0.033	0.08	0.181	0.19	0.060	0.54	Fe	—	—
35.83	—	—	—	0.096	0.12	—	—	0.029	0.73	Fe	—	—
36.71	—	—	—	0.173	0.19	0.083	0.15	0.017	0.84	Fe	—	—
37.13	0-1 d	0.129	0.16	0.152	0.21	0.043	0.13	0.029	0.73	Ni	4.072	$z^1\,P^o$-f^3 D
.42						0.121	0.19	0.041	0.67	Fe	—	—
38.27	1	0.119	0.20	0.136	0.21	0.118	0.19	0.078	0.49	Fe	4.202	$y^5\,F^o$–f^5 D
40.99	1d	0.272	0.24	0.428	0.43	0.228	0.27	0.033	0.71	Sc^+	1.494	$a^3\,P$–$z^3\,P^o$
41.45								0.064	0.54	Fe	4.238	$y^5\,F^o$–f^5 D
43.09	—	—	—	0.121	0.15	—	—	0.014	0.87	Ni	4.147	$z^1\,G^o$–f^3 F
44.15	0–1d	0.082	0.17	0.179	0.22	0.094	0.17	0.024	0.74	Ti	2.258	b^1 G–$y^1\,G^o$
45.62	—	—	—	0.084	0.13	—	—	0.030	0.76	Si	4.908	$4s^3\,P^o$–$5p^3$ P
46.69	—	—	—	0.032	0.08	—	—	—	0.95	—	—	—
47.24	—	—	—	0.024	0.08	—	—	0.012	0.91	Co	2.270	$a^2\,P$–$y^2\,D^o$
48.58	—	—	—	0.049	0.12	—	—	0.010	0.92	Ti	2.485	$z^3\,D^o$–e^3 F
49.09	—	—	—	0.014	0.06	—	—	—	0.93	—	—	—
49.40	—	—	—	0.046	0.17	—	—	0.007	0.95	Cr	3.823	$z^5\,F^o$–e^5 D
.68	00							0.027	0.80	Ni Fe	—	—
50.00		—	—	0.131	0.30	—	—	0.034	0.73	Fe	—	—
50.70	00	—	—	0.082	0.18	—	—	0.034	0.72	Fe	—	—
52.33	—	—	—	0.095	0.15	—	—	0.022	0.80	Fe	—	—
53.88	—	—	—	0.077	0.17	0.023	0.07	0.035	0.69	Fe	—	—
54.50	1d	0.152	0.18	0.250	0.28	0.045	0.10	—	0.88	—	—	—
.94						0.198	0.22	—	0.61	Fe	—	—
55.19								0.049	0.52	—	—	—
.50								0.071	0.86	Fe	4.242	$z^3\,P^o$–e^3 D

(*Segue* TABELLA VI)

λ	int.	W_d	h_d	W_e	h_e	W_b	h_b	W_A	h_m	El.	Pot. ecc.	Multipletto
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)
5657.88	3						0.48	0.067	0.53	Sc^+	1.500	a^3 P–z^3 P°
58.35								0.027	0.74	Sc^+	1.491	a^3 P–z^3 P°
.54	1	0.633	0.52	0.963	0.72	0.697		(0.060)	0.54	Fe	3.415	z^5 F°–e^5 D
.67							0.43	—	0.56	Cr? Fe	4.265	y^5 F°–f^5 D
.83								0.120	0.33	Fe	3.382	z^5 F°–e^5 D
										Ti	2.470	z^3 D°–e^3 F
62.94	3	0.312	0.41	0.539	0.61	0.350	0.37	0.048	0.61	Fe	4.160	y^5 F°–f^5 D
										Y^+	1.936	a^1 G–z^1 F°
64.01	0–1	—	—	0.096	0.17	0.039	0.10	0.033	0.73	Ni Cr	—	
67.16	1–2 d	0.216	0.27	0.258	0.26	0.207	0.22	0.027	0.79	Sc^+	1.494	a^3 P–z^3 P°
.53								0.045	0.64	Fe	—	—
69.04	1	0.189	0.32	0.217	0.40	0.182	0.31	0.030	0.73	Sc^+	1.494	a^3 P–z^3 P°
69.75	00	—	—	0.056	0.13	0.034	0.12	0.016	0.87	—	—	—
70.86	0 d	0.077	0.11	0.215	0.13	0.080	0.10	0.016	0.88	V	—	—
71.84					0.17	0.068	0.16	0.013	0.91	Sc	1.442	a^4 F–z^4 G°
75.44	0–1	0.140	0.22	0.140	0.27	0.085	0.16	0.048	0.64	Ti	2.295	z^5 D°–e^5 F
79.03	1	0.095	0.15	0.114	0.13	0.096	0.20	0.053	0.58	Fe	4.632	y^3 F°–f^3 D
80.26	—	—	—	0.048	0.09	—	—	—	0.94	Fe	—	—
82.21	0 d	0.181	0.20	0.110	0.18	0.166	0.17	0.048	0.62	Ni	4.088	y^3 F°–e^1 G
.65								0.093	0.47	Na	2.093	3^2 P°–4^2 D
84.20	2	0.272	0.40	0.365	0.52	0.252	0.32	0.031	0.71	Sc^+	1.500	a^3 P–z^3 P°
.50								0.053	0.58	Si	—	—
86.22	1 d	0.172	0.22	0.239	0.27	0.204	0.17	0.018	0.82	Fe	—	
.54								0.071	0.49	Fe	—	—
88.22	0 d	0.137	0.17	0.206	0.24	0.119	0.17	0.131	0.36	Na	2.095	3^2 P°–4 D
.55								-	0.91	Nd^+	-	—
89.48	00	—	—	0.056	0.11	0.046	0.10	0.009	0.89	Ti	2.287	z^6 D°–e^5 F
90.44	—	—	—	0.023	0.06	—	—	0.047	0.62	Si	4.908	$4s^3$ P°–$5p^3$ P

(*Segue* TABELLA VI)

λ (1)	int. (2)	W_d (3)	h_d (4)	W_e (5)	h_e (6)	W_b (7)	h_b (8)	W_Δ (9)	h_m (10)	El. (11)	Pot. ecc. (12)	Multipletto (13)
5691.51	0	0.078	0.13	0.091	0.17		—	0.037	0.68	Fe	4.283	$y^5\ F^o–f^5\ D$
										Ni	—	—
93.65	0	0.050	0.10	0.071	0.17	0.076	0.11	0.044	0.63	Fe	—	—
94.75	1	0.093	0.13	0.137	0.21	0.120	0.20	0.013	0.84	Cr	3.840	$z^5\ F^o–e^5\ D$
.99				0.045	0.08			0.040	0.64	Ni	4.072	$z^1\ P^o–e^1\ P$
98.34	2d	0.190	0.20	0.147	0.22	0.210	0.25	0.030	0.73	Cr Fe	3.862	$z^5\ F^o–e^5\ D$
.53								0.031	0.75	V	1.059	$a^4\ D–y^4\ F^o$
5700.19	0–1d	0.086	0.13	0.059	0.10	0.072	0.16	—	0.87	Sc	3.592	$a^4\ F–z^4\ G^o$
.30								0.012		Cu Fe	1.383	$a^2\ D–4^2\ P^o$
01.11	1d	0.203	0.28	0.132	0.22	0.151	0.23	0.030	0.71	Si	4.908	$4s^3\ P^o–5p^3\ P$
.56								0.087	0.41	Fe	2.548	$b^3\ F–y^3\ D^o$
02.33	0–00	0.100	0.12	0.041	0.08	0.071	0.14	0.019	0.82	Cr	—	—
03.59	0–1	0.130	0.18	0.081	0.18	0.118	0.18	0.024	0.78	V	1.046	$a^4\ D–y^4\ F^o$
04.75	00	—	—	—	—	0.016	0.06	0.015	0.84	Fe	—	—
05.48	0–00					0.039	0.13	0.032	0.69	Fe	4.283	$y^5\ F^o–f^5\ D$
06.01	1	0.276	0.32	0.230	0.29	0.221	0.32	(0.062)	0.48	Fe	4.588	$y^3\ F^o–f^3\ D$
.12								—	0.97	Co ?	—	—
06.99	0	0.088	0.12	0.077	0.13	0.128	0.23	—	0.73	V	1.039	$a^4\ D–y^4\ F^o$
07.05								(0.027)	—	Fe	—	—
07.92								—	—	Cr^+ ?	—	—
08.10	0	0.135	0.20	0.145	0.22	0.137	0.19	0.030	0.69	Fe	4.416	$z^3\ D^o–39$
.41								0.064	0.51	Si	4.932	$4s^3\ P^o–5p^3\ P$
09.39	1–2	0.297	0.41	0.325	0.63	0.243	0.36	0.104	0.36	Fe	3.354	$z^5\ F^o–e^5\ D$
.56								0.078	0.39	Ni	1.669	$b^1\ D–z^1\ F^o$
11.10	0	—	—	0.112	0.23	0.059	0.16	0.109	0.39	Mg	4.327	$3^1\ P^o–5^1\ S$
.89								0.076	0.43	Fe Ni	4.265	$y^5\ F^o–f^5\ D$
12.14	1	0.269	0.28	0.254	0.42	0.145	0.24	0.053	0.55	Fe	3.402	$z^5\ F^o–e^5\ D$
.41								—	—	La^+	—	—

(*Segue* TABELLA VI)

λ	int.	W_d	h_d	W_e	h_e	W_b	h_b	W_A	h_m	El.	Pot. ecc.	Multipletto
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)
5712.78	00	—	—	—	—	0.033	0.10	0.013	0.84	Cr	2.998	b^5 D–y^5 D°
15.10	1	0.175	0.21	0.188	0.25	—	—	0.065	0.49	Ni	4.071	y^3 F°–f^3 F
								—	—	Fe	4.265	y^5 F°–e^3 D
								–	—	Ti	2.246	a^3 H–y^3 H°
17.84	0–1	0.161	0.22	0.126	0.35	—	—	0.063	0.53	Fe	4.266	z^3 P°–e^3 D
27.06	0–1	0.137	0.22	0.212	0.34	—	—	0.034	0.73	Ti–V	1.076	a^4 D–y^4 F°
27.66	00	—	—	0.106	0.19	—	—	0.008	0.95	V	1.046	a^4 D–y^4 F°
31.32	0–1	0.166	0.19	0.036	0.08	—	—	0.008	0.95	V	1.059	a^4 D–l^0
.78				0.106	0.17	—	—	0.057	0.54	Fe	4.238	y^5 F°–f^5 D
32.31	—	0.079	0.10	—	—	—	—	0.014	0.88	—	—	—
37.08	0 d	0.082	0.18	—	—	—	—	0.008	0.92	V	1.059	a^4 D–y^4 F°
47.67	0							0.029	0.77	—	—	—
.96		0.235	0.23	—	—	—	—	0.028	0.73	Fe	—	b^3 P–x^5 D°
48.36	0							0.025	0.76	Ni	1.669	b^1 D–z^3 D°
49.30	—	0.073	0.10	—	—	—	—	—	0.95	Ni?	3.924	z^3 G–e^3 G
52.04	0–1	0.120	0.16	0.105	0.15	0.054	0.10	0.049	0.57	Fe	4.529	y^3 F°–e^3 G
53.14	1	0.275	0.32	0.189	0.35	0.186	0.23	0.084	0.46	Fe	4.242	z^3 P°–e^4 D
53.65	0–00			0.097	0.29		—	0.037	0.71	Cr	—	—
54.41	1–2	0.206	0.22	0.160	0.25	0.184	0.22	0.021	0.85	Fe	—	—
.67								0.091	0.48	Fe	4.191	z^3 P°–e^3 D
56.83	0	—	—	0.072	0.15	—	—	0.024	0.80	Fe?	—	—
59.28	—	0.035	—	0.062	0.15	—	—	0.007	0.94	Fe?	—	—
.55								0.009	0.92	Fe	4.283	y^5 F°–f^5 D
60.36	0 d	0.067	0.13	0.103	0.10	0.050	0.18	0.018	0.84	Fe	—	—
.84	0 d	0.179	0.13		0.17	0.112	0.19	0.031	0.76	Ni	4.088	y^3 F°–f^3 F
62.43	0–1							0.021	0.79	Fe	—	—
.85	3	0.276	0.33	0.361	0.35	0.342	0.36	—	—	Fe?	4.283	y^5 F°–e^3 D
63.00								0.091	0.46	Fe	4.191	z^3 P°–e^3 D

(*Segue* TABELLA VI)

λ (1)	int. (2)	W_d (3)	h_d (4)	W_e (5)	h_e (6)	W_b (7)	h_b (8)	W_A (9)	h_m (10)	El. (11)	Pot. 'ecc. (12)	Multipletto (13)
5768.91	00 d	—	—	0.208	0.21	-	-	—	—	Ce^+	—	—
69.08									—	La^+	—	b^1 D–z^1 P°
74.04	00	—	—	0.088	0.15	—	—	(0.006)	0.93	Ti	3.291	y^5 G°–f^5 H
75.09	0	—	—	0.108	0.20	—	—	0.059	0.60	Fe	4.202	y^5 F°–f^5 D
80.39								0.024	0.83	Si	—	—
.61	0–1d	0.111	0.15	0.031	0.07	—	—	0.035	0.73	Fe	3.227	z^5 D°–e^7 D
.81								0.022	0.82	Fe	3.252	z^5 D°–e^7 D
										Ti	—	—
81.19								0.014	0.89	Cr	2.998	b^5 D–y^5 D°
.76	—	—	—	0.189	0.19	—	—	0.016	0.88	Cr	—	—
.93								—	—	Sa^+	—	—
82.10	2–3	0.186	0.29	0.193	0.35	—	—	—	0.67	CuCo	—	—
.18										Fe		
83.08	00	0.076	0.16	—	—	—	—	0.029	0.79	Cr	—	—
83.87	0	0.076	0.16	—	—	—	—	0.040	0.74	Cr	—	—
84.67								0.022	0.82	Fe	3.382	z^5 F°–e^5 D
.98	0–1d	0.065	0.09		0.17			0.028	0.78	Cr	—	—
85.29				0.218	—	—	—	0.043	0.71	Fe	4.529	y^3 F°–61
.74	0–1 d	0.206	0.26		0.19			0.030	0.80	Cr	—	—
.98								0.011	0.92	CrTi	—	—
87.02	00	0.040	0.08	—	—	—	—	—	0.96	Cr	3.000	b^5 D–y^5 D°
87.93	1 d	0.142	0.23	0.108	0.24	—	—	0.045	0.68	Cr	—	—
90.96	1 d	0.143	0.23	0.119	0.29	0.164	0.24	—	0.55	Cr	—	—
91.03										Fe	3.197	z^5 D°–e^7 D
93.08	0–00	0.076	0.14	—	—	0.051	0.12	0.035	0.75	Si	4.908	$4s^3$ P°–$5p^3$ D
93.93	00 d	0.076	0.14	—	—	0.114	0.15	0.028	0.77	Fe	4.202	y^5 F°–e^3 D

(*Segue* TABELLA VI)

λ	int.	W_d	h_d	W_e	h_e	W_b	h_b	W_A	h_m	El.	Pot. ecc.	Multipletto
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)
5797.57							0.14	—	0.96	La^+	0.243	a^3 F–y^3 F^o
.87	0 d	0.185	0.15	0.181	0.17	0.151	0.15	0.035	0.73	Si	4.932	$4s^3$ P^o–$5p^3$ D
98.19								0.036	0.71	Fe	—	—
5804.04								0.019	0.83	Fe	3.865	z^3 F^o–e^3 F
.27	2 d	0.248	0.29	0.208	0.29	0.143	0.15	0.012	0.89	Ti	3.322	y^5 G^o f^5 H
.47								0.018	0.86	Fe	4.265	y^5 F^o–f^5 D
05.23	0	0.077	0.15	0.091	0.19			0.035	0.72	Ni	4.149	y^3 F^o–e^1 F
05.77	0	0.064	0.15	0.060	0.15	0.189	0.15	0.008	0.91	La^+	0.125	a^3 F–y^3 F^o
06.74	1 d	0.100	0.18	0.111	0.17			0.048	0.65	Fe	4.588	y^3 F^o–e^3 G
07.80	00	—	—	0.060	0.08	–	--	—	0.93	Fe	3.278	z^5 D^o–e^7 D
09.23	0 d	—	—	0.126	0.15	—	—	0.043	0.62	Fe	3.867	z^3 D^o–e^3 F
14.82	—	—	—	—	—	0.087	0.13	0.019	0.82	Fe	4.265	y^5 F^o–e^3 D
15.23								0.009	0.93	Fe?	—	—
16.38	1–2 d	0.087	0.15	0.097	0.17	0.129	0.20	0.066	0.50	Fe	—	—
17.09	—	—	—	—	—	0.026	0.10	0.013	0.91	— V	—	—
31.61	00	—	—	0.056	0.09	—	—	0.019	0.83	Ni	—	—
34.04	—	—	—	0.111	0.18	—	—	0.013	0.89	Fe	2.597	b^3 D–y^3 F^o
45.97	—	0.066	0.11	—	—	—	—	—	0.97	Ce^+	—	—
47.01	0–1	0.067	0.14	—	—	—	—	0.017	0.84	Ni	1.669	b^1 F–y^3 D^o
48.13	00	0.068	0.11	—	—	—	—	0.032	0.74	Fe	3.252	z^5 D^o–e^7 D
52.23	0–1	0.156	0.14	—	—	—	—	0.035	0.69	Fe	4.529	y^3 F^o–40
53.17	4	0.395	0.58	0.578	0.78	0.310	0.40	—	0.94	Fe	1.478	a^3 F–z^5 P^o
.69								0.060	0.49	Ba^+	0.602	5^3 D–6^3 P^o
55.09	0–00	0.068	0.09	—	—	-	--	0.019	0.82	Fe	–	—
57.46	2 d	0.248	0.32	0.261	0.35	0.216	0.27	0.137	0.29	Ca	2.920	4^1 P^o–p^3 ^{1}D
.76								0.046	0.59	Ni	4.149	y^3 F^o–e^3 G
59.60	1 d	0.129	0.22	0.092	0.15	0.134	0.15	0.071	0.46	Fe	4.529	y^3 F^o–55
62.37	1 2 d	0.126	0.20	0.102	0.24	0.153	0.21	0.088	0.41	Fe	4.529	y^3 F^o–e^3 G

(*Segue* TABELLA VI)

λ (1)	int. (2)	W_d (3)	h_d (4)	W_e (5)	h_e (6)	W_b (7)	h_b (8)	W_A (9)	h_m (10)	El. (11)	Pot. ecc. (12)	Multipletto (13)
5866.46	1–2	0.080	0.14	—	—	0.049	0.08	0.041	0.62	Ti	1.062	a^3P–y^3D
75.62	50	—	∞	—	∞	—	∞	—	—	He	20.87	2^3P^o–3^3D
83.82	00	0.053	0.08	0.040	0.12	0.065	0.08	(0.055)	0.14	Fe	3.943	z^3D^o–e^3F
85.07 .38	0	0.097	0.11	0.126	0.17	0.140	0.37	—	0.93	—	—	—
89.98	25	4.630	5.42	6.372	8.80	4.204	5.05	0.753	0.12	Na	0.000	3^2S–3^3P^o
92.86	0–1	0.160	0.21	0.086	0.24	0.128	0.21	0.074	0.51	Ni	1.977	a^3P–z^1P^o
94.36	—	0.073	0.12	—	—	—	—	—	—	—	—	—
95.94	20	3.960	5.42	5.464	7.36	3.898	5.05	0.544	0.13	Na	0.000	3^2S–3^2P^o
99.31	0 d	0.077	0.11	—	—	—	—	0.029	0.75	Ti	1.048	a^3P–y^3D^o
.54	—							—	0.90	—	—	—
5902.48	—	0.046	0.08	—	—	—	—	0.014	0.89	Fe	—	—
03.34	—	0.029	0.08	—	—	—	—	—	0.91	Ti	1.062	a^3P–z^3P^o
05.68	1	0.106	0.19	0.130	0.18	0.243	0.21	0.054	0.55	Fe	—	—
09.98	1 d	0.086	0.12	0.102	0.22	0.098	0.16	0.026	0.76	Fe	3.197	z^5D^o–e^7D
14.12	2	0.273	0.34	0.168	0.30	0.269	0.30	(0.091)	0.37	Fe	4.588	y^3F^o–e^3G
15.55	—	0.159	0.19	0.026	0.10	0.184	0.17	—	0.91	Co	—	—
16.26	1 d			0.148	0.17			0.050	0.57	Fe	2.443	a^3H–y^3F^o
23.02	0–1d	0.034	0.12	—	—	—	—	—	—	—	—	—
27.80	1 dd	0.042	0.09	0.065	0.14	—	—	0.040	0.68	Fe	4.632	—
29.69	2 3d	0.093	0.16	0.239	0.30	0.300	0.35	0.037	0.69	Fe	—	—
30.19		0.145	0.31					0.080	0.43	Fe	4.632	y^3F^o–e^3G
34.67	1 d	0.159	0.19	0.169	0.20	0.103	0.14	0.066	0.48	Fe	3.912	z^3D^o–e^3F
43.60	—	—	—	0.045	0.14	—	—	—	0.91	Fe	2.188	a^5P–y^5F^o
48.55	0–1	—	—	0.071	0.17	—	—	0.078	0.51	Si	5.060	$4s^1P^o$–$5P^1S$?
52.73	1 dd	0.072	0.10	0.101	0.26	0.223	0.25	0.056	0.53	Fe	3.967	z^3F^o–e^3F
53.17		0.156	0.24	0.050	0.17			0.026	0.72	Ti	1.879	a^3G–z^3H^o
52.71	1d	0.198	0.19	0.111	0.19	0.155	0.17	0.052	0.52	Fe	0.855	a^5F–z^7P^o

(*Segue* TABELLA VI)

λ	int.	W_d	h_d	W_e	h_e	W_b	h_b	W_A	h_m	El.	Pot. ecc.	Multipletto
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)
5965.84	1 d	0.152	0.20	0.090	0.15	0.114	0.14	0.023	0.75	Ti	1.871	a^3 G–z^3 H°
75.36	0 d	0.121	0.19	0.065	0.11	0.279	0.16	0.043	0.63	Fe	4.529	—
76.79	0–1	0.109	0.18	0.048	0.08		0.16	0.066	0.52	Fe	3.926	z^3 F°–e^3 F
78.55	1 d	0.139	0.16	0.117	0.16	0.236	0.20	0.018	0.81	Ti	1.865	a^3 G–z^3 H°
83.69	1 d	0.137	0.20	0.124	0.21	0.431	0.21	0.066	0.50	Fe	4.632	y^3 F°–37
84.83	2	0.240	0.28	0.114	0.28		0.27	0.091	0.46	Fe	4.713	y^3 D°–e^3 P
86.13	1 d	0.240	0.20	0.134	0.16	0.250	0.19	—	0.97	Fe	4.775	y^3 D°–f^3 D
87.08								0.064	0.51	Fe	4.775	y^3 D°–e^3 P
88.36	—	0.030	0.06	—	—	—	—	—	—	—	—	—
.57	—	0.028	0.07	—	—	—	—	(0.010)	0.91	Ti	1.879	a^3 G–z^3 H°
91.38	5	0.326	0.41	0.247	0.53	0.330	0.43	0.027	0.77	—	—	—
96.74	0–00	0.100	0.11	0.124	0.12	—	—	0.017	0.86	Ni	4.217	y^3 D°–e^3 F
.98								—	—	Ce^+	—	—
97.61	0–1	0.143	0.16	0.145	0.19	0.132	0.16	—	0.87	Ni	4.217	y^3 D°–e^1 F
.79								0.041	0.67	Fe	4.588	y^3 F°–63
6003.03	0–1	0.171	0.20	0.088	0.19	—	—	0.085	0.45	Fe	3.865	z^3 F° e^3 F
05.56	—	—	—	0.070	0.15	—	—	0.017	0.81	Fe	2.577	b^3 F–y^3 F°
07.32	0–1	—	—	0.075	0.15	—	—	0.021	0.79	Ni	1.669	b^1 D–z^5 F°
07.97	0–1	0.245	0.19	0.150	0.15	—	—	0.059	0.55	Fe	4.632	y^3 F°–50
08.57	0–1				0.22			0.089	0.45	Fe	3.867	z^3 D°–e^3 F
12.24	00	—	—	0.033	0.08	—	—	0.017	0.84	Ni	—	—
13.50	1	0.050	0.09	0.100	0.16	—	—	0.082	0.50	Mn	3.059	z^6 P°–e^6 S
16.65	1–2 d	0.160	0.24	0.198	0.24	—	—	0.093	0.46	Mn	3.060	z^6 P°–e^6 S
20.02	4	0.272	0.40	0.307	0.43	—	—	—	0.60	Fe ?	—	—
.19								(0.076)	0.42	Fe	4.588	y^3 F°–40
21.81	1 d	0.147	0.22	0.262	0.30	—	—	0.099	0.43	Mn	3.062	z^6 P°–e^6 S
24.07	1–2	0.168	0.26	0.226	0.32	—	—	0.106	0.40	Fe	4.529	y^3 F°–39
27.06	0 d	0.106	0.21	0.182	0.24	—	—	0.065	0.54	Fe	—	—

(*Segue* Tabella VI)

λ	int.	W_d	h_d	W_e	h_e	W_b	h_h	W_A	h_m	El.	Pot. ecc.	Multipletto
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)
6042.11	0–1	—	—	0.097	0.15	—	—	0.049	0.61	Fe	4.814	$y^3\,D^o$–$e^3\,P$
52.62	—	—	—	0.072	0.13	—	—	—	0.94	Ce^+	—	—
53.70	—	—	—	0.087	0.17	—	—	0.015	0.85	Ni	4.217	$y^3\,D^o$–$e^3\,G$
56.02	2	0.194	0.19	0.175	0.26	—	—	0.076	0.50	Fe	4.713	$y^3\,D^o$–$f^3\,D$
65.50	3	0.266	0.31	0.203	0.36	—	—	0.124	0.35	Fe	2.597	$b^3\,F$–$y^3\,F^o$
78.50	2 d	0.214	0.20	0.320	0.33	—	—	0.073	0.43	Fe	4.775	$y^3\,D^o$–$f^3\,D$
79.02					0.24			0.049	0.59	Fe	4.632	$y^3\,F^o$–61
81.46	0–1	0.069	0.11	0.072	0.13	—	—	0.012	0.89	V	1.046	—
82.72	0 d	0.149	0.20	0.096	0.17	—	—	0.033	0.69	Fe	2.213	$a^5\,P$–$z^3\,P^o$
84.12	1–2 d	0.187	0.21	0.139	0.23	—	—	0.020	0.83	—	—	—
85.26	00	0.093	0.13	0.156	0.22	—	—	0.037	0.69	Ti	1.048	$a^3\,P$–$z^3\,S^o$
										Fe	2.747	$a^3\,G$–$y^3\,D^o$
86.29	0 d	0.122	0.16	0.137	0.18	—	—	0.037	0.69	Ni	4.248	$y^3\,D^o$–$e^3\,F$
89.58	0	0.249	0.20	0.048	0.12	—	—	0.033	0.73	Fe	—	—
90.22	0			0.084	0.13	—	—	0.034	0.74	V	1.076	$a^4\,D$–$z^4\,P^o$
91.18	—	0.043	0.13	—	—	—	—	0.013	0.88	Ti	2.258	$b^1\,G$–$z^1\,H^o$
91.93	—	0.037	0.12	—	—	—	—	0.025	0.82	—	—	—
93.66	—	0.084	0.15	—	—	—	—	0.029	0.75	Fe	4.588	$y^3\,F^o$–62
94.38	—	0.060	0.11	—	—	—	—	0.015	0.83	Fe	—	—
96.68	00	0.078	0.13	—	—	—	—	0.039	0.72	Fe	3.967	$z^3\,F^o$–$e^3\,F$
6102.19	1–2 d	0.342	0.26	0.348	0.32	—	—	0.096	0.48	Fe	4.814	$y^3\,D^o$–$f^3\,D$
.73	00							0.141	0.33	Ca	1.871	$4^3\,P^o$–$5^3\,S$
03.20	1–2 d							(0.057)	0.57	Fe	4.814	$y^3\,D^o$–$e^3\,P$
.31								—	—	–	—	—
08.13	1	0.157	0.23	0.112	0.21	—	—	0.069	0.53	Ni	1.669	$b^1\,D$–$z^3\,D^o$
11.08	—	0.088	0.15	—	—	—	—	0.032	0.73	Ni	4.071	$y^3\,F^o$–$e^3\,F$
11.67	0	0.095	0.16	—	—	—	—	(0.008)	0.91	V	1.039	$a^4\,D$–$z^4\,P^o$
13.33	0 d	0.079	0.13	—	—	—	—	—	—	—	—	—

(*Segue* TABELLA VI)

λ	int.	W_d	h_d	W_e	h_e	W_b	h_b	W_A	h_m	El.	Pot. ecc.	Multipletto
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)
6114.81	—	0.039	0.09	—	—	—	—	—	—	Zr+	—	—
16.19	1	0.150	0.20	0.100	0.18	—	—	(0.050)	0.63	Ni	4.072	z^1 P°–f^3 D
.25								—		Fe	—	—
19.54	0–1	0.136	0.20	0.094	0.16	—	—	0.024	0.81	V	1.059	a^4 D–z^4 P°
.77								—	0.90	Ni	4.248	y^3 D°–e^5 F
20.26	—	—	—	0.018	0.07	--	—	--	0.95	Fe	—	—
21.01	—	0.112	0.16	0.040	0.10	--	--	—	0.96	Ti	1.871	a^3 G–w^3 G°
22.23	4	0.345	0.45	0.483	0.60	—	—	0.220	0.27	Ca	1.878	4^3 P°–5^3 S
24.83	—	—	—	0.067	0.15	—	—	—	—	Zr	0.518	a^3 P–z^3 P°
25.03	—	—	—	0.076	0.14	—	--	0.027	0.79	Ce+	—	—
26.23	00	0.096	0.12	0.172	0.20	—	--	0.021	0.82	Ti	1.062	a^3 P–z^3 S°
27.92	00	0.103	0.11	0.088	0.12	—	—	0.049	0.61	Fe	2.269	a^3 P–y^5 F°
28.99	—	0.123	0.14	0.074	0.14	—	—	0.025	0.81	Ni	1.669	b^1 D–z^5 F°
29.54	—	0.073	0.12	0.055	0.12	—	—	—	0.97	La+?	0.769	a^3 P–z^3 D°
30.15	—	—	—	0.035	0.10	—	—	0.021	0.81	Ni	4.248	y^3 D°–f^3 D
31.87	—	—	—	0.115	0.22	—	—	0.022	0.83	—	—	—
34.61	--	—	—	0.043	0.11	–	—	–	0.98	Zr?	—	
35.38	—	—	—	0.093	0.15	—	—	—	0.91	V	1.046	a^4 D–z^4 P°
35.78	—		—	0.084	0.21	—	—	—	0.89	Cr	—	—
36.63	2	0.388	0.43	0.605	0.71	—	--	0.144	0.31	Fe	2.443	a^3 H–z^3 G°
37.01								0.069	0.48	Fe	2.188	a^5 P–y^5 D°
37.71	1	0.277	0.32	0.337	0.52	—	—	0.142	0.34	Fe	2.577	b^3 F–y^3 F°
38.44	—	0.031	0.07	0.120	0.18	—	—	—	0.87	Y	0.065	a^2 D–z^4 D°
										Ti	2.144	a^3 D–w^3 F°
40.47	—	—	—	0.067	0.08	—	—	—	—	Zr	0.518	a^3 P–z^3 P°
41.73	12	1.368	1.41	1.792	1.92	—	--	0.129	0.30	Ba+	0.701	5^2 D–6^2 P°
										Fe	3.587	z^5 P°–e^5 D
42.50								0.035	0.78	—	—	—

(*Segue* TABELLA VI)

λ (1)	int. (2)	W_d (3)	h_d (4)	W_e (5)	h_e (6)	W_b (7)	h_b (8)	W_A (9)	h_m (10)	El. (11)	Pot. ecc. (12)	Multipletto (13)
6143.19	—	—	—	0.056	0.15	—	—	—	0.98	Zr	0.070	a^3 F–z^3 F°
43.78	—	—	—	0.048	0.15	—	—	—	—	Co?	—	—
45.03	0	0.067	0.15	—	—	—	—	—	0.75	—	—	—
47.75	1–2	0.223	0.27	0.268	0.49	—	—	—	0.70	Fe^+	3.872	b^4 D–z^4 P°
.84								(0.044)	0.64	Fe	—	—
49.26	1–2	0.175	0.24	0.238	0.31	—	—	0.039	0.72	Fe^+	3.873	b^4 D–z^4 P°
50.16	—	0.074	0.16	0.050	0.12	—	—	—	0.92	V	0.299	a^6 D–z^6 F°
51.63	0	0.093	0.16	0.156	0.16	—	—	0.049	0.68	Fe	2.167	a^5 P–y^5 D°
54.24				0.055	0.12	—	—	0.035	0.83	Na	2.093	3^2 P°–5^2 S
55.15	0–00	0.117	0.07	0.055	0.12	—	—	0.064	0.63	Si	5.594	X 10 ?
56.04				—	—	—	—	(0.006)	0.95	Ti	—	—
										Ca?	2.510	3^3 D–5^3 P°
57.74	0 d	0.090	0.14	0.186	0.23	—	—	0.062	0.62	Fe	—	—
60.76	—	—	—	0.044	0.10	—	—	0.049	0.72	Na	2.095	3^2 P°–5^2 S
61.30								0.056	0.64	Ca	2.512	3^3 D–5^3 P°
62.18				0.552	0.75			0.269	0.34	Ca	1.891	4^3 P°–5^3 S
63.43	8	0.807	0.50			—	—	(0.047)	0.76	Ni	4.088	y^3 F°–e^3 F
.56								—	0.79	Fe	2.188	a^5 P–z^3 P°
.76				0.202	0.26	—	—	0.054	0.64	Ca	2.510	3^3 D–5^3 P°
65.37	00	0.053	0.07	—	—	—	—	0.041	0.73	Fe	—	—
66.45	00	0.068	0.09	—	—	—	—	0.073	0.61	Ca	2.510	3 D–5^3 P°
69.05	0dd	0.220	0.21	0.264	0.25	—	—	0.080	0.51	Ca	2.512	3^3 D–5^3 P°
.57		0.298	0.19					0.114	0.46	Ca	2.515	3^3 D–5^3 P°
70.52	2	0.174	0.24	0.202	0.25	—	—	0.068	0.58	Fe	4.775	y^3 D°–e^3 P
										Ni	4.071	y^3 F°–e^3 G
73.35	1 d	0.128	0.17	0.119	0.16	—	—	0.073	0.60	Fe	2.213	a^5 P–y^5 D°
75.38	0–1 d	0.055	0.08	0.088	0.14	—	—	0.047	0.71	Ni	4.072	z^1 P°–e^3 P
76.82	0 d	0.119	0.13	0.133	0.17	—	—	0.059	0.65	Ni	4.071	y^3 F°–e^3 G

(*Segue* TABELLA VI)

λ	int.	W_d	h_d	W_e	h_e	W_b	h_b	W_A	h_m	El.	Pot. ecc.	Multipletto
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)
6180.07	0 d	0.107	0.12	0.179	0.17	—	—	—	0.98	Ce+	—	—
.22								0.052	0.68	Fe	2.716	a^3 G–y^3 D°
85.71	—	—	—	0.054	0.12	—	—	0.015	0.91	Fe	—	—
86.72	—	—	—	0.059	0.12	—	—	0.027	0.85	Ni	4.088	y^3 F°–f^3 D
88.00	—	—	—	0.090	0.14	—	—	0.044	0.74	Fe	3.926	z^3 F°–e^3 F
91.19								0.069	0.57	Ni	1.669	b^1 D–z^3 D°
.58	9	0.354	0.42	0.494	0.50	—	—	0.139	0.42	Fe	2.422	a^3 H–z^3 G°
.75								—	—	Y	0.000	a^2 D–z^2 D°
6200.33	0 -1	0.195	0.17	0.102	0.14	—	—	0.069	0.58	Fe	2.597	b^3 F–y^3 F°
04.62	—	—	—	0.040	0.09	—	—	0.018	0.89	Ni	4.071	y^3 F°–e^5 F
13.44	1–2	0.187	0.23	0.230	0.31	—	—	0.079	0.57	Fe	2.213	a^5 P–y^5 D°
15.16	0–1	0.235	0.22	0.157	0.16	—	—	0.056	0.71	Fe	—	—
										Ti	2.684	z^3 G°–e^3 F
16.37	0–1	0.091	0.16	0.097	0.22	—	—	0.034	0.84	V	0.274	a^6 D–z^6 D°
19.29	2 d	0.252	0.26	0.201	0.25	—	—	0.095	0.45	Fe	2.188	a^5 P–y^5 D°
20.80	—	0.094	0.09	0.066	0.11	—	—	—	0.86	Fe	3.865	z^3 F°–e^5 F
21.35						—	—	—	0.91	Ti	2.650	z^3 G°–e^3 F
24.00	0–00	—	—	0.066	0.12	—	—	0.025	0.81	Ni	4.088	y^3 F°–e^3 G
26.74	—	—	—	0.072	0.12	—	—	0.027	0.81	Fe	3.867	z^3 D°–e^5 F
29.24	0	0.078	0.11	0.050	0.12	—	—	0.028	0.76	Fe	2.833	b^3 P–y^3 D°
30.11	4	0.353	0.43	0.034	0.07	—	—	0.018	0.86	Ni	4.088	y^3 F°–e^3 P
.74										Fe	2.548	b^3 F–y^3 F°
				0.330	0.42	—	—	0.159	0.36	V	0.266	a^6 D -z^5 D°
										Fe	3.638	z^5 P°–e^5 D
32.66	1	0.151	0.18	0.121	0.19	—	—	0.081	0.52	Fe	3.382	z^5 F°–e^7 D
37.33	0–1	0.092	0.12	0.033	0.10	—	—	0.054	0.71	—	—	—
38.40	3	0.229	0.29	0.252	0.36	—	—	0.047	0.74	Fe+	3.872	b^4 D–z^4 P°
39.38	0	—	—	0.054	0.12	—	—	—	0.96	Sc	0.000	a^2 D –z^2 D°

(*Segue* TABELLA VI)

λ (1)	int. (2)	W_d (3)	h_d (4)	W_e (5)	h_e (6)	W_b (7)	h_b (8)	W_A (9)	h_m (10)	El. (11)	Pot. ecc. (12)	Multipletto (13)
6239.96			0.18					(0.012)	0.92	Fe^+	3.873	b^4 D–z^4 P°
40.17	0	0.216		0.133	0.15	—	—	—	0.89	V	0.266	a^6 D –z^6 F°
.66	0		0.18					0.051	0.68	Fe	2.213	a^5 P–z^3 P°
43.12	0 d	0.118	0.13	0.084	0.16	—	—	0.030	0.83	V	0.299	a^6 D–z^6 D°
43.83	–	0.072	0.18	0.084	0.12	—	—	0.044	0.76	Fe	—	—
44.48	—	0.055	0.15	0.039	0.13	—	—	0.041	0.77	Si	5.591	3 d^3 D°–8
45.63	0–1	0.333	0.26	0.208	0.27	—	—	0.032	0.79	Sc^+	1.500	a^3 P–z^3 D°
46.33	0–1			0.147	0.24	—	—	0.131	0.44	Fe	3.587	z^5 P°–e^5 D
47.57	6	0.291	0.45	0.412	0.53	—	—	0.058	0.69	Fe^+	3.875	b^4 D–z^4 P°
51.84	—	—	—	0.047	0.09	—	—	0.016	0.92	V	0.285	a^6 D–z^6 D°
52.57	2	0.292	0.35	0.288	0.35	—	—	0.121	0.40	Fe	2.394	a^3 H–z^3 G°
54.18	1	0.209	0.29	0.270	0.31	—	—	—	0.45	—	—	—
.25								(0.112)		Fe	2.269	a^3 P–z^3 P°
56.37	1 d	0.234	0.25	0.239	0.28	—	—	0.098	0.48	Fe	2.443	a^3 H–z^3 G°
										Ni	1.669	b^1 D–z^3 P°
58.12	0	0.306	0.23	0.027	0.10	—	—	0.048	0.67	Ti	1.437	b^3 F–y^3 G°
.72	0			0.110	0.23	—	—	0.059	0.63	Ti	1.454	b^3 F–y^3 G°
59.60	—	—	—	0.036	0.08	—	—	0.014	0.89	Ni	4.072	z^1 P°–e^3 S
61.11	0 d	0.110	0.20	0.142	0.15	—	—	0.045	0.70	Ti	1.424	b^3 F–y^3 G°
65.15	2	0.182	0.22	0.169	0.21	—	—	0.077	0.50	Fe	2.167	a^5 P–y^5 D°
66.02	—	—	—	0.026	0.06	—	—	—	0.98	Ti	1.741	a^5 P–x^5 D°
70.24	0–1 d	0.161	0.16	0.129	0.15	—	—	0.051	0.64	Fe	2.846	b^3 P–y^5 D°
79.74	—	0.086	0.14	0.102	0.18	—	—	—	0.81	Sc^+	1.494	a^3 P–z^3 D°
80.63	—	0.081	0.21	0.088	0.15	—	—	0.059	0.58	Fe	0.855	a^5 F–z^7 F°
82.60	—	0.035	0.08	—	—	—	—	—	—	Co	1.733	a^4 P–z^4 D°
85.18	—	0.040	0.06	0.044	0.11	—	—	—	0.93	V	0.274	a^6 D–z^6 D°
86.16	—	0.028	0.08	0.041	0.11	—	—	—	0.87	—	—	—
86.81	—	—	—	0.038	0.11	—	—	—	—	—	—	—

(*Segue* TABELLA VI)

λ (1)	int. (2)	W_d (3)	h_d (4)	W_e (5)	h_e (6)	W_b (7)	h_b (8)	W_A (9)	h_m (10)	El. (11)	Pot. ecc. (12)	Multipletto (13)
6290.98	0–1	0.173	0.25	0.158	0.15	—	—	0.060	0.65	Fe	4.713	$y^3\,D^o$–$e^3\,G$
											4.353	$z^5\,G^o$–17
96.16	00	0.089	0.11	0.226	0.16	—	—	—	—	Ce+	—	—
.67										Ti	0.000	$a^3\,F$–$z^5\,G^o$
97.81	1–2	0.206	0.22	0.248	0.36	—	—	0.075	0.55	Fe	2.213	$a^5\,P$–$y^5\,D^o$
99.60	00	—	—	0.069	0.12	—	—	—	0.83	—	—	—
6300.33	00	—	—	0.087	0.12	—	—	—	0.96	—	—	—
.70								—	0.95	Sc+ ?	1.500	$a^3\,P$–$z^3\,D^o$
01.52	2	0.150	0.30	0.190	0.27	—	—	0.114	0.45	Fe	3.638	$z^5\,P^o$–$e^5\,D$
02.51	0–1	0.100	0.19	0.088	0.16	—	—	0.079	0.54	Fe	3.671	$z^5\,P^o$–$e^5\,D$
11.51	00	—	—	0.124	0.17	—	—	0.025	0.82	Fe	2.819	$b^3\,P$–$y^3\,D^o$
14.68	0–1	0.140	0.27	0.180	0.23	—	—	0.076	0.55	Ni	1.927	$a^3\,P$–$z^1\,D^o$
											4.136	$y^3\,D^o$–$e^3\,F$
15.32	0	0.078	0.19	0.057	0.14	—	—	0.057	0.61	Fe	—	—
18.04	2–3d	0.290	0.38	0.282	0.36	—	—	0.104	0.41	Fe	2.443	$a^3\,H$–$z^5\,G^o$
.71								0.034	0.76	—	—	—
19.25	—	—	—	0.046	0.14	—	—	—	0.82	—	—	—
20.86	—	—	—	0.035	0.08	—	—	—	0.95	Sc+	1.494	$a^3\,P$–$z^3\,D^o$
22.17	0	0.164	0.21	0.170	0.17	—	—	0.014	0.87	Ni	4.136	$y^3\,D^o$–$e^3\,F$
.70				0.126	0.18			0.076	0.50	Fe	2.577	$b^3\,F$–$y^3\,F^o$
27.61	0–00	0.110	0.17	0.073	—	—	—	0.035	0.72	Ni	1.669	$b^1\,D$–$z^3\,F^o$
30.10	—	—	—	0.063	0.12	—	—	0.026	0.79	Cr	0.937	$a^5\,S$–$z^7\,P^o$
30.86	—	0.072	0.17	0.066	0.12	—	—	0.031	0.76	Fe	4.713	$y^3\,D^o$–61
31.97	—	0.063	0.13	—	—	—	—	0.012	0.91	Ce+	—	—
										Si	—	
35.34	1 2	0.213	0.36	0.285	0.31	—	—	0.106	0.40	Fe	2.188	$a^5\,P$–$y^5\,D^o$
36.84	1	0.255	0.34	0.172	0.22	—	—	0.100	0.41	Fe	3.671	$z^5\,P^o$–$e^5\,D$

(*Segue* Tabella VI)

λ (1)	int. (2)	W_d (3)	h_d (4)	W_e (5)	h_e (6)	W_b (7)	h_b (8)	W_A (9)	h_m (10)	El. (11)	Pot. ecc. (12)	Multipletto (13)
6338.89	1 d	0.130	0.23	0.171	0.27	—	—	0.038	0.67	Fe	—	—
39.12								0.036	0.68	Ni	4.136	$y^3\,D^o$–$f^3\,D$
44.16	0	0.235	0.22	0.123	0.15	—	—	0.061	0.56	Fe	2.422	$a^3\,H$ –$z^3\,G^o$
47.10	6	0.290	0.45	0.348	0.42	—	—	0.043	0.74	Si^+	8.085	$4^2\,S$–$4^2\,P^o$
55.04	1	0.135	0.17	0.140	0.27	—	—	0.067	0.54	Fe	2.833	$b^3\,P$–$y^3\,D^o$
58.70	1	0.190	0.24	0.118	0.21	—	—	0.083	0.51	Fe	0.855	$a^5\,F$–$z^7\,F^o$
66.36	00	0.110	0.15	—	—	—	—	—	0.81	Ti	1.454	$b^3\,F$–$x^3\,D^o$
.50								0.022		Ni	4.149	$y^3\,F^o$–$e^3\,F$
69.48	1–2	0.219	0.25	0.176	0.23	—	—	0.017	0.87	Fe^+	2.879	$a^6\,S$–$z^6\,D^o$
71.36	1–2 d	0.170	0.19	0.232	0.27	—	—	0.028	0.81	Fe	—	—
										Si^+	8.085	$4^2\,S$–$4^2\,P^o$
78.26	—	—	—	0.042	0.08	—	—	0.031	0.79	Ni	4.136	$y^3\,D^o$–$e^3\,G$
80.76	—	0.165	0.15	0.114	0.14	—	—	0.059	0.70	Fe	—	—
83.73	—	0.071	0.10	0.090	0.14	—	—	—	0.94	Fe^+	—	—
84.68	—	0.102	0.07	—	—	—	—	0.022	0.85	Mn	3.756	$b^4\,D$–$z^4\,D^o$
										Ni	4.136	$y^3\,D^o$–$e^3\,P$
85.74								—	0.93	—	—	—
92.54	—	0.051	0.11	—	—	—	—	0.012	0.89	Fe	2.269	$a^3\,P$–$y^5\,D^o$
93.62	4	0.265	0.40	0.250	0.40	—	—	0.132	0.46	Fe	2.422	$a^3\,H$–$z^5\,G^o$
6400.02	5	0.324	0.38	0.375	0.50	—	—	0.170	0.41	Fe	3.587	$z^5\,P^o$–$e^5\,D$
.33								0.058	0. 59	Fe	0.911	$a^5\,F$–$z^7\,F^o$
07.31	—	0.034	0.07	0.025	0.06	—	—	0.024	0.86	Fe^+	3.872	$b^4\,D$–$z^4\,P^o$
08.03	0	0.169	0.21	0.187	0.24	—	—	0.114	0.52	Fe	3.671	$z^5\,P^o$–$e^5\,D$
11.66	1–2	0.210	0.34	0.200	0.32	—	—	0.137	0.46	Fe	3.638	$z^5\,P^o$–$e^5\,D$
14.61	—	—	—	0.201	0.32	—	—	0.009	0.88	Ni	4.136	$y^3\,D^o$–$e^5\,F$
15.00	–	—	—	0.022	0.09	—	—	0.048	0.78	Fe	—	—
16.94	3	0.197	0.31	0.133	0.18	—	—	0.046	0.74	Fe^+	3.875	$b^4\,D$–$z^4\,P^o$
19.96	1	0.128	0.23	0.167	0.28	—	—	0.096	0.56	Fe	4.713	$y^3\,D^o$–55

(*Segue* TABELLA VI)

λ (1)	int. (2)	W_d (3)	h_d (4)	W_e (5)	h_e (6)	W_b (7)	h_b (8)	W_A (9)	h_m (10)	El. (11)	Pot. ecc. (12)	Multipletto (13)
6421.37	4	0.353	0.41	0.261	0.36	—	—	0.114	0.48	Fe	2.269	a^3 P–z^3 P°
30.86	3	0.231	0.38	0.280	0.37	—	—	0.113	0.42	Fe	2.167	a^5 P–y^5 D°
32.69	6	0.332	0.57	0.380	0.53	—	—	0.038	0.75	Fe+	2.879	a^6 S–z^6 D°
39.09	2	0.308	0.44	0.265	0.36	—	—	0.182	0.33	Ca	2.515	3^3 D–dp^3 F°
49.15	–	–	—	0.060	0.15			0.019	0.91	—	—	
49.83								0.116	0.43	Ca	2.510	3^3 D–dp^1 D°
50.19	0 d	0.178	0.34	0.110	0.20	—	—					
.35								0.033	0.86	Co	1.703	a^4 P–z^4 D°
55.02	—	—	—	0.053	0.09	—	—	0.013	0.94	Co	3.616	z^4 D°–e^4 F
55.61								0.055	0.67	Ca	2.512	3^3 D–dp^1 D°
56.40	9	0.665	0.78	0.436	0.68	—	—	0.065	0.62	Fe+	3.887	b^4 D–z^4 P°
.87								0.016	0.91	Fe	4.775	y^3 D°–50
62.58								(0.163)	0.32	Ca	2.512	3^3 D–dp^3 F°
.76	2	0.372	0.59	0.352	0.52	—	—	—	0.44	Fe	0.911	a^5 F–z^7 F°
											2.243	a^3 H–z^5 G°
69.20	0–1 d	0.094	0.15	—	—	—	—	0.054	0.67	Fe	2.394	a^3 H–z^5 G°
71.68	—	0.148	0.21	—	—	—	—	0.096	0.47	Ca	2.515	3^3 D–dp^3 F°
91.59	0–1	0.209	0.28	0.400	0.45	–	—	0.032	0.74	Ti+	2.052	b^2 P–z^2 D°
93.80	0–1	0.155	0.28	0.322	0.50			0.134	0.34	Ca	2.510	3^3 D–dp^3 F°
95.00								0.181	0.33	Fe	2.394	a^3 H–z^5 G°
.75	1	0.481	0.63	0.529	0.76	—	—	(0.049)	0.71	Fe ?	4.814	—
96.48								0.061	0.57	Fe	4.775	—
.92	10	1.190	1.56	1.754	1.53	—	-	0.104	0.38	Ba+	0.602	5^3 D–6^3 P°
98.95	—	0.074	0.15	0.134	0.20	—	—	0.042	0.65	Fe	0.954	a^5 F–z^7 F°
99.66	—	0.189	0.20	0.134	0.14	—	—	0.092	0.48	Ca	2.512	3^3 D–dp^3 F°
6516.09	6	0.588	1.00	—	—	—	—	0.058	0.63	Fe+	2.879	a^6 S–z^6 D°
62.82	100	—	∞	—	—	—	—	3.76	0.21	H	10.155	2^2 P°–3^2 D

Astronomia (Astrofisica). — *Sulla determinazione del profilo vero delle righe spettrali mediante integrazione ottica* [1]. Nota di Guglielmo Righini, presentata [2] da Giorgio Abetti, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

Ogni spettrografo dà di una riga rigorosamente monocromatica una distribuzione di intensità rappresentabile con una funzione $A(x)$ (*funzione strumentale o funzione aberrante*) dove x è una variabile proporzionale alla lunghezza d'onda nell'intervallo considerato. Una riga ha sempre un profilo proprio rappresentabile con una funzione $W(x)$; il profilo che si osserva risulta dalla combinazione delle funzioni $A(x)$ e $W(x)$ secondo la nota equazione:

$$[a] \qquad S(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} W(x)\, A(y-x)\, dx$$

nella quale $S(y)$ rappresenta il profilo osservato o *funzione aberrata*. Conoscendo la funzione aberrante A e la funzione S, per determinare $W(x)$ dalla $[a]$ si ricorre generalmente ad un metodo di approssimazione [3]. L'ennesima approssimazione della funzione W è:

$$[b] \qquad W_n(y) = nS(y) - \int_{-\infty}^{+\infty} S(x)\, K_n(y-x)\, dx$$

dove K_n (ennesimo nucleo risolvente) ha l'espressione:

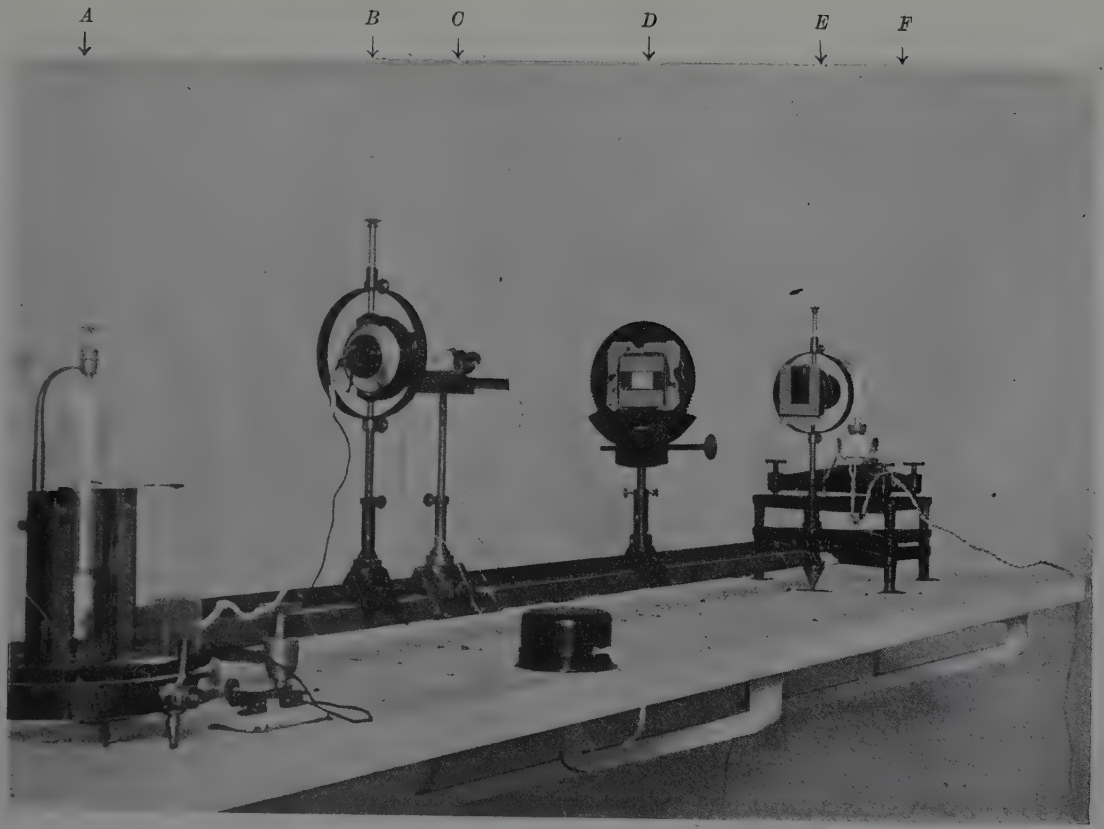
$$K_n(x) = \frac{n(n-1)}{2!} A - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} A_1 + \cdots \pm A_{n-2}.$$

---

[1] Lavoro eseguito nel R. Osservatorio di Arcetri (Firenze) e nell'Istituto di Fisica della R. Università di Cagliari.

[2] Nell'Adunanza del 30 maggio 1941-XIX.

[3] H. C. Burger e P. H. van Citter, « ZS. f. Phys. », B. *79*, pag. 722 (1932). Cfr. anche: G. Righini, « Memorie Soc. Astr. Italiana », vol. XIV.



INTEGRATORE OTTICO.

A Galvanometro. *B* Fotocella. *C* Carrello mobile (piano σ). *D* Lente cilindrica. *E* Sistema ottico a piano α). *F* Lampada (piano λ).

Le funzioni $A_1, A_2 \ldots$ si ottengono dalla funzione strumentale A con le relazioni:

$$A_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(x)\, A(y-x)\, dx \qquad A_2(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} A_1(x)\, A(y-x)\, dx \cdots$$

Nel caso pratico le funzioni A ed S sono delle funzioni sperimentali che male si prestano ad una rappresentazione analitica; perciò le integrazioni devono essere eseguite tutte per via grafica con notevole dispendio di tempo. Il procedimento si abbrevia notevolmente impiegando un dispositivo ottico che gli autori della nota citata descrivono schematicamente; in base ai loro dati e introducendo qualche modifica si è ricostruito lo strumento nella forma che qui viene descritta.

Siano λ e σ i piani coniugati del sistema ottico a (fig. 1) una superficie luminosa l di splendore uniforme, rettangolare, disposta col lato corto verticale nel piano λ avrebbe la sua immagine in σ se sul cammino

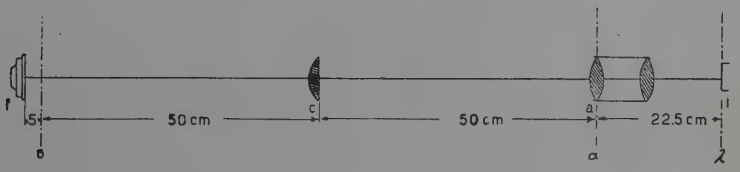


Fig. 1.

dei raggi non fosse interposta una lente cilindrica c. La lente cilindrica, situata con l'asse verticale, ha una distanza focale scelta in modo che rispetto ad essa α e σ siano piani coniugati. In σ avremo allora un rettangolo luminoso il cui lato verticale m sarà quello di l moltiplicato per l'ingrandimento di a, mentre quello orizzontale n sarà dato dal diametro della lente che si trova in α moltiplicato per l'ingrandimento di c. Ogni corda verticale della lente a ha come immagine in σ un segmento verticale di lunghezza m; lungo tale segmento lo splendore è costante e proporzionale alla lunghezza della corda. Se sulla lente a abbiamo un diaframma avente la forma della funzione aberrante $A(x)$ otterremo nel piano σ una distribuzione di splendore proporzionale alle ordinate di $A(x)$. Poniamo nel piano α un diaframma nel quale sia ritagliata la funzione W in scala tale che la sua ordinata massima sia inferiore alla dimensione m del rettangolo mn; il flusso luminoso che passerà attraverso quest'ultimo diaframma sarà funzione della A, della W e della loro posizione relativa. Infatti, fissato in W un punto di ascissa x (fig. 2), lo splendore luminoso del rettangolo in tale punto sarà proporzionale alla ordinata di A, cioè ad $A(y-x)$; il flusso trasmesso sarà inoltre proporzionale alla ordinata di W in quel punto, cioè a $W(x)$; se si integra per tutti i valori positivi e

negativi di x avremo che il flusso trasmesso dal diaframma W sarà proporzionale a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} W(x)\, A(y-x)\, dx$$

ossia alla corrispondente ordinata della funzione S secondo la relazione [a]. Se invece di W si mette in σ un diaframma con la funzione $S(x)$, misurando il flusso trasmesso si ottengono dei valori proporzionali all'integrale che risolve in seconda approssimazione l'equazione [a].

Come sorgente luminosa è stata impiegata una lampada Philips 6 volt, 17 amp. il cui filamento a nastro di forma rettangolare di 5,8 × 2 mmq.

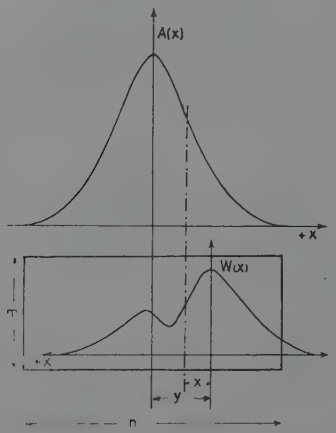


Fig. 2.

ha splendore uniforme: il sistema ottico a era costituito da un obbiettivo a quattro lenti (diametro 40 mm., focale 154 mm.) e la lente cilindrica, che veniva impiegata con un'ingrandimento 1/1, aveva una focale di 250 mm.

Il ricevitore della radiazione è costituito da una fotocella a strato di sbarramento (*Sperrschicht*) di Pressler con superficie sensibile di 36 mm. di diametro, collegata direttamente ad un galvanometro Carpentier di 225 Ω di resistenza e di sensibilità 3.10^{-8} amp. per mm. di scala a 1 m. Tutto il flusso luminoso del rettangolo immagine nel piano σ può essere ricevuto dalla fotocella f senza l'interposizione di alcun sistema ottico. La sensibilità del sistema è così elevata che basta alimentare la lampada con correnti di 10 ÷ 12 amp. per avere delle deviazioni convenienti sulla scala posta a 2 m. dal galvanometro. In tali condizioni il flusso ricevuto dalla cella è circa 10^{-2} *lumen* e si è constatato che a questi valori la relazione tra il flusso incidente e la corrente fotoelettrica è rigorosamente lineare.

Le diverse parti dell'integratore sono state montate su di un banco ottico; sulla lente a era disposto un diaframma col nucleo risolvente della equazione [a], un altro diaframma portante la funzione S era montato su di un carrello mobile normalmente all'asse ottico mediante una vite. La superficie sensibile della cella si trovava a pochi centimetri dal piano σ in modo da ricevere tutto il flusso uscente dal diaframma (fig. 1). I diaframmi rappresentanti le funzioni K_n ed S devono avere nel nostro caso la stessa scala in ascisse perchè l'ingrandimento della lente cilindrica è uguale a uno; in ordinate le scale sono arbitrarie, limitate però per i nuclei dalle dimensioni della lente a e per la funzione S dalla altezza m del rettangolo luminoso mn. I diaframmi sono stati ricavati in cartoncino nero

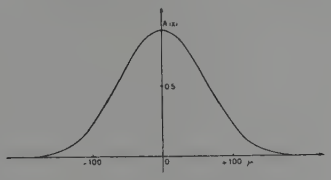


Fig. 3 a.

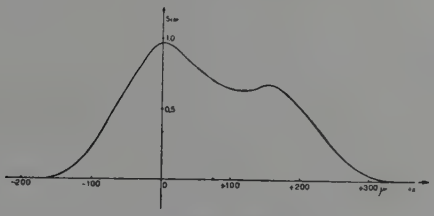


Fig. 3 b.

puntinando il contorno con un ago sottile e ritagliando lungo il contorno stesso. Gli errori che si possono introdurre con questo procedimento sono inferiori al 2 %.

Su ciascun diaframma è stato segnato un asse verticale di riferimento per riportare ambedue le funzioni allo stesso zero; posto un sottile filo a piombo lungo l'asse segnato sul diaframma portante il nucleo, si faceva coincidere l'immagine del filo data dalla lente cilindrica con l'asse di riferimento della funzione S.

Assumiamo come unità di misura per le aree quella delimitata dal profilo strumentale A, poniamo cioè $\int_{-\infty}^{+\infty} A(x)\,dx = 1$; integrando allora la [$a$] otterremo $\int_{-\infty}^{+\infty} S(y)\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} W(x)\,dx$. Ogni funzione W dovrà quindi avere la stessa area di S; perchè questo si verifichi è necessario assumere

come deviazione unitaria quella data dal galvanometro quando si ponga in α la funzione aberrante A e in σ una fenditura orizzontale alta 1 cm. e di lunghezza indefinita.

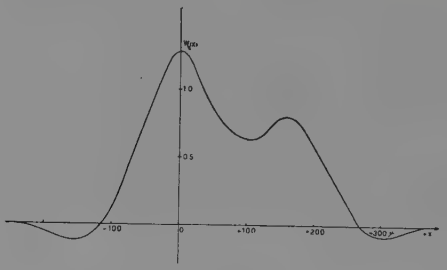


Fig. 4 *a*.

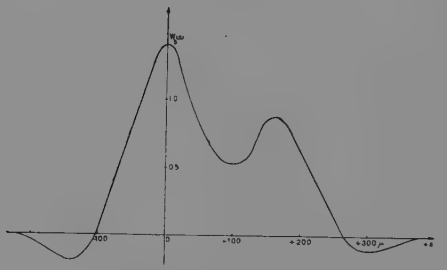


Fig. 4 *b*.

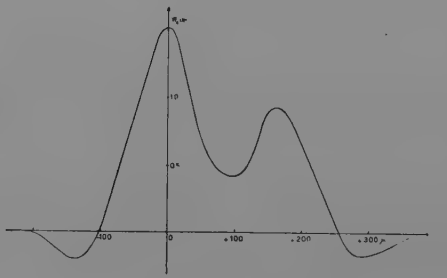


Fig. 4 *c*.

Una difficoltà che si presenta nella integrazione ottica della $[a]$ è costituita dalle parti negative dei nuclei risolventi. È necessario eseguire due determinazioni separate di $\int SK_n$, l'una ponendo in α un diaframma con la parte positiva di K_n, l'altra ponendovi invece un diaframma con le parti negative. Poichè queste ultime sono in generale piccole e l'ese-

cuzione del diaframma presenterebbe qualche difficoltà si è trovato conveniente moltiplicare le ordinate per una costante r. Le letture relative alla parte positiva devono allora essere diminuite di quelle ottenute con le parti negative divise per la costante r; quanto alla unità di misura delle deviazioni, se Δ_1 è la deviazione del galvanometro quando in α si trova il diaframma relativo alla parte positiva del nucleo e in σ la fenditura orizzontale alta 1 cm., e Δ_2 la deviazione corrispondente per la parte negativa del nucleo, la deviazione unitaria sarà $\Delta = \frac{\Delta_1 - \frac{\Delta_2}{r}}{n-1}$ se n è il numero d'ordine del nucleo risolvente.

L'equazione [a] è stata integrata con questo dispositivo ottico assumendo quali funzioni A ed S quelle rappresentate in fig. 3a; 3b. Si ottengono per la funzione W in seconda, terza e quarta approssimazione le curve a), b), c) rispettivamente della fig. 4.

Dal punto di vista fisico le parti negative non hanno significato; raggiunta l'approssimazione desiderata si dovrà curare che l'area positiva del profilo ottenuto sia uguale a quella di S perchè modificando la forma della riga non se ne deve alterare l'intensità.

Geodesia. — *La crociera gravimetrica del R. Sommergibile « Des Geneys », Anno 1935.* Nota [1] di GINO CASSINIS, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

La prima crociera gravimetrica italiana, effettuata nel 1931 dal R. Sommergibile « Vettor Pisani » [2], condusse a risultati d'importanza ed interesse così notevoli [3] da consigliare l'estensione delle misure a tutto il bacino del Mediterraneo. E, poichè la Francia, con la sua campagna del 1933-34 (ing. MARTI col sommergibile « Fresnel »), aveva eseguito 30 stazioni nella zona compresa tra la Corsica, la Sardegna, le Baleari e la costa del continente europeo e poteva in seguito estendere le operazioni anche a sud delle Baleari fino alla costa africana e allo stretto di Gibilterra [4], il compito dell'Italia doveva consistere nel completamento delle osservazioni nella regione, ben più ampia della precedente, situata a levante del meridiano a 8° Est di Greenwich. In questa regione appunto si era svolta la crociera del « Pisani », durante la quale la gravità era stata determinata in 100 punti dei mari Tirreno, Jonio e di Sicilia, su una zona di superficie uguale all'incirca ad un terzo di quella totale; cosicchè si poteva ritenere che occorressero presso a poco ancora 200-250 misure per completare il lavoro, ovvero, due crociere di circa tre mesi ciascuna, da compiersi in due anni diversi e, se possibile, successivi.

Prima di formulare qualsiasi programma occorreva, però, entrare in possesso di un apparato pendolare MEINESZ, giacchè non era certo possibile ricorrere nuovamente al prestito da parte della Commissione geodetica olandese, e ciò tanto più in quanto la stessa aveva in corso di esecuzione e in progetto delle crociere molto importanti.

---

(1) Presentata nell'Adunanza del 30 maggio 1941-XIX.

(2) G. CASSINIS e M. DE PISA, *La crociera gravimetrica del R. Sommergibile « Vettor Pisani ». Anno 1931.* « Annali Idrografici », vol. XIII. Genova 1935-XIII.

(3) G. CASSINIS, P. DORE, M. DE PISA, *I risultati della crociera gravimetrica del R. Sommergibile « Vettor Pisani » e la gravità in Italia.* « Atti della S. I. P. S. », XXII Riunione, Bari, 1933-XII.

(4) Infatti, nel 1936, col sommergibile francese «Espoir», lo stesso compianto ing. MARTI effettuava altre quarantasei determinazioni, completando l'esplorazione del bacino occidentale del Mediterraneo: v. L. PÉLISSIER. *Determination de l'intensité de la pesanteur en mer...* « Travaux de l'Association internationale de Géodésie » t. 15. Paris, 1939.

Per iniziativa del compianto sen. Soler, e con l'appoggio del Consiglio Nazionale delle Ricerche, l'Istituto di Geodesia della R. Università di Padova ebbe dal Ministero dell'Educazione Nazionale, sul finire del 1933, la somma necessaria per l'acquisto di uno degli strumenti che la Seistoellen Fabriek stava costruendo per rispondere alle richieste avanzate da qualche Stato: l'apparecchio, subito ordinato, arrivò in Italia nell'estate del 1934 e venne posto a mia disposizione perché lo studiassi e lo impiegassi nella nuova campagna, la quale, però, data la stagione ormai avanzata, non avrebbe potuto essere eseguita prima dell'estate 1935.

Fin dalla prima richiesta di un sommergibile, avanzata dalla R. Commissione geodetica e dal Consiglio Nazionale delle Ricerche, si ebbe l'adesione incondizionata dell'Ecc. l'Ammiraglio Cavagnari, allora Sottosegretario di Stato alla Marina, adesione che, a momento opportuno, e cioè nella primavera del 1935, si realizzò con l'assegnazione del R. Sommergibile « Des Geneys » per un periodo di oltre tre mesi e mezzo.

Il progetto da me preparato per la crociera del 1935 considerava: 1 completamento della rete del 1931 con alcune misure supplementari in località caratteristiche per i grandi valori delle anomalie e delle loro variazioni, e l'estensione delle determinazioni a tutto il bacino centrale del Mediterraneo, all'Adriatico e all'Egeo, in modo da riempire quasi completamente (eccettuata la parte meridionale della striscia compresa tra Creta e la costa settentrionale dell'Africa) la regione limitata dai meridiani a 8° e a 26° Est Gr. In totale le misure da eseguire dovevano essere circa 130–140, con un percorso complessivo di circa 11000 miglia.

Il « Des Geneys », al comando del tenente di vascello A. Michelagnoli, che qui mi è gradito ringraziare insieme allo Stato Maggiore [5], e all'Equipaggio tutto per le cure assidue date alla buona riuscita del lavoro, giunse a Genova il 26 giugno e ne riparti la notte fra il 3 e il 4 luglio, dopo aver imbarcato gli strumenti. L'Istituto Idrografico della R. Marina, che, attraverso il suo Direttore di allora, capitano di fregata L. Rubartelli e il personale (in particolare desidero ricordare il prof. M. Tenani e il compianto cav. G. Ferrari) diede alla spedizione la consueta amorevole assistenza, destinò come Ufficiale idrografo coadiutore il tenente di vascello M. de Angelis, il quale, oltre ad aiutarmi con grande interessamento e perizia nelle operazioni, eseguì anche una parte notevole dei calcoli preliminari e tutte le determinazioni di posizione, in ciò validamente coadiuvato dal già citato ufficiale di rotta sig. Angeloni.

---

[5] Costituito come segue: tenente di vascello A. De Angelis, Ufficiale in 2ª (defunto nel 1939); sottotenente di vascello A. Angeloni, Ufficiale di rotta (gloriosamente caduto nell'attuale guerra); tenente del G. N. ing. F. Allora, Direttore di macchina; tenente D. M. N. Bossolino.

La crociera può dividersi in due periodi: nel primo, durato fino al 23 luglio, si passò da Genova a Cagliari, Tripoli, Augusta, Taranto; nel secondo che durò dal 1° al 28 agosto, si andò da Taranto al Pireo, a Lero e a Rodi, eseguendo determinazioni nell'Egeo meridionale e intorno a Creta.

In tutto si fecero 49 misure in mare aperto e 8 nei porti, percorrendo circa 4300 miglia, di cui 150 in immersione.

Il ritorno a Taranto il 28 agosto venne determinato da richiamo del Ministero della Marina dovuto all'aggravarsi della situazione internazionale, che condusse il 6 settembre, dopo un periodo di attesa a Taranto, allo sbarco degli apparecchi e alla sospensione della crociera. Gli strumenti venivano quindi spediti per via di terra a Genova, dove, tra il 27 settembre e il 7 ottobre, si effettuavano all'Istituto Idrografico le operazioni di chiusura, mentre quelle iniziali erano state eseguite nei giorni 1, 2 luglio.

Il nuovo apparato gravimetrico non differisce sostanzialmente da quello usato nella crociera del « Vettor Pisani ». I pendoli, numerati S 13, S 14, S 15, sono in bronzo, con coltelli del tipo Stückrat, e sono resi presso a poco « minimali » mediante modificazione della testa che in questi ha forma prismatica e dimensioni piuttosto notevoli, mentre negli antichi era appena sufficiente per contenere gli specchietti. La registrazione fotografica avviene nello stesso modo: noi adoperammo sempre carta Tensi per oscillografi che diede ottimi risultati.

Accenno alle più notevoli varianti introdotte nelle modalità di lavoro rispetto alla crociera precedente.

Invece di due cronometri se ne adoperarono dapprima 3 e poi 4, dei quali 2 a tempo siderale e 2 a tempo medio. Visto che la sospensione elastica usata nel 1931 non pareva aver dato particolari vantaggi per la conservazione dell'andamento dei cronometri, mentre richiedeva uno spazio notevole, essa non venne usata nell'attuale crociera. Gli orologi, 3 dei quali della casa Nardin e 1 della Kullberg, e tutti a sospensione cardanica e a contatti elettrici, con le loro cassette, togliendo le controcasse di protezione, si riunirono in un cassone situato in camera di manovra. Le cassette erano appoggiate su un letto di ovatta e separate da strati dello stesso materiale: una coperta di lana, che ricopriva ordinariamente i cronometri, si toglieva quando occorreva procedere ai confronti.

La ricezione dei segnali ritmici marconigrafici, generalmente della stazione ad onda lunga di Bordeaux e qualche volta di quelle di Rugby, Nauen, e anche della Torre Eiffel, si faceva nel modo già usato nella crociera del 1931, e cioè mettendo uno dei cronometri, che di solito fu il Nardin a t. m., n. 2356, in serie con la cuffia dell'apparato ricevente e determinando i tempi delle apparizioni e delle sparizioni dei segnali. I cronometri, poi, si confrontavano tra di loro accoppiando successivamente ciascuno di quelli a t. m. con ciascuno di quelli a t. s., mettendoli in serie tra loro, e con un milliamperometro e una resistenza di 500 Ω

sul circuito di un accumulatore di 4 V. Un condensatore in parallelo serviva per eliminare le scintille di apertura. Con questo procedimento, le coincidenze si apprezzano dall'istante dell'azzeramento del milliamperometro senza alcuna fatica e con un errore che non supera un secondo per ciascuna, e quindi, il confronto degli orologi attraverso una sola coincidenza si fa con l'errore al più di 1/360 di secondo, precisione questa superiore a quella che può aversi con gli ordinari confronti cronografici assai più complessi come apparecchiatura e non convenientemente impiegabili a bordo dei sommergibili, come si è già osservato a proposito della precedente crociera.

Ogni misura semplice di gravità era fatta servendosi di un cronometro a t. m. e di uno a t. s.; la metà delle determinazioni constò di due misure successive, una appoggiata alla prima coppia di cronometri e l'altra alla seconda. Questo procedimento, accennato nelle considerazioni che chiudono la relazione su *La crociera gravimetrica del R. Sommergibile « Vettor Pisani »*, citata in (2), aveva lo scopo di ridurre gli errori abbastanza notevoli derivanti dalla imperfetta conoscenza dell'andamento reale dei cronometri. Esso non potè applicarsi in tutte le stazioni per ragioni varie, ma indirettamente un vantaggio si conseguì anche nelle determinazioni consistenti di una misura semplice, per la possibilità di confrontare i quattro orologi tra loro. Tuttavia, le irregolarità degli andamenti dei cronometri furono diverse volte tanto notevoli, che l'errore dovuto alla imperfetta conoscenza degli andamenti stessi rimase sempre elevato e predominante rispetto a tutte le altre cause di errore. Per le future crociere occorre pensare alla installazione a bordo di un orologio a quarzo, come è stato fatto negli Stati Uniti con ottimi risultati.

Un'altra precauzione, che ha certo contribuito ad aumentare la sicurezza delle misure, consiste nell'aver adottato durante l'esecuzione della quasi totalità di esse la rotta lungo il meridiano. Con questo sistema si elimina totalmente l'incertezza derivante nella correzione di Eötvös dalla imperfetta conoscenza della velocità del sommergibile in immersione. Come è ovvio, rimangono integralmente gli errori derivanti dalla imprecisione con cui si conoscono (quando si conoscono) la direzione e la velocità delle correnti marine alla profondità alla quale si opera.

Le condizioni in cui vennero effettuate le misure (stato del mare in relazione con la profondità di immersione e quindi con la stabilità del sommergibile) furono sempre tali da far ritenere che i termini di 2° ordine di Browne (6) potessero venire in ogni caso trascurati, ciò che del resto si verifica anche per la crociera precedente.

---

(6) B. C. Browne, *The Measurement of Gravity at Sea.* « Monthly. Not.Roy. Astron. Soc. », Geophys, Suppl. 4, 1937; F. A. Vening Meinesz, *Theory and Practice of Pendulum Observations at Sea. Part II. Second order corrections, Terms of Browne and Miscellaneous Subjects.* « Publication of the Netherlands Geodetic Commission », Delft, 1941.

Il ritardo nella pubblicazione dei risultati è dovuto a diverse circostanze, tra cui principale la necessità di determinare le costanti dei pendoli usati. Queste si ebbero da misure appositamente eseguite nel 1938 (7) e i valori allora ottenuti risultarono pienamente confermati da successive determinazioni non pubblicate, cosicchè si assunse per tutti tre i pendoli:

$$\text{Costante di temperatura } (48{,}5 \pm 0{,}4)\cdot 10^{-7} \text{ sec}$$
$$\text{Costante di densità dell'aria } (668 \pm 3)\cdot 10^{-7} \text{ sec.}$$

Per quanto riguarda la correzione per difetto di isocronismo, le misure eseguite a Milano e a Genova I. I. prima della crociera di cui qui si rende conto e successivamente da L. Solaini nel 1937 in occasione del collegamento Milano-Genova, portano concordemente ai valori

$$U_{13,14} = +122 \quad , \quad U_{15,14} = +39 \ (8)$$

indipendenti dalla temperatura perchè si può ritenere, come sopra è detto, che le costanti di temperatura siano identiche per i tre pendoli. Questi si usarono per tutte le misure della crociera.

Nella stazione di chiusura effettuata a Genova I. I. in ottobre 1935, mentre il valore di $U_{13\,14}$ risultò identico a quello dato sopra, si ebbe per $U_{15,14}$ il valore $+77$ in luogo di $+39$. Anomalie di questo genere si erano già riscontrate nella crociera del « Pisani » e misure successive (eseguite a Genova e a De Bilt da M. De Pisa, F. A. Vening Meinesz e da me, e a Den Helder dal Meinesz) le avevano messe chiaramente in evidenza.

Si volle ora ricercarne la causa e si scoprì che esse sono dovute a impercettibili movimenti dei coltelli nelle loro sedi. In conseguenza di tale constatazione, si sta procedendo ad una fondamentale revisione dei pendoli, che si muniscono di nuovi coltelli dopo di aver accuratamente rettificato le sedi, e si approfitta della circostanza per riordinare tutto l'apparato in cui certi particolari costruttivi lasciano alquanto a desiderare come precisione meccanica.

Ometto, per semplicità, la pubblicazione delle tabelle che danno gli stati e andamenti dei diversi cronometri usati, le durate delle oscillazioni pendolari osservate con le corrispondenti condizioni fisiche della esperienza, le riduzioni e le durate di oscillazione ridotte, limitandomi a riportare nella tabella seguente le coordinate delle stazioni e i valori della gravità e delle anomalie ottenute, oltre ad alcuni dati caratteristici sulle misure eseguite.

---

(7) L. Solaini, *Determinazione provvisoria delle costanti dei pendoli S 13, S 14, S 15 dell'apparato gravimetrico Vening Meinesz.* « Pubbl. n. 30 dell'Istituto di Geodesia e Topografia del R. Politecnico di Milano », 1938.

(8) L. Solaini, *Determinazione di gravità relativa tra Genova (Istituto Idrografico della R. Marina) e Milano (R. Politecnico).* « Pubbl. n. 33 dell'Istituto di Geodesia e Topografia del R. Politecnico di Milano », 1938. Per il significato dei simboli U, v. pubbl. citata nella Nota (2).

Tabella.

N.	Stazione / Località (1)	φ N. (2)		λ E.G. (3)	H_s (4)	n_m	n_0	g_0'' (5)		γ_0 (7)	$g_0''-\gamma_0$ (8)	H_2 (9)
		°	′	° ′	m			gal	mgal	gal	mgal	m
III	Tripoli Porto . . .	32	54,3 ± 0,0	13 11,0	0	4	3	979,579 ± 4		979,571	+ 8	— 7
6	mare	33	24,6 1,5	13 55,0	—20	2	3	,596	6	,612	— 16	450
5	»		40,0 1,5	12 47,0	15	1	2	,619	8	,634	— 15	160
17	»		50,9 1,5	16 20,8	3	1	2	,625	8	,649	— 24	1590
36	»	34	25,0 0,8	25 07,8	25	1	2	,682	8	,697	— 15	1600
8	»		30,0 1,8	13 39,0	20	2	3	,721	6	,703	+ 18	420
7	»		31,5 0,7	15 04,0	20	2	3	,733	6	,705	+ 28	300
34	»		32,0 1,5	24 11,0	24	1	2	,555	8	,706	—151	3060
35	»		50,9 0,6	24 38,9	25	2	4	,625	6	,733	—108	2520
37	»		52,1 0,8	25 12,2	24	2	4	,694	6	,735	— 41	1750
38	»		53,9 0,6	25 59,1	25	1	2	,801	8	,737	+ 64	920
33	»	35	03,8 0,5	24 08,4	30	1	2	,692	8	,751	— 59	1460
16	»		07,6 0,8	16 09,2	20	2	2	,747	6	,757	— 10	1520
4	»		12,0 1,3	12 08,0	20	2	3	,779	6	,763	+ 16	55
9	»		25,0 0,4	14 37,0	20	2	3	,794	6	,781	+ 13	360
32	»		35,2 0,4	23 02,1	20	2	4	,696	6	,796	—100	2090
10	»		50,2 1,0	13 22,7	20	2	3	,836	6	,817	+ 19	310
30	»		56,9 1,0	24 20,0	28	1	2	,910	8	,826	+ 84	960
31	»	36	00,1 0,6	23 30,5	30	1	2	,799	8	,831	— 32	1370
39	»		09,0 0,1	28 14,1	24	1	2	,793	8	,844	— 51	925
29	»		17,9 0,3	25 23,8	30	2	4	,987	6	,856	+131	300
15	»		21,0 1,0	16 05,8	20	1	2	,816	8	,861	— 45	3320
28	»		22,6 0,6	26 14,0	—30	2	4	,979	6	,863	+116	—500

(1) Numeri d'ordine cronologici delle stazioni e località.

(2) φ, latitudini geografiche e loro errori medi in minuti primi o miglia marine.

(3) λ, longitudini est Greenwich.

(4) H_s, quote delle stazioni rispetto al livello del mare.

(5) n_m, numeri delle misure indipendenti; n_0, numeri dei cronometri usati.

(6) g_0'', valori osservati della gravità ridotti al livello del mare col metodo di Bouguer e espressi in gal; e loro errori medi in mgal.

(7) γ_0, valori della gravità normale internazionale (v. G. Cassinis, *Table des valeurs de la pesanteur normale internationale*. « Bull. Géod. », n. 32).

(8) $g_0'' - \gamma_0$, anomalie della gravità (Bouguer) espresse in mgal.

(9) H_2, profondità marine.

Segue TABELLA.

Stazione		φ N.		λ E.G.	H_s	n_m	n_0	g_0''		γ_0	$g_0''-\gamma_0$	H_2
N.	Località	°	′ ″	° ′	m			gal	mgal	gal	mgal	m
VII	Rodi Porto	36	27,0 ± 0,0	28 16,3	0	2	3	979,850	± 6	979,869	— 19	6
11	mare		30,0 1,5	13 49,5	—20	2	3	,877	6	,874	+ 3	355
25	»		30,0 0,5	24 30,5	30	1	2	,987	8	,874	+113	480
40	»		32,2 0,4	27 31,4	25	2	2	,869	6	,877	- 8	625
27	»		44,0 0,4	25 51,0	30	1	2	,992	8	,894	+ 98	565
13	»		48,7 0,4	15 34,6	20	2	2	,838	6	,901	- 63	2890
3	»		51,5 0,8	11 20,4	19	2	3	979,926	6	,905	+ 21	155
26	»		53,0 0,5	25 08,0	29	1	2	980,028	8	,907	+121	140
12	»		55,0 0,7	14 12,0	20	2	2	979,923	6	,910	+ 13	280
24	»	37	06,5 0,6	23 11,8	-20	2	4	,996	6	,926	+ 70	375
VIII	Lero Portolago . .		07,6 0,0	26 51,4	0	4	4	980,023	4	,928	+ 95	12
IV	Augusta Porto . . .		13,8 0,0	15 14,3	0	2	2	,060	6	,937	+123	7
43	mare		21,0 0,4	24 57,7	—20	1	2	980,033	8	,947	+ 86	100
14	»		21,5 0,2	15 21,5	20	1	2	979,916	8	,948	— 32	2020
23	»		23,0 0,6	23 49,3	27	2	4	980,043	6	,950	+ 93	355
41	»		27,6 0,4	26 06,3	30	1	2	979,983	8	,957	+ 26	600
2	»		46,0 1,5	10 00,0	20	2	3	,988	6	,984	+ 4	605
44	»		53,9 0,4	24 21,7	—24	1	2	980,065	8	,995	+ 70	115
22	»		55,9 0,0	22 58,3	0	2	4	979,998	6	,998	0	8
VI	Pireo Porto. . . .		56,3 0,0	23 38,3	0	2	3	980,082	6	979,999	+ 83	8
21	mare		56,9 0,0	22 57,1	0	1	2	,002	8	980,000	+ 2	28
42	»	38	00,7 0,5	25 57,8	—26	1	2	980.056	8	,005	+ 51	325
45	»		15,2 0,5	20 58,8	—20	2	4	979,943	6	,026	- 83	95
20	»		21,5 0,0	21 55,8	0	2	4	,894	6	,036	—142	275
47	»		32,8 1,5	18 37,8	—24	2	4	,979	6	,052	— 73	3100
46	»		33,2 1,5	19 52,5	21	1	2	979,992	8	,053	— 61	1910
1	»	39	02,2 0,1	09 05,8	—29	1	2	980,098	8	,095	+ 3	35
II	Cagliari Porto. . . .		12,6 0,0	09 06,6	0	2	3	,127	6	,111	+ 16	8
48	mare		19,5 0,5	17 12,2	—24	1	2	,077	8	,121	- 44	760
19	»		25,2 0,5	18 14,7	21	1	2	,104	8	,129	- 25	1220
18	»		56,5 0,8	17 38,2	20	2	4	,210	6	,175	+ 35	635
49	»	40	08,2 1,5	16 55,6	—21	1	2	,154	8	,193	- 39	580
V	Taranto M. Piccolo .		29,0 0,0	17 15,0	0	1	2	,276	8	,223	+ 53	10
I	Genova Porto . . .	44	24,7 ± 0,0	08 55,1	0	2	2	980,560	± 6	980,576	- 16	8

Gli errori medi sono stati ottenuti come nella crociera del 1931 dalle differenze δ relative ai cronometri e d tra i pendoli 13 e 15.

I valori di g_0'' sono ricavati assumendo per Genova Istituto Idrografico il valore $g = 980{,}557$ gal.

Nei porti di Cagliari e Taranto le misure si eseguirono nello stesso posto di quelle del 1931.

La determinazione di Genova Porto invece venne effettuata presso la Stazione viaggiatori, e quindi in località situata circa 0,8 mg a nord del Porticciuolo Duca degli Abruzzi dove si era fatta la misura nel 1931.

Per ridurre il valore ottenuto alla latitudine 44°23,9′ della stazione del 1931 si deve togliere 1 mgal. Segue la tabella di raffronto:

	1931	1935	differenze
Cagliari Porto	980,119	127	+ 8 mgal
Taranto Porto	980,289	276	— 13
Genova Porto	980,577	559	— 18

e si vede che gli scarti sono piuttosto sensibili.

Altre località nelle quali, o in immediata vicinanza, vennero effettuate in precedenza misure di gravità sono: Rodi, Lero, il Pireo e Augusta.

Le prime due stazioni e Atene (a 4 km dal Pireo) furono eseguite nell'anno 1913 da L. Carnera [9]; l'ultima, nel 1899, da A. Riccò [10]. Riassumo nella tabelletta seguente i risultati delle misure, riferiti al valore g a Genova I. I. sopra adottato e, per quanto riguarda Augusta, al valore di g a Palermo (980,064) ottenuto da me nel 1919 [11] e ai valori a Catania ricavati attraverso la compensazione di Borrass (980,062) [12] e dalle misure eseguite dall'I. G. M. nel 1930 (980,045) [13].

---

[9] L. Carnera, *Determinazioni di gravità relativa in Atene e in alcune isole del Mar Egeo.* « Annali Idrografici », vol. 9°, anno 1913–14. Genova, 1915.

[10] A. Riccò, *Riassunto delle determinazioni di gravità relativa fatte nella Sicilia orientale, in Calabria e nelle Isole Eolie.* « Rendiconti Lincei », vol. XII, 1903.

[11] G. Cassinis, *Determinazioni di gravità relativa eseguite nel 1919 a Roma, Napoli, Palermo, Teramo.* « Pubbl. della R. Commissione geodetica italiana » Roma, 1921.

[12] E. Borrass, *Bericht über die relativen Messungen der Schwerkraft mit Pendelapparaten in der Zeit von 1908–1909.* « Verh. der 16 allg. Konferenz der internationalen Erdmessung » (London, 1909).

[13] R. Fabiani, *Esplorazione geofisica regionale della Sicilia.* « L'Universo». vol. XII, 1931.

	φ	λ	H_s	g_0''	γ_0	$g_0'' - \gamma_0$
Rodi	36 26,8	28 16,0	+ 5	980,014	979,869	+ 145
Lero	37 07,9	26 52,7	1	,017	,928	+ 89
Atene	58,3	23 43,2	95	,055	980,001	+ 54
Augusta . . .	37 14,0	15 13,0	17	980,072 ,055	979,937	+ 135 + 118
Nisiro	36 36,6	27 10,3	+ 3	979,885	979,883	+ 2
Simi	37,1	27 52,5	3	,852	,884	— 32
Coo	53,4	27 19,6	3	,882	,907	— 25
Calimno . . .	56,6	27 00,7	3	980,010	,912	+ 98
Patmo	37 19,4	26 33,9	+ 7	980,016	979,945	+ 71

La tabelletta contiene anche altre 5 determinazioni effettuate dal CARNERA in isole dell'Egeo appartenenti alla zona esplorata dal « Des Geneys ».

Il confronto delle anomalie per le prime quattro località conduce ai seguenti risultati:

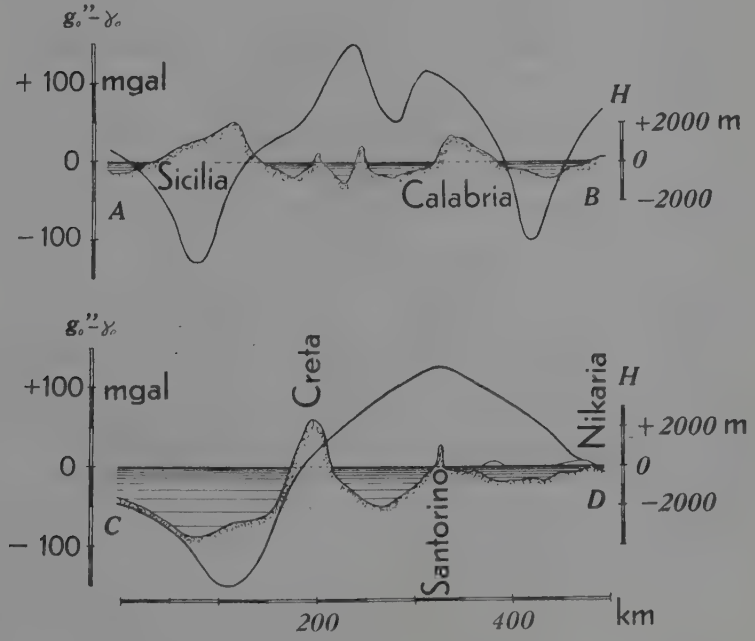
	Valori di $g_0'' - \gamma_0$ in mgal		
	Des Geneys	Determ. precedenti	differenze
Rodi	— 19	+ 145	— 164
Lero	+ 95	+ 89	+ 6
Pireo–Atene	+ 81	+ 54	+ 27
Augusta	+ 123	+ 135	— 12
		+ 118	+ 5

Per lo scarto enorme tra le determinazioni a Rodi non sono riuscito a trovare alcuna spiegazione: è certo che le misure fatte a terra dal CARNERA con 4 serie di 4 pendoli ciascuna devono avere una precisione e una sicurezza molto maggiore delle nostre (l'errore medio dato dal CARNERA è ± 4 mgal), ma una differenza come quella riscontrata non può dipendere se non da un errore grossolano.

I valori ottenuti a Lero risultano ben concordanti: quelli di Pireo–Atene non si possono sicuramente confrontare, perchè la distanza e il dislivello tra le due stazioni sono troppo notevoli, ma la differenza constatata fa ritenere che l'accordo sia almeno discreto.

Infine, per quanto riguarda gli scarti abbastanza piccoli nei valori relativi ad Augusta, occorre ricordare che le misure del RICCÒ, fatte prima del 1900 con supporto monopendolare e appoggiate a determinazioni astronomiche di tempo di tipo speditivo, non danno sicuro affidamento e anzi la Reale Commissione geodetica ha stabilito di non più considerarle nel quadro della gravità italiana. Tuttavia qui l'accordo con la nostra determinazione sarebbe discreto.

Nella cartina annessa, usufruendo delle stazioni delle due crociere del « Vettor Pisani » (1931) e del « Des Geneys » (1935), ed inoltre di quelle sopra elencate del prof. Carnera, di alcune effettuate in mare da F. A. Vening Meinesz nella zona esplorata (14), della carta elaborata dall'I. G. M. per la Sicilia (15), con i cambiamenti necessari per il riferimento alla formula internazionale per la gravità normale e delle misure eseguite da G. Boaga in Sardegna (16), sono tracciate alcune isoanomale.



Riservando uno studio più completo a quando saranno calcolate le anomalie isostatiche, che meglio rendono conto dei fenomeni tettonici e della realtà della situazione, si può però trarre dalla cartina qualche considerazione di fondamentale importanza.

---

(14) F. A. Vening Meinesz, *Gravity Expeditions at Sea 1923-1932*. « Publication of the Netherland Geodetic Commission » Delft, 1934.

(15) V. Nota (13); E. Soler, *Rapport sur les mesures de l'intensité de la pesanteur sur terre* . . . « Travaux de l'Association de Géodésie de l'U. G. G. I. » t. 12, Paris, 1935.

(16) G. Boaga, *Misure di gravità relativa compiute nel 1937 in Sardegna*. « Pubbl. della R. Commis. Geod. Italiana », n. 17. Padova, 1939.

Il bacino del Tirreno meridionale e del Mar di Sicilia e quello dell'Egeo meridionale (nulla può dirsi del settentrionale, che non è stato esplorato) sono zone di anomalie positive; mentre la maggior parte dell'Jonio e il Mediterraneo centrale, compresa la striscia a sud di Creta fin presso il litorale africano, sono zone di anomalie negative. Una zona (ancora inesplorata) di anomalie positive dovrebbe trovarsi a occidente del Capo Matapan: forti anomalie negative si riscontrano invece in una piccola area del Golfo di Lepanto.

A ovest e a est della Calabria, a est e a ovest della costa occidentale della Sicilia, come a nord e a sud di Creta, si ripetono configurazioni analoghe a quelle riscontrate dal MEINESZ nella regione delle Indie Olandesi e nel Golfo del Messico. A zone di anomalie positive fanno riscontro, a breve distanza, zone di notevoli anomalie negative.

Le figure corrispondono a due sezioni segnate sulla planimetria: su di esse si sono tracciati il profilo altimetrico e quello delle anomalie $g_0'' - \gamma_0$.

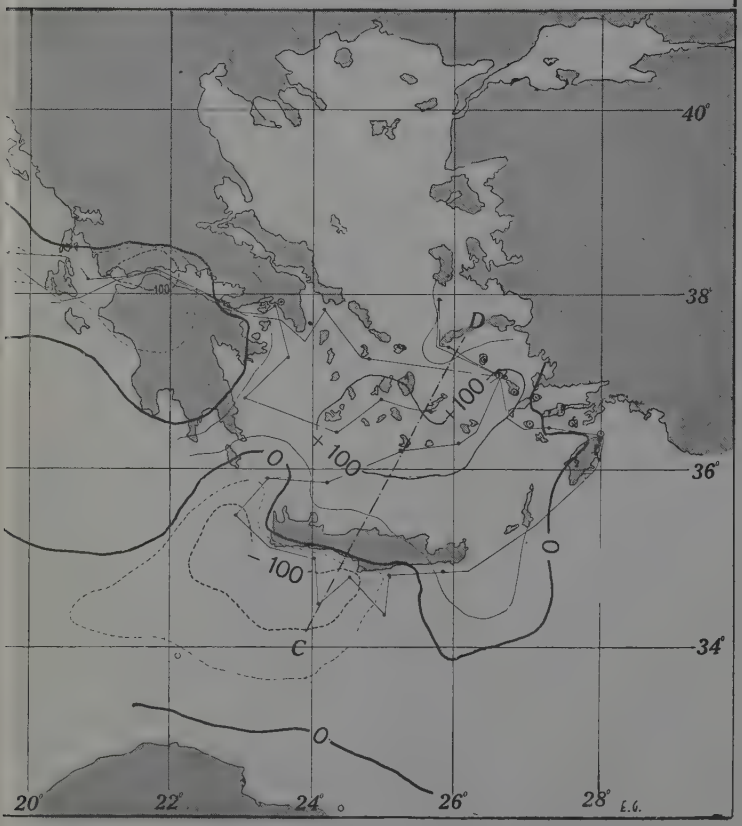
L'analogia di questi ultimi profili con quelli ottenuti dal MEINESZ è abbastanza evidente, e, per quanto la frammentarietà molto notevole delle fascie di anomalia negativa e le irregolarità assai sensibili nascondano un po' l'essenza del fenomeno, si può considerarlo del tipo di quello riscontrato nelle altre località tettonicamente analoghe e quindi metterlo in relazione con forze orizzontali agenti dalle zone di anomalie positive verso quelle di anomalie negative. Tuttavia, come dicevo sopra, per trarre conclusioni più sicure necessita calcolare le anomalie isostatiche, e ciò sarà fatto presto, ed effettuare le misure nelle regioni non esplorate, ciò che ci auguriamo possa anche seguire a breve distanza dalla vittoria italiana nel nostro Mare.

MISURI
B
A
0
+100
8°
10°
12°
14°
16°
18°

G. CASSINIS

LA CROCIERA GRAVIMETRICA DEL R. SOMMERGIBILE "DES GENEYS„

ITINERARIO ⊙ MISURE DI L. CARNERA
E ITALIANE DEL 1931 E 1935 —— ISOANOMALE DI BOUGUER POSITIVE
DI F. A. VENING MEINESZ - - - - - „ „ „ „ „ NEGATIVE
·—·—·— SEZIONI



Fisica. — *Gli spettri γ e X dei derivati del radon nella regione da 700 a 1300 U. X.* Nota di Manuel Valadares, presentata (1) da Giulio Cesare Trabacchi, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

1. I processi normalmente utilizzati per lo studio degli spettri γ non sono applicabili nel caso di una radiazione molto molle (dell'ordine di 1000 U. X.). Infatti, a causa di difficoltà di carattere tecnico, i metodi basati sull'analisi dello spettro β o sull'effetto Compton non sono mai stati applicati a energie così basse; d'altra parte il metodo d'assorbimento non può dare che indicazioni approssimative poichè si ha a che fare con una zona spettrale particolarmente ricca di righe.

È a causa di ciò che questa regione dello spettro γ non è stata studiata finora altro che con il metodo della spettrografia cristallina. Le prime ricerche si devono a Rutherford e Andrade (« Phil. Mag. », *27*, 854 (1914); *28*, 262 (1914) e a Rutherford e Wooster (« Proc. Camb. Phil. Soc. », *22*, 834 (1925). Io ho intrapreso qualche anno fa (Valadares e Mendes, « C. R. », *206*, 744 (1938), uno studio sistematico dello spettro dei raggi γ e *X* emessi dal radon e dai suoi discendenti nella regione da 700 a 1300 U. X.; però la piccola quantità di emanazione di cui io potevo allora disporre non mi ha permesso di procedere nella ricerca. Non è che di recente e grazie ai grandi mezzi del Laboratorio di Fisica dell'Istituto di Sanità Pubblica, che ho potuto ultimare questa analisi.

Hulubei e Cauchois hanno pubblicato nel 1939 i risultati di uno studio simile (« C. R. », *209*, 39 (1939) di cui la conclusione più importante era l'esistenza di un elemento a numero atomico 85 fra i prodotti originati dal radon.

Si vedrà più oltre come le nostre ricerche hanno permesso di confermare la conclusione di Hulubei e Cauchois e di constatare inoltre fra i prodotti provenienti dal radon un nuovo elemento: quello a numero atomico 87.

2. In una prima Nota (Valadares, « Rend. R. Acc. d'Italia », *2*, 351 (1940)] abbiamo descritto il metodo spettrografico usato, come pure le

(1) Nell'Adunanza del 30 maggio 1941-XIX.

condizioni sperimentali. Aggiungo soltanto che la distanza cristallo-sorgente ha variato fra 27 e 50 cm. e che per lo studio delle righe più deboli si è dovuto ridurre l'apertura del fascio incidente sul cristallo, ciò che, per conseguenza, riduce il velo generale sulle lastre: naturalmente anche la regione spettrale studiata viene notevolmente ridotta di modo che in certe prove si poteva studiare appena una regione di 10 U. X. Si procedeva allora nel modo seguente: si faceva una lunga posa per la regione che si desiderava studiare ed una piccola posa per una regione che possedesse una riga forte, in modo da avere sulla stessa lastra una riga campione oltre alle righe da misurare. Osserviamo che poichè certe pose sono state molto lunghe (fino a 13 giorni) non abbiamo potuto, per mancanza di tempo, studiare tutta la regione spettrale con la stessa profondità. Ci si può pertanto attendere che in questa regione spettrale esistano anche altre righe della stessa intensità di quelle che noi indichiamo come molto deboli

Poichè durante l'inverno la superficie del cristallo di salgemma si guastava molto spesso, siamo stati obbligati a coprire il cristallo con un sottile strato di vasellina. Benchè certi autori consiglino di preparare la superficie del cristallo sfregandola su di un pezzo di carta o di pelle di camoscio bagnata con acqua contenente in soluzione del cloruro sodico, abbiamo potuto constatare che l'acqua deve essere il più pura possibile; quando infatti si adopera una soluzione salina, la superficie ottenuta presenta un potere di riflessione molto più debole. Inoltre, e sempre allo scopo di diminuire l'azione della umidità atmosferica sul cristallo, abbiamo messo nella sala dove era montato lo spettrografo, una grande quantità di calce viva.

3. Presentiamo più oltre la tabella delle righe osservate nella regione spettrale da 700 a 1300 U. X. Per quel che concerne l'intensità delle righe, le abbiamo classificate sotto le designazioni: forte (f) media (m), debole (d) e molto debole (md); tuttavia la classificazione delle righe secondo la loro intensità, per ragioni che abbiamo indicato nel nostro precedente lavoro, è molto incerta, sopratutto quando si tratta di confrontare regioni spettrali lontane fra loro. In ogni caso si può dire che le righe deboli e molto deboli hanno una intensità inferiore all'1 % della riga più intensa di tutto lo spettro: $L\alpha_1$ (83), 1141,5 U. X.

Le lunghezze d'onda delle righe forti e medie sono state determinate con l'aiuto di microfotogrammi e l'errore della misura non deve sorpassare una unità X; per le righe deboli e molto deboli l'errore può arrivare a 2 o 3 U. X.

Nei lavori precedenti gli autori non si sono mai occupati del fatto di sapere se le righe osservate erano di primo ordine o di ordine superiore. Noi abbiamo tenuto a fare questo studio, tanto più che la zona spettrale da 350 a 700 U. X. non è stata finora che parzialmente studiata (Vala-

DARES, Tesi, Parigi, 1933). Per studiare l'ordine dello spettro abbiamo usato il metodo seguente: si copre una parte della lastra fotografica con una foglia di alluminio e si confronta l'intensità delle righe nella regione coperta dal metallo con quella delle stesse righe nella parte libera della lastra.

TABELLA I.

Riga in U. X.	Intensità	Ordine dello spettro	Riga in U. X.	Intensità	Ordine dello spettro	Riga in U. X.	Intensità	Ordine dello spettro
714	m. d.		921	m.	primo	1056	d.	
760	d.		924	m.	primo	1082	m. d.	
765	m.	primo	928	m. d.		1111,3	m.	primo
776	m. d.		933	d.		1119	d.	
785	d.		937	m.	primo	1123	d.	
789	f.	primo	946	d.	primo	1141,5	f.	primo
794	m.	primo	950,0	f.	primo	1153	m.	primo
811,4	f.	primo	952	f.	primo	1164	d.	superiore
820	d.	primo	960	d.		1172	d.	primo
825	d.	primo	963	d.		1184	m. d.	primo
838	m.	primo	967	d.		1197	m. d.	
865	m. d.		975	m.	primo	1206	m. d.	
875	m. d.		980	m. d.		1238	m. d.	
880	m. d.		985	m. d.		1257	m. d.	
892	m. d.		992	d.		1282	m. d.	
897	d.		1006	m. d.		1293	m.	primo
907	m. d.		1023	m. d.		1302	d.	primo
917	d.		1027	m. d.		1314	m.	primo

Per esempio: per la regione di 1000 U. X. si prende uno schermo di 0,2 mm. d'alluminio che produce per questa radiazione un assorbimento dell'ordine del 56 %, assorbimento che sarà perfettamente visibile sulla lastra; invece se si tratta dello spettro di ordine superiore di una radiazione più dura (500 U. X.: – spettro di secondo ordine 1000 U. X.) l'assorbimento sarà soltanto del 10 % e per conseguenza quasi trascurabile. Il

metodo si è rilevato molto buono per le righe forti e medie: per le righe molto deboli è talvolta incerto. Inoltre non abbiamo avuto il tempo di fare la prova per tutte le righe; nella tabella abbiamo indicato soltanto l'ordine delle righe che abbiamo potuto determinare in maniera certa.

4. Passiamo ora all'analisi dello spettro osservato allo scopo di classificare le radiazioni nella categoria dei raggi X, di fluorescenza, o di raggi γ.

TABELLA II.

Riga	Spettro di Bi (83)	RaB → RaC (83
γ_4	759,3	760
γ_4	760.5	760
γ_6	788,7	789
γ_3	789,5	789
γ_2	794,0	794
γ_1	811,4	811,4
γ_5	837,7	838
β_9	896,0	897
β_5	923.6	924
β_7	933,0	933
β_3	936,7	937
β_1	950.0	950,0
β_2	953,2	952
β_4	975.0	975
β_6	991,3	992
γ_7	1056.5	1056
α_1	1141.5	1141,5
α_2	1153.0	1153
l	1313.7	1314

La classificazione si fa secondo le lunghezze d'onda e le intensità relative delle righe. Conoscendosi gli spettri di raggi X degli elementi 82 e

83 si può, applicando la legge di MOSELEY, calcolare quelli degli altri elementi a numero atomico superiore. Per quanto riguarda le intensità relative delle diverse righe delle spetto di un elemento, il problema è già stato studiato da noi in maniera particolareggiata: ci limitiamo a ricordare che in certi casi la riga più intensa sarà α_1, mentre che in altri sarà β_2 a seconda dell'energia dei quanti γ emessi.

Certe righe possono appartenere contemporaneamente agli spettri di due elementi; così, per esempio, le righe γ_4 82 e γ_5 83 possiedono rispettivamente le lunghezze d'onda 838,0 e 837,7 U. X. e, nelle condizioni spettrografiche nelle quali abbiamo lavorato, queste due righe si sovrappongono.

Elemento 83. — Lo spettro di raggi X di fluorescenza di questo elemento è il più intenso, ciò che è d'accordo con il fatto che l'emissione più intensa di radiazione si ha nella trasmutazione

$$\text{RaB (82)} \rightarrow \text{RaC (83)}.$$

La tabella II contiene la lunghezza d'onda delle righe che abbiamo osservato ed i valori di Idei per lo spettro di raggi X del Bi (83) (IDEI, « Sci. Rep. Tohoku Imp. Univ. », *19*, 559 (1930)].

Tutte queste righe erano state già osservate da HULUBEI e CAUCHOIS ad eccezione della β_9 e « *l* » che si trova in una regione che non è stata studiata da questi autori.

Elemento 84. — Benchè lo spettro di questo elemento sia più debole di quello dell'elemento 83, si può ancora osservare un gran numero di righe. Le lunghezze d'onda delle righe dello spettro di raggi X sono calcolate per interpolazione ad eccezione di $L\alpha_1$, α_2, β_1, β_2 e γ_1 determinate sperimentalmente da HULUBEI, CAUCHOIS e COTELLE studiando lo spettro di raggi X del polonio (84) («C. R.»), *207*, 1204 (1938)]. I valori delle lunghezze d'onda calcolati ammettono un errore di 1 U. X.

Poichè non esisteva finora altro che una misura sperimentale della lunghezza d'onda di $L\alpha_1$ 84 ci siamo messi a determinare con precisione la lunghezza d'onda di questa radiazione; abbiamo trovato il valore 1111,3 U. X., che è in buon accordo con il numero 1111,5 dato dagli autori citati.

Il rapporto di intensità fra gli spettri degli elementi 83 e 84 è, come abbiamo già mostrato, proprio quello che ci si doveva aspettare dalla conoscenza degli spettri γ e β emessi nelle trasmutazioni

$$\text{RaB} \rightarrow \text{RaC (83) e RaC} \rightarrow \text{RaC' (84)}$$

Tabella III.

Riga	Spettro di 84	RaC → RaC′ (84)
γ_6	763	765
γ_3	764	765
γ_1	785,9	785
β_5	897	897
β_3	908	907
β_1	919,9	921
β_2	927,4	928
β_4	946	946
β_6	964	963
η	1024	1023
α_1	1111,5	1111,3
α_2	1123,3	1123
l	1281	1282

Elemento 82. — Si osservano le righe principali dello spettro di questo elemento che deve venire emesso nella trasmutazione RaC′ → RaD(82) dato che non si conosce alcuna struttura fine nello spettro alfa e di conseguenza, alcuna emissione gamma, nella trasmutazione RaA → RaB (82).

Tabella IV.

Riga	Spettro di Pb (82)	RaC′ → RaD (82)
γ_2	819,2	820
β_2	979,9	980
β_1	980,8	980
β_4	1005,6	1006
α_1	1172,6	1172
α_2	1184,1	1184

Osserviamo inoltre che nelle condizioni sperimentali in cui abbiamo lavorato, queste righe non possono essere originate dal piombo che canalizzava le radiazioni.

Elemento 85. — HULUBEI e CAUCHOIS hanno osservato le righe 1082,6 e 892 U. X. che essi hanno attribuito, per le loro lunghezze d'onda, a un elemento di numero atomico 85 ($L\alpha_1$, β_1). Noi abbiamo trovato, oltre a queste due righe quelle di 917, 880 e 875 che possono essere classificate come β_4 , β_3 e β_5 dell'85. Due di queste righe, β_3 e β_4, hanno presso a poco la medesima intensità delle α_1 e β_1, ma questo fatto è ben comprensibile se si ammette che nella trasmutazione che conduce all'85, la maggior parte della radiazione γ emessa ha una energia compresa fra il lavoro di estrazione fotoelettrico per lo strato K e quello per il livello L.

Aggiungiamo che la riga γ_1 (85) coincide con la riga osservata γ_4 83 e in conseguenza non possiamo dire se essa esista o no.

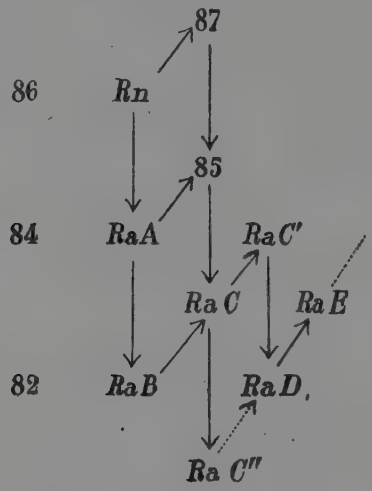
Elemento 87. — Noi troviamo due righe 825 e 865 U. X. che possono essere considerate come le righe β_3 e β_4 di un elemento a numero atomico 87. Queste due righe devono essere le più intense dello spettro di fuorescenza quando si ha emissione di quanti γ di energia inferiore al lavoro di estrazione degli elettroni dello strato K. Su di una delle nostre lastre più intense abbiamo trovato delle tracce di una riga a 1027 U. X. che potrebbe essere identificata con la α_1 87. Aggiungiamo che la riga 714 può essere la riga γ_1 87; tuttavia, dato che questa riga è già lontana dalla riga campione 811 la misura è meno precisa. La riga β_1, dell'elemento 87 coincide con la riga osservata γ_5 83.

5. Se l'analisi dello spettro osservato spinge ad ammettere l'esistenza degli elementi 85 e 87 fra i prodotti discendenti del radon; essa non ci fornisce però alcuna indicazione sulla filiazione di questi elementi. Sembra tuttavia interessante mettere a confronto i nostri risultati con le conclusioni alle quali è arrivato recentemente TURNER in uno studio teorico [Phys. Rev. *57*, 950 (1940)]. Questo autore ha concluso che l'emanazione del radio ed il radio *A* si devono poter disintegrare sia per via α che per via β. I prodotti discendenti del radon saranno allora rappresentati dallo schema seguente.

Secondo i calcoli di TURNER la trasmutazione 86 → 87 sarebbe l'1 $^0/_{00}$ di quella 86 → 84 e la trasmutazione 84 → 85 un po' più del 5 $^0/_{00}$ di quella 84 → 82.

Tutte le righe che noi abbiamo osservato sia per l'elemento 85 che per l'87 hanno una intensità inferiore all'1 % della $L\alpha_1$ 83. Rileviamo perciò che poichè si ignora il numero di quanti γ emessi nelle trasmutazioni che conducono agli elementi 85 e 87, non si può calcolare quali do-

vrebbero essere le intensità delle righe degli spettri degli elementi 85 e 87 riferite a quelle dello spettro dell'elemento 83. Noi ci limitiamo a dire che lo schema proposto da TURNER interpreterebbe molto bene i risultati sperimentali ai quali siamo arrivati.



Questo lavoro è stato realizzato all'Istituto di Sanità Pubblica.

Ringrazio il suo Direttore Generale, prof. Domenico Marotta per tutte le facilitazioni che mi ha voluto cortesemente accordare per il mio soggiorno all'Istituto. Tengo ad esprimere la mia viva riconoscenza al prof. GIULIO CESARE TRABACCHI, Direttore del Laboratorio di Fisica, per tutti i consigli che non ha cessato di prodigarmi nel corso di queste ricerche. Durante il mio soggiorno in Italia ho usufruito di mezzi forniti dallo Stato Portoghese (Instituto para a Alta Cultura).

Chimica. (Chimica–Fisica). — *Sulle equazioni di Helmholtz e di Gibbs* [1]. Nota [2] di Oscar Scarpa, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

1. — La forza elettromotrice delle pile elettrochimiche funzionanti senza variazione di volume è assegnata dalla equazione:

$$[1] \qquad E = \frac{Qv}{23100\,n} + T\frac{dE}{dT}$$

che in diversi trattati viene attribuita ad Helmholtz in altri a Gibbs e, da molti autori, ad ambedue [3].

Ad ognuno di questi scienziati, e sovente ad ambedue, viene attribuita anche la equazione generale (valida per tutte le trasformazioni reversibili e isotermiche che avvengono a volume costante) che è fondamentale per gli studi Chimico–Fisici:

$$[2] \qquad F = J\Delta U + T\frac{dF}{dT}.$$

Per trovare la causa di tali contraddizioni ho voluto esaminare le memorie originali ed è risultato che Helmholtz e Gibbs hanno studiato problemi in parte differenti, arrivando ad equazioni ben distinte, ognuna

---

[1] Lavoro eseguito nei Laboratori di Elettrochimica e di Chimica–Fisica del R. Politecnico di Milano.

[2] Presentata nell'Adunanza del 30 maggio 1941–XIX.

[3] Io pure in precedenti pubblicazioni ho indicato questa equazione con il doppio nome di Helmholtz e Gibbs, ritenendo esatto quanto è scritto in parecchi trattati. Nella equazione [1] la *f. e. m.* è espressa in Volt se Qv (calore complessivo di reazione corrispondente alle reazioni elettrochimiche che avvengono nell'interno dell'elemento mentre circolano 96574 n Coulomb) è espresso in piccole calorie. Il coefficiente $\frac{1}{23100\,n}$ è dato dal rapporto fra l'equivalente dinamico della piccola caloria, espresso in Joule, e la carica elettrica libera posseduta da un ione grammo di valenza n, cioè 96574 n Coulomb.

delle quali ha il suo campo di applicazione. È tuttavia avvenuto che diversi autori, e pur alcuni di grande fama, hanno applicato le equazioni dedotte da HELMHOLTZ a casi in cui dovevano esser applicate quelle che si debbono attribuire a GIBBS, ingenerando così gravi confusioni che possono condurre a errori notevoli. Inoltre, come più volte ho avuto occasione di far rilevare, ben di rado vengono ricordati i limiti entro ai quali queste equazioni possono venir applicate allo studio dei fenomeni naturali. Ad esempio in alcuni trattati si asserisce che la equazione [1] può venir applicata allo studio delle pile con funzionamento reversibile, in altri a quelle con funzionamento qualsiasi (reversibile o irreversibile) e nella maggioranza nulla viene specificato in proposito.

EQUAZIONE DI HELMHOLTZ. — Nei « Sitzungsberichte » dell'Accademia di Berlino dell'anno 1882, HELMHOLTZ ha pubblicato una estesa Memoria intitolata: *Termodinamica dei fenomeni chimici*. Fondandosi sul principio di CARNOT-CLAUSIUS, valido soltanto per trasformazioni reversibili, e riferendosi al funzionamento isotermico delle pile DANIELL e LATIMER CLARK, cioè riferendosi a pile il cui volume non varia sensibilmente durante il funzionamento, e quindi il lavoro positivo o negativo effettuato contro la pressione esterna è sensibilmente nullo, HELMHOLTZ dedusse l'espressione del calore reversibile (dq) sviluppato nell'interno di queste pile (cioè la somma degli effetti PELTIER che hanno luogo nell'interno degli elementi) durante la circolazione della quantità di elettricità $d\varepsilon$. Indicando con J l'equivalente dinamico della caloria ottenne la equazione:

$$[3] \qquad J dq = T \frac{dE}{dT} d\varepsilon .$$

A questa equazione lo stesso GIBBS in una sua pubblicazione (« Reports of Brit. Ass. f. Adv. of Science », anno 1888, pag. 346) dà il nome di equazione di HELMHOLTZ.

Dopo effettuata la trattazione dei fenomeni PELTIER nelle pile, l'HELMHOLTZ passa, in altro capitolo, a considerare in modo generale i fenomeni naturali reversibili, e, senza più occuparsi delle pile, stabilisce la nozione di energia libera e deduce la equazione 2, dalla quale si può far discendere la [1].

EQUAZIONE DI GIBBS. — Negli studi termodinamici pubblicati negli anni dal 1873 al 1878 (vol. II e III delle *Transaction Connecticut Ac.*) il GIBBS ha trattato il problema generale del lavoro ottenibile dalle trasformazioni Chimico-Fisiche isotermiche reversibili che avvengono a pressione costante (P'). Se si indica con L_p il lavoro totale effettuato dal

sistema in queste condizioni, con $-\Delta S$ l'aumento della sua entropia, con ΔV la diminuzione del volume, la equazione a cui arriva Gibbs è [1]:

$$[4] \qquad L_p = J\Delta U - JT\Delta S + P\Delta V$$

Trattando poi il problema delle pile elettrochimiche Gibbs è arrivato a una equazione che corrisponde alla:

$$[5] \qquad E = \frac{1}{23100\, n}(\Delta U - T\Delta S) + \frac{P\Delta V}{96574\, n}.$$

Soltanto dieci anni più tardi, alla fine della seconda lettera indirizzata a Lodge (vedi sopra) Gibbs ha pubblicata la espressione del coefficiente di temperatura della forza elettromotrice delle pile $\left(\frac{dE}{dT}\right)$ in base al valore del calore reversibile sviluppato nella pila, cioè la espressione di q che si ottiene integrando la equazione [3].

Alle equazioni [4] e [5] spetta quindi il nome di *equazioni di* Gibbs.

Equazioni di Gibbs-Helmholtz. — Benchè non siano state esplicitamemte esposte dai due grandi scienziati, ritengo che debbano portare il loro duplice nome non le equazioni sopracitate, ma bensì le due seguenti equazioni che si possono far discendere dai loro studi. Esse sono la equazione che si può dedurre dalla [5] usufruendo delle considerazioni svolte da Gibbs in seguito alla pubblicazione di Helmholtz, cioè la:

$$[6] \qquad E = \frac{Qv}{23100\, n} + T\left(\frac{dE}{dT}\right)_{p\ \mathrm{cost}} + \frac{P\Delta V}{96574\, n}$$

e la correlativa che si può ricavare estendendo tali considerazioni al caso generale, cioè la:

$$[7] \qquad L_p = \Delta U + T\left(\frac{dL}{dT}\right)_{p\ \mathrm{cost}} + P\Delta V.$$

Questi chiarimenti sono necessari perchè, come ho più volte fatto osservare, non sono fatte rilevare nei trattati le differenze fra le condizioni fisiche a cui si riferiscono le equazioni di Gibbs e di Helmholtz, ingenerando così gravi confusioni.

---

[1] I simboli adottati da Gibbs sono differenti da quelli sopra impiegati, che corrispondono a quelli usati di solito in Italia. Ricordo che l'operatore Δ indica *diminuzione* del valore della funzione sotto il segno e che, seguendo la notazione usata in termochimica, ho assegnato segno positivo al calore ceduto dal sistema all'ambiente esterno durante le trasformazioni isotermiche.

Ricordo che la equazione [6] non è quasi mai riportata nei trattati di elettrochimica, mentre questa è l'equazione generale che, a rigore, ha maggior importanza teorica per gli studi sulle pile poichè, salvo casi specialissimi, tali studi vengono effettuati *a pressione costante*. Essa coincide con quella che ho dedotto per le pile a gas. La equazione [7] è riportata in pochissimi trattati (cito quelli di Chimica–Fisica del Taylor, di termodinamica di Mac Dougall e quello sull'Energetica delle reazioni Chimiche dell'Urbain) e ciò benchè essa abbia per gli studi Chimico–Fisici molto maggior importanza della [2], poichè in tali studi si considerano quasi sempre reazioni a pressione costante.

2. — Dalla equazione generale (valida per le trasformazioni isobare, isotermiche e reversibili):

$$L_p = J\Delta U - JT\Delta S + P\Delta V$$

si deduce facilmente (1) la equazione:

$$\left(\frac{dL_p}{dP}\right)_{T\,\text{cost}} = \Delta V$$

e da questa si può ricavare la: $\left(\frac{dE}{dP}\right)_{T\,\text{cost}} = \frac{\Delta V}{96574\,n}$.

Sostituendo nelle equazioni di Gibbs–Helmholtz si ottengono le equazioni:

[8] $$E = \frac{Qv}{23100\,n} + T\left(\frac{dE}{dT}\right)_{p\,\text{cost}} + P\left(\frac{dE}{dP}\right)_{T\,\text{cost}}$$

[9] $$L_p = \Delta U + T\left(\frac{dL}{dT}\right)_{p\,\text{cost}} + P\left(\frac{dL}{dP}\right)_{T\,\text{cost}}$$

delle quali la [8] è stata da me pubblicata anni or sono (2).

Queste equazioni, non ancora riportate nei trattati, hanno notevole interesse per la discussione di alcuni problemi chimico–fisici.

3. — Una questione molto importante riguarda i limiti di applicabilità delle equazioni di Helmholtz e di Gibbs allo studio dei fenomeni naturali. Poichè ambedue queste equazioni si deducono ponendo a base delle dimostrazioni la eguaglianza di Clausius $\left(\oint \frac{dq}{T} = 0\right)$, che è va-

(1) Vedi, ad esempio, il Taylor, *A Treatise of Physical Chemistry*, vol. I, pag. 65.

Bisogna tener conto del cambiamento di alcuni dei simboli usati dal Taylor, cioè porre L_p invece di F; $U + PV$ invece di H.

(2) « Rendiconti della R. Acc. dei Lincei », febbraio 1937–XVI.

lida soltanto per trasformazioni termodinamicamente reversibili, è evidente che ambedue possono venir applicate *rigorosamente* soltanto a casi nei quali le trasformazioni considerate appartengono a questo tipo. Che se anche soltanto una parte delle trasformazioni, facenti parte della trasformazione considerata, è termodinamicamente irreversibile, la applicazione rigorosa delle dette equazioni non può venir effettuata alla trasformazione totale.

In molti casi esse possono tuttavia venir applicate con sufficiente approssimazione. Infatti il primo principio di termodinamica, riferito alle trasformazioni isobare e isotermiche, che comprendono fenomeni reversibili e fenomeni irreversibili, conduce alla equazione:

$$L_p = J\Delta U - JQ_{\text{rev.}} - JQ_{\text{irr.}} + P\Delta V$$

Bisogna tener presente che il calore sviluppato nell'interno del sistema per effetto dei fenomeni reversibili ($Q_{\text{rev.}}$) può avere segno positivo o negativo, mentre quello sviluppato per effetto dei fenomeni irreversibili ($Q_{\text{irr.}}$) ha sempre segno positivo, epperciò la somma algebrica di queste due quantità, misura il calore che, dovendo rimanere costante la temperatura del sistema durante la trasformazione, viene ceduto all'ambiente esterno, ove abbia segno positivo, e quindi va a detrimento dell'energia trasformabile in lavoro.

D'altra parte nel caso di perfetta reversibilità, caso nel quale, *soltanto*, sono rigorosamente valide le equazioni di Helmholtz e di Gibbs, si ha invece:

$$L_p = J\Delta U - JQ_{\text{rev.}} + P\Delta V$$

Risulta che le equazioni di Helmholtz e di Gibbs sono applicabili con buona approssimazione soltanto quando il valore di $JQ_{\text{irr.}}$ è trascurabile rispetto al valore di L_p.

Dei limiti di applicabilità delle equazioni di Helmholtz e di Gibbs ai fenomeni naturali *reali* i quali, come è noto, sono sempre accompagnati da fenomeni irreversibili, e in particolare della loro applicazione allo studio di quelle pile nelle quali il funzionamento è accompagnato da fenomeni irreversibili (come avviene nelle pile con depolarizzante gassoso, nelle pile di diffusione, nelle pile di concentrazione ecc.) tratterò più ampiamente in una prossima Nota.

Chimica (Chimica–Fisica). — *Potenziali elettrochimici e effetto Volta.* VI. – *I potenziali elettrochimici dei metalli e la loro costituzione elettronica* (1). Nota (2) di OSCAR SCARPA, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

1. H. S. TAYLOR (3) ha pubblicato un diagramma dal quale risulta che i potenziali elettrochimici *apparenti* (4) dei metalli, misurati rispetto all'elettrodo normale a idrogeno, variano periodicamente al crescere del peso atomico, e i periodi corrispondono a quelli della classificazione di Mendeleeff.

D'altra parte io ho mostrato (5) che gli effetti Voltiani dei diversi metalli rispetto al platino (e quindi anche rispetto al platino idrogenato) presentano variazioni periodiche al crescere del numero atomico con periodi che pur corrispondono alla classificazione Mendeleeffiana.

---

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Elettrochimica e Chimica–Fisica del R. Politecnico di Milano.

(2) Presentata nell'Adunanza del 30 maggio 1941–XIX.

(3) H. S. TAYLOR, *A Treatise of Physical–Chemistry*, vol. II, pag. 903, London 1939–XVII.

(4) Per la definizione dei potenziali elettrochimici *apparenti* e *reali*, vedere nella mia Nota nei « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », vol. XXIX, serie 6ª, maggio 1939–XVII.

(5) « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », vol. XXIX, serie 6ª, aprile 1939–XVII.

Il diagramma periodico degli effetti Volta che ho allora pubblicato è stato disegnato in base ai valori dei potenziali di contatto pubblicati nelle *Critical Tables*. Questi sono dedotti da misure effettuate con il metodo del condensatore nell'aria e quindi sono affetti da notevoli errori sperimentali, fino allora non determinabili. Nel seguito ho mostrato come si può determinare almeno l'ordine di grandezza di questi errori (vedere nella Nota III della presente serie di studi; nonchè in « Nuovo Cimento », anno 1940–XVIII). Con i valori corretti ho ridisegnato il diagramma, ottenendo una rappresentazione grafica che presenta assai maggiore regolarità di quella precedentemente pubblicata. Tale diagramma corrisponde a quello disegnato nella parte superiore della figura 1 pubblicata nella presente Nota.

Poichè, come ho mostrato nella prima Nota di questa serie di studi, i valori dei potenziali elettrochimici sono ognuno somma del valore del potenziale elettrochimico *reale* del metallo (cioè della differenza di potenziale esistente al contatto del corrispondente elettrodo e dell'elettrolita

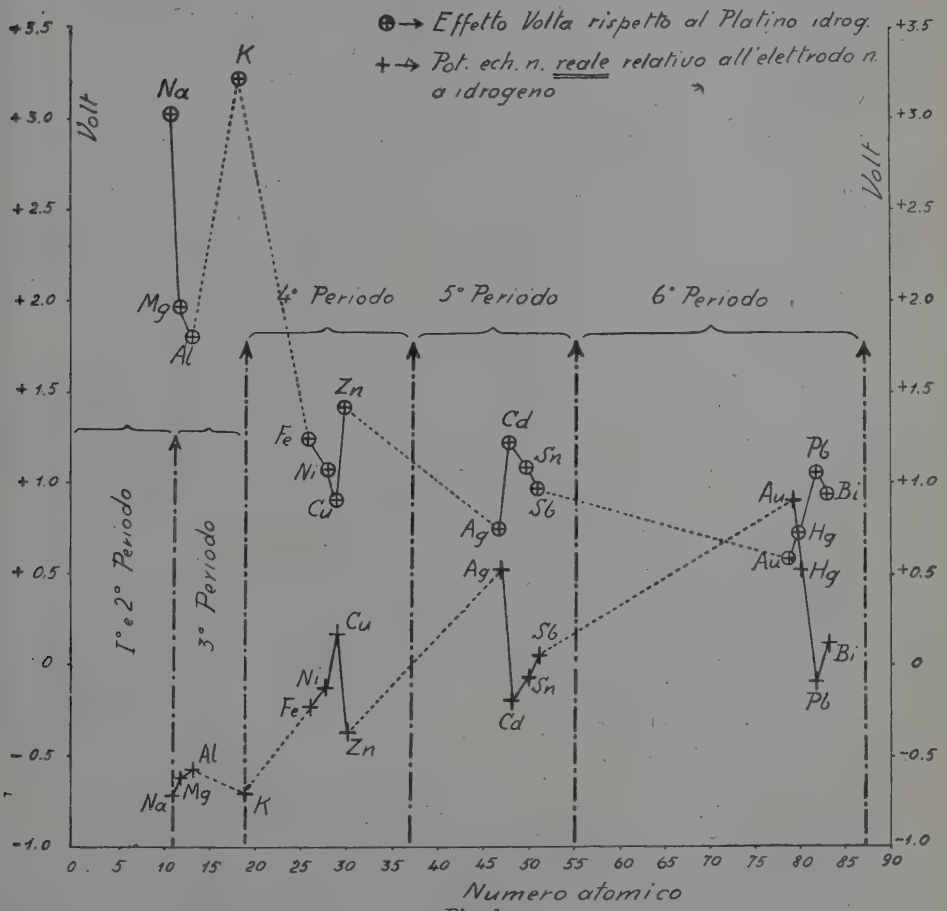


Fig. 1.

che lo bagna) e del potenziale di contatto del metallo rispetto al platino idrogenato (1), appare lecito dubitare che l'andamento periodico del dia-

(1) O. Scarpa, *Potenziali elettrochimici e effetto Volta.* Nota I. « Rendiconti R. Accademia dei Lincei », vol. XXIX, maggio 1939–XVII; vedere anche in « Nuovo Cimento », giugno 1939–XVII.

gramma di Taylor derivi dal fatto che ai potenziali di contatto corrisponde un diagramma con analogo andamento periodico.

2. La questione se i potenziali elettrochimici *reali* dei metalli variano periodicamente al crescere del numero atomico, con periodi corrispondenti alla Classificazione periodica degli elementi, ha importanza per gli studi chimico-fisici poichè la dipendenza dei valori dei potenziali elettrochimici dei metalli dalla costituzione elettronica degli ioni non è stata ancora studiata.

Perciò, come indagine preliminare, ho ricercato se passano delle relazioni fra i valori dei potenziali elettrochimici *reali* [1] e il numero atomico dei corrispondenti metalli, e, in particolare se esiste relazione con il numero degli elettroni compresi nello strato periferico, cioè con quelli nello strato alla cui costituzione si attribuiscono le più salienti proprietà chimiche degli elementi. Analoga ricerca ho fatto per quanto riguarda i lavori di estrazione elettrochimica degli ioni. Inoltre ho esaminato se esiste una relazione fra questi lavori e il numero di atomi, e quindi di ioni, esistenti nell'unità di volume del corrispondente metallo, poichè anche da questo numero dovrebbero dipendere le forze che si oppongono alla estrazione degli ioni del metallo [2].

Usufruendo dei valori *reali* dei potenziali elettrochimici normali (relativi al potenziale dell'elettrodo normale a idrogeno) che ho pubblicato nelle precedenti Note, ho disegnato il diagramma che è riprodotto nella parte inferiore della fig. 1. In questo disegno, per mettere in maggiore evidenza le relazioni fra potenziali elettrochimici *reali* e potenziali Voltiani, ho riprodotto, nella parte superiore, il sopraccennato diagramma periodico degli effetti Voltiani, riferendoli però non al Platino puro ma bensì al Platino idrogenato in condizioni di equilibrio con l'idrogeno gassoso alla temperatura ambiente e alla pressione di una atmosfera [3].

---

[1] Non si deve dimenticare che questi valori *reali* sono dedotti ammettendo valida la teoria di Millikan per il calcolo degli effetti Voltiani *interni*. Essa pone che sieno eguali, in ogni coppia bimetallica, i valori del potenziale di contatto e dell'effetto Volta *esterno* (vedere per la discussione di tale ipotesi quanto ho scritto nelle Note precedenti e in particolare nella Nota II).

[2] Non si deve però dimenticare che il lavoro elettrochimico di estrazione del grammo-ione (cioè il prodotto del valore del potenziale elettrochimico assoluto per 96574 n, ove n indica la valenza dell'ione) dipende anche dal valore del lavoro corrispondente al calore di solvatazione dell'ione.

[3] Nelle mie Note precedenti ho fatto rilevare che nell'elettrodo normale a idrogeno esiste una differenza di potenziale Voltiano fra il terminale esterno (che è di Platino puro) e il metallo a contatto con l'elettrolita. Questo metallo è infatti costituito da una lega di platino e idrogeno con concentrazione in equilibrio con

Da questa rappresentazione grafica risultano due fatti principali:

1° I valori dei potenziali elettrochimici *reali* (relativi all'elettrodo n. a idrogeno) dei diversi metalli variano periodicamente al crescere del numero atomico e i periodi corrispondono a quelli del sistema periodico degli elementi.

2° Tali variazioni periodiche corrispondono a quelle che presentano gli effetti Voltiani.

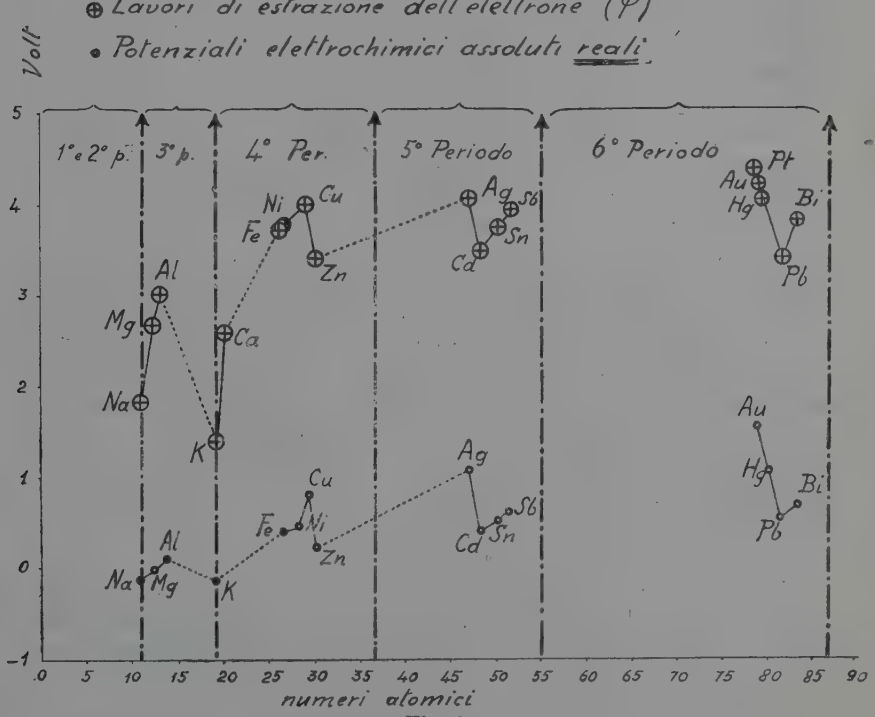


Fig. 2.

Ciò posto, ho esteso l'indagine ai valori dei potenziali elettrochimici *assoluti* (che vanno considerati con le restrizioni esposte nella Nota IV della presente serie di studi) e con questi ho disegnato il diagramma che è riportato nella fig. 2 (in basso).

---

l'idrogeno gassoso nelle surriferite condizioni. Tale differenza di potenziale Voltiana fu da me trovata eguale a + 0,5 Volt con il Platino idrogenato elettropositivo. (Vedere nelle Note 1ª, 2ª e 3ª della presente serie di studi).

Dall'esame di questo diagramma risulta in modo indubbio che pur *i detti valori dei potenziali elettrochimici assoluti dei metalli variano periodicamente al crescere del numero atomico e i periodi corrispondono a quelli della classificazione Mendeleeffiana.*

È facile convincersi che un analogo andamento ha il diagramma dei lavori di estrazione elettrochimica degli ioni metallici, cioè dei prodotti dei corrispondenti valori dei potenziali assoluti per la carica dell'ione.

Ho poi ritenuto interessante confrontare i valori dei potenziali elettrochimici assoluti nonchè quelli dei lavori di estrazione elettrochimica dell'ione metallico dal corrispondente metallo, con i lavori di estrazione dell'elettrone dallo stesso metallo, estrazione che viene effettuata mediante i fenomeni fotoelettrici e termoelettronici.

Perciò, con i dati riportati nelle precedenti Note [1], ho disegnato il diagramma riprodotto nella figura 2 in alto. Da questo risulta che anche la funzione elettronica φ varia periodicamente, e i periodi corrispondono a quelli dei potenziali elettrochimici.

Infine, tenendo presente che i lavori di estrazione elettrochimica degli ioni dai metalli sono somma del lavoro necessario per strappare l'ione dal reticolo metallico con quello corrispondente al calore di solvatazione dell'ione [2], ho disegnato il diagramma di questi calori di solvatazione in funzione del numero atomico. Questo diagramma, è molto incompleto in causa della scarsità dei dati, ma di alcune sue particolarità molto interessanti dirò nel seguito.

3° Per lo studio dei fatti ora descritti è utile riferirsi a quella rappresentazione grafica del sistema periodico degli elementi che ho ideata alcuni anni or sono [3] e che completata e aggiornata è riprodotta nella fig. 3.

Fondamento di questa rappresentazione è la relazione periodica fra il numero degli elettroni formanti lo strato periferico (corticale) degli atomi dei diversi elementi e il numero degli elettroni extranucleari, cioè il numero atomico [4]. Ne è risultata una rappresentazione del sistema

---

[1] Questi dati risultano dalla tabella di Butler, « Phyl. Mag. », vol. XLVIII, 1924.

[2] Vedere nella Nota VII di questa serie di studi, pubblicata negli « Atti » di questa Accademia.

[3] *Alcune rappresentazioni grafiche del sistema periodico degli elementi.* « Atti del IX Congresso Internacional de Quimica Pura y Aplicada », Madrid, 1934.

[4] Per questa seconda rappresentazione vedi anche nella Nota: *Effetto Volta e sistema periodico degli elementi.* « Rend. R. Acc. dei Lincei », vol. XXIX, serie 6ª, aprile-XVII.

Nel diagramma di figura 3, il numero degli elettroni costituenti lo strato corticale è indicato per la categoria 3 al disotto del simbolo degli elementi. Poichè

periodico in cui gli elementi sono nettamente separati in due categorie che comprendono i diversi gruppi.

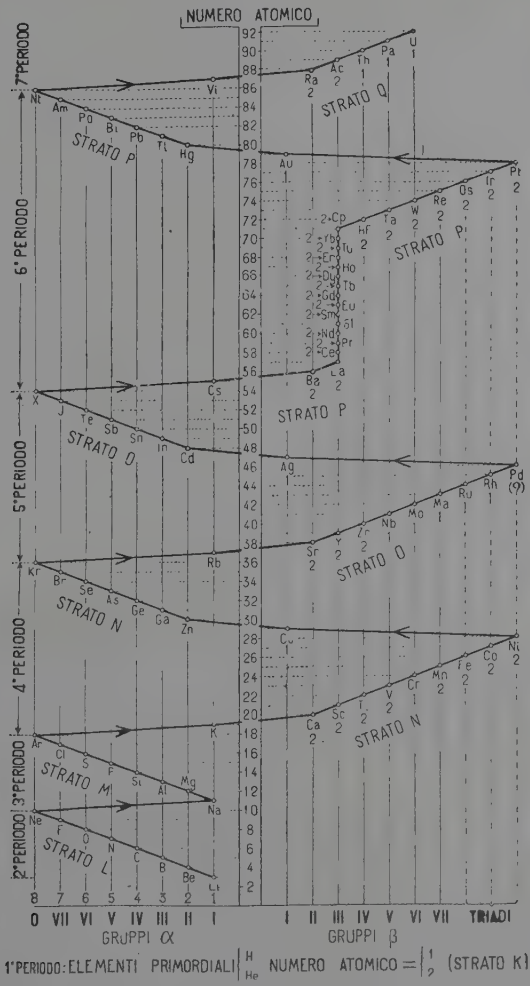


Fig. 3.

Ho indicato queste categorie con le lettere α e β. È notevole che i gruppi che esse comprendono corrispondono a quelli considerati in alcune

---

negli elementi della categoria α il numero di tali elettroni varia regolarmente in ogni periodo da 1 a 8, i corrispondenti numeri sono stati scritti una sol volta, in basso, al di sopra dei numeri (romani) indicanti il gruppo.

rappresentazioni del sistema Mendeleeffiano, dedotte in base a considerazioni di altra natura. Viene così messa in evidenza una differenza di fondamentale importanza nella costituzione degli elementi appartenenti alle due categorie, infatti tutti gli elementi dei gruppi α posseggono nello strato periferico (corticale) numeri di elettroni che crescono regolarmente al crescere del numero atomico da 1 a 8 nel secondo e terzo periodo Mendeleeffiano, e da 2 a 8 nel quarto, quinto e sesto periodo, mentre negli elementi dei gruppi β il numero degli elettroni compresi nello strato periferico è *uno* o *due* (generalmente: *due*).

Gli elementi: rame, argento, oro costituiscono il 1° gruppo della categoria β, e vengono a occupare posizioni singolari dalle quali chiaramente risulta come a differenza degli alcalini, che provengono dall'addizione di un elettrone agli elementi il cui strato corticale è completo e l'elettrone aggiunto inizia un nuovo strato periferico (che rimane costituito da uno o da due elettroni per tutti i successivi elementi del semiperiodo), il Rame, l'Argento e l'Oro provengono dall'addizione di un elettrone agli elementi estremi delle triadi (rispettivamente al Nickel, al Palladio e al Platino, il cui strato esterno comprende due soli elettroni) e danno inizio a un semiperiodo nel quale lo strato corticale procede aumentando regolarmente di un elettrone per ogni successivo elemento, fino a risultare completo (con otto elettroni) [1].

Se si confrontano le particolarità presentate dai diagrammi che si riferiscono ai potenziali elettrochimici reali, relativi e assoluti, ai lavori di estrazione fotoelettrica degli elettroni (fig. 1 e 2) e a quelli di estrazione elettrochimica degli ioni, con le indicazioni che dà il diagramma di fig. 3, circa il numero degli elettroni contenuti nello strato corticale, risulta che in tutto il terzo periodo Mendeleeffiano, nella 1ª parte del IV, da Potassio a Rame, nella 2ª parte del V, da Cadmio a Antimonio e nella 2ª parte del VI, da Piombo a Bismuto, i valori dei potenziali elettrochimici, dei lavori di estrazione elettrochimici degli ioni e di quelli di estrazione fotoelettrica degli elettroni, crescono al crescere del numero degli elettroni corticali. Soltanto nel IV periodo, da Rame a Zinco, nel

---

[1] Con la presente rappresentazione del sistema periodo risultano pure altre salienti differenze nella costituzione elettronica degli elementi appartenenti alle due grandi categorie α e β. Gli elementi appartenenti ai gruppi β, dal calcio al rame inclusi, posseggono infatti eguale simbolo di numero quantico azimutale per tutte le orbite degli elettroni appartenenti allo strato periferico, fatto che si riproduce per le serie dallo Stronzio all'Argento inclusi, dal Bario all'Oro inclusi e da Radio a Uranio. Nei gruppi che ho indicato con α, i livelli energetici delle orbite degli elettroni nello strato periferico cambiano invece in ogni periodo secondo i corrispondenti numeri quantici.

Per maggiori notizie vedere nella citata Nota pubblicata sugli « Atti del Congresso Internazionale di Chimica » di Madrid.

V da Argento a Cadmio, e nel VI periodo da Oro a Piombo, l'andamento si inverte. Questi ultimi fatti corrispondono a radicali differenze nella genesi dei metalli Rame, Argento, Oro da quella dei metalli: sodio, potassio, (e più genericamente dei metalli alcalini) che pur sono compresi nel primo gruppo Mendeleeffiano. Tali gruppi di metalli appartengono infatti alle due categorie α e β messe in evidenza con il diagramma sopracitato. D'altra parte sono note le radicali differenze che ad essi corrispondono nelle proprietà chimiche e fisiche.

Analogie di andamento, si osservano anche nel confronto del diagramma che assegna il numero degli elettroni periferici al crescere del numero atomico con quello che assegna le variazioni del numero degli atomi (e quindi degli ioni) esistenti nell'unità di volume dei metalli, eccezion fatta nel V periodo da Cadmio a Antimonio e nel VI periodo da Piombo a Bismuto.

Per quanto riguarda il diagramma dei calori di idratazione degli ioni in funzione del numero atomico, esso indicherebbe (nella parte disegnabile) le stesse caratteristiche di andamento del diagramma avente per ordinate il numero degli elettroni corticali. Questo fatto avrebbe evidentemente notevole significato rispetto alle cause da cui derivano i fenomeni di solvatazione degli ioni. Ma il diagramma è troppo incompleto per poter concludere. Uno studio più particolare del fenomeno di idratazione degli ioni, verrà esposto in una Nota successiva.

Conclusioni.

Nella presente Nota ho mostrato:

1° I potenziali elettrochimici dei metalli, che (in base alla ipotesi Voltiana) si debbono ritenere *reali*, variano periodicamente al crescere del numero atomico e i periodi corrispondono a quelli della Classificazione di Mendeleeff. In modo analogo variano i lavori di estrazione elettrochimica degli ioni.

2° I lavori di estrazione fotoelettrica dell'elettrone dai metalli variano periodicamente al crescere del numero atomico e i periodi corrispondono a quelli della Classificazione di Mendeleeff.

3° L'andamento delle variazioni che subiscono i lavori di estrazione fotoelettrica degli elettroni dai metalli, al crescere del numero atomico, corrisponde a quelle dei lavori di estrazione elettrochimica degli ioni.

4° Le variazioni che subiscono i suddetti parametri al crescere del numero atomico, mostrano l'esistenza di interessanti relazioni con il numero degli elettroni corticali e con il numero degli ioni esistenti nell'unità di volume dei metalli.

5° Per quanto risulta dagli scarsi dati fin'ora posseduti, i calori di solvatazione degli ioni variano periodicamente al crescere del numero atomico e le variazioni sembrano corrispondere a quelle del numero degli elettroni corticali.

Chimica (Chimica biologica). — *Ricerche sulla scissione enzimatica dell'acido l-(+)-fosfolattico* (1). Nota di Orfeo Turno Rotini, presentata (2) dall'Accademico Pietro Rondoni.

La ricerca enzimatica, in questo ultimo decennio, ha già dimostrato che la fosfatasi presenta un campo d'azione straordinariamente vasto. La scuola di C. Neuberg, attraverso una serie numerosa di lavori, ha infatti stabilito, che la fosfatasi decompone gli eteri dell'acido fosforico della serie aromatica, alifatica e idroaromatica comprendenti aggruppamenti alcoolici o fenolici indipendentemente dal peso molecolare alto o basso.

La fosfatasi si è dimostrata attiva anche sopra gli eteri fosforici primari e secondari come pure sugli eteri pirofosforici (3).

Furono anche descritte fosfatasi attive in concentrazioni idrogenioniche diverse. Recentemente K. V. Giri (4) ha riscontrato nel latte umano una fosfatasi alcalina avente un optimum di azione a pH = 9,2 accanto ad una fosfatasi acida che presenta il grado di acidità optimum intorno a pH = 5,1.

Sono anche accessibili alla pura scissione idrolitica, promossa dalle fosfatasi di varia origine, gli eteri fosforici di composizione relativamente semplice come ad esempio i composti della serie a tre atomi di carbonio.

Questo si è infatti dimostrato dapprima per l'acido glicerofosforico da parte di C. Neuberg e L. Karczag (5). Le glicerofosfatasi di origine animale sono state studiate anche da S. Belfanti, A. Contardi e A. Ercoli (6) i quali hanno dimostrato l'esistenza di alcune analogie di compor-

---

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Agraria della R. Università di Milano,.

(2) Nell'Adunanza del 30 maggio 1941-XIX.

(3) La letteratura fino al 1928 è contenuta in: C. Neuberg e E. Simon, *Einfache Phosphorsäure-ester der aliphatischen, aromatischen und hydroaromatischen Reihe. Phosphatasen.* « Oppenheimers Methodik der Fermente », vol. III, pag. 423 e 743 (1929).

(4) K. V. Giri, *Ueber Frauenmilch-Phosphatase*, « Zeitschr. Phys. Chemie », *243*, 57 (1936).

(5) C. Neuberg e L. Karczag, *Ueber zuckerfreie Hefegärungen.* III. « Biochemische Zeitschrift », *36*, 60 (1911).

(6) S. Belfanti, A. Contardi e A. Ercoli, *Studies on the Phosphatases* « Biochemical. Journal », *29*, 517-842-1491 (1935).

tamento e di alcune differenze nettissime tra le fosfatasi alcaline del fegato e del rene e quelle del siero e delle ossa.

Una serie di ricerche sperimentali sopra le caratteristiche chimico–cinetiche delle glicerofosfatasi del riso e dell'*Aspergillus oryzae* furono da me compiute in collaborazione con A. Fabris [1] anche per determinare la validità dell'equazione fondamentale chimico–cinetica dell'attività delle glicerofosfatasi sino alla temperatura di congelamento dell'acqua [2].

Successivamente M. Vogt [3] ha studiato una fosfatasi attiva per l'acido fosfoglicerico racemico e I. St. Neuberg–Rabinowitz e R. Levy [4] per quello otticamente attivo. H. Collatz [5] ha indagato sulla fosfatasi dell'acido diossiacetonfosforico e K. Lohmann e O. Meyrhof [6] su quella dell'acido fosfopiruvico.

Anche l'etere fosforico dell'aldeide glicerica [7] [8] sotto l'influenza della fosfatasi si scinde, come pure segue la stessa sorte l'acido difosfoglicerico [9].

Dalle ricerche compiute da Th. Wagner–Jauregg [10] sembrò che l'acido fosfo–l–lattico facesse eccezione. Infatti questo autore, cui si

---

[1] O. T. Rotini e A. Fabris, *Ricerche sopra le glicero–fosfatasi del riso e dell'« Aspergillus oryzae »*. « Annali del Laboratorio di ricerche sulle fermentazioni " L. Spallanzani " », *2*, 415 (1931).

[2] O. T. Rotini e A. Fabris, *Ricerche sulle attività enzimatiche a bassa temperatura.* – III. *Le glicerofosfatasi.* « Annali del Laboratorio di ricerche sulle fermentazioni " L. Spallanzani " », *2*, 501 (1931).

[3] M. Vogt, *Ueber Glycerinsäure mono–Phosphorsäure.* « Biochemische Zeitschrift », *211*, I (1929).

[4] I. St. Neuberg, Rabinowitz e R. Levy, *Préparation par voie diastasique de l'acide (–) glycérique pur à partir de l'acide 3–phospho–glycerique.* « Annales des fermentations », I, *41*, (1935).

[5] H. Collatz, *Die enzymatische Hydrolyse der Dioxyacetonmonophosphorsäure.* « Biochemische Zeitschrift », *278*, 364 (1935).

[6] K. Lohmann e O. Meyrhof, *Ueber die enzymatische Umwandlung von Phosphoglycerinsäure in Brenztraubensäure und Phosphorsäure.* « Biochemische Zeitschrift », *273*, 60 (1934).

[7] C. V. Smythe e W. Gerischer, *Ueber die Vergärung von Hexosemonophosphorsäure und 3–Glycerinaldehydiphosphorsäure.* « Biochemische Zeitschrift », *260*, 414 (1933).

[8] G. Embden e H. Jost, *Ueber die Zwischenstufen der Glykolyse in der quergestreiften Muskulatur.* « Zeitschr. Phys. Chemie », *230*, 69 (1934).

[9] C. Neuberg, W. Schuchardt e A. Vercellone, *Umwandlung von Glycerinsäure–d–Phosphorsäure in Brenztraubensäure.* « Biochemische Zeitschrift » *271*, 229 (1934).

[10] Th. Wagner Jauregg, *Phosphor–l–Milchsäure.* « Berichte der Deutschen Chemischen Gesellschaft », *68*, 670 (1935).

deve una elegante sintesi di questa sostanza, comunicò che mediante l'estratto di muscolo di rana l'acido fosfo-l-lattico non era scindibile. Egli attribuì ai fosfolattati una resistenza notevole verso gli enzimi idrolizzanti.

Siccome anche all'acido B-glicerinfosforico (1) era stata riconosciuta una apparente capacità di resistenza verso la fosfatasi del lievito, O. T. Rotini e C. Neuberg (2) istituirono una serie di ricerche per vedere se effettivamente non esistono fosfatasi capaci di attaccare l'acido fosfolattico levogiro.

O. T. Rotini e C. Neuberg accertarono che l'acido fosfo-l-lattico è scindibile sia per mezzo di fosfatasi di origine animale sia attraverso alcune fosfatasi contenute nei vegetali inferiori. Il substrato venne infatti facilmente idrolizzato dall'estratto di muscolo di coniglio e dalla fosfatasi dell'*Aspergillus oryzae* e dal lievito di birra alto e basso. In tutti questi casi l'idrolisi si dimostrò praticamente quantitativa.

Rimaneva da stabilire se anche le fosfatasi contenute nei vegetali superiori sono attive sopra l'acido fosfo-l-lattico e se nelle ricerche di Th. Wagner-Jauregg il risultato negativo dell'indagine fosse in relazione con la mancanza della fosfatasi nella muscolatura della rana oppure se la mancanza del fermento attivo fosse dovuto alla preparazione dell'estratto, o se l'inattivazione dell'estratto muscolare fosse legata ad un arricchimento in sostanze inattivanti o ad un allontanamento degli attivatori.

L'interesse di queste ricerche è giustificata anche dal fatto che l'acido fosfo-l-lattico, qui oggetto d'indagine, è un derivato dell'acido lattico molto diffuso in natura.

Anche per l'esecuzione del presente lavoro sono partito, come per quello da me fatto in collaborazione con C. Neuberg, da un acido lattico cristallizzato, punto di fusione = 53° identico cioè a quello dell'acido lattico puro preparato da Borsook (3) e collaboratori.

Il sale di zinco preparato dal materiale di partenza mediante prolungata ebollizione con ossido di zinco era l-(+)-lattato quasi puro.

La preparazione dell'acido fosfolattico venne fatta secondo le prescrizioni di Th. Wagner-Jauregg.

---

(1) W. Schuchardt, *Ueber Spaltung von a-und b-glicerophosphaten durch frische Hefe und gelostes Hefenferment.* « Biochemische Zeitschrift », *278*, 164 (1935).

(2) O. T. Rotini e C. Neuberg, *Zur Frage nach der Spezifität der Phosphatase. Die phosphatatische Spaltung der Phospho-l (-)milchsäure.* « Biochemische Zeitschrift » *279*, 453 (1935).

(3) H. Borsook, H. M. Huffmann e Y. P. Liu, *The preparation of Crystalline lactic-acid.* « Journal Biological Chemistry », *102*, 449, 1933.

Grammi 5,4 di acido–l–(+)–lattico cristallizzato viene sciolto in 5 cc. di piridina assolutamente esente da acqua scaldando leggermente. Si raffredda la soluzione a —20° e si aggiunge goccia a goccia agitando e procurando che la temperatura rimanga a —20°, una miscela di gr. 9,2 di ossicloruro di fosforo sciolto in 5 cc. di piridina esente da acqua e già raffreddata.

Si lascia in ghiacciaia tutta la notte e poi ancora 1 ora e mezza a temperatura ambiente.

Si aggiunge poi ghiaccio e acqua fredda per portare la soluzione a 60 cc. Per l'idrolisi dell'acido pirofosforico, che si forma durante la precipitazione dell'eccesso di ossicloruro di fosforo e che disturberebbe le ulteriori operazioni, si scalda 15 minuti in bagno maria bollente.

Piccole quantità di olio contenenti cloro vengono filtrate ed il filtrato si tratta con acetato di bario fino a reazione nettamente alcalina.

Precipita così il fosfato inorganico che si separa per centrifugazione, indi si completa la precipitazione di tutto il fosforo inorganico con cloruro di magnesio in soluzione leggermente ammoniacale.

Si separa il precipitato per centrifugazione e si pone il liquido in un imbuto separatore a rubinetto aggiungendo una doppia quantità di etere etilico.

Si separano così due strati, uno superiore di etere e piridina ed un secondo inferiore di acqua contenente in soluzione il sale di bario dell'acido fosfolattico. Occorre aggiungere inizialmente al liquido qualche goccia di ammoniaca perchè la piridina diviene più solubile in etere e più facile diviene quindi l'allontanamento della piridina stessa.

Si ripete questa estrazione per due o tre volte, indi dopo avere acidificato con acido cloridirico fino a debole reazione acida al tornasole, si aggiunge alcool etilico per precipitare il sale di bario dell'etere fosfolattico.

Per la purificazione del sale si precipita due volte dall'acqua con alcool e poi, dopo aver sciolto in poca acqua fredda, si precipita riscaldando e filtrando a caldo.

Si porta poi sotto vuoto per varie ore in presenza di anidride fosforica. Il rendimento è stato di circa 1,5 gr. di sale di bario puro.

Ho ottenuto gli stessi risultati già riferiti da Th. Wagner–Jauregg, per quanto concerne le caratteristiche del sale di bario dell'acido fosfolattico così preparato. La rotazione del sale potassico ottenuto per spostamento del sale di bario è stato $\alpha_D = -9{,}64°$ come comunica lo stesso Wagner–Jauregg.

Ho così accertato nel corso di queste ultime prove che l'acido fosfo––l–lattico viene facilmente idrolizzato oltre che dalle fosfatasi di origine animale e quelle estratte dai vegetali inferiori, anche dalle fosfatasi contenute nei vegetali superiori.

L'idrolisi dell'acido fosfo–l–lattico, promossa dalle fosfatasi contenute nella farina di frumento, nella pula di riso, nel malto d'orzo, nella soja, nelle graminacee in erba (*Brachypodium silvaticum*), risulta infatti praticamente quantitativa.

Ho pure accertato che l'acido fosfo–l–lattico viene facilmente attaccato e scisso anche dalle fosfatasi contenute nell'estratto del muscolo di rana per cui è da ritenere che Th. Wagner–Jauregg abbia lavorato con estratto di muscolo di rana inavvertitamente inattivato per quanto riguarda il contenuto fosfatasico.

La scissione dell'acido fosfolattico promossa dalle fosfatasi del muscolo di rana si è dimostrata praticamente quantitativa.

Per accertarmi che si trattava di una pura scissione idrolitica, dopo la scissione enzimatica, promossa dall'estratto di muscolo di rana, ho isolato quantitativamente l'acido lattico nel liquido d'idrolisi. Proceduto alla preparazione del sale di zinco, ho potuto constatare che il sale di zinco per la sua forma di cristallizzazione, per la sua composizione e per la sua rotazione corrisponde evidentemente al sale dell'acido lattico–l–(+) puro.

Riesce così dimostrato che, come per gli altri composti, anche per l'acido fosfo–l–lattico la scissione enzimatica promossa dalle varie fosfatasi di origine animale e vegetale, compresi i vegetali superiori, si svolge come una pura scissione idrolitica.

Ringrazio la signorina dott. Emilia Piazzoli che mi è stata di valido aiuto nelle numerose determinazioni colorimetriche dell'anidride fosforica liberatasi nelle prove di idrolisi enzimatica.

Parte sperimentale.

Il sale di Ba dell'acido fosfo–l–lattico non era perfettamente puro. L'analisi dava i seguenti valori

		Ba	P
$(C_3H_4O_6P)_2Ba_3\,4\,H_2O$	Calcolato:	50,38 %	7,58 %
818	trovato:	48,84 — 49,09 %	7,47 — 7,53 %

Dalla soluzione del sale di bario per spostamento con solfato di sodio si ottenne il sale di sodio corrispondente sotto forma di una soluzione all'1,76 %; questa soluzione aveva, in un tubo da 2 dm. la rotazione: $\alpha = -0{,}34°$; da cui si calcola $(\alpha)_D = -9{,}64°$.

L'acido lattico usato per la fosforilizzazione presentava, in soluzione, la rotazione $(\alpha)_D = -11{,}1$. Questo valore così alto è probabilmente in relazione alla presenza nel prodotto di partenza di vari prodotti di lattamizzazione, i quali, secondo il risultato della titolazione, sarebbero stati presenti nella misura dell'11 %.

Il lattato di zinco ottenuto dall'acido lattico di partenza, presentava, riferito al sale anidro in soluzione al 5,04 % la rotazione di $\alpha = -0,84$ in tubo da 2 dm., per cui $(\alpha)_D = -8,33°$.

Le determinazioni del fosforo idrolizzato vennero eseguite con il metodo colorimetrico di K. Lohmann e L. Jendrassik [1] opportunamente modificato nel modo seguente:

Una parte aliquota del liquido idrolizzato si introduce in un matraccio tarato da 10 cc. per la dealbuminazione. A tal uopo si aggiungono 5 cc. di acido tricloro-acetico al 15 % e dopo agitazione si lascia qualche minuto in riposo dopo aver portato a volume con acqua distillata. Eventualmente si aggiunge una piccola quantità di farina fossile e si filtra su carta Macherey Nagel e Co n. 660.

Si preleva quindi una quantità di liquido che contenga all'incirca un decimo di milligrammo di fosforo libero e si pone in un matraccio tarato da 25 cc.

Si aggiungono 5 cc. di una soluzione solforica di molibdato d'ammonio (preparato con 510.8 gr. di acido solforico concentrato e 50 gr. di molibdato di ammonio portando il tutto a due litri con acqua distillata) ed 1 cc. di una soluzione di Eikonogen acido-1-amido-2 naftol-4-solforico purissimo (preparata con gr. 1,2 di Eikonogen, cc. 487 di una soluzione al 15 % di bisolfito sodico e 12,5 cc. di una soluzione di solfito sodico al 20 %) portando a volume con acqua distillata.

Si lascia per 6 minuti a 37° C e dopo aver raffreddato a temperatura ambiente si determina colorimetricamente il contenuto in fosforo usando come campione una soluzione di fosfato bisodico contenente mgr. 0,1 di fosforo per centimetro cubico.

1.

Idrolisi dell'acido fosfo-l-lattico con estratto di farina di frumento.

A) 28,8 mg. di fosfolattato sodico sciolti in 5 cm^3. d'acqua;
cc. 5 tampone acetico M/1 (pH = 4,65);
cc. 9 di estratto di farina di frumento;
cc. 1 di $MgSO_4$ M/10 (come attivatore);
gocce 5 di toluolo;

B) cc. 5 acqua distillata;
cc. 5 tampone acetico M/1 (pH = 4,65);
cc. 9 estratto di farina di frumento;
cc. 1 $MgSO_4$ M/10;
gocce 5 toluolo;

---

[1] K. Lohmann e L. Jendrassik, *Kolorimetriche Phosphorsäurebestimmungen Muskelextrakt.* « Biochemische Zeitschrift », *178*, 418 (1926).

C) mg. 28,8 di fosfolattato sodico sciolti in 5 cc. di acqua;
cc. 5 tampone acetico M/1 (pH = 5,6);
cc. 9 estratto di farina di frumento;
cc. I $MgSO_4$ M/10;
gocce 5 di toluolo;

D) cc. 5 acqua distillata;
cc. 5 tampone acetico (pH = 5,6);
cc. 9 estratto di farina di frumento;
cc. 1 $MgSO^1$ M/10;
gocce 5 toluolo.

Per la preparazione della soluzione enzimatica si è proceduto nel modo seguente: gr. 20 di frumento macinato vennero aggiunti a cc. 100 d'acqua distillata con alcune gocce di toluolo. Dopo agitazione si conserva in termostato a 30° per un'ora e mezza e si filtra. Il filtrato limpido misura un grado di acidità pH = 6,1.

Il grado di acidità (pH) delle soluzioni venne controllato ad ogni determinazione potenziometricamente con elettrodo a chinidrone ed elettrodo di riferimento a calomelano.

Le prove furono condotte alla temperatura di 37°. Si prelevarono dopo 4; 22 e 51 ore dei campioni per la determinazione colorimetrica dell'acido fosforico separatosi in seguito all'azione della fosfatasi.

Prove	mg. di *P* separati da 1 cc. di soluzione			mg. di *P* separati dal substrato in 1 cc. di soluzione			quantità di *P* separata in %		
	dopo 4 ore	dopo 22 ore	dopo 51 ore	dopo 4 ore	dopo 22 ore	dopo 51 ore	dopo 4 ore	dopo 22 ore	dopo 51 ore
A	0.1552	0.2132	0.2707	0.0776	0.1257	0.1746	41	66	92
B	0.0776	0.0875	0.0961	—	—	—	—	—	—
C	0.1350	0.2000	0.2707	0.0557	0.1138	0.1731	29	60	91
D	0.0793	0.0862	0.0976	—	—	—	—	-	—

2.

Idrolisi dell'acido fosfo-l-lattico promossa dall'estratto di pula di riso.

a)

A) mg. 28,8 di fosfolattato sodico sciolti in 5 cc. di acqua;
cc. 5 tampone acetico pH = 4,6;
cc. 9 estratto di pula di riso;
cc. 1 $MgSO_4$ M/10;
gocce 5 toluolo;

B) cc. 5 acqua distillata;
il resto come *A*) senza il substrato.

C) mg. 28,8 di fosfolattato sodico sciolti in 5 cc. di acqua;
cc. 5 tampone acetico pH = 5,6;
cc. 9 estratto di pula di riso;
cc. 1 $MgSO_4$ M/10;
gocce 5 di toluolo.

D) 5 cc. di acqua distillata;
il resto come *C*) senza il substrato.

L'estratto enzimatico venne preparato da gr. 20 di pula di riso finemente macinata e aggiunta di cc. 100 di acqua distillata e qualche goccia di toluolo. Dopo agitazione si pone in termostato a 30° per un'ora, indi si filtra.

Il filtrato presenta un pH = 6,1.

Le prove vennero poste in termostato a 37° C e si prelevarono i campioni dopo 4 e 21.30 ore.

Prove	mg. di *P* separati da 1 cc. di soluzione		mg. di *P* separati dal substrato in 1 cc. di soluzione		quantità di *P* separata in %	
	dopo 4 ore	dopo 21.30 ore	dopo 4 ore	dopo 21.30 ore	dopo 4 ore	dopo 21.30 ore
A	0.2325	0.4750	0.1030	0.1900	54	100
B	0.1295	0.2850	—	—	—	—
C	0.2032	0.4356	0.0783	0.1506	41	79
D	0.1249	0.2850	—	—	—	—

b).

A) mg. 23,0 di fosfolattato sodico in cc. 4 di acqua;
cc. 5 di tampone acetico pH = 4,65;
cc. 1 $MgSO_4$ M/10;
cc. 9 estratto di pula di riso;
gocce 5 di toluolo.

B) cc. 4 acqua distillata;
il resto come *A*) senza substrato.

Prove	mg. di *P* separati da 1 cc. di soluzione		mg. di *P* separati dal substrato in 1 cc. di soluzione		quantità di *P* separata in %	
	dopo 4 ore	dopo 27 ore	dopo 4 ore	dopo 27 ore	dopo 4 ore	dopo 27 ore
A	0.172	0.3221	0.063	0.1035	39	64
B	0.106	0.2186	—	—	—	—

c)

A) mg. 17.3 di fosfolattato in cc. 3 di acqua;
cc. 5 tampone acetico *M*/1 pH = 5.6;
cc. 9 estratto di pula di riso;
cc. 1 $MgSO_4$ M/10;
gocce 5 di toluolo.

B) cc. 3 di acqua distillata;
il resto come *A*) senza substrato.

Prove	mg. di *P* separati da 1 cc. di soluzione		mg. di *P* separati dal substrato in 1 cc. di soluzione		quantità di *P* separata in %	
	dopo 4 ore	dopo 27 ore	dopo 4 ore	dopo 27 ore	dopo 4 ore	dopo 27 ore
A	0.1240	0.2810	0.0365	0.0540	29	43
B	0.0875	0.2270	—	—	—	—

Per la preparazione della soluzione enzimatica impiegata nelle prove *b–c* si macinarono gr. 10 di pula di riso che vennero aggiunti a cc. 100 di acqua distillata e qualche goccia di toluolo. Dopo agitazione si tenne in termostato per 15 h. Si filtra (*pH* = 6,2) e si adopera il liquido.

3.

Idrolisi dell'acido fosfo-l-lattico con malto d'orzo.

A) mg. 28.8 di fosfolattato sodico sciolti in cc. 5 di acqua distillata;
cc. 5 tampone acetico M/1 pH = 4.6;
cc. 9 estratto di malto d'orzo;
cc. 1 $MgSO_4$ M/10;
gocce 5 di toluolo.

B) cc. 5 di acqua distillata;
il resto come *A*) senza substrato.
C) mg. 28.8 di fosfolattato sodico sciolti in 5 cc. di acqua;
cc. 5 tampone acetico M/1 pH = 5.6;
cc. 9 estratto di malto d'orzo;
cc. 1 $MgSO_4$ M/1;
gocce 5 di toluolo.
D) cc. 5 di acqua distillata;
il resto come *C*) senza substrato.

Per la preparazione della soluzione enzimatica:
gr. 20 di malto d'orzo macinato;
cc. 100 d'acqua distillata, qualche goccia di toluolo.
Si agita, si tiene in termostato a 30° per 1 h.; si filtra (pH = 5.65).

Prove	mg. di *P* separati da 1 cc. di soluzione		mg. di *P* separati dal substrato in 1 cc. di soluzione		quantità di *P* separata in %	
	dopo 4 ore	dopo 21.30 ore	dopo 4 ore	dopo 21.30 ore	dopo 4 ore	dopo 21.30 ore
A	0.3162	0.4605	0.1087	0.1873	57	99
B	0.2075	0.2732	—	—	—	—
C	0.2750	0.4200	0.0625	0.1740	33	91
D	0.2125	0.2460	—	—	—	—

4.

Idrolisi dell'acido fosfo-l-lattico con farina di soja hyspida.

A) mg. 17.3 di fosfolattato sodico sciolti in cc. 3 di acqua distillata;
cc. 5 tampone acetico pH = 4.65;
cc. 9 estratto di soja;
cc. 1 $MgSO_4$ M/1;
cc. 2 H_2O;
gocce 5 di toluolo.
B) come *A*) senza substrato.
C) mg. 17.3 di fosfolattato in cc. 3 di acqua distillata;
cc. 2 H_2O distillata;
cc. 9 estratto di soja;
cc. 5 tampone acetico pH = 5.6;
cc. 1 $MgSO_4$ M/1;
gocce 5 di toluolo.
D) come *C*) senza substrato.

Per la preparazione dell'enzima si prendono 20 gr. di Soja macinata, vi si uniscono 100 cc. di acqua distillata e alcune gocce di toluolo, si tengono in termostato a 30° per 1 h, si filtra (pH = 5.75) si adopera la soluzione.

Prove	mg. di *P* separati da 1 cc. di soluzione					mg. di *P* separati dal substrato in 1 cc. di soluzione					quantità di *P* separati in %				
	dopo 4 ore	dopo 22 ore	dopo 52 ore	dopo 93 ore	dopo 166 ore	dopo 4 ore	dopo 22 ore	dopo 52 ore	dopo 93 ore	dopo 166 ore	dopo 4 ore	dopo 22 ore	dopo 52 ore	dopo 93 ore	dopo 166 ore
A	0.1525	0.2387	0.269	0.312	0.3332	0.0275	0.0312	0.0386	0.085	0.093	24	27	33	75	82
B	0.1250	0.2075	0.231	0.227	0.2402	—	—	—	—	—	–	–	-	—	—
C	0.0975	0.1625	0.185	0.217	0.2325	0.0330	0.0425	0.0690	0.092	0.095	29	38	61	81	84
D	0.0645	0.1200	0.116	0.125	0.1375	—	—	—	–	–				—	—

5.

Idrolisi dell'acido fosfo-l-lattico mediante estratto di Brachypodium silvaticum P. B.

A) mg. 11.5 di fosfolattato sodico in cc. 2 di acqua distillata;
cc. 5 tampone acetico N/1 pH = 4.65;
cc. 1 $MgSO_4$ M/1;
cc. 9 estratto di *Brachypodium silvaticum*;
cc. 3 di acqua distillata;
gocce 5 di toluolo.

B) come *A*) senza substrato.

Si prepara l'estratto di erba triturando 60 gr. di erba fresca con 40 gr. di quarzo in polvere e 40 cc. di acqua distillata. Si pressa, si filtra (pH = = 6.2). Si adopera il liquido filtrato.

Prove	mg. di *P* separati da 1 cc. di soluzione			mg. di *P* separati dal substrato in 1 cc. di soluzione			quantità di *P* separata in %		
	0opo 2 ore	dopo 6 ore	dopo 24 ore	dopo 2 ore	dopo 6 ore	dopo 24 ore	dopo 2 ore	dopo 6 ore	dopo 24 ore
A	0.1575	0.1725	0.1943	0.0429	0.0538	0.0750	57	71	99
B	0.1146	0.1187	0.1193		–	–	--		–

6.

Idrolisi dell'acido fosfolattico promossa dall'estratto di muscolo di rana.

A) mg. 14.4 di fosfolattato sodico in cc. 2.5 di acqua;
cc. 2.5 tampone acetico pH = 7.6;
cc. 1 solfato di magnesio M/10;
cc. 4 estratto di muscolo di rana;
gocce 5 di tóluolo.
B) cc. 2,5 di acqua;
il resto come *A*) senza substrato.

Prove	mg. di *P* separati da 1 cc. di soluzione			mg. di *P* separati dal substrato in 1 cc. di soluzione			quantità di *P* separata in %		
	dopo 5 ore	dopo 23 ore	dopo 44 ore	dopo 5 ore	dopo 23 ore	dopo 44 ore	dopo 5 ore	dopo 23 ore	dopo 24 ore
A	0.360	0.410	0.525	0.040	0.085	0.175	21	45	92
B	0.320	0.325	0.350	—	—	—	-	-	

L'estratto di muscolo di rana venne preparato nel modo seguente: il materiale accuratamente triturato viene aggiunto di una eguale quantità di una soluzione di fosfati *M*/15 a pH = 6.65 e lasciato in riposo per 15 minuti. Si agita, si centrifuga e poi si diluisce con acqua e si porta a 0° C saturando con acido carbonico.

Ciò che precipita si centrifuga e si estrae ancora con la soluzione di fosfati adoperata prima. Indi si satura nuovamente con anidride carbonica a 0° C ripetendo diverse volte questa separazione. Si ottiene così un preparato fosfatolitico attivo e abbastanza puro.

b)

A) mg. 14.4 di fosfolattato sodico in cc. .5 di acqua;
cc. 4 di tampone citrico pH = 7.6;
cc. 0.5 di $MgSO_4$ M/10;
cc. 3 di estratto di muscolo;
gocce 5 di toluolo.
B) cc. 2.5 di acqua distillata;
il resto come *A*) senza substrato, temperatura 37° C.

Prove	mg. di P separati da 1 cc. di soluzione		mg. di P separati dal substrato in 1 cc. di soluzione		quantità di P separata in %	
	dopo 14 ore	dopo 38 ore	dopo 14 ore	dopo 38 ore	dopo 14 ore	dopo 38 ore
A	0.3125	0.442	0.0820	0.167	43	88
B	0.2300	0.2750	—	—	—	—

7.

Isolamento dell'acido lattico ottenuto attraverso l'idrolisi enzimatica dell'acido fosfolattico promossa dall'estratto di muscolo di rana.

A) mg. 1150 di fosfolattato sodico in 100 cc. di acqua;
cc. 80 di estratto di muscolo di rana;
cc. 10 di solfato di magnesio M/10;
cc. 10 di tampone citrico pH = 6.8;
cc. 1 di toluolo.

B) coma *A*) senza substrato.

Prove	dopo 36 ore		
	mg. di P separati da 1 cc. di soluzione	mg. di P separati dal substrato in 1 cc. di soluzione	quantità di P separata in %
A	1.270	0.740	97.5
B	0.530	—	

Dopo che l'idrolisi dell'acido fosfolattico era praticamente terminata le due soluzioni vennero adoperate per la determinazione quantitativa dell'acido lattico.

La determinazione dell'acido lattico venne eseguita con il metodo qui riassunto:

Si centrifuga il liquido per eliminare i frammenti di tessuto eventualmente presenti e si lava e si centrifuga nuovamente il residuo un paio di volte per non perdere l'acido lattico ivi rimasto. Si concentra a debole calore fino a 50 cc. e si aggiungono 500 cc. di alcool etilico per dealbuminare il preparato.

La soluzione alcoolica viene di nuovo concentrata a 20 cc. e resa debolmente acida al rosso Congo con acido fosforico.

Lo sciroppo viene ripreso con solfato di sodio anidro (arroventato di fresco) fino alla sua riduzione in polvere.

La polvere così ottenuta viene trattata in Soxlet con etere per l'estrazione dell'acido lattico.

Dalla prova *A*) si potè estrarre acido lattico che venne ulteriormente purificato riprendendo con acqua, dopo aver eliminato l'etere, e trattando con carbonato di piombo neutro.

Dopo defecazione la soluzione acida venne trattata con idrogeno solforato per eliminare l'eccesso di piombo e dopo aver scacciato l'idrogeno solforato venne aggiunta di ossido di zinco e posta a bagnomaria bollente per qualche ora o meglio fino a neutralità.

Se la soluzione di lattato di zinco così ottenuta si presenta ancora colorata occorre trattare opportunamente con carbone animale.

Si ottennero mg. 300 di lattato di zinco $(C_3H_5O_3)_2Zn+2H_2O$ che corrisponde al 75 % del teorico senza considerare però il sale rimasto nelle acque madri.

A 110° gr. 0.150 di sale essicato all'aria eliminano gr. 0.0244 di acqua. Gr. 0.150 di sale danno gr. 0.0423 di ossido di zinco.

$$(C_3H_5O_3)_2\ Zn + 2H_2O$$

calcolato:	$H_2O = 12.9$ %	$ZnO = 29.1$ %
trovato:	$H_2O = 13.6$ %	$ZnO = 28.2$ %

gr. 0.1360 di $(C_3H_5O_3)_2\ Zn + 2H_2O$ che corrispondono a gr. 0.1180 di sale anidro in 5 cc. mostravano in un tubo da 2 dm. una rotazione di $\alpha = 0.39$; $(\alpha)_D = -8.35$.

Dalla prova *b*) di controllo, come era da attendere, non fu possibile separare lattato di zinco.

Conclusione.

L'autore dimostra che, come per gli altri eteri fosforici, anche per l'acido fosfo-l-lattico la scissione enzimatica promossa dalle varie fosfatasi di origine animale e vegetale, compresi i vegetali superiori, si svolge come una pura scissione idrolitica.

Chimica (Chimica biologica). — *Micrometodo per la determinazione dell'acido acetico.* – I. *Dosaggio ossidimetrico dell'acido acetico.* – II. *Separazione dell'acido acetico dalle sue soluzioni acquose.* Nota di Patrio Caselli e Enrico Ciaranfi, presentata (1) da Francesco Pentimalli, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

La determinazione quantitativa dell'acido acetico è facile quando si disponga di una soluzione relativamente concentrata di questa sostanza, ma presenta invece particolari difficoltà quando la si debba eseguire su soluzioni diluite. Le ricerche di chimica biologica che si prefiggono di dosare l'acido acetico nei liquidi organici, urtano appunto contro questa difficoltà ed è in parte dovuto ad ostacoli di ordine analitico, se diverse questioni del metabolismo intermedio relative all'acido acetico sono tutt'ora incompletamente chiarite.

Uno dei metodi di dosaggio dell'acido acetico consiste nel determinarlo acidimetricamente. La titolazione, se fatta con particolari accorgimenti, permette di dosare con sufficiente precisione anche quantità assai piccole di acido acetico, dell'ordine di mg 1 — 0,5 (Koreman). Questo procedimento è applicabile naturalmente solo nel caso che la soluzione in esame contenga soltanto acido acetico libero; ma se l'acido è salificato oppure se nella soluzione sono contenute altre sostanze capaci di influire sulla reazione del mezzo, è necessario distillare prima l'acido ed eseguire poi la titolazione sul distillato. Va notato che in questo caso la semplice distillazione e anche la distillazione in corrente di vapore a pressione normale non permettono di recuperare quantitativamente l'acido acetico nel distillato: occorre distillare in corrente di vapore a pressione ridotta per la durata di due ore per ottenere un passaggio pressochè quantitativo di acido acetico (Welde), oppure distillare a pressione ridotta in presenza di acido fosforico intercalando un filtro per trattenere i vapori di questo ultimo (Janke e Kropacsy). In tutti e due i casi il volume del distillato è molto abbondante, il che costituisce un inconveniente se la quantità di acido acetico da dosare nella soluzione è piccola. Inoltre con questo metodo

(1) Nell'Adunanza del 30 maggio 1941-XIX.

la eventuale presenza di altri acidi volatili nel liquido da esaminare, può falsare completamente, come è ovvio, la determinazione dell'acido acetico.

Un altro metodo è notoriamente quello di precipitare l'acido acetico come sale d'argento, determinando il peso del precipitato e del metallo in esso contenuto. Questo metodo dà buoni risultati se la quantità di acido acetico è relativamente grande; ma per il dosaggio di piccole quantità di acido acetico, data la discreta solubilità dell'acetato d'argento, questo procedimento è di impossibile applicazione. Però, anche in caso di soluzioni non molto diluite, se esse contengono altre sostanze precipitabili con argento, oltre l'acido acetico, occorre separare prima quest'ultimo mediante distillazione.

Mugdan e Wimmer hanno proposto un metodo di dosaggio dell'acido acetico che consiste nella ossidazione di questo, per azione del CuO, ad acido ossalico, il quale è facilmente dosabile. Questa reazione non è però specifica dell'acido acetico, ma avviene anche con termini superiori degli acidi della serie formica e con gli acidi glicolico, tartarico, fenico, con zucchero e numerose altre sostanze.

Dulian ha proposto un metodo per il dosaggio dell'acido acetico, basato sulla distillazione secca dell'acetato di calcio, il quale col riscaldamento si decompone con liberazione di acetone che viene raccolto in reattivo di Scott–Wilson, e successivamente viene liberato dal complesso metallico con H_2O_2 per distruggere eventuali aldeidi, e dosato iodometricamente. Il metodo, che è una modificazione del procedimento di Feigl, Zepper e Vasquez per l'analisi qualitativa dell'acido acetico, presenta l'inconveniente, da noi osservato in esperimenti di controllo, che anche i sali di calcio di altri acidi della serie formica hanno, in queste condizioni, un comportamento analogo a quello dell'acetato.

Notoriamente l'acido acetico è, fra gli acidi della serie formica, il più resistente all'ossidazione cromo–solforica, tanto che non è possibile determinarlo con questo mezzo: Simon ha però osservato che l'acido acetico brucia completamente fino ad acqua e anidride carbonica, se si usa una miscela di acido solforico concentrato e di bicromato d'argento. Cordebard e Michl hanno utilizzato questa reazione per l'analisi quantitativa dell'acido acetico. Poichè il bicromato d'argento è instabile, consigliano di usare una soluzione titolata di bicromato di potassio, al quale viene aggiunto al momento dell'uso nitrato d'argento in sostanza. Dopo ebollizione il bicromato ridotto viene titolato con soluzione N/10 di solfato ferroso, la fine della titolazione essendo determinata con saggio al tocco al ferricianuro di potassio. Per fare questo è però necessario precipitare prima l'argento come cloruro, onde evitare la formazione di ferricianuro d'argento, la cui colorazione arancione impedisce di cogliere il momento del viraggio. Con tale tecnica gli AA. hanno potuto dosare con buoni risultati l'acido acetico, ma il procedimento non è molto sensibile

ed è quindi utilizzabile solo come macrometodo, anche perchè l'analisi al tocco è inadatta per la microanalisi. D'altra parte la necessità di precipitare l'argento è una complicazione fastidiosa di questa determinazione. Evidentemente questo metodo di dosaggio non è specifico perchè qualunque altra sostanza organica presente nella soluzione viene ossidata in queste condizioni dal bicromato.

Il metodo non è quindi usabile per dosare l'acido acetico nei liquidi organici, se prima questo non viene separato mediante distillazione dalle altre sostanze organiche presenti nel liquido.

Ci siamo proposti di trovare un metodo di dosaggio dell'acido acetico che risponda a questi requisiti:

1° permetta di dosare con sufficiente esattezza piccole quantità di acido acetico;

2° permetta di separare quantitativamente l'acido acetico dalle sue soluzioni acquose;

3° permetta di dosare l'acido acetico in presenza di altre sostanze organiche.

Questa nota riguarda principalmente i punti 1 e 2. Il punto 3 sarà oggetto di una nota successiva.

I. Microdosaggio ossidimetrico dell'acido acetico.

Ci siamo anzitutto proposti di modificare il procedimento di Cordebard e Michl in modo da ridurlo a micrometodo. I due tempi del metodo originale, che ne rendono difficoltosa l'applicazione nel campo della microanalisi sono la precipitazione dell'argento e l'analisi al tocco. Col nostro procedimento si è potuto eliminare il primo tempo e sostituire il secondo. Inoltre abbiamo trovato più comodo aggiungere il nitrato d'argento in soluzione satura a goccie anzichè in sostanza per pesata. La determinazione del bicromato residuo, a causa della presenza dell'ione $Ag^{\cdot}$, non può farsi col classico metodo iodometrico nè col metodo di cromometria diretta con ferricianuro di potassio e difenilamina come indicatore, proposto recentemente da Thivolle e Sonntag. Ci siamo perciò serviti della cromometria indiretta proposta da Nicloux, la quale non è disturbata dalla presenza dell'argento e permette di cogliere il punto di viraggio della titolazione anche con reagenti molto diluiti, senza bisogno di un indicatore. Il principio del metodo da noi utilizzato è pertanto il seguente:

L'acido acetico viene ossidato con bicromato d'argento; il bicromato residuo viene completamente ridotto con sale di Mohr, il cui eccesso viene determinato per titolazione di ritorno con permanganato di potassio. I centimetri cubici di permanganato usati moltiplicati per un fattore danno i mg. di acido acetico ossidato.

Apparecchio: è necessario un refrigerante a ricadere, al quale si adatta, mediante smeriglio, un palloncino Kjeldahl da combustione da cc. 50. L'apertura superiore del refrigerante va tenuta sempre coperta con un bicchierino rovesciato per evitare l'entrata di polvere.

Reagenti.

1 — $K_2Cr_2O_7$ soluzioni N/2, N/5, N/10, N/20, N/50; g. 24,519 di bicromato di potassio, seccato a peso costante, si pesano su bilancia di precisione e si sciolgono in acqua portando a 1000. Si ha così la soluzione N/2. Le altre si preparano per diluizione.

2 — H_2SO_4 concentrato.

3 — $AgNO_3$ soluzione satura.

4 — $FeSO_4$ $(NH_4)_2$ SO_4. $6H_2O$ (Sale di Mohr) soluzioni N/2, N/5, N/10, N/20, N/50. La soluzione N/2 si prepara sciogliendo g. 196,08 di sale di Mohr in acqua, aggiungendo cc. 50 di acido solforico concentrato e portando con acqua a 1000. Le altre soluzioni si preparano per diluizione con acqua che contiene 50 cc. di acido solforico su 1000 cc.

5 — $KMnO_4$ soluzioni N/2, N/5, N/10, N/20, N/50. La soluzione N/2 si prepara sciogliendo in acqua g. 15,8 di permanganato di potassio e portando a 1000 cc.; le altre soluzioni per diluizione.

Se i reattivi sono esatti n. cc. di sale di Mohr devono corrispondere esattamente a n cc. di K_2 Cr_2 O_7 e a n cc. di K MnO_4 di uguale normalità. La soluzione di bicromato è stabile, quella di sale di Mohr e di permanganato tendono a cambiare di titolo nei primi giorni dopo la preparazione ed è quindi conveniente verificarne di tanto in tanto il titolo di fronte al bicromato corrispondente.

Procedimento.

Una quantità misurata della soluzione di acido acetico si versa nel palloncino a collo smerigliato, e si alcalinizza leggermente con soda; si immerge il palloncino in bagno-maria bollente e si introduce nel pallone un tubo di vetro piegato a squadra, la cui estremità inferiore arriva a circa 2 cm. sopra la superficie del liquido; all'altra estremità del tubo si unisce un tubo di gomma connesso con una pompa ad acqua (fig. 1). A questo modo il contenuto del palloncino viene rapidamente essiccato.

Se il tenore in acido acetico del residuo secco non è conosciuto come ordine di grandezza, conviene fare un saggio di analisi adoprando i reagenti più concentrati; si versano nel pallone cc. 5 di $K_2Cr_2O_7$ N/2; gocce 10 di $AgNO_3$ saturo, impiegando gli altri reagenti alla stessa normalità, riservandosi, se la quantità di acido acetico fosse piccola, di ripetere la prova con reagenti di normalità appropriata, per ottenere risultati più esatti.

Se invece il contenuto in acido acetico è a un dipresso conosciuto si versano nel pallone cc. 5 di bicromato a normalità diversa, a seconda della

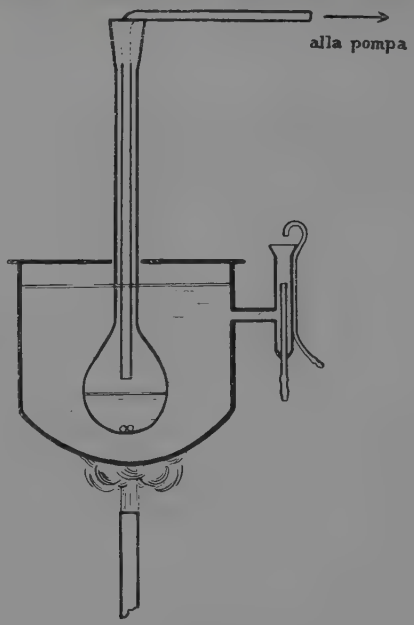


Fig. 1.

quantità presunta di acido acetico; gli altri reagenti vanno usati alla stessa normalità. La normalità da usarsi si desume dal seguente specchietto:

Tabella I.

cc. 5 di reattivi di normalità	Limiti di utilizzabilità – mg di acido acetico	
	da	a
N/2	37,0	7,5
N/5	7,5	3,7
N/10	3,7	1,8
N/20	1,8	0,7
N/50	0,7	0,0

Dopo messi i 5 cc. di bicromato si fanno cadere nel liquido alcune goccie di nitrato d'argento saturo, e precisamente 15 goccie con bicromato N/2, 5 goccie con N/5, 3 goccie con N/10, 2 goccie con N/20, e 1 goccia con N/50. Se la quantità di nitrato d'argento versata nel liquido è insufficiente ci se ne accorge facilmente perchè il liquido soprastante al precipitato di bicromato d'argento conserva il colore giallo del bicromato di potassio. Si mettono poi due palline di vetro e si connette il palloncino al al ricadere, bagnando bene lo smeriglio con acido solforico concentrato. Una volta messo a posto il palloncino è bene versare una goccia o due di acido solforico sull'orlo dello smeriglio, onde assicurare una tenuta perfetta di questo. Si fa quindi bollire con piccola fiamma diretta e all'inizio della ebollizione si versano attraverso il ricadere cc. 7 di H_2SO_4 concentrato. È bene aver cura di coprire sempre l'estremo del ricadere con un bicchierino rovesciato. Si bolle per un'ora, si raffredda il palloncino sotto acqua corrente, se ne porta quantitativamente il contenuto in un bicchiere, lavando due volte il palloncino con un po' di acqua distillata; si lascia nuovamente raffreddare la soluzione che si è riscaldata per l'aggiunta dell'acqua, si versano cc. 5 di sale di Mohr e si titola con permanganato da microburetta. Sale di Mohr e permanganato vanno usati alla stessa normalità del bicromato. Il viraggio si coglie molto bene, perchè la soluzione verde brillante diventa rosea: si fa la lettura al primo viraggio. La quantità di acido acetico espressa in mg. si ottiene moltiplicando i cc. di permanganato adoprati per un fattore, il cui valore, corrispondente alla normalità dei reagenti, è indicato nella tabella seguente:

Tabella II.

Normalità dei reagenti	Fattore
N/2	3,75
N/5	1,5
N/10	0,75
N/20	0,375
N/50	0 15

I risultati di diverse determinazioni fatte con questo metodo sono riportati nella tabella seguente:

TABELLA III.

N.	Normalità dei reagenti	Fattore	mg. Acido Acetico		Differenza	Errore %
			teorico	trovato		
1	N/2	3,75	35,9	35,6	— 0,3	— 0,8
2	»	»	31,4	30,7	— 0,7	— 2,2
3	»	»	26,9	26,5	— 0,4	— 1,5
4	»	»	26,9	26,3	— 0,6	— 2,2
5	»	»	22,3	22,5	+ 0,2	+ 0,9
6	»	»	15,72	15,60	— 0,12	— 0,8
7	»	»	10,48	10,32	— 0,16	+ 1,5
8	»	»	9,17	9,22	+ 0,05	+ 0,5
9	»	»	8,38	8,35	— 0,03	— 0,3
10	»	»	7,86	7,74	— 0,12	— 1,5
11	N/5	1,5	7,18	7,15	— 0,03	— 0,4
12	»	»	7,18	7,10	— 0,08	— 1,1
13	»	»	6,90	6,80	— 0,10	— 1,4
14	»	»	6,28	6,30	+ 0,02	+ 0,3
15	»	»	5,41	5,41	0,00	0,0
16	»	»	5,24	5,31	+ 0,07	+ 1,3
17	»	»	5,24	5,18	— 0,06	— 1,1
18	»	»	5,24	5,19	— 0,05	— 0,9
19	»	»	5,18	5,18	0,00	0,0
20	»	»	4,49	4,50	+ 0,01	+ 0,2
21	»	»	4,49	4,50	+ 0,01	+ 0,2
22	»	»	4,08	4,14	+ 0,06	+ 1,4
23	»	»	4,08	4,08	0,00	0,0
24	»	»	3,74	3,71	— 0,03	— 0,8
25	»	»	3,74	3,75	+ 0,01	+ 0,3
26	N/10	0,75	3,60	3,53	— 0,07	— 1,9
27	»	»	3,49	3,52	+ 0,03	+ 0,8
28	»	»	3,49	3,52	— 0,03	— 0,8
29	»	»	3,00	3,00	0,00	0,0

Segue: Tabella III.

N.	Normalità dei reagenti	Fattore	mg. Acido Acetico		Differenza	Errore %
			teorico	trovato		
30	N/10	0,75	2,62	2,61	— 0,01	— 0,4
31	»	»	2,25	2,32	+ 0,07	+ 3,1
32	»	»	2,25	2,29	+ 0,04	+ 1,8
33	»	»	1,80	1,80	0,00	0,0
34	»	»	1,80	1,83	+ 0,03	+ 1,7
35	N/20	0,375	1,74	1,73	— 0,01	— 0,6
36	»	»	1,43	1,42	— 0,01	— 0,7
37	»	»	1,31	1,29	— 0,02	— 1,5
38	»	»	1,12	1,10	— 0,02	— 1,8
39	»	»	0,92	0,93	+ 0,01	+ 1,1
40	»	»	0,89	0,87	— 0,02	— 2,2
41	N/50	0,15	0,68	0,67	— 0,01	— 1,5
42	»	»	0,68	0,65	— 0,03	— 4,5
43	»	»	0,65	0,63	— 0,02	— 3,1
44	»	»	0,57	0,57	0,00	0,0
45	»	»	0,57	0,55	— 0,02	— 3,5
46	»	»	0,57	0,52	— 0,05	— 8,8
47	»	»	0,47	0,46	— 0,01	— 2,1
48	»	»	0,46	0,45	— 0,01	— 2,2
49	»	»	0,46	0,46	0,00	0,0
50	»	»	0,46	0,44	— 0,02	— 4,3
51	»	»	0,44	0,42	— 0,02	— 4,5
52	»	»	0,44	0,46	+ 0,02	+ 4,5
53	»	»	0,36	0,32	— 0,04	— 11,1
54	»	»	0,28	0,28	0,00	0,0
55	»	»	0,24	0,24	0,00	0,0
56	»	»	0,18	0,16	— 0,02	— 11,1
57	»	»	0,12	0,12	0,00	0,0
58	»	»	0,08	0,07	0,01	— 12,5
59	»	»	0,06	0,06	0,00	0,0

Se si analizzano i dati della tabella 3 mettendo in relazione l'errore percentuale con la concentrazione di acido acetico si vede che da 36 mg. a 1 mg. l'errore percentuale è generalmente inferiore all'unità o intorno ad essa, in alcuni casi l'errore si avvicina al 2 % e talvolta supera questo valore, in un caso su 38 raggiunge il 3,1 %. In questi limiti si può quindi ritenere per sicuro che l'errore probabile oscilli fra ± 1–2 %. Al di sotto di 1 mg. di acido acetico l'errore percentuale aumenta, generalmente restando entro limiti del ± 3–4 %, mentre in un caso raggiunge perfino il 12,5 %. Si deve notare però che qui siamo nell'ordine di grandezza dei decimi e perfino centesimi di milligrammo ed è appunto per questo che differenze tra valore teorico e valore trovato che sono in realtà minime, nell'ordine dei centesimi di milligrammo (da mg. 0,01 a 0,05), influiscono notevolmente sull'errore percentuale.

Il metodo fornisce dunque dati analitici molto vicini al teorico; su 59 determinazioni solo 4 hanno dato errori percentuali superiori al 5 %, tanto che si può ammettere con legittimità che l'errore probabile del metodo non superi il ± 5 %. Il campo di impiego del metodo è considerevole, essendo possibile dosare con sufficiente esattezza fino a mg. 0,1 — 0,05 di acido acetico.

II. – Separazione quantitativa dell'acido acetico dalle sue soluzioni acquose.

Il metodo da noi impiegato per il dosaggio dell'acido acetico è utilizzabile naturalmente solo quando si ha a disposizione una soluzione di acido acetico esente da altre sostanze riducenti il bicromato. Se la soluzione contiene invece altre sostanze a potere riducente occorrerà separare prima l'acido acetico per distillazione. Nella introduzione della presente nota abbiamo accennato agli inconvenienti presentati dai metodi di distillazione sinora proposti. Essi, per fornire un rendimento quantitativo, devono essere prolungati per un tempo molto lungo con l'inconveniente non trascurabile di ottenere un distillato molto abbondante e, di conseguenza, una soluzione molto diluita di acido acetico. Ciò è dovuto principalmente al fatto che il punto di ebollizione dell'acido acetico (118°) è superiore a quello del solvente dal quale si vuole separare. Abbiamo pensato che questa difficoltà poteva essere superata distillando l'acido acetico non come acido ma come estere metilico, realizzando così la condizione favorevole di disporre di un solvente, l'acool metilico, a punto di ebollizione (65°) superiore a quello della sostanza da separare mediante la distillazione (acetato di metile, p. e. 57°). Poichè l'esterificazione dell'acido acetico avviene molto rapidamente, questo metodo presenta il vantaggio di richiedere un breve tempo di distillazione.

Il principio del metodo è pertanto il seguente: l'acido acetico viene trasformato quantitativamente nel suo estere metilico, che distilla mano a mano che si forma in una soluzione diluita di soda dove l'estere si saponifica; poi l'acool distillato si scaccia per evaporazione e l'acido acetico si determina nel modo descritto precedentemente.

Apparecchio.

È necessario un comune distillatore da micro–Kjeldahl interamente in vetro con palloncino da 50 cc., con giunto smerigliato.

Reagenti.

1. Metanolo purissimo per analisi.
2. Acido solforico concentrato.
3. Idrato sodico al 10 %.
4. Acido solforico al 12 %.

Procedimento.

Una quantità misurata di soluzione di acido acetico si mette nel palloncino del distillatore insieme con una pallina di vetro, si alcalinizza leggermente con soda e si secca in bagno–maria come è detto al paragrafo 1.

Quando il residuo è ben secco, si toglie il palloncino dal bagno–maria, si lascia raffreddare e vi si versano cc. 15 di metanolo e cc. 3 di acido solforico concentrato, lungo le pareti; si connette il palloncino al distillatore, bagnando prima lo smeriglio con acido solforico, si agita per mescolare la miscela di acido solforico ed alcool e si distilla con fiamma diretta per 10 m', raccogliendo il distillato in 5 cc. di acqua distillata, alcalinizzata con cc. 0,5 di Na OH 10 %. Si lava il becco del distillatore con un po' di acqua distillata, e si lascia stare il bicchiere un quarto d'ora a temperatura ambiente. Poi si riduce l'alcalinità neutralizzando con la soluzione al 12 % di acido solforico, che si corrisponde volumetricamente con quella di soda al 10 %, fino a leggerissima alcalinità, saggiando con carta al tornasole neutra. Si trasporta quantitativamente il contenuto del bicchiere in un palloncino a collo smerigliato, lavando due volte il bicchiere con un po' di acqua distillata e si secca su bagno–maria come al solito, determinando poi il contenuto di acido acetico col procedimento indicato nel paragrafo 1. I risultati di alcune determinazioni fatte con questo metodo sono riportati nella tabella seguente:

Tabella IV.

N.	Acido acetico mg.		Differenza	Errore %
	Determinazione diretta	Determinazione dopo distillazione		
60	30,0	29,0	— 1,00	— 3,3
61	29,6	29,0	— 0,60	— 2,0
62	22,3	22,3	0,00	0,0
63	14,5	14,3	— 0,2	— 1,4
64	7,32	7,57	+ 0,25	+ 3,4
65	5,24	5,19	— 0,05	— 0,95
66	5,18	5,19	+ 0,01	+ 0,19
67	2,72	2,69	— 0,03	— 1,1
68	1,80	1,80	0,00	0,0
69	1,76	1,70	— 0,06	— 3,4
70	1,16	1,20	+ 0,04	+ 3,4
71	1,08	1,08	0,00	0,0
72	0,68	0,71	+ 0,03	+ 4,3
73	0,48	0,52	+ 0,04	+ 8,3
74	0,34	0,33	— 0,01	— 2,9

Come si vede, il passaggio dell'acido acetico nel distillato è con questo metodo pressochè quantitativo, l'errore percentuale essendo su 15 determinazioni inferiore al 4,4 %, meno un caso. Con questo procedimento si riesce quindi a separare quantitativamente l'acido acetico dalle sue soluzioni acquose e a dosarlo con una precisione che si può ritenere soddisfacente.

È ovvio che il nostro metodo, che si attua mediante tre processi, essiccazione, esterificazione e distillazione, elimina moltissime sostanze organiche, che potrebbero interferire nella determinazione ossidimetrica dell'acido acetico. Questo ultimo punto, che è essenziale per l'impiego del metodo da noi proposto nel campo della chimica biologica, va esaminato in modo particolare e sarà oggetto di una nota successiva.

BIBLIOGRAFIA

H. Cordebard e V. Michl, « Bull. Soc. Chim. de France », **43**, 97 (1928).
F. Dulian, « Klin. Woch. », 1224 (1939).
F. Feigl, R. Zeppert e S. Vasquez, « Mikrochemie », **17**, 165 (1935).
A. Janke e S. Kropacsy, « Bioch. Zeitschr. », **278**, 34 (1935).
I. M. Koreman, « Laboratornaja Praktika », **12**, 36 (1937).
M. Mugden e J. Wimmer, « Angew. Chem. », 117 (1933).
M. Nicloux, « Bull. Soc. Chim. Biol. », **17**, 174 (1935).
L. J. Simon, « C. r. Ac. Sc. », **174**, 1706 (1922); **175**, 167 (1922).
L. Thivolle e G. Sonntag, « Bull. Soc. Chem. Biol. », **21**, 1353 (1939).
E. Welde, « Bioch. Zeitschr. », **28**, 504 (1910).

Zoologia. — *I centri vestibolari studiati comparativamente in Rettili dotati di differente motilità e modo di locomozione* (1). Nota di ALBERTO STEFANELLI, presentata (2) dall'Accademico FILIPPO SILVESTRI.

I risultati delle mie ricerche sui centri statici, ricerche che mi occupano già da parecchi anni e che ho avuto modo di esporre in vari lavori, mi hanno suggerito di estendere lo studio di queste formazioni ai Rettili, traendo profitto dal fatto che in questi animali esistono forme anche molto vicine sistematicamente che presentano modificazioni morfologiche che sono graduali in relazione ad evidenti condizioni ecologiche diverse, come ad esempio nei Sauri.

L'analisi comparativa che tenga conto oltre che della posizione zoologica anche della ecologia degli animali comparati diviene un metodo prettamente sperimentale, sopratutto se è possibile considerare delle differenze che si presentano graduali. Si vengono così ad utilizzare le esperienze fatte dalla natura stessa e il reperto morfologico diviene illustrativo del significato funzionale.

Sono questi i principî di quella morfologia ecologica che COTRONEI ha sempre validamente sostenuto sin dagli inizi (vedi la sua prolusione di Pisa del 1926) come criterio generale di ogni ricerca comparativa e che hanno formato l'abito mentale della scuola.

L'applicazione da me fatta di questi principi alla Neurologia si è dimostrata promettente sin dalle prime ricerche; ho già pubblicato alcuni risultati e mi propongo in questa Nota di esporre le prime osservazioni riguardanti l'indagine comparativa di alcuni centri del sistema vestibolare che io ritengo di un certo interesse. Darò in un lavoro in esteso maggiori dettagli ed una completa documentazione.

Una condizione molto variabile nei Rettili è il modo di locomozione e la dipendente motilità del corpo dell'animale. Così mentre negli Ofidi la mancanza d'arti ed il movimento serpentino portano ad uno sviluppo

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia comparata « B. Grassi », della R. Università di Roma.

(2) Nell'Adunanza del 30 maggio 1941-XIX.

molto esteso della muscolatura segmentale del tronco, troviamo nei Cheloni, con tronco assolutamente rigido, essenzialmente sviluppata la muscolatura degli arti. Nei Sauri troviamo le condizioni intermedie tra questi due estremi. Tra i Rettili da me studiati, oltre ad un Ofidio (*Zamenis gemonensis*) e un Chelone (*Testudo graeca*), sono il Camaleonte (*Chamaeleon vulgaris*), che è un animale tipicamente deambulante e dotato di limitati movimenti del tronco, la Lucertola (*Lacerta agilis*) con arti ben sviluppati e con movimenti del tronco più manifesti ma sopratutto in particolari condizioni (ad esempio correndo tra le erbe), la Luscengola (*Seps chalcides*) con arti atrofici e inutilizzati nella corsa che avviene con moto serpentino, l'Orbettino (*Anguis fragilis*) in cui gli arti sono completamente mancanti ma in cui il movimento serpentino è più lento e meno perfetto che negli Ofidi.

La struttura nervosa che ho già potuto descrivere in intima relazione con questa differenza di motilità e locomozione è rappresentata dal sistema tegmentale. Questo apparato della coordinazione motoria è risultato, nella sua porzione rombencefalica, maggiormente sviluppato, sia per estensione che per numero delle cellule, nelle forme dotate di movimento serpentino [1].

In base a questo reperto ho pensato di estendere lo studio ai centri statici che sono anche intimamente collegati con questo sistema. Mentre le mie indagini si sono rivolte ai centri vestibolari ho affidato lo studio del cervelletto a Pietrogrande, allievo interno dell'Istituto. Queste osservazioni [2], limitate sin ora alla citoarchitettonica cerebellare, dimostrano una netta differenza nella disposizione delle cellule di Purkinje tra le forme deambulanti e quelle striscianti: dalla condizione ad un sol strato di cellule ben allineate delle forme deambulanti si passa alla condizione di più strati nelle forme serpentine.

* * *

Lo studio dei centri vestibolari è stato eseguito su encefali dei Rettili citati preparati con l'impregnazione argentica di Cajal (formula III), con l'impregnazione all'argento colloidale di Bodian (con ottimi risultati nella *Testudo*) e con preparati colorati con liquido di Giemsa. Tutte

---

[1] Stefanelli Alberto, *Lo sviluppo dei centri tegmentali in relazione al tipo di locomozione (deambulazione e strisciamento serpentino) nei Rettili.* « Boll. Soc. It. Biol. Sperim. », 1940, *15*, 1911; Idem, *Ricerche comparative sui centri tegmentali dei Rettili in rapporto alla loro locomozione.* « Arch. Zool. It. », 1941, *29*, 159.

[2] E. Pietrogrande, *Sulla disposizione delle cellule di Purkinje in rapporto al modo di locomozione.* « Boll. Soc. It. Biol. Sperim. ». In corso di stampa.

le osservazioni sono state eseguite su esemplari adulti. Ho già avuto modo di far valutare l'importanza, in queste comparazioni, della mole degli animali: i Sauri da me esaminati avevano una taglia molto simile, un po' più grandi gli esemplari di *Testudo* e di *Zamenis*.

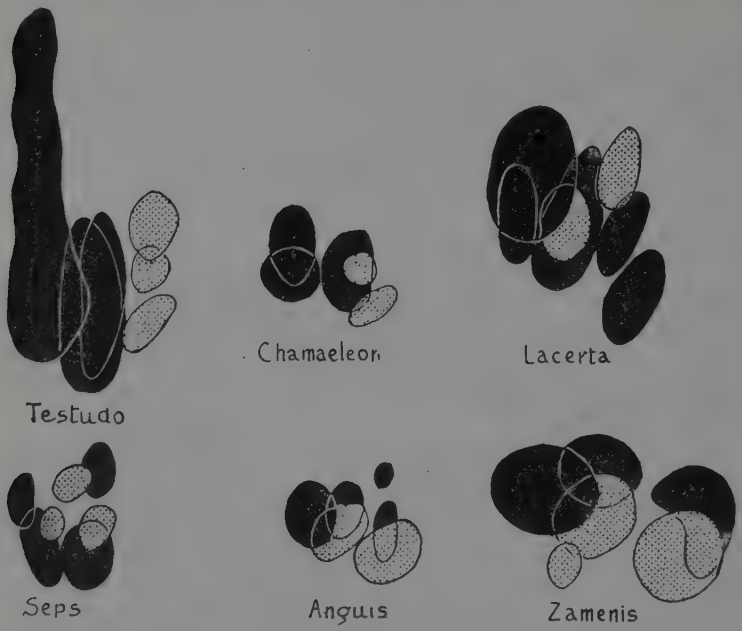


Fig. 1. – Proiezione su un piano frontale dei nuclei di Deiters (in nero) e tangenziali (a puntini), del lato sinistro. Questa figura dà una immagine approssimata delle proporzioni mancando la valutazione dello spessore dei nuclei.

Ho seguìto come metodo di studio quello da me applicato con successo già per altre ricerche sul sistema nervoso centrale, consistente nel ricopiare mediante proiezione le cellule e le fibre dei centri interessanti, sezione per sezione, su foglietti di cellofan. Questi poi, sovrapposti ad opportuna distanza danno la visione stereoscopica diretta della loro disposizione, oppure, sovrapposti direttamente l'uno sull'altro, l'immagine della proiezione di tutti i centri su un piano. Le figure schematiche qui riprodotte (fig. 1) sono ricavate da proiezioni frontali.

* * *

I centri vestibolari dei Rettili, come è noto, sono rappresentati dal nucleo di Deiters, dal nucleo tangenziale (trovato da Beccari negli embrioni di lucertola) dal nucleo vestibolare superiore e dal nucleo vesti-

bolare inferiore. Risulta dalle mie presenti ricerche come le più rimarchevoli differenze strutturali e topografiche riguardino essenzialmente il nucleo di Deiters ed il nucleo tangenziale. Mi limito pertanto in questa Nota ad illustrare i caratteri differenziali solo di questi due nuclei.

Nella *Testudo graeca* il nucleo di Deiters presenta una estensione notevolissima ed è formato da grosse cellule che, per il loro addensamento, si possono riunire in gruppi o nuclei minori: un nucleo mediale (suddiviso in un gruppo mediale, uno intermedio ed uno laterale), un nucleo laterale che ha in questa specie una posizione anche piuttosto ventrale e si trova, come in tutti i Rettili, verso il bordo mediale del tratto spinale del trigemino. Il nucleo di Deiters dorsale, presente in tutti gli altri Rettili studiati, risulta qui unito con il gruppo mediale del nucleo mediale che ha per questo una forma molto estesa dorsalmente. Il nucleo tangenziale è invece assai scarsamente rappresentato: è formato da due piccoli gruppi di cellule, uno antero–dorsale ed uno postero–ventrale, rispettivamente sopra e sotto al gruppo laterale del nucleo mediale. Le cellule sono molto piccole, tondeggianti o leggermente affusate e situate molto profondamente quasi a contatto con la parte intermedia del nucleo mediale di Deiters.

Nel *Chamaeleon vulgaris* il nucleo di Deiters è pure assai ben rappresentato, formato da cellule multipolari di grandi dimensioni. Si presenta suddiviso in tre nuclei minori: un nucleo mediale, un n. laterale e un n. dorsale. Il nucleo dorsale è poco esteso dorsalmente; ciò è essenzialmente a causa della struttura morfologica della fossa romboidale del camaleonte con pareti alari poco sollevate. Il nucleo tangenziale è molto piccolo formato da due nuclei situati profondamente a ridosso dei nuclei di Deiters.

Nella *Lacerta agilis* il nucleo di Deiters è molto ben sviluppato e suddiviso in numerosi gruppi minori. Le cellule risultano però più piccole che nel camaleonte. Sono distinguibili un nucleo di D. mediale, due nuclei laterali (dorsale e ventrale) e due nuclei dorsali (inferiore e superiore). Il nucleo dorsale superiore è situato nella regione dorsale delle pareti alari immediatamente sotto l'area cocleare. Il nucleo tangenziale è meglio rappresentato che nelle forme precedenti benchè sempre notevolmente meno esteso del nucleo di Deiters. Sono presenti due nuclei (antero–dorsale e postero–ventrale) situati profondamente e a ridosso del nucleo di Deiters. Le cellule sono piccole e tondeggianti.

Nelle tre forme ora descritte è esclusiva (*Testudo* e *Chamaeleon*) o di gran lunga prevalente (*Lacerta*) la progressione per arti; nelle seguenti è invece prevalente (*Seps*) od esclusiva (*Anguis*, *Zamenis*) la progressione per strisciamento serpentino.

Nella *Seps chalcides* il nucleo di Deiters è ancora ben rappresentato, suddiviso nei tre nuclei dorsale mediale e laterale, ma risulta nel suo insieme assai meno esteso che nelle forme precedenti. Il nucleo tangenziale

è invece molto più esteso. È divisibile in tre nuclei (antero–dorsale, postero–ventrale mediale, postero–ventrale laterale). Le cellule sono molto affusate e si trovano sul decorso delle fibre radicolari vestibolari.

Nell'*Anguis fragilis* il nucleo di Deiters è costituito da tre gruppi (n. dorsale, n. mediale, n. laterale). Il nucleo dorsale è notevolmente spostato dorsalmente mentre è poco netta la divisione tra i nuclei mediale e laterale. Il nucleo tangenziale presenta in questo animale una estensione pressocchè simile a quella del nucleo di Deiters. Sono identificabili due gruppi (antero–dorsale e postero–ventrale) formati da cellule non molto piccole e molto affusate, comprese tra le fibre radicolari del vestibolare. Questa posizione ricorda quella primitiva dei Pesci, dei Ciclostomi [1] e dell'embrione degli stessi Rettili (Beccari).

Nello *Zamenis gemonensis* troviamo infine il nucleo di Deiters formato da pochi e grossi elementi pur tuttavia distinguibili in un nucleo mediale, uno laterale ed uno dorsale, quest'ultimo limitato in una zona molto dorsale sottostante all'area cocleare. Il nucleo tangeziale ha invece uno sviluppo evidentemente superiore; le sue cellule di forma affusata caratteristica sono riunibili in tre gruppi, due ventrali (laterale e mediale) ed uno dorsale. Le cellule occupano gran parte della regione delle fibre radicolari vestibolari e il nucleo assume la sua struttura primitiva in modo ancor più caratteristico.

Da queste considerazioni appare con molta chiarezza come il nucleo di Deiters si presenti nelle forme deambulanti con una estensione maggiore che in quelle dotate di movimento serpentino, e viceversa come il nucleo tangenziale sia meglio rappresentato in quelle serpentine che in quelle deambulanti sino ad avere nello *Zamenis* una estensione superiore a quello di Deiters.

Calcolati i volumi di questi due nuclei mediante l'esecuzione di modelli di plastilina in base ai disegni e alle ricostruzioni eseguite nel modo sopra detto, le differenze di volume sono apparse come nello schema riportato (fig. 2) dove i volumi sono rappresentati da sfere. Le valutazioni fatte con il metodo ponderale, pesando i ritagli di cartoncino corrispondenti alle varie sezioni di nuclei, hanno dato lo stesso risultato. Mentre nelle forme deambulanti (*Testudo*, *Chamaeleon*, *Lacerta*) il nucleo di Deiters è molto più sviluppato del nucleo tangenziale, nelle forme serpentine la differenza è scarsa (*Seps*) o nulla (*Anguis*) o in favore del nucleo tangenziale (*Zamenis*). Anche la forma delle cellule e la posizione del nucleo tangenziale variano in rapporto a queste condizioni. Così, mentre

---

[1] Stefanelli Alberto, *Le cellule e le fibre di Müller dei Petromizonti.* 1933. «Arch. It. Anat. Embriol.», *31*, 519; Idem. *Il sistema statico dei Petromizonti.* «Arch. Zool. It.», 1937, *24*, 209.

in *Testudo*, *Chamaeleon*, e *Lacerta* i nuclei sono situati profondamente a ridosso del margine laterale del nucleo di Deiters e le cellule sono tondeggianti o leggermente allungate, in *Seps*, *Anguis* e *Zamenis* questi

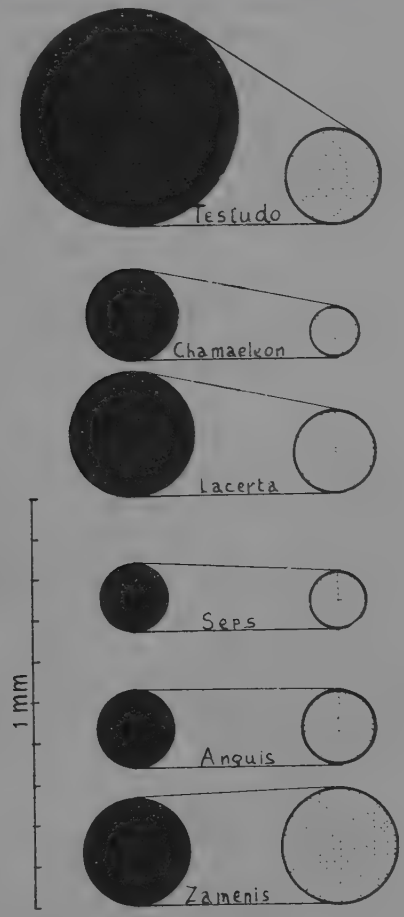


Fig. 2. – Comparazione dei volumi dei nuclei di Deiters (in nero) e tangenziale (a puntini) rappresentati da sfere.

nuclei sono molto più spostati verso la periferia così da essere compresi nel decorso delle fibre vestibolari radicolari; la forma delle loro cellule è molto allungata nel senso delle fibre. Tale posizione ricorda molto di più la condizione del nucleo tangenziale tipico dei Pesci.

Concludendo posso dedurre da questo studio comparativo-ecologico dei centri vestibolari come al tipo di locomozione e alla differente motilità

dell'animale corrispondano delle modificazioni caratteristiche di questi centri. V'è ragione di credere che il nucleo di Deiters, col suo enorme sviluppo nei Rettili deambulanti, sia principalmente collegato al particolare equilibrio determinato da questo modo di procedere. Tenendo conto che il nucleo di Deiters è il nucleo vestibolare che maggiormente partecipa con le sue fibre al tratto vestibolo-spinale, vien fatto di pensare che nell'equilibrio della deambulazione occorrano dei riflessi statici più direttamente collegati con riflessi vestibolari [1]. Così il nucleo tangenziale che si presenta molto più sviluppato nelle specie dotate di movimento serpentino è da ritenersi collegato con l'attività sinergica della muscolatura del tronco. Questo concetto, che risulta con evidenza dalle presenti ricerche è in accordo con il fatto che il nucleo tangenziale è molto sviluppato nei Pesci (Cajal, '08; Tello '09; Beccari ecc.) nei Ciclostomi (Stefanelli '33, '37) mentre risulta ridotto negli Uccelli (Cajal '08, Kappers '20, Craige '28, ecc.) e rappresentato da poche vestigia nei Mammiferi (Cajal '08, Klossowsky '32).

---

[1] Ricordo come nelle forme acquatiche, pur dotate di energici movimenti del tronco, come nei Pesci e negli Anfibi Urodeli, il nucleo di Deiters abbia un carattere molto primitivo; è invece presente l'apparato Mauthneriano in stretta relazione con l'attività motoria nel nuoto (Tagliani '05). Secondo molti neurologi le due cellule di Mauthner sarebbero una particolare differenziazione del nucleo di Deiters (Bartelmez '15, Herrick, '14 ecc.), per altri un differenziamento di particolari elementi del tegmento (Beccari '18). Anch'io, in base alle mie ricerche sulle cellule di Müller dei Petromizonti, due delle quali sono omologabili per posizione alle cellule di Mauthner, sono venuto alla conclusione che queste cellule derivino dal sistema tegmentale. Ricordo d'altra parte come, secondo autorevoli autori, anche il nucleo di Deiters avrebbe la stessa origine (Kappers '20, '21; Beccari '21, '30).

Patologia. — *Un nuovo metodo di preparazione delle azoproteine. Anticorpi alla morfina e alla stricnina* (1). Nota preventiva di Quintino Mingola e di Ettore Biocca, presentata (2) dall'Accademico Dante De Blasi.

Caratteri fisico–chimici ritenuti comunemente necessari perchè una sostanza possa produrre anticorpi sono una considerevole dimensione molecolare, la capacità di formare soluzioni colloidali, di esser digeribile dagli enzimi e di essere costituita di aminoacidi (Doerr).

In seguito agli interessanti studi sulla immunochimica, iniziati da Obermeyer e Pick, e approfonditi con tanto successo da Landsteiner e collaboratori, un nuovo campo di ricerche si è aperto in immunologia: lo studio serologico di sostanze a semplice costituzione molecolare. È stato infatti dimostrato che, copulando sostanze a semplice costituzione molecolare con una molecola proteica e inoculando questo antigene artificiale in animali, si provoca la produzione di anticorpi, specifici proprio contro la molecola semplice fissata alla proteina. La proteina ha un'importanza del tutto secondaria, quella cioè di prestare i suoi caratteri fisico–chimici alla molecola semplice (aptene). Infatti il siero immune reagisce specificamente contro l'aptene, indipendentemente dalla proteina con cui sia stato coniugato (sieroglobulina, emoglobina, gliadina, zeina, ecc.).

Una prova ancora più evidente dell'azione specifica del siero immune sull'aptene è stata fornita da Landsteiner con la reazione di inibizione della precipitazione zonale specifica. Basandosi infatti sul fenomeno conosciuto, che un eccesso di antigene ostacola o inibisce la reazione specifica di precipitazione zonale, osservò che, aggiungendo a una diluizione di antigene artificialmente coniugato, capace di dare una netta reazione di precipitazione, un eccesso di aptene omologo, è possibile ottenere una inibizione anche completa della precipitazione.

La capacità del siero immune, preparato con un antigene complesso, di reagire specificamente contro il solo aptene, fu di nuovo provata anche

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Biologico Paulista in S. Paolo del Brasile.

(2) Nell'Adunanza del 30 maggio 1941–XIX.

da Harrack e Smith, Haurowitz e Brainl. Essi infatti osservarono che la diffusione di un aptene attraverso membrane di collodio può essere impedita da un antisiero corrispondente. Veniva così ulteriormente dimostrato che sostanze semplici sprovviste di potere antigene si combinano specificamente con gli anticorpi e che la reattività serologica *in vitro* è indipendente dall'attitudine immunogena (Landsteiner).

* * *

È senza dubbio di grande interesse non solo scientifico, ma in qualche caso anche pratico, poter ottenere anticorpi specifici contro farmaci o veleni, sprovvisti di tutti quei caratteri necessari per fungere da antigeni e le cui proprietà serologiche ci erano finora completamente sconosciute. La difficoltà tecnica maggiore che si incontra in queste ricerche è, senza dubbio, la maniera di fissare la sostanza di semplice composizione molecolare al supporto proteico.

Il procedimento comunemente adottato è quello classico di Landsteiner, che però richiede la presenza di un gruppo $-NH_2$ diazotabile nella molecola da legare alle proteine; si prepara cioè il sale di diazonio del composto che si vuole studiare e si copula con siero, ottenendo così l'azoproteina corrispondente.

Qualora nel composto in esame non preesista il gruppo aminico primario, i metodi finora indicati in letteratura e utilizzabili secondo i casi, sono i due seguenti:

1°) si bromura il composto in esame e lo si tratta con paranitrofenato di argento; il prodotto di condensazione è ridotto, in modo da trasformare il nitro-gruppo in gruppo aminico primario, diazotabile nel modo solito. Si ha così, ad esempio:

$$R\cdot OH \xrightarrow{HBr} R\cdot Br \xrightarrow{p-AgO\cdot C_6H_4\cdot NO_2} p-RO\cdot C_6H_4\cdot NO_2 \xrightarrow{3H_2} \xrightarrow{3H_2} p-RO\cdot C_6\cdot H_4\cdot NH_2;$$

2°) si nitra il composto in esame, in modo da introdurvi uno o più nitrogruppi $-NO_2$, i quali vengono successivamente ridotti e trasformati in aminogruppi diazotabili.

Dei due predetti metodi, il primo è evidentemente molto laborioso e delicato; il secondo non è applicabile alla serie alifatica e, in generale, ai composti facilmente ossidabili. Appunto per questo, recentemente, Hooker e Boyd hanno potuto preparare azoproteina con stricnina, nitrando questo alcaloide e poi riducendolo in aminostricnica diazotabile;

ma i tentativi fatti dagli AA. con la morfina fallirono completamente, data la sensibilità di questo alcaloide agli agenti ossidanti.

In vista di tali risultati, abbiamo sperimentato, per la preparazione di azoproteine alcaloidee, un nuovo metodo applicabile a tutti i composti copulabili con sali di diazonio (e quindi anche alla morfina, alla stricnina, ecc.) e che può essere schematizzato nel seguente modo:

Si parte dall'acetil–p·fenilendiamina, materia prima utilizzata industrialmente per la sintesi di coloranti (scarlatto, ecc.) e di medicamenti (acido arsanilico, acido p·aminofenilstibinico e derivati, ecc.). Tale amina è diazotata nel modo solito e copulata con l'alcaloide in esame; l'azocomposto ottenuto è successivamente idrolizzato con acido diluito, sì da desacetilare l'altro gruppo aminico. Si diazota nuovamente e si copula col siero, in ambiente alcalino; si forma l'azoproteina alcaloidea, solubile in mezzo alcalino e insolubile in mezzo acido, e perciò facilmente purificabile.

Indicando con *Alk.* la molecola dell'alcaloide e con *Prot.* la molecola proteica, si può schematizzare il nuovo metodo così:

$$p\text{—}CH_3CO\cdot NH\cdot C_6H_4\cdot NH_2\cdot HCl \xrightarrow{HNO_2} p\text{—}CH_3CO\cdot NH\cdot C_6H_4\cdot N:N\cdot Cl \xrightarrow{Alk}$$

$$\xrightarrow{Alk} p\text{—}CHCO\cdot NH\cdot C_6H_4\cdot N:N\cdot Alk \xrightarrow{HCl} Alk\cdot N:N\cdot C_6H_4\cdot NH\cdot HCl \xrightarrow{HNO_2}$$

$$\xrightarrow{HNO_2} Alk\cdot N:N\cdot C_6H_4\cdot N:N\cdot Cl \xrightarrow{Prot.} Alk\cdot N:N\cdot C_6H_4\cdot N:N\cdot Prot.$$

Nella presente Nota preventiva riportiamo i risultati ottenuti con la morfina e con la stricnina, riservandoci, in Note successive, di riportare i dettagli di tecnica e di estendere ad altri alcaloidi e composti organici vari questo metodo di preparazione di azoproteine.

* * *

Le azoproteine morfinica e stricninica sono state preparate con 1/200 della grammomolecola alcaloidea; dopo l'isolamento in mezzo acido, sono state disciolte in 25 ccm di soluzione alcalina, con pH tra 7,6 e 8,2. È stata considerata come unità base, in tutte le diluizioni, la quantità di azocomposto corrispondente a 1/200 delle grammomolecola alcaloidea e contenuta in 25 ccm.

Le azoproteine stricninica e morfinica, così preparate, perdono la capacità di dare le reazioni generali degli alcaloidi; tuttavia l'azostricnina, anche somministrata a piccole dosi, uccide gli animali da esperimento con un attacco stricnico tipico.

È stato inoltre possibile provocare la rottura del legame diazoico, facendo passare la corrente elettrica tra due elettrodi di argento, immersi in una soluzione diluita di azomorfina o azostricnina (ccm. 0,10 di soluzione base dell'azocomposto, mescolati con ccm 2–3 di una soluzione contenente 6,6 mg. di NaCl per cento). Dopo alcune ore una buona quantità di alcaloide si è depositata all'anodo, e può essere riconosciuta mediante le reazioni generali degli alcaloidi.

Sieri precipitanti specifici nei conigli sono stati preparati seguendo la comune tecnica, cioè mediante iniezioni endovenose delle rispettive azoproteine.

È stato così possibile ottenere sieri specifici determinanti ancora chiara reazione zonale di precipitazione al titolo limite di 1 : 3200 della diluizione base di azostricnina e 1 : 800 di quella di azomorfina.

Tutti i controlli eseguiti con numerose altre azoproteine sono stati regolarmente negativi, mentre la reazione zonale di precipitazione si è verificata ugualmente a titoli elevati con morfina e stricnina, diazotate con sieri diversi da quelli usati nella vaccinazione dei conigli.

Conclusioni.

Gli AA. descrivono un nuovo metodo per ottenere azoproteine, partendo da composti sprovvisti di gruppi aminici primari diazotabili, impiegando l'acetil–p.fenilendiamina.

Riportano i primi risultati pratici, che si riferiscono alla preparazione di sieri precipitanti, con alta concentrazione di anticorpi, contro la stricnina e contro la morfina.

AUTORI CITATI.

Doerr, « Handbuch path. Mikr. », *1*, 808 (1929).

Obermeyer e Pick, « Wien. klin. Wschr. », *16*, 657 (1903); *17*, 265 (1904); *19*, 327 (1906).

Landsteiner e Prasek, « Bioch. Z. », *61*, 191 (1914).

Landsteiner, « Bioch. Z. », *93*, 117 (1919); *104*, 280 (1920).

Landsteiner e Lampl, « Z. Immunitätsfor. », *26*, 258 (1917).

Marrack e Smith, « Nature », *128*, 1077 (1921); « Brit. J. Exp. Path. », *13*, 394 (1932).

Haurowitz e Brainl, « Z. Physiol. Chem. », *214*, 111 (1933).

Landsteiner, « Spec. Ser. React. », 119. Ed. Ch. Tomas, Baltimore (1936).

Hooker e Boyd, « J. Immun. », *38*, 479 (1940).

Fisiologia (Microbiologia). — *Preparazione ed utilizzazione in batteriologia dell'agar-agar di alghe dei mari italiani* [1]. Nota di Giovanni Labranca e Carlo Maldura presentata [2] da Gustavo Brunelli, Aggregato alla R. Accademia d'Italia.

Con la quasi completa sospensione degli scambi internazionali, determinatasi in conseguenza dello stato di guerra, molti laboratori di igiene e batteriologia sono venuti a trovarsi in una certa difficoltà per quanto riguarda il rifornimento dell'agar-agar, chiamato comunemente agar, che, come è noto, rappresenta uno dei componenti essenziali dei terreni di coltura solidi, largamente adoperati in batteriologia.

Già durante la grande guerra questo inconveniente si era verificato in alcune nazioni (Germania) ed aveva messo in serio imbarazzo sia gli istituti scientifici, sia, in modo ancor più preoccupante, gli istituti vaccinogeni che fanno un largo consumo di agar per la preparazione dei vaccini, necessari per la profilassi immunitaria delle popolazioni civili e soprattutto delle forze armate.

Si comprende quindi come, ad evitare il ripetersi di tale deprecabile stato di cose, non siano mancati in vari paesi tentativi intesi a trovare sostanze capaci di sostituire l'agar in batteriologia, e come in questi ultimi anni siano state eseguite numerose ricerche al riguardo.

Il problema è stato preso in particolare considerazione specialmente in Germania, e sono appunto i ricercatori tedeschi che hanno dato il maggior contributo allo studio di questo argomento di viva attualità.

Fra le sostanze da essi studiate e proposte quali agenti di solidificazione dei terreni colturali, ricorderemo l'alcool polivinilico (Schütz), il silicato sodico (Hettche e Münch), l'amido (Zimmermann), la pectina di mele (Mehlitz, Funck, Wohlfeil), ecc.

In Italia si sono occupati dell'argomento Stoppa, Acquarone e Checcacci, che hanno studiato l'impiego in batteriologia dei substrati solidificati con la silice gelatinosa secondo il metodo di Hettche e Münch,

---

[1] Lavoro eseguito nel R. Laboratorio centrale di Idrobiologia di Roma e nell'Istituto di Igiene della R. Università di Roma.

[2] Nell'Adunanza del 30 maggio 1941-XIX.

e Cioglia che ha preso in esame la possibilità di ottenere l'agar da piante marine (crittogame e fanerogame) presenti nelle acque del golfo di Cagliari; egli ne ha esaminato 13 tipi e da uno di essi (*Spiridia filamentosa*) ha ottenuto un agar che negli esperimenti da lui eseguiti sembra che si sia dimostrato abbastanza adatto per la preparazione dei terreni colturali.

Considerando l'attualità del problema ci è parso interessante ricercare se le alghe dei mari italiani potessero utilizzarsi per una produzione su vasta scala di agar nazionale con proprietà tali da poter sostituire quello attualmente in commercio che necessariamente dobbiamo acquistare all'estero.

Queste ricerche sono state eseguite presso il R. Laboratorio Centrale di Idrobiologia per quanto riguarda la preparazione dell'agar (Maldura), e presso l'Istituto d'Igiene della R. Università di Roma per le prove di batteriologia (Labranca).

* * *

Come è noto l'agar è un prodotto fabbricato prevalentemente in Giappone, dove costituisce un'antica ed importante industria, ed è appunto dal Giappone che non solo l'Italia ma tutti i paesi europei importano la totalità del loro fabbisogno. Altre nazioni che producono agar, ma per soddisfare le proprie esigenze, sono gli Stati Uniti e la Russia; invece altri paesi dell'Oriente (Giava, Ceylon, ecc.) ricavano dalle alghe marine vari prodotti gelatinosi che vengono impiegati sopratutto per uso alimentare locale.

Anche i Giapponesi preparano varie specie di gelatine che prendono nomi diversi secondo i generi di alghe impiegate, ma il « Kanten », termine giapponese corrispondente a quello malese di « agar-agar », viene ottenuto essenzialmente dal genere *Gelidium*, mentre l'agar del Ceylon è ottenuto dalla *Gracilaria* dei litorali dell'Indocina, e l'agar di Macassar o di Giava dall'*Eucheuma*, alga dell'Oceano Indiano.

Come si vede si tratta sempre di alghe rosse, cioè dell'ordine delle Rodoficee o Floridee, caratteristiche per il loro contenuto in gelosio, glucide complesso costituente essenziale dell'agar.

Per questa ragione abbiamo limitato le ricerche alle Rodoficee dei nostri mari, e precisamente ai generi *Gelidium* e *Gracilaria*, i cui campioni sono stati raccolti rispettivamente a Rovigno d'Istria e nel golfo di Napoli. Ci siamo limitati solo all'identificazione del genere in quanto la specie ha una importanza relativa ai fini presenti.

La raccolta è stata effettuata nel periodo estivo, epoca in cui, secondo i giapponesi, le alghe si presentano nelle migliori condizioni di sviluppo e di rendimento in agar.

Il trattamento fatto subire a tali alghe non ha differito in linea generale da quelli impiegati dai giapponesi per gli stessi generi di alghe e dai russi per l'*Ahnfeltia plicata* del Mar Bianco.

Appena raccolte, le alghe sono state sommariamente lavate con acqua dolce e seccate al sole. In laboratorio sono state di nuovo lungamente lavate e sbarazzate di tutte le sostanze estranee e dalle alghe di altro genere e, per togliere loro il più possibile le sostanze calcaree incrostanti, sono state anche trattate con una soluzione diluita di acido. Per seccarle e in parte decolorarle sono state esposte nuovamente al sole.

L'estrazione dell'agar è stata effettuata a caldo impiegando una determinata quantità di acqua secondo il genere delle alghe. Al termine dell'estrazione la massa gelatinosa, che si presenta di colore rosso bruno a causa del pigmento – la ficoeritrina – caratteristico delle Rodoficee e di altre sostanze estranee non gelificabili, è stata sottoposta ad uno speciale processo di depurazione, dopo di che l'agar, tagliato in striscioline al modo giapponese e contenente solo l'acqua di imbibizione, è stato definitivamente essicato.

Abbiamo potuto notare che il processo di depurazione, il quale ha richiesto particolare lavoro, ha molta importanza sia per le qualità intrinseche del prodotto sia per il suo aspetto commerciale, e deve perciò essere condotto con molta cura.

Se si vuole ottenere un agar del tutto incolore si può trattarlo, quando è liquido, con carbone animale.

L'agar così preparato presenta caratteristiche che per nulla lo differenziano da quello giapponese. Opportunamente filtrato esso si presenta trasparente, e tanto per il *Gelidium* che per la *Gracilaria* i punti di solidificazione e di fusione si aggirano rispettivamente sui 45° e sui 90°.

Il rendimento in agar secco che abbiamo ottenuto con i due generi di alghe, tenendo presente i mezzi inadeguati di laboratorio, è stato piuttosto elevato e cioè circa del 50 % per il *Gelidium* e del 35 % per la *Gracilaria*.

Per quanto riguarda la distribuzione e la disponibilità nei mari italiani di alghe adatte per alimentare un'industria dell'agar occorre precisare che, sebbene le alghe in genere si presentino in quantità inferiore alle Fanerogame (*Posidonia*, *Zostera* e *Cymodocea*), che invece sono abbondantissime e che assai sovente vengono confuse con le alghe vere e proprie, pur tuttavia, in base alle attuali conoscenze, le Rodoficee si riscontrano in notevoli quantità lungo le coste rocciose dei nostri mari, come nel Golfo di Napoli, nel Mar Grande di Taranto, nell'Istria, nella Dalmazia, ecc. e sopratutto nella Laguna veneta.

Inoltre non è detto che solamente i due generi sperimentati si prestino alla estrazione dell'agar, in quanto la presenza del gelosio è una caratteristica comune a molte Rodoficee, e quindi le possibilità di

sfruttamento possono essere assai sviluppate impiegando altri generi appartenenti allo stesso ordine.

* * *

Con l'agar così ottenuto abbiamo preparato, con la comune tecnica adoperata in batteriologia, del brodo-agar al 2 %. Il terreno così ottenuto non si differenzia da quello preparato con l'agar in fili del commercio; fonde a 90° e solidifica a 45°.

Esso si presenta di colore giallastro, di aspetto trasparente, aderisce benissimo alle pareti dei tubi, tanto se solidificato a cilindro che a becco di clarino; la sua consistenza è tale da permettere senza alcuna speciale precauzione la semina in superficie con l'ansa di platino e quella per infissione con l'ago di platino. Inoltre tale terreno si presta benissimo per l'allestimento delle colture nelle piastre di Petri e nelle fiasche di Roux che possono venire incubate in termostato capovolte.

Il terreno, distribuito in tubi e solidificato a becco di clarino, è stato insemenzato con diverse specie batteriche per studiarne il loro sviluppo, confrontando i resultati con quelli ottenuti seminando le stesse specie batteriche, con analoghe modalità, su brodo-agar preparato con l'agar del commercio.

Le specie da noi provate sono state le seguenti: *Bacterium coli*, *Bacterium typhi*, *Bacterium paratyphi A*, *Bacterium paratyphi B*, *Bacterium paratyphi C*, *Bacterium disenteriae*. *Vibrio cholerae*, *Brucella melitensis*, *Micrococcus pyogenes aureus*, *Bacterium pyocianeum*, *Bacterium vulgare*, *Bacillus anthracis*.

Tutte le specie microbiche seminate si sono sviluppate egualmente rigogliose in entrambi i terreni, nè hanno mostrato differenze per quanto riguarda il tempo di sviluppo.

Anche le semine di germi anaerobi, eseguite per infissione ed adoperando le piastre triple, hanno dimostrato la possibilità dell'uso di questo agar anche a tale scopo.

Sono in corso ulteriori ricerche atte a determinare l'utilizzazione di questo agar nei più svariati usi di laboratorio, e già i primi risultati ottenuti ci autorizzano a pensare che nessuna limitazione dovrà farsi per la sua adozione.

INDICI

INDICE PER AUTORI

A

Abetti G., Altezza della cromosfera nel 1940 e andamento del ciclo solare, *964*.

Ageno M., Amaldi E., Boccciarelli D., e Trabacchi G. C., Sulla distribuzione angolare dei neutroni emessi nella disintegrazione di elementi leggeri, *338*.

Agostinelli C., Sui problemi fondamentali della Cosmogonia, *166*.

— Effetto del termine cosmogonico sullo spostamento del perielio di una orbita planetaria e sulla variazione del parametro e dell'eccentricità, *592*.

Amaldi E., Vedi Ageno M.

Amerio L., Sulla convergenza delle serie doppie, *684*.

— Sulle famiglie di insiemi, *699*.

Andreatta C., Appunti geologico-petrografici su alcuni problemi dello zoccolo cristallino dell'Eritrea, *766*.

Andrissi G. L., La radiazione del Sole a Roma dal 1937 al 1939, *526*.

Antonioli A., Sulla resilienza, a bassa temperatura, degli acciai comuni e speciali, *361*.

Armellini G., I problemi fondamentali della Cosmogonia e la legge di Newton. Nota VII, *158*.

— I problemi fondamenali della Cosmogonia e la legge di Newton. Nota VIII, *302*.

Armellini Conti G., Il diametro orizzontale del Sole nel 1938, 1939 e 1940, osservato al R. Osservatorio Astronomico di Monte Mario, *531*.

B

Baccari V., Vedi Cedrangolo F.

Baglioni S., L'opera scientifica di Adolfo Montuori nel campo della Fisiologia. Comunicazione, *557*.

Baglioni S. e Manfredi A., Nuovo metodo di indagine delle proprietà acustiche del capo, *399*.

Ballario C., Della Corte M., e Prosperi M., Sulle componenti dura e molle della radiazione cosmica fino alla profondità di 575 m. di acqua equivalente, *850*.

Barone A., Vedi Vecchiacchi F.

Betti M. e Lucchi E., Sulla trasformazione dell'acido destro-tartarico nel meso-tartarico per azione del pancreas. Risposta a Carlo Neuberg ed Elisabetta Peiser, *84*.

Biocca E., Vedi Mingola Q.

Bocciarelli D., Vedi Ageno M.

Bompiani E., Sulle superficie con flessi infinitamente vicini, *497*.

— Invarianti proiettivi di calotte, *888*.

Bortolotti E., Coordinate normali ed « estensioni » nella geometria degli spazi a connessione lineare, *106*.

— Varietà a connessione proiettiva e loro immagini tangenziali, *251*.

Brighenti A., Esperienze dirette a precisare i processi di formazione dell'acido urico nei bachi da seta, *915*.

— L'acido urico nello sviluppo larvale della *Philosamia ricini*, *919*.

Brunelli G., Dell'importanza delle frane nell'origine dei giacimenti di Lignite, *642*.

Brunelli G., Il lavoro nelle scuole e l'insegnamento scientifico. Relazione, *875*.

Bruni G., Pubblicazioni scientifiche e brevetti d'invenzione. Relazione, *787*.

Buzano P., Interpretazione geometrica delle caratteristiche di un'equazione a derivate parziali del 1° ordine, *703*.

C

Cacciapuoti B. N. e Palmieri G., Sugli effetti di transizione della radiazione cosmica intorno al livello del mare, *56*.

Caldirola P., Forze non conservative nella meccanica quantistica, *896*.

Caloi P., Sopra alcuni nuovi sistemi di onde sismiche a carattere superficiale oscillanti nel piano principale, *13*.

Caprì A., Contributo allo studio dell'anafilassi. – V. Protezione completa dallo shock anafilattico sperimentale mediante formolo iniettato prima della scatenante, *653*.

Carano E., Commemorazione di Emilio Chiovenda, *923*.

Carrelli A., Sul potere emissivo parziale di alcuni cloruri, *51*.

— Vedi Mattioli G. D.

Caselli P. e Ciaranfi E., Micrometodo per la determinazione dell'acido acetico. – I. Dosaggio ossidimetrico dell'acido acetico. – II. Separazione dell'acido acetico dalle sue soluzioni acquose. *1084*.

Cassinis G., La crociera gravimetrica del R. Sommergibile « Des Geneys ». Anno 1935. *1038*.

Cedrangolo F., Effetto della porfiresside sull'azione reversibile della esterasi pancreatica, *78*.

Cedrangolo F. e Baccari V., Sulla sintesi biologica dell'acido ippurico, *62*.

— — La sintesi enzimatica dell'acido ippurico *in vitro*, *904*.

Checchia-Rispoli G., Osservazioni geologiche sull'Appennino Pugliese, *208*.

Checchia-Rispoli G., Nuovi dati sulla fauna echinitica del macco di Nettunia, *213*.

— Osservazioni su alcuni generi di *Antillasterinae*, *388*.

— Sul genere *Pseudopygurus* Lambert, *870*.

Chiovenda E., Documenti relativi a James Bruce e Luigi Balugani che visitarono l'Etiopia nel 1769–1772. Comunicazione, *439*.

Ciaccio G., Ricerche sul significato istochimico e funzionale delle granulazioni interfibrillari delle fibre muscolari striate, *427*.

Ciaranfi E., Vedi Caselli P.

Cimino M., Una soluzione in grande del problema di Cauchy per una particolare equazione in tre variabili, ottenuta con un metodo di M. Picone. Nota I, *800*.

Cisotti U., Campi tensoriali potenziali, *129*.

— Sistemi continui conservativi, *294*.

— Invarianti quadratici dei tensori, *511*.

— Campi tensoriali potenziali di rango superiore, *586*.

Colucci A., Sulla rappresentazione conforme delle superficie a connessione multipla, *717*.

Conforto F., Su un classico teorema di Noether e sulle varietà algebriche trasformabili in varietà con infinite quadriche, *268*.

D

De Blasi D., Le vaccinazioni nell'Esercito. Relazione, *93*.

De Fazi R. e Savi C., Studi su gli indoni. Sintesi del 2–3–6–Trimetil–Indone-1. Nota XVIII, *745*.

Della Corte M., Vedi Ballario C.

Desio A., Sull'età eodevonica delle « Arenarie ad Harlania » del Sahara *912*.

F

Fabiani R., Gli idrocarburi gassosi naturali in Italia e la loro importanza. Relazione, *933*.

Fabriani G., Vedi Tria E.
Faedo S., Sulle trasformate multiple di Laplace, *722*.
Fantappiè L. Risoluzione in termini finiti del problema di Cauchy, con dati iniziali su una ipersuperficie qualunque, *948*.
Fenoglio M., I giacimenti di nichelio e cobalto delle ofioliti mesozoiche delle Alpi Piemontesi, *216*.
Fichera G., Generalizzazione del teorema d'Abel sulle serie di potenze, *810*.
Fracastoro M. G., La protuberanza eruttiva del 18 aprile 1941, *976*.
— Larghezze equivalenti e intensità delle righe cromosferiche nell'eclisse di Sole del 19 giugno 1936. *979*.
Franchetta A., Sulla curva doppia della proiezione di una superficie generale dell'S_4, da un punto generico su un S_3, *282*.
Franzini T., Centrifugazione dell'idrogeno occluso nei metalli. *862*.
Fusco R. e Trisoglio G., Ricerche sui pernitrosoderivati. Sulla cosidetta « mesitilnitrimina » di Harries. Nota I. *618*.
— — Ricerche sui pernitrosoderivati. Sulla cosidetta « mesitilnitrimina » di Harries. Nota II., *751*.

G

Gallitelli P., Tere rare nel granito di Alzo: osservazioni spettrografiche, *87*.
— Sulla presenza di terbio, disprosio, olmio, erbio ed altre terre rare in una mica biotite del granito di Alzo, *395*.
Gherardelli G., Sul modello minimo della varietà degli elementi differenziali del 2° ordine del piano projettivo, *821*.
Gialanella L., Indici di colore di ammassi globulari e nebulose, e ricerche sull'assorbimento della luce nello spazio interstellare, *312*.
— Sulla possibilità dell'appartenenza del pianeta Plutone al sistema di Nettuno. Nota I. *603*.
Gialanella L., Fotometria visuale e indici di colore del nucleo della cometa Cunningham (1940 c), *837*.
Gratton L., Sopra alcune proprietà dinamiche dei sistemi stellari, *1*.
Gulotta B., Sulla determinazione, per via algebrica, degli scostamenti lineari del Geoide da un ellissoide locale. *614*.

L

Labranca G. e Maldura C., Preparazione ed utilizzazione in batteriologia dell'agar-agar di alghe dei mari italiani, *1107*.
Lanfranchi F., Controllo delle condizioni di idrolisi dei cerebrosidi nei loro metodi volumetrici di dosamento. *202*.
Lucchi E., Vedi Betti M.

M

Majorana Q., Centrifugazione fotoelettrica, *187*.
Maldura C., Vedi Labranca G.
Manfredi A., Vedi Baglioni S.
Manunta C., Sulla sostanza colorante di natura flavonica della foglia del gelso, *421*.
Masi O., L'analisi spettrografica quantitativa del berillio negli acciai comuni e speciali, *372*.
Mattioli G. D. e Carrelli A., Sul significato del principio di Hamilton. *142*.
Mineo C., Sul passaggio da uno a un altro degli ellissoidi locali relativi a una data regione del geoide e sulle conseguenti variazioni delle coordinate ellissoidiche dei vertici della rete geodetica, *333*.
— Su una formula integro-differenziale relativa alle funzioni di Laplace, *944*.
Mingola Q. e Biocca E., Un nuovo metodo di preparazione delle azoproteine. Anticorpi alla morfina e alla stricnina, *1103*.

Miranda C., Sulle equazioni integrali il cui nucleo è funzione lineare del parametro, *117*.
— Su talune serie di funzioni olomorfe, *829*.
Montanaro Gallitelli E., Ulteriori ricerche sull'età di un deposito eritreo al margine del Mar Rosso, *647*.
Morin U., Sulle serie intersezioni complete sopra una superficie algebrica, *289*.

P

Palmieri G., Vedi Cacciapuoti B. N.
Prosperi M., Vedi Ballario C.

R

Righini G., Sulla determinazione del profilo vero delle righe spettrali mediante integrazione ottica, *1031*.
Rios S., Prolungamento analitico mediante permutazione dei termini di una serie, *677*.
Rolla M., Ricerche termodinamiche su soluzioni di alcuni acetoderivati della resorcina in naftalina, *632*.
Rondoni P., Commemorazione di Alberto Pepere, *431*.
Rotini O. T., Ricerche sulla scissione enzimatica dell'acido *l*—(+)— fosfolattico, *1070*.

S

Sacchetti A., Sulla variabilità dei caratteri antropometrici lineari. Nota preliminare, *222*.
— Sul confronto reciproco della variabilità dei caratteri antropometrici lineari, *234*.
Sansone G., La formula di bisezione della $\wp u$ di Weierstrass, e un teorema sui punti razionali delle cubiche ellittiche a coefficienti razionali, *124*.
Savi C., Vedi De Fazi R.
Scarpa O., Sulle equazioni di Helmholtz e di Gibbs, *1057*.
— Potenziali elettrochimici e effetto Volta. – VI. I potenziali elettrochimici dei metalli e la loro costituzione elettronica, *1062*.
Signorini A., Sulle proprietà di media comuni a tutti i sistemi continui, *728*.
Silva G., Il termine solare dell'aberrazione e la struttura del sistema planetario, *967*.
Silvestri F., Sulla maniera di fecondazione della femmina negli *Stylopidae* (Insecta, Strepsiptera), *553*.
Stefanelli A., I centri vestibolari studiati comparativamente in Rettili dotati di differente motilità e modo di locomozione, *1096*.

T

Tirelli M., Struttura dell'apparato di Golgi, suoi rapporti col lacunoma, sua funzione, *658*.
Tolotti C., Sul calcolo delle piastre elastiche a forma di settore anulare, *517*.
Trabacchi G. C., Vedi Ageno M.
Tria E. e Fabriani G., Le sostanze minerali del succo pancratico umano, *381*.
Trisoglio G., Vedi Fusco R.

U

Udeschini P., Incompatibilità dell'adesione completa al contorno con la regolarità e le condizioni asintotiche euleriane per correnti viscose stazionarie, *957*.

V

Valadares M., Contributo allo studio degli spettri γ e X molli dei prodotti di disintegrazione del radon, *351*.
— Gli spettri γ e X dei derivati del radon nella regione da 700 a 1300 U. X., *1049*.
Vanni V., Ricerche sul controllo biologico degli antielmintici, *405*.
Vannini E., Rapida azione mascolinizzante del testosterone sulle go-

madi di girini di *Rana agilis* in metamorfosi, *666*.

Vannini E., La partecipazione del tessuto interrenale nell'organogenesi della gonade nei processi di intersessualità giovanile della *Rana agilis*, *777*.

Vecchiacchi F. e Barone A., Metodo di misura rapida e precisa delle frequenze, *542*.

Vocca P., Sull'opportunità di un calcolo più completo dell'aberrazione annua per le coppie di stelle del Servizio Internazionale delle Latitudini, *735*.

Z

Zappa G., Sulla relazione tra il rango e il tipo di un gruppo, *574*.

Zanotelli G., Assorbimento elementare della luce nel passaggio attraverso alle nubi, *42*.

INDICE PER MATERIE

A

Antropologia. — Sulla variabilità dei caratteri antropometrici lineari. Nota preliminare. A. Sacchetti, *222*.

— Sul confronto reciproco della variabilità dei caratteri antropometrici lineari. A. Sacchetti, *234*.

Astronomia. — Altezza della cromosfera nel 1940 e andamento del ciclo solare. G. Abetti, *964*.

— Sui problemi fondamentali della Cosmogonia. C. Agostinelli, *166*.

— Effetto del termine cosmogonico sullo spostamento del perielio di una orbita planetaria e sulla variazione del parametro e dell'eccentricità. G. Agostinelli, *592*.

— La radiazione del Sole a Roma dal 1937 al 1939. G. L. Andrissi, *526*.

— I problemi fondamentali della Cosmogonia e la legge di Newton. Nota VII. G. Armellini, *158*.

— I problemi fondamentali della Cosmogonia e la legge di Newton. Nota VIII. G. Armellini, *302*.

— Il diametro orizzontale del Sole nel 1938, 1939 e 1940, osservato al Regio Osservatorio Astronomico di Monte Mario. G. Armellini Conti, *531*.

— La protuberanza eruttiva del 18 aprile 1941. M. G. Fracastoro, *976*.

— Larghezze equivalenti e intensità delle righe cromosferiche nell'eclisse di Sole del 19 giugno 1936. M. G. Fracastoro, *979*.

— Indici di colore di ammassi globulari e nebulose, e ricerche sull'assorbimento della luce nello spazio interstellare. L. Gialanella, *312*.

Astronomia. — Sulla possibilità dell'appartenenza del pianeta Plutone al sistema di Nettuno. Nota I. L. Gialanella, *603*.

— Fotometria visuale e indici di colore del nucleo della cometa Cunningham (1940 c). L. Gialanella, *837*.

— Sopra alcune proprietà dinamiche dei sistemi stellari. L. Gratton, *1*.

— Sulla determinazione del profilo vero delle righe spettrali mediante integrazione ottica. G. Righini, *1031*.

— Il termine solare dell'aberrazione e la struttura del sistema planetario. G. Silva, *967*.

— Sull'opportunità di un calcolo più completo dell'aberrazione annua per le coppie di stelle del Servizio Internazionale delle latitudini. P. Vocca, *735*.

B

Biologia. — Ricerche sul significato istochimico e funzionale delle granulazioni interfibrillari delle fibre muscolari striate. G. Ciaccio, *427*.

— Sulla sostanza colorante di natura flavonica della foglia del gelso. C. Manunta, *421*.

— Ricerche sul controllo biologico degli antielmintici. V. Vanni, *405*.

— La partecipazione del tessuto interrenale nell'organogenesi della gonade e nei processi di intersessualità giovanile della *Rana agilis*. E. Vannini, *777*.

Botanica. — Documenti relativi a James Bruce e Luigi Balugani che visitarono l'Etiopia nel 1769 1772. Comunicazione. E. Chiovenda, *439*.

C

Chimica. – Sulla resilienza, a bassa temperatura, degli acciai comuni e speciali. A. Antonioli, *361*.

Sulla trasformazione dell'acido destro–tartarico nel meso–tartarico per azione del pancreas. Risposta a Carlo Neuberg ed Elisabetta Peiser. M. Betti e E. Lucchi, *84*.

Micrometodo per la determinazione dell'acido acetico. – I. Dosaggio ossidimetrico dell'acido acetico. – II. Separazione dell'acido acetico dalle sue soluzioni acquose. P. Caselli e E. Ciaranfi, *1084*.

Effetto della porfiressidе sull'azione reversibile della esterasi pancreatica. F. Cedrangolo, *78*.

– Sulla sintesi biologia dell'acido ippurico. F. Cedrangolo e V. Baccari, *62*.

La sintesi enzimatica dell'acido ippurico *in vitro*. F. Cedrangolo e V. Baccari, *904*.

Studi su gli indoni. Sintesi del 2 3–6–Trimetil Indone–1. Nota XVIII. R. De Fazi e C. Savi, *745*.

— Ricerche sui pernitrosoderivati. Sulla cosidetta « mesitilnitrimina » di Harries. Nota I. R. Fusco e G. Trisoglio, *618*.

Ricerche sui pernitrosoderivati. Sulla cosidetta « mesitilnitrimina » di Harries. Nota II. R. Fusco e G. Trisoglio, *751*.

— Controllo delle condizioni di idrolisi dei cerebrosidi nei loro metodi volumetrici di dosamento. F. Lanfranchi, *202*.

— L'analisi spettrografica quantitativa del berillio negli acciai comuni e speciali. O. Masi, *372*.

– Ricerche termodinamiche su soluzioni di alcuniacceto derivati della resorcina innaftalina. M. Rolla, *632*.

Chimica. — Ricerche sulla scissione enzimatica dell'acido *l*—(+)—fosfolattico. O. T. Rotini, *1070*.

Sulle equazioni di Helmholtz e di Gibbs. O. Scarpa, *1057*.

Potenziali elettrochimici e effetto Volta. – VI. I potenziali elettrochimici dei metalli e la loro costituzione elettronica. O. Scarpa, *1062*.

Le sostanze minerali del succo pancreatico umano. E. Tria e G. Fabriani, *381*.

Commemorazioni. – *431*, *923*.

F

Fisica. – Sulla distribuzione angolare dei neutroni emessi nella disintegrazione di elementi leggeri. M. Ageno, E. Amaldi, D. Bocciarelli e G. C. Trabacchi, *338*.

Sulle componenti dura e molle della radiazione cosmica fino alla profondità di 575 m. di acqua equivalente. C. Ballario, M. Della Corte e M. Prosperi, *850*.

Sul potere emissivo parziale di alcuni cloruri. A. Carrelli, *51*.

Centrifugazione dell'idrogeno occluso nei metalli. T. Franzini, *862*.

Centrifugazione fotoelettrica. Q. Majorana, *187*.

Contributo allo studio degli spettri γ e X molli dei prodotti di disintegrazione del radon. M. Valadares, *351*.

Gli spettri γ e X dei derivati del radon nella regione da 700 a 1300 U. X. M. Valadares, *1049*.

Metodo di misura rapida e precisa delle frequenze. F. Vecchiacchi e A. Barone, *542*.

Fisiologia. L'opera scientifica di Adolfo Montuori nel campo della Fisiologia. Comunicazione. S. Baglioni, *557*.

Nuovo metodo di indagine delle proprietà acustiche del capo. S. Baglioni e A. Manfredi, *399*.

Esperienze dirette a precisare i processi di formazione dell'acido

urico nei bachi da seta. A. Brighenti *915*.

Fisiologia. — L'acido urico nello sviluppo larvale della *Philosamia ricini*. A. Brighenti, *919*.

— Preparazione ed utilizzazione in batteriologia dell'agar-agar di alghe dei mari italiani. G. Labranca e C. Maldura, *1107*.

— Struttura dell'apparato di Golgi, suoi rapporti col lacunoma, sua funzione. M. Tirelli, *658*.

— Rapida azione mascolinizzante del testosterone sulle gonadi di girini di *Rana agilis* in metamorfosi. E. Vannini, *666*.

G

Geodesia. – La crociera gravimetrica del R. Sommergibile « Des Geneys », Anno 1935. G. Cassinis, *1038*.

— Sulla determinazione, per via algebrica, degli scostamenti lineari del Geoide da un ellissoide locale. B. Gulotta, *614*.

— Sul passaggio da uno a un altro degli ellissoidi locali relativi a una data regione del geoide e sulle conseguenti variazioni delle coordinate ellissoidiche dei vertici della rete geodetica. C. Mineo, *333*.

Geofisica. – Sugli effetti di transizione della radiazione cosmica intorno al livello del mare. B. N. Cacciapuoti e G. Palmieri, *56*.

— Sopra alcuni nuovi sistemi di onde sismiche a carattere superficiale oscillanti nel piano principale. P. Caloi, *13*.

— Assorbimento elementare della luce nel passaggio attraverso alle nubi. G. Zanotelli, *42*.

Geologia. – Appunti geologico-petrografici su alcuni problemi dello zoccolo cristallino dell'Eritrea. C. Andreatta, *766*.

— Dell'importanza delle frane nell'origine dei giacimenti di Lignite. G. Brunelli, *642*.

Geologia. — Osservazioni geologiche sull'Appennino Pugliese. G. Checchia-Rispoli, *208*.

— Sull'età eodevonica delle « Arenarie ad Harlania » del Sahara. A. Desio, *912*.

— Ulteriori ricerche sull'età di un deposito eritreo al margine del Mar Rosso. E. Montanaro Gallitelli, *647*.

Geometria. – Varietà a connessione proiettiva e loro immagini tangenziali. E. Bortolotti, *251*.

M

Matematica. – Sulla convergenza delle serie doppie. L. Amerio, *684*.

— Sulle famiglie di insiemi. L. Amerio, *699*.

— Sulle superficie con flessi infinitamente vicini. E. Bompiani, *497*.

— Invarianti proiettivi di calotte. E. Bompiani, *888*.

— Coordinate normali ed « estensioni » nella geometria degli spazi a connessione lineare. E. Bortolotti, *106*.

— Interpretazione geometrica delle caratteristiche di un'equazione a derivate parziali del 1° ordine. P. Buzano, *703*.

— Una soluzione in grande del problema di Cauchy per una particolare equazione in tre variabili, ottenuta con un metodo di M. Picone. Nota I. M. Cimino, *800*.

— Sulla rappresentazione conforme delle superficie a connessione multipla. A. Colucci, *717*.

Su un classico teorema di Noether e sulle varietà algebriche trasformabili in varietà con infinite quadriche. F. Conforto, *268*.

— Sulle trasformate multiple di Laplace. S. Faedo, *722*.

— Risoluzione in termini finiti del problema di Cauchy, con dati iniziali su una ipersuperficie qualunque. L. Fantappiè, *948*.

— Generalizzazione del teorema d'Abel sulle serie di potenze. G. Fichera, *810*.

Matematica. — Sulla curva doppia della proiezione di una superficie generale dell'S_4, da un punto generico su un S_3. A. Franchetta, *282*.
— Sul modello minimo della varietà degli elementi differenziali del 2° ordine del piano projettivo. G. Gherardelli, *821*.
— Su una formula integro-differenziale relativa alle funzioni di Laplace. C. Mineo, *944*.
— Sulle equazioni integrali il cui nucleo è funzione lineare del parametro. C. Miranda, *117*.
— Su talune serie di funzioni olomorfe. C. Miranda, *829*.
— Sulle serie intersezioni complete sopra una superficie algebrica. U. Morin, *289*.
— Prolungamento analitico mediante permutazione dei termini di una serie. S. Rios, *677*.
— La formula di bisezione della $\wp u$ di Weierstrass, e un teorema sui punti razionali delle cubiche ellittiche a coefficienti razionali. G. Sansone, *124*.
— Sulla relazione tra il rango e il tipo di un gruppo. G. Zappa, *574*.
Meccanica. — Forze non conservative nella meccanica quantistica. P. Caldirola, *896*.
— Campi tensoriali potenziali. U. Cisotti, *129*.
— Sistemi continui conservativi. U. Cisotti, *294*.
— Invarianti quadratici dei tensori. U. Cisotti, *511*.
— Campi tensoriali potenziali di rango superiore. U. Cisotti, *586*.
— Sul significato del principio di Hamilton. G. D. Mattioli e A. Carrelli, *142*.
— Sulle proprietà di media comuni a tutti i sistemi continui. A. Signorini, *728*.
— Sul calcolo delle piastre elastiche a forma di settore anulare. C. Tolotti, *517*.
— Incompatibilità dell'adesione completa al contorno con la regolarità e le condizioni asintotiche euleriane per correnti viscose stazionarie. P. Udeschini, *957*.
Mineralogia. – I giacimenti di nichelio e cobalto delle ofioliti mesozoiche delle Alpi Piemontesi. M. Fenoglio, *216*.
— Terre rare nel granito di Alzo: osservazioni spettrografiche. P. Gallitelli, *87*.
— Sulla presenza di terbio, disprosio, olmio, erbio ed altre terre rare in una mica biotite del granito di Alzo. P. Gallitelli, *395*.

P

Paleontologia. – Nuovi dati sulla fauna echinitica del macco di Nettunia. G. Checchia-Rispoli, *213*.
— Osservazioni su alcuni generi di *Antillasterinae*. G. Checchia-Rispoli, *388*.
— Sul genere *Pseudopygurus* Lambert. G. Checchia-Rispoli, *870*.
Patologia – Contributo allo studio dell'anafilassi. – V. Protezione completa dallo shock anafilattico sperimentale mediante formolo iniettato prima della scatenante. A. Caprí, *653*.
— Un nuovo metodo di preparazione delle azoproteine. Anticorpi alla morfina e alla stricnina. Q. Mingola e E. Biocca, *1103*.

R

Relazioni. – *93, 787, 875, 933*.

Z

Zoologia. – Sulla maniera di fecondazione della femmina negli *Stylopidae* (Insecta, Strepsiptera). F. Silvestri, *553*.
— I centri vestibolari studiati comparativamente in Rettili dotati di differente motilità e modo di locomozione. A. Stefanelli. *1096*.

INDICE DEL VOLUME

FASCICOLO 1–2.

GIUGNO–LUGLIO 1940–XVIII.

NOTE E COMUNICAZIONI

L. GRATTON. – Sopra alcune proprietà dinamiche dei sistemi stellari (pres. dall'Accademico *E. Bianchi*) . . . . . Pag. 1

P. CALOI. – Sopra alcuni nuovi sistemi di onde sismiche a carattere superficiale oscillanti nel piano principale (pres. dall'Accademico *A. Lo Surdo*) 13

G. ZANOTELLI. – Assorbimento elementare della luce nel passaggio attraverso alle nubi (pres. dall'Accademico *A. Lo Surdo*) 42

A. CARRELLI. – Sul potere emissivo parziale di alcuni cloruri 51

B. N. CACCIAPUOTI e G. PALMIERI. – Sugli effetti di transizione della radiazione cosmica intorno al livello del mare (pres. dall'Accademico *A. Lo Surdo*) 56

F. CEDRANGOLO e V. BACCARI. – Sulla sintesi biologica dell'acido ippurico (pres. da *G. Quagliariello*, Aggregato alla R. Accademia d'Italia) . . 62

F. CEDRANGOLO. – Effetto della porfiresside sull'azione reversibile della esterasi pancreatica (pres. da *G. Quagliariello*, Aggregato alla R. Accademia d'Italia) 78

M. BETTI e E. LUCCHI. – Sulla trasformazione dell'acido destro–tartarico nel meso–tartarico per azione del pancreas. Risposta a Carlo Neuberg ed Elisabetta Peiser 84

P. GALLITELLI. – Terre rare nel granito di Alzo: osservazioni spettrografiche (pres. da S. E. *F. Millosevich*) 87

FASCICOLO 3–5.

AGOSTO–OTTOBRE 1940–XVIII.

RELAZIONI

D. DE BLASI. – Le vaccinazioni nell'Esercito . . . . . Pag. 93

NOTE E COMUNICAZIONI

E. BORTOLOTTI. – Coordinate normali ed « estensioni » nella geometria degli spazi a connessione lineare (pres. da E. BOMPIANI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia) 106

C. Miranda. – Sulle equazioni integrali il cui nucleo è funzione lineare del parametro (pres. da M. Picone, Aggregato alla R. Acc. d'Italia) Pag. 117
G. Sansone. – La formula di bisezione della $\wp u$ di Weierstrass, e un teorema sui punti razionali delle cubiche ellittiche a coefficienti razionali (pres. dall'Accademico F. Severi) 124
U. Cisotti. – Campi tensoriali potenziali 129
G. D. Mattioli e A. Carrelli. – Sul significato del principio di Hamilton . 142
G. Armellini. – I problemi fondamentali della Cosmogonia e la legge di Newton. Nota VII 158
C. Agostinelli. – Sui problemi fondamentali della Cosmogonia (pres. da G. Armellini, Aggregato alla R. Accademia d'Italia) 166
Q. Majorana. – Centrifugazione fotoelettrica 187
F. Lanfranchi. – Controllo delle condizioni di idrolisi dei cerebrosidi nei loro metodi volumetrici di dosamento (pres. da S. Visco, Aggregato alla R. Accademia d'Italia) 202
G. Checchia-Rispoli. – Osservazioni geologiche sull'Appennino Pugliese . 208
Id. – Nuovi dati sulla fauna echinitica del macco di Nettunia 213
M. Fenoglio. – I giacimenti di nichelio e cobalto delle ofioliti mesozoiche delle Alpi Piemontesi (pres. dall'Ecc. F. Millosevich) 216
A. Sacchetti. – Sulla variabilità dei caratteri antropometrici lineari. Nota preliminare (pres. da S. Sergi, Aggregato alla R. Accademia d'Italia) . 222
Id. – Sul confronto reciproco della variabilità dei caratteri antropometrici lineari (pres. da S. Sergi, Aggregato alla R. Accademia d'Italia) . . . 234

FASCICOLO 6.

Novembre 1940–XIX.

NOTE E COMUNICAZIONI

E. Bortolotti. – Varietà a connessione proiettiva e loro immagini tangenziali (pres. da E. Bompiani, Aggregato alla R. Accademia d'Italia) . . . . . Pag. 251
F. Conforto. – Su un classico teorema di Noether e sulle varietà algebriche trasformabili in varietà con infinite quadriche (pres. dall'Accademico F. Severi) 268
A. Franchetta. – Sulla curva doppia della proiezione di una superficie generale dell'S_4, da un punto generico su un S_3 (pres. dall'Accademico F. Severi). 282
U. Morin. – Sulle serie intersezioni complete sopra una superficie algebrica (pres. dall'Accademico F. Severi) 289
U. Cisotti. – Sistemi continui conservativi 294
G. Armellini. – I problemi fondamentali della Cosmogonia e la legge di Newton. Nota VIII 302
L. Gialanella. – Indici di colore di ammassi globulari e nebulose, e ricerche sull'assorbimento della luce nello spazio interstellare (pres. da G. Armellini, Aggregato alla R. Accademia d'Italia) 312

C. Mineo. – Sul passaggio da uno a un altro degli ellissoidi locali relativi a una data regione del geoide e sulle conseguenti variazioni delle coordinate ellissoidiche dei vertici della rete geodetica . . . . . Pag. 333
M. Ageno, E. Amaldi, D. Bocciarelli e G. C. Trabacchi. – Sulla distribuzione angolare dei neutroni emessi nella disintegrazione di elementi leggeri (pres. da G. C. Trabacchi, Aggregato alla R. Accademia d'Italia) 338
M. Valadares. – Contributo allo studio degli spettri γ e X molli dei prodotti di disintegrazione del radon (pres. da G. C. Trabacchi, Aggregato alla R. Accademia d'Italia) 351
A. Antonioli. – Sulla resilienza, a bassa temperatura, degli acciai comuni e speciali (pres. dall'Accademico G. B. Bonino) 361
O. Masi. – L'analisi spettrografica quantitativa del berillio negli acciai comuni e speciali (pres. dall'Accademico G. B. Bonino) 372
E. Tria e G. Fabriani. – Le sostanze minerali del succo pancratico umano (pres. da S. Visco, Aggregato alla R. Accademia d'Italia) 381
G. Checchia-Rispoli. – Osservazioni su alcuni generi di *Antillasterinae* . 388
P. Gallitelli. – Sulla presenza di terbio, disprosio, olmio, erbio ed altre terre rare in una mica biotite del granito di Alzo (pres. dall'Ecc. F. Millosevich) 395
S. Baglioni e A. Manfredi. - Nuovo metodo di indagine delle proprietà acustiche del capo. 399
V. Vanni. - Ricerche sul controllo biologico degli antielmintici (pres. dall'Accademico D. De Blasi) 405
C. Manunta. - Sulla sostanza colorante di natura flavonica della foglia del gelso (pres. dall'Accademico F. Bottazzi) 421
G. Ciaccio. - Ricerche sul significato istochimico e funzionale delle granulazioni interfibrillari delle fibre muscolari striate (pres. da G. Gola, Aggregato alla R. Accademia d'Italia). 427

COMMEMORAZIONI

P. Rondoni. – Commemorazione di Alberto Pepere 431

FASCICOLO 7.

Dicembre 1940-XIX.

COMUNICAZIONI

E. Chiovenda. – Documenti relativi a James Bruce e Luigi Balugani che visitarono l'Etiopia nel 1769-1772 . . . . . Pag. 439

NOTE

E. Bompiani. – Sulle superficie con flessi infinitamente vicini 497
U. Cisotti. – Invarianti quadratici dei tensori 511

C. Tolotti. – Sul calcolo delle piastre elastiche a forma di settore anulare (pres. da M. Picone, Aggregato alla R. Accademia d'Italia) . . . Pag. 517
G. L. Andrissi. – La radiazione del Sole a Roma dal 1937 al 1939 (pres. da G. Armellini, Aggregato alla R. Accademia d'Italia) 526
G. Armellini Conti. – Il diametro orizzontale del Sole nel 1938, 1939 e 1940, osservato al R. Osservatorio Astronomico di Monte Mario (pres. da G. Armellini, Aggregato alla R. Accademia d'Italia) 531
F. Vecchiacchi e A. Barone. – Metodo di misura rapida e precisa delle frequenze (pres. da L. Lombardi, Aggregato alla R. Accademia d'Italia) 542
F. Silvestri. – Sulla maniera di fecondazione della femmina negli *Stylopidae* (Insecta, Strepsiptera) 553

FASCICOLO 8.

Gennaio 1941-XIX.

COMUNICAZIONI

S. Baglioni. – L'opera scientifica di Adolfo Montuori nel campo della Fisiologia . . . . . Pag. 557

NOTE

G. Zappa. – Sulla relazione tra il rango e il tipo di un gruppo (pres. dall'Accademico F. Severi) . . . . . Pag. 574
U. Cisotti. – Campi tensoriali potenziali di rango superiore 586
G. Agostinelli. – Effetto del termine cosmogonico sullo spostamento del perielio di una orbita planetaria e sulla variazione del parametro e dell'eccentricità (pres. da G. Armellini, Aggregato alla R. Accademia d'Italia) 592
L. Gialanella. – Sulla possibilità dell'appartenenza del pianeta Plutone al sistema di Nettuno. Nota I (pres. da G. Armellini, Aggregato alla R. Accademia d'Italia) 603
B. Gulotta. – Sulla determinazione, per via algebrica, degli scostamenti lineari del Geoide da un ellissoide locale (pres. da C. Mineo, Aggregato alla R. Accademia d'Italia) 614
R. Fusco e G. Trisoglio. – Ricerche sui pernitrosoderivati. Sulla cosidetta « mesitilnitrimina » di Harries. Nota I (pres. da G. Bruni, Aggregato alla R. Accademia d'Italia) 618
M. Rolla. – Ricerche termodinamiche su soluzioni di alcuni acetoderivati della resorcina in naftalina (pres. dall'Accademico G. B. Bonino) . . 632
G. Brunelli. – Dell'importanza delle frane nell'origine dei giacimenti di Lignite 642
E. Montanaro Gallitelli. – Ulteriori ricerche sull'età di un deposito eritreo al margine del Mar Rosso (pres. dall'Accademico R. Fabiani) . 647
A. Caprì. – Contributo allo studio dell'anafilassi. – V. Protezione completa dallo shock anafilattico sperimentale mediante formolo iniettato prima

della scatenante (pres. da C. Ciaccio, Aggregato alla R. Accademia d'Italia) . . . . . Pag. 653
M. Tirelli. - Struttura dell'apparato di Golgi, suoi rapporti col lacunoma, sua funzione (pres. da L. Petri, Aggregato alla R. Accademia d'Italia) 658
E. Vannini. Rapida azione mascolinizzante del testosterone sulle gonadi di girini di « Rana agilis » in metamorfosi (pres. da G. Gola, Aggregato alla R. Accademia d'Italia) 666

FASCICOLO 9.

Febbraio 1941-XIX.

NOTE

S. Rios. – Prolungamento analitico mediante permutazione dei termini di una serie (pres. dall'Accademico F. Severi) . . . . . Pag. 677
L. Amerio. – Sulla convergenza delle serie doppie (pres. dall'Accademico F. Severi) 684
Id. – Sulle famiglie di insiemi (pres. da L. Tonelli, Aggregato alla R. Accademia d'Italia) 699
P. Buzano. – Interpretazione geometrica delle caratteristiche di un'equazione a derivate parziali del I° ordine (pres. da E. Bompiani, Aggregato alla R. Accademia d'Italia) 703
A. Colucci. – Sulla rappresentazione conforme delle superficie a connessione multipla (pres. da M. Picone, Aggregato alla R. Accademia d'Italia). . 717
S. Faedo. – Sulle trasformate multiple di Laplace (pres. da M. Picone, Aggregato alla R. Accademia d'Italia) 722
A. Signorini. – Sulle proprietà di media comuni a tutti i sistemi continui . 728
P. Vocca. – Sull'opportunità di un calcolo più completo dell'aberrazione annua per le coppie di stelle del Servizio Internazionale delle latitudini (pres. da L. Carnera, Aggregato alla R. Accademia d'Italia) 735
R. De Fazi e C. Savi. – Studi su gli indoni. Sintesi del 2-3-6-Trimetil-Indone-1. Nota XVIII (pres. da G. Bargellini, Aggregato alla R. Accademia d'Italia) 745
R. Fusco e G. Trisoglio. - Ricerche sui pernitrosoderivati. Sulla cosidetta « mesitilnitrimina » di Harries. Nota II (pres. da G. Bruni, Aggregato alla R. Accademia d'Italia). 751
C. Andreatta. – Appunti geologico-petrografici su alcuni problemi dello zoccolo cristallino dell'Eritrea (pres. dall'Ecc. F. Millosevich). 766
E. Vannini. – La partecipazione del tessuto interrenale nell'organogenesi della gonade e nei processi di intersessualità giovanile della *Rana agilis* (pres. da G. Gola, Aggregato alla R. Accademia d'Italia) 777

FASCICOLO 10.

MARZO 1941-XIX.

RELAZIONI

G. BRUNI. – Pubblicazioni scientifiche e brevetti d'invenzione . . Pag. 787

NOTE E COMUNICAZIONI

M. CIMINO. – Una soluzione in grande del problema di Cauchy per una particolare equazione in tre variabili, ottenuta con un metodo di M. Picone. Nota I (pres. da M. PICONE, Aggregato alla R. Accademia d'Italia) . . . . . Pag. 800
G. FICHERA. – Generalizzazione del teorema d'Abel sulle serie di potenze (pres. da M. PICONE, Aggregato alla R. Accademia d'Italia) 810
G. GHERARDELLI. – Sul modello minimo della varietà degli elementi differenziali del 2° ordine del piano projettivo (pres. dall'Accademico F. SEVERI) 821
C. MIRANDA. – Su talune serie di funzioni olomorfe (pres. da M. PICONE, Aggregato alla R. Accademia d'Italia) 829
L. GIALANELLA. – Fotometria visuale e indici di colore del nucleo della cometa Cunningham (1940 c) (pres. da G. ARMELLINI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia) 837
C. BALLARIO, M. DELLA CORTE e M. PROSPERI. – Sulle componenti dura e molle della radiazione cosmica fino alla profondità di 575 m. di acqua equivalente (pres. da L. TIERI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia) 850
T. FRANZINI. – Centrifugazione dell'idrogeno occluso nei metalli (pres. da L. TIERI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia) 862
G. CHECCHIA-RISPOLI. – Sul genere *Pseudopygurus* Lambert 870

FASCICOLO 11.

APRILE 1941-XIX.

RELAZIONI

G. BRUNELLI. – Il lavoro nelle scuole e l'insegnamento scientifico . . Pag. 875

NOTE

E. BOMPIANI. – Invarianti proiettivi di calotte . . . . . Pag. 888
P. CALDIROLA. – Forze non conservative nella meccanica quantistica (pres. da U. CISOTTI, Aggregato alla R. Accademia d'Italia) 896

F. Cedrangolo e V. Baccari. – La sintesi enzimatica dell'acido ippurico *in vitro* (pres. da G. Quagliariello, Aggregato alla R. Accademia d'Italia). . . . . Pag. 904
A. Desio. – Sull'età eodevonica delle « Arenarie ad Harlania » del Sahara (pres. dall'Accademico G. Dainelli) 912
A. Brighenti. – Esperienze dirette a precisare i processi di formazione dell'acido urico nei bachi da seta (pres. dall'Accademico F. Bottazzi) . 915
Id. – L'acido urico nello sviluppo larvale della *Philosomia ricini* (pres. dall'Accademico F. Bottazzi) 919

COMMEMORAZIONI

E. Carano. – Commemorazione di Emilio Chiovenda 923

FASCICOLO 12.

Maggio 1941–XIX.

RELAZIONI

R. Fabiani. – Gli idrocarburi gassosi naturali in Italia e la loro importanza . . . . . Pag. 933

NOTE E COMUNICAZIONI

C. Mineo. – Su una formula integro–differenziale relativa alle funzioni di Laplace 944
L. Fantappiè. – Risoluzione in termini finiti del problema di Cauchy, con dati iniziali su una ipersuperficie qualunque (pres. dall'Accademico F. Severi) 948
P. Udeschini. Incompatibilità dell'adesione completa al contorno con la regolarità e le condizioni asintotiche euleriane per correnti viscose stazionarie (pres. da U. Cisotti, Aggregato alla R. Accademia d'Italia) . 957
G. Abetti. – Altezza della cromosfera nel 1940 e andamento del ciclo solare 964
G. Silva. – Il termine solare dell'aberrazione e la struttura del sistema planetario 967
M. G. Fracastoro. La protuberanza eruttiva del 18 aprile 1941 (pres. da G. Abetti, Aggregato alla R. Accademia d'Italia) 976
Id. - Larghezze equivalenti e intensità delle righe cromosferiche nell'eclisse di Sole del 19 giugno 1936 (pres. da G. Abetti, Aggregato alla R. Accademia d'Italia) 979
G. Righini. – Sulla determinazione del profilo vero delle righe spettrali mediante integrazione ottica (pres. da G. Abetti, Aggregato alla R. Accademia d'Italia) 1031

G. Cassinis. – La crociera gravimetrica del R. Sommergibile « Des Geneys ». Anno 1935 . . . . . Pag. 1038

M. Valadares. – Gli spettri γ e X dei derivati del radon nella regione da 700 a 1300 U.X. (pres. da G. C. Trabacchi, Aggregato alla R. Accademia d'Italia) 1049

O. Scarpa. – Sulle equazioni di Helmholtz e di Gibbs 1057

Id. – Potenziali elettrochimici e effetto Volta. VI. I potenziali elettrochimici dei metalli e la loro costituzione elettronica 1062

O. T. Rotini. – Ricerche sulla scissione enzimatica dell'acido *l*—(+)—fosfolattico (pres. dall'Accademico P. Rondoni) 1070

P. Caselli e E. Ciaranfi. – Micrometodo per la determinazione dell'acido acetico. – I. Dosaggio ossidimetrico dell'acido acetico. – II. Separazione dell'acido acetico dalle sue soluzioni acquose (pres. da F. Pentimalli, Aggregato alla R. Accademia d'Italia) 1084

A. Stefanelli. – I centri vestibolari studiati comparativamente in Rettili dotati di differente motilità e modo di locomozione (pres. dall'Accademico F. Silvestri) 1096

Q. Mingola e E. Biocca. – Un nuovo metodo di preparazione delle azoproteine. Anticorpi alla morfina e alla stricnina (pres. dall'Accademico D. De Blasi) 1103

G. Labranca e C. Maldura. – Preparazione ed utilizzazione in batteriologia dell'agar-agar di alghe dei mari italiani (pres. da G. Brunelli, Aggregato alla R. Accademia d'Italia) 1107

Indice per Autori 1111

Indice per Materie 1118

Indice del Volume 1122

3 8198 304 934 894
UNIVERSITY OF ILLINOIS AT CHICAGO